

تحلیل فرکانسی ورق ساندویچی با هسته انعطاف پذیر وابسته به دما بر اساس فرمولاسیون هیبریدی متحدالشکل

در این تحقیق، تحلیل فرکانسی یک ورق ساندویچی با رویه‌های چندلایه کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر برای شرایط مرزی مختلف تحت شرایط دمایی بررسی شده است. بدین منظور اثرات حرارتی و خواص هسته وابسته به دما در نظر گرفته شده است. برای استخراج معادلات حرکت، یک فرمولاسیون المان محدود هیبریدی لایه‌گون- تک لایه با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است که در آن تعداد مجهولات مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد. این فرمولاسیون جدید در چهارچوب کاری فرمولاسیون واحد کررا^۴ (کوف) می‌باشد. در این تحقیق به منظور لحاظ کردن اثرات حرارتی، کرنشها به شکل غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. نتایج حاصل از این مدل سازی با نتایج موجود مقایسه شده که نشان دهنده دقت بالا و حجم محاسباتی کم این مدل است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما فرکانسهای سازه به دلیل کاهش خواص هسته به شکل چشمگیری کاهش می‌یابند.

محسن بت شکنان دهکردی^۱
استادیار

یونس محمدی^۲
استادیار

کیوان حسینی صفری^۳
استادیار

واژه‌های راهنما: ورق ساندویچی، خواص وابسته به دما، تحلیل فرکانسی، فرمولاسیون هیبریدی لایه‌گون- تک لایه

۱- مقدمه

سازه‌های ساندویچی با توجه به مزایای متعددی همچون نسبت استحکام به وزن و مقاومت خمشی بالا به طور گسترده و روز افزون در صنایع مختلف هوافضا، حمل و نقل جاده‌ای و دریایی و سازه‌های ساختمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. چرا که بسیاری از خصوصیات با اهمیت مورد نظر در سازه‌های هوافضایی، دریایی و عمرانی را دارا می‌باشند. در این میان تحلیل دینامیکی و فرکانسی این سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سینک^۵ [۱] در سال (۱۹۹۹) ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی عمیق با لایه‌های نازک و هسته ضخیم را مورد مطالعه قرار داد. فرکانس‌های طبیعی بر اساس روش ریلی-ریتز محاسبه گردیده است.

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین mbd_dehkordi@yahoo.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین u.mohammadi@gmail.com

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین safari@dena.kntu.ac.ir

^۴ Carrera Unified Formulation (CUF)

^۵ Sing

هندسه پوسته‌های مورد مطالعه استوانه‌ای و کروی فرض گردیده و از معادلات الاستیسیته خطی استفاده گردیده است. کانت و سووامیناتان^۱ [۲] در سال (۲۰۰۱) فرمولاسیون و حل تحلیلی فرکانسی ورقهای کامپوزیتی و ساندویچی را با شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری بهبود یافته مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. در این تئوری، اثرات تغییر شکلهای برشی و تنشها و کرنشهای برشی عرضی و تغییرات غیرخطی جابجائیهای درون صفحه‌ای نسبت به ضخامت، در نظر گرفته شده‌اند. راتو و دسای^۲ [۳] در سال (۲۰۰۴) معادلات حرکت ورقهای کامپوزیتی و همچنین ساندویچی را بر اساس اصل همپلتون و تئوری مرتبه بالای مختلط استخراج کردند و ارتعاشات آزاد آنها را بررسی کردند. موروزو و لوباتین^۳ [۴] در سال (۲۰۱۰) یک حل تحلیلی فرم بسته که قادر به تعیین مقدار فرکانس طبیعی پایه ورقهای ساندویچی کامپوزیتی دارای شرایط مرزی CCCF می‌باشد، ارائه دادند. با توجه به کاربری سازه‌های ساندویچی در دمای بالا، تحلیل دینامیکی و فرکانسی این سازه‌ها با در نظر گرفتن اثرات حرارتی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. ماتسونوگا^۴ [۵] در سال (۲۰۰۷) ارتعاشات آزاد و مساله پایداری ورقهای کامپوزیتی Angle ply و ساندویچی را با استفاده از تئوری مرتبه بالای کلی برحسب بسط سری توانی تحت بارهای حرارتی بررسی نمود. او با خواص خطی و مستقل از دما و با استفاده از اصل همپلتون معادلات حرکت را استخراج نموده و بعد از آن فرکانسهای طبیعی و دمای بحرانی این سازه‌ها تحت بارهای حرارتی به دست آورد. فروستینگ و تامسون^۵ [۶] در سال (۲۰۰۹) تحلیل ارتعاشات تیرهای ساندویچی با هسته نرم و انعطاف پذیر در جهت عرضی با خواص وابسته به دما را در دو بخش ارائه کردند. آنها مطالعاتی روی کاهش خواص و صلبیت هسته بر اثر بالا بردن دمای هسته و اثرات آن روی ارتعاشات آزاد تیر انجام دادند.

در این تحقیق یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است. فرض شده است که در اثر بارهای حرارتی، دمای بالا و پایین ورق تغییر کند. خواص هسته نرم، به تغییرات دما بسیار حساس می‌باشد که این تغییرات خواص به شدت روی فرکانسهای طبیعی سازه تاثیر خواهد گذاشت. ضمناً از آنجایی که تعداد لایه‌های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از تئوریهای لایه‌گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از تئوریهای تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد. بنابراین در این پژوهش از یک فرمولاسیون جامع ارتقا یافته مختلط با دقت بالا و حجم محاسبات پایین (که تمام تئوریهای موجود اعم از تک لایه، لایه‌گون و تئوریهای مرتبه بالا را در بر می‌گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است. این فرمولاسیون جدید در چهارچوب کاری فرمولاسیون واحد کررا می‌باشد. فرمولاسیون واحد کوف با استفاده از تغییر مرتبه بسط و همچنین تعریف متغیرها در راستای ضخامت، بسیاری از تئوریها را به شکل واحد متحدالشکل می‌سازد. به منظور برقراری پیوستگی تنشهای عرضی بین لایه‌ای از تئوری تغییراتی مختلط رایزنر استفاده شده و همچنین برای جلوگیری از قفل شوندگی برشی^۶ از روش انتگرال گیری کاهش یافته استفاده خواهد شد.

¹ Kant & Swaminathan

² Rao & Desai

³ Morozov & Lopatin

⁴ Matsunaga

⁵ Frostig & Thomsen

⁶ Shear Locking

برای آنکه بتوان معادلات حرکت را برای تمام شرایط مرزی (اعم از شرایط مرزی ساده، گیردار، آزاد) حل نمود، یک فرمولاسیون جدید اجزا محدود استخراج می شود و در نهایت برای استخراج نتایج یک کد نویسی در نرم افزار مطلب^۱ صورت خواهد گرفت.

۲- فرمولاسیون متحدالشکل کررا

فرمولاسیون متحدالشکل کررا (کوف) [۱۱]، تکنیکی است که با استفاده از آن می توان به دسته بزرگی از مدل های ورق و پوسته به شکل واحد دست پیدا کرد. طبق تکنیک CUF معادلات حاکم به شکل چندین سلول بنیادین^۲ نوشته می شود که در فرم ظاهر به مرتبه بسط در راستای ضخامت و همچنین نوع تئوری (تک لایه معادل^۳ یا لایه گون^۴) وابسته نمی باشد. به عبارتی همانطور که در بخش های بعدی نشان داده خواهد شد، نحوه اسمبل کردن سلولها، نوع تئوری را مشخص می نماید. در فرمولاسیون واحد، با جدا سازی متغیرهای مجهول به یکسری توابع ضخامت که فقط تابعی از راستای z هستند شکل (۳) و یکدسته متغیر که فقط تابعی از راستای درون صفحه ای هستند (x, y) ، می توان به تئوری های دو بعدی ورق دسترسی پیدا کرد. متغیر کلی $a(x, y, z)$ و تغییرات آن $\delta a(x, y, z)$ را می توان به وسیله بسط کلی زیر بیان کرد [۸]:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = F_\tau(z)\mathbf{a}_\tau(x, y), \quad \delta \mathbf{a}(x, y, z) = F_s(z)\delta \mathbf{a}_s(x, y) \quad (1)$$

with $\tau, s = t, b, r$ and $r = 2, \dots, N$

حروف پر رنگ نشان دهنده آرایه و زیرنویسهای تکراری نشان دهنده قرارداد جمع بندی هستند. حروف t و b به مفهوم بالا^۵ و پایین^۶ می باشند. N نشان دهنده مرتبه تئوری می باشد که از یک تا چهار بسته به تئوری مورد نظر، در نظر گرفته می شود. توابع ضخامت در لایه k ام می باشند که به صورت ترکیب خطی از چند جمله ای های لژاندر $P_j(\zeta_k)$ از مرتبه j ام تعریف می شوند. k مختصات بی بعد است که توسط مختصات محلی z_k تعریف می شود (شکل (۳)). پنج چندجمله ای اول لژاندر به صورت زیر می باشند [۸]:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \zeta_k, \quad P_2 = \frac{3\zeta_k^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\zeta_k^3 - 3\zeta_k}{2}, \quad (2)$$

$$P_4 = \frac{35\zeta_k^4 - 15\zeta_k^2 + 3}{8}$$

ترکیب چند جمله ای های لژاندر برای تشکیل توابع ضخامت به شکل زیر است:

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_r = P_r - P_{r-2}, \quad r = 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

توابع ضخامت فوق دارای ویژگیهای زیر هستند که به راحتی شرط پیوستگی جابجایی ها و تنشهای عرضی را در وجه مشترک دو لایه برقرار می کند:

¹ MATLAB

² Fundamental Nuclei

³ Equivalent Single Layer (ESL)

⁴ Layerwise (LW)

⁵ Top

⁶ Bottom

$$\zeta_k = \begin{cases} 1, & F_t = 1, F_b = 0, F_r = 0 \quad \text{at top} \\ -1, & F_t = 0, F_b = 1, F_r = 0 \quad \text{at bottom} \end{cases} \quad (4)$$

این توصیف متغیرها را می‌توان برای هر دوی میدان جابجایی $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ و توزیع تنشهای عرضی $\sigma_n = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ به کار برد. با توجه به بسط متغیرها، توصیف مورد نظر می‌تواند تک لایه معادل (ESL) باشد اگر یک میدان جابجایی برای کل چندلایه در نظر گرفته شوند و یا لایه‌گون (LW) باشد اگر میدان جابه‌جایی برای تک‌تک لایه‌ها جداگانه در نظر گرفته شود. مدل‌های لایه‌گون اجازه می‌دهند که شرایط پیوستگی بین لایه‌های متغیرهای میدانی مورد نظر به شکل زیر ایجاد شوند:

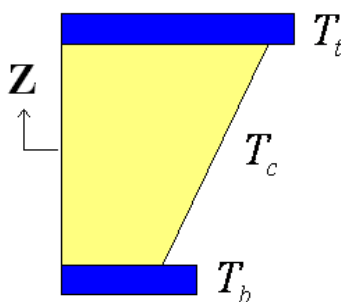
$$\mathbf{a}_t^k = \mathbf{a}_b^{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_l - 1 \quad (5)$$

که N_l تعداد لایه‌های کل ورق می‌باشد. برای توصیف توزیع تنشهای عرضی صرفنظر از اینکه تئوری مورد نظر تک‌لایه باشد یا لایه‌گون، توصیف تنشهای عرضی همیشه به فرم لایه‌گون برای تک‌تک لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

۳- فرمولاسیون و استخراج معادلات حاکم

در این بخش، فرمولاسیون اجزاء محدود برای یک ورق ساندویچی با هسته نرم وابسته به دما و رویه‌های کامپوزیتی با در نظر گرفتن بارهای حرارتی استخراج خواهد شد. همانطور که در بخشهای بعدی نشان داده خواهد شد، در این پژوهش به علت ضخامت بالای ورق و همچنین انعطاف‌پذیر بودن هسته، استفاده از یک تئوری با دقت بالا ضروری می‌باشد. بنابراین باید از یک تئوری کاملاً لایه‌گون استفاده کرد، که هزینه محاسباتی حل مساله به علت تحلیل اجزاء محدود بسیار بالا خواهد بود.

از طرفی اگر بخواهیم از یک مدل تک لایه استفاده کنیم، حجم محاسبات پایین است ولی خطای آن برای مساله مورد نظر زیاد می‌باشد. بنابراین با توجه به موارد ذکر شده می‌توان گفت که در این تحقیق نیاز به یک تئوری می‌باشد که از یک طرف دقت بالا و از طرف دیگر حجم محاسباتی پایینی داشته باشد. بدین منظور یک تئوری هیبریدی جدید در چهار چوب کاری فرمولاسیون واحد کررا [۱۱] با در نظر گرفتن اثرات حرارتی برای تحلیل ورق‌های ساندویچی ارائه خواهد شد.



شکل ۱- توزیع دما در راستای ضخامت ورق ساندویچی

فرض می‌شود که سازه در ابتدا در دمای T_0 قرار دارد. سپس رویه‌های پایین و بالا در اثر بارهای حرارتی به ترتیب به دمای T_b و T_t می‌رسند که این تغییر دما مانند شکل (۲) باعث ایجاد توزیع دما در راستای ضخامت در هسته می‌شود. خواص هسته‌های نرم به شدت تابعی از دما می‌باشد. بنابراین در شرایط دمایی مختلف لازم است که این تغییرات خواص در نظر گرفته شود. به عنوان مثال خواص فوم Devinycell HD به صورت تابعی از دما در شکل (۲) آورده شده است. بنابراین در این پژوهش لازم است که خواص هسته به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شود.

ژانگ^۱ و همکارانش [۹] با نتایج آزمایشگاهی نشان دادند که برای دسته وسیعی از فوم‌های خانواده Devinycell HD، خواص بی‌بعد آنها با تابع زیر شکل (۲) با دما تغییر می‌کند:

$$\frac{E(T)}{E(T_0)} = \frac{G(T)}{G(T_0)} = -3.16e - 6T^3 + 4.24e - 4T^2 - 2.27e - 2T + 1.36 \quad (۶)$$

در قسمتهای بعدی جهت در نظر گرفتن تغییرات خواص هسته با دما از این تابع استفاده خواهد شد.

۳-۱- استخراج معادلات حرکت و فرمولاسیون اجزاء محدود

مساله مورد نظر، ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار می‌گیرد.

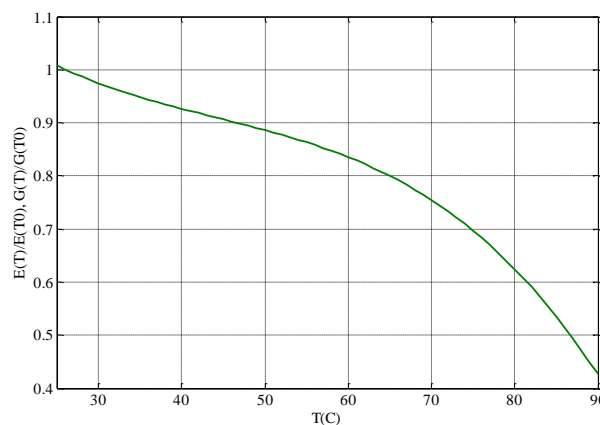
معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بر اساس فرمولاسیون متحدالشکل به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta L_{int} - \delta L_{F_{in}} - \delta L_{ext} = 0 \quad (۷)$$

در رابطه فوق L_{int} کار داخلی، $L_{F_{in}}$ کار نیروهای اینرسی و L_{ext} کار نیروهای خارجی می‌باشد. کار نیروهای داخلی به دو قسمت، کار مکانیکی و کار حرارتی تقسیم می‌شود:

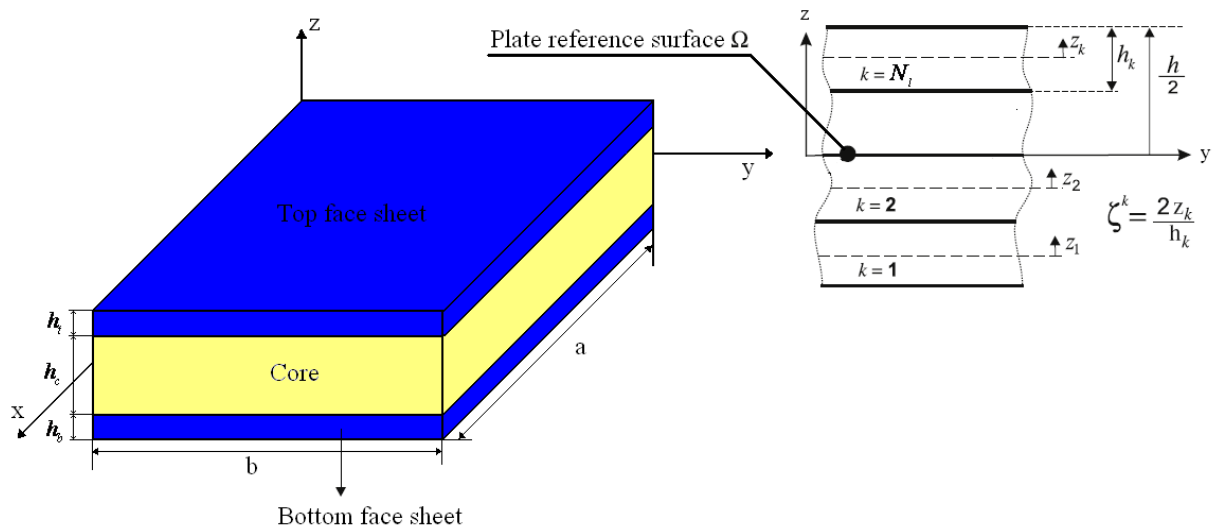
$$L_{int} = L_{intM} + L_{intT} \quad (۸)$$

که در رابطه فوق L_{intM} کار ناشی از تنشهای مکانیکی و L_{intT} کار ناشی از تنشهای حرارتی می‌باشند.



شکل ۲- خواص فوم تابعی از دما [۹]

¹ Zhang



شکل ۳- مشخصات هندسی و دستگاه مختصات برای ورق ساندویچی با روبه‌های کامپوزیتی

در این تحقیق به منظور برقراری پیوستگی تنش‌های عرضی، از فرمولاسیون مختلط (RMVT) برای استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود. بنابراین برای کار تنش‌های مکانیکی و حرارتی می‌توان نوشت:

$$\delta(L_{intM} + L_{intT}) = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pG}^{kT} \boldsymbol{\sigma}_{pC}^k + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^{kT} \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k + \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^{kT} (\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{\varepsilon}_{nC}^k) \} d\Omega dz_k \quad (9)$$

ترم مختلط سوم در رابطه بالا $(\delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^{kT} (\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{\varepsilon}_{nC}^k))$ به منظور ایجاد شرایط سازگاری بین کرنش‌های عرضی حاصل از روابط هندسی (G) و معادلات بنیادین (C) می‌باشد. در رابطه فوق زیرنویس‌های (G) و (C) بیانگر روابط هندسی و معادلات بنیادین می‌باشند. همچنین زیرنویس M بیانگر این است که تنش‌های عرضی از ابتدا مدل شده‌اند و از روابط بنیادین به دست نیامده‌اند. زیرنویس‌های p و n به مفهوم متغیر موردنظر در راستای درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای، می‌باشند. در رابطه (۹) طبق چهارچوب کاری کوف کرنش‌های درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pG}^k = \{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy} \}^{kT} = \mathbf{D}_p \mathbf{u}^k \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k = \{ \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_{zz} \}^{kT} = (\mathbf{D}_{np} + \mathbf{D}_{nz}) \mathbf{u}^k \quad (11)$$

در روابط بالا ماتریس‌های دیفرانسیلی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

در روابط فوق $\partial_i (i = x, y, z)$ به مفهوم مشتق‌گیری نسبت به i می‌باشد. معادلات بنیادین سه بعدی بین تنش و کرنش و دما به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^k = \mathbf{C}_{pp}^k \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \mathbf{C}_{pn}^k \boldsymbol{\varepsilon}_n^k - \boldsymbol{\lambda}_p^k \theta \quad (13)$$

$$\sigma_n^k = C_{np}^k \varepsilon_p^k + C_{nn}^k \varepsilon_n^k - \lambda_n^k \theta \quad (14)$$

در روابط بالا σ_p^k بردار تنشهای درون صفحه‌ای، σ_n^k بردار تنشهای خارج صفحه‌ای و $C_{ij}^k(i, j = p, n)$ ماتریسهای سفتی مربوط به لایه k ام می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_p^k = \{\sigma_{xx}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{xy}^k\}, \quad \sigma_n^k = \{\sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k, \sigma_{zz}^k\} \quad (15)$$

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{np}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix}$$

در روابط (۱۳) و (۱۴) θ اختلاف دما می‌باشد که با توجه به رابطه (۱) به فرم متحدالشکل زیر بیان می‌شود:

$$\theta^k = F_t \theta_t^k + F_b \theta_b^k + F_r \theta_r^k = F_\tau \theta_\tau^k \quad \tau = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_l \quad (17)$$

لازم به ذکر است که در اصل اختلاف دما برابر با $\theta - \theta_0$ می‌باشد که از اینجا به بعد به شکل مختصر با θ نشان داده می‌شود. همچنین ضرایب λ_p^k و λ_n^k به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3^k \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3^k \end{bmatrix} \quad (19)$$

که α_i^k ضرایب انبساط حرارتی می‌باشند. روابط فوق را می‌توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = C_{pp}^k \alpha_p^k + C_{pn}^k \alpha_n^k \quad (20)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = C_{np}^k \alpha_p^k + C_{nn}^k \alpha_n^k \quad (21)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، در فرمولاسیون مختلط جابجائیها و تنشهای عرضی مجهولات مسئله می‌باشند. بدین منظور معادلات بنیادین (۱۳) و (۱۴) باید به شکل زیر بازنویسی شوند:

$$\sigma_{pC}^k = \tilde{C}_{pp}^k \varepsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k + \tilde{\lambda}_p^k \theta \quad (22)$$

$$\varepsilon_{nC}^k = \tilde{C}_{np}^k \varepsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k + \tilde{\lambda}_n^k \theta \quad (23)$$

که ضرایب جدید به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{C}_{pp}^k = C_{pp}^k - C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{pn}^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \quad (24)$$

$$\tilde{C}_{np}^k = -C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{nn}^k = -C_{nn}^{k-1} \quad (25)$$

$$\tilde{\lambda}_p^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k - \lambda_p^k \quad \tilde{\lambda}_n^k = C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k \quad (26)$$

از جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۳) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$\delta(L_{intM} + L_{intT}) = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \underbrace{\delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pp}^k \varepsilon_{pG}^k}_I + \underbrace{\delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k}_{II} + \underbrace{\delta \varepsilon_{nG}^k T \sigma_{nM}^k}_{III} + \underbrace{\delta \sigma_{nM}^k T \varepsilon_{nG}^k}_{IV} - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^k T \tilde{C}_{np}^k \varepsilon_{pG}^k}_V - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^k T \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k}_{VI} + \underbrace{\delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{\lambda}_p^k \theta^k}_{VII} - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^k T \tilde{\lambda}_n^k \theta^k}_{VIII} \} d\Omega dz_k \quad (27)$$

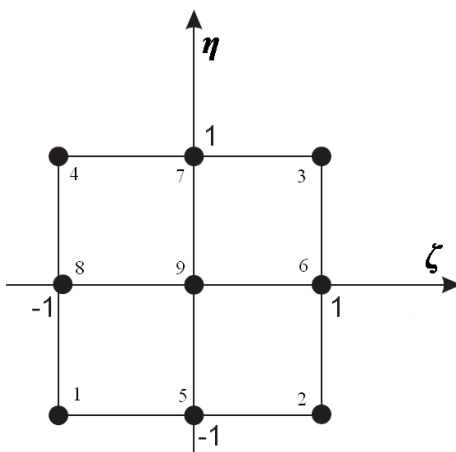
در رابطه بالا ترمهای I تا VI مربوط به کار تنشهای مکانیکی و ترمهای VII و VIII مربوط به کار تنشهای حرارتی می باشند. بنابراین می توان نوشت:

$$\delta L_{intM} = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pp}^k \varepsilon_{pG}^k + \delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k + \delta \varepsilon_{nG}^k T \sigma_{nM}^k + \delta \sigma_{nM}^k T \varepsilon_{nG}^k - \delta \sigma_{nM}^k T \tilde{C}_{np}^k \varepsilon_{pG}^k - \delta \sigma_{nM}^k T \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k \} d\Omega dz_k \quad (28)$$

$$\delta L_{intT} = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \delta \varepsilon_{pG}^k T \tilde{\lambda}_p^k \theta^k - \delta \sigma_{nM}^k T \tilde{\lambda}_n^k \theta^k \} d\Omega dz_k \quad (29)$$

در این تحقیق به منظور اینکه مساله برای شرایط مرزی مختلف قابل بررسی باشد، برای حل معادلات از روش اجزاء محدود استفاده می شود. بدین منظور از المان لاگرانژی درجه دو (شکل (۴)) که شامل نه گره می باشد، استفاده می شود.

طبق فرمولاسیون واحد (رابطه (۱)) متغیرهای مجهول در راستای ضخامت تفکیک می شوند. بدین منظور توابع ضخامت برحسب توابع لژاندر بیان می شوند که در بخش هی قبلی روابط آن بیان گردید. با استفاده از المان نه گره می توان مجهولات را در راستای درون صفحه ای نیز تفکیک کرد. بنابراین برای مجهولات جابجایی و تنشهای عرضی می توان نوشت:



شکل ۴- نمایی از المان لاگرانژی درجه دو

$$\mathbf{u}^k = F_\tau N_i \mathbf{q}_{\bar{a}}^k \quad \delta \mathbf{u}^k = F_s N_j \mathbf{q}_{s_j}^k \quad (i, j = 1, \dots, 9, \quad \tau, s = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N) \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{nM}^k = F_\tau N_i \mathbf{g}_{\bar{a}}^k \quad \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k = F_s N_j \mathbf{g}_{s_j}^k \quad (i, j = 1, \dots, 9, \quad \tau, s = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N) \quad (31)$$

در روابط فوق $\mathbf{q}_{\bar{a}}^k$ و $\mathbf{g}_{\bar{a}}^k$ بردار جابجائیها و تنشهای عرضی گرهی می باشند که به صورت زیر بیان می شوند:

$$\mathbf{q}_{\bar{a}}^k = [q_{u_x \bar{a}}^k \quad q_{u_y \bar{a}}^k \quad q_{u_z \bar{a}}^k]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{g}_{\bar{a}}^k = [g_{u_x \bar{a}}^k \quad g_{u_y \bar{a}}^k \quad g_{u_z \bar{a}}^k]^T \quad (33)$$

در روابط (۳۰) و (۳۱) N_i توابع شکل لاگرانژی درجه دو می باشند [۱۰]. پس از جایگذاری روابط (۱۰)، (۱۱)، (۳۰) و (۳۱) در رابطه کار تنشهای مکانیکی (۲۸) و یکسری ساده سازهای ریاضی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta L_{intM}^k = & \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau} D_p^T (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau} N_j] \mathbf{g}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau\tau} N_j + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{g}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i E_{\tau} D_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{q}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} + \\ & - \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau} D_p (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} + \\ & - \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau} N_j] \mathbf{g}_{s_j}^k \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (34)$$

در رابطه فوق علامت $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ بیانگر انتگرال گیری در دامنه Ω و \mathbf{I} ماتریس واحد می باشند. همچنین انتگرال گیری سفتی های لایه ای به شکل زیر تعریف می شوند:

$$(\tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau}) = (\tilde{\mathbf{C}}_{pp}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{pn}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{np}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{nn}^k) E_{\tau} \quad (35)$$

در روابط فوق E_{τ} انتگرال گیری توابع ضخامت در راستای z می باشند که به شکل زیر تعریف می شوند:

$$E_{\tau}, E_{\tau,z}, E_{\tau,z} = \int_{A_k} (F_{\tau} F_s, F_{\tau,z} F_s, F_{\tau} F_{s,z}) dz \quad (36)$$

رابطه (۳۴) را می توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta L_{intM}^k = & \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [\mathbf{K}_{uu_{mech}}^{k\tau ij} \mathbf{q}_{s_j}^k + \mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau ij} \mathbf{g}_{s_j}^k] + \\ & \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [\mathbf{K}_{\sigma u}^{k\tau ij} \mathbf{q}_{s_j}^k + \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau ij} \mathbf{g}_{s_j}^k] \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{K}_{uu_{mech}}^{k\tau ij} = \langle [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau} D_p^T (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau ij} = \langle [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau} N_j + D_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau} N_j + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \rangle_{\Omega} \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma u}^{k\tau ij} = \langle [N_i E_{\tau} D_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I} - N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau} D_p (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau ij} = \langle [-N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau} N_j] \rangle_{\Omega} \quad (41)$$

بسط صریح ماتریسهای فوق به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 K_{uuxx}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp11}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\quad \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{uuxy}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp12}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\quad \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{uuxz}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuyx}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp12}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\quad \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{uuyy}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp22}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\quad \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{uuyz}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzx}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzx}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzy}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzz}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\alpha y}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\alpha z}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pn13}^{k\tau} [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pn36}^{k\tau} [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\sigma x}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\sigma y}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\sigma z}^{k\tau ij} &= \langle \tilde{Z}_{pn23}^{k\tau} [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pn36}^{k\tau} [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha y}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha y}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{\sigma u\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\gamma x}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{\sigma u\gamma y}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\gamma z}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \langle [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha x}^{k\tau ij} &= - \langle \tilde{Z}_{np13}^{k\tau} [N_i N_{j,x}] \rangle_{\Omega} - \langle \tilde{Z}_{np36}^{k\tau} [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha y}^{k\tau ij} &= - \langle \tilde{Z}_{np23}^{k\tau} [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} - \langle \tilde{Z}_{np36}^{k\tau} [N_i N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$K_{\sigma\sigma x}^{k\tau ij} = - \langle \tilde{Z}_{nn55}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

$$K_{\sigma\sigma y}^{k\tau ij} = - \langle \tilde{Z}_{nn45}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

$$K_{\sigma\sigma z}^{k\tau ij} = 0$$

$$K_{\sigma\sigma yx}^{k\tau ij} = - \langle \tilde{Z}_{nn45}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

$$K_{\sigma\sigma yy}^{k\tau ij} = - \langle \tilde{Z}_{nn44}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

$$K_{\sigma\sigma yz}^{k\tau ij} = 0$$

$$K_{\sigma\sigma zx}^{k\tau ij} = 0$$

$$K_{\sigma\sigma zy}^{k\tau ij} = 0$$

$$K_{\sigma\sigma zz}^{k\tau ij} = - \langle \tilde{Z}_{nn33}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق از روش انتگرال‌گیری عددی گوسی^۱ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است، در حالتی که لایه‌ها نازک باشند، برای جلوگیری از پدیده قفل شوندگی برشی^۲ از تکنیک انتگرال‌گیری انتخابی کاهش یافته^۳ استفاده می‌شود. روابط (۳۸) تا (۴۱)، ماتریسهای سه در سه با نه سلول بنیادی می‌باشند که باید بر حسب اندیسهای $k; \tau; s; i; j$ بسط داده شوند. برای به دست آوردن کار تنشهای حرارتی از کرنشهای غیرخطی استفاده می‌شود. به عبارتی رابطه (۲۹) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta L_{intT} = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_p^k \boldsymbol{\theta}^k - \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n^k \boldsymbol{\theta}^k \} d\Omega dz_k \quad (43)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k$ کرنشهای درون صفحه‌ای غیرخطی می‌باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k = \{ \varepsilon_{xx_{nl}}^k, \varepsilon_{yy_{nl}}^k, \varepsilon_{xy_{nl}}^k \}^{kT} = \mathbf{D}_{p_{nl}} \mathbf{u}^k \quad (44)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{D}_{p_{nl}} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \frac{1}{2} \partial^2_{x^2} \\ 0 & \partial_y & \frac{1}{2} \partial^2_{y^2} \\ \partial_y & \partial_x & \partial^2_{xy} \end{bmatrix} \quad (45)$$

در رابطه فوق $\partial^2_{x^2}$ به مفهوم دو بار مشتق‌گیری نسبت به x و یا ∂^2_{xy} به مفهوم مشتق‌گیری نسبت به x و y می‌باشد. از جایگذاری روابط (۴۴)، (۳۰) و (۱۷) در رابطه (۴۳) و یکسری ساده سازی خواهیم داشت:

$$\delta L_{intT} = \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} (\mathbf{P}_{u\theta\bar{a}}^k + \mathbf{K}_{uu_{nT}}^{k\tau ij}) + \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} \mathbf{P}_{\sigma\theta\bar{a}}^k \quad (46)$$

که در آن

¹ Gaussian quadrature rule

² Shear locking

³ Selective reduced integration

$$\mathbf{P}_{u\theta\bar{a}}^k = \begin{bmatrix} P_{u\theta\bar{a}11}^k \\ P_{u\theta\bar{a}21}^k \\ P_{u\theta\bar{a}31}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\sigma\theta}^k = \begin{bmatrix} P_{\sigma\theta\bar{a}11}^k \\ P_{\sigma\theta\bar{a}21}^k \\ P_{\sigma\theta\bar{a}31}^k \end{bmatrix} \quad (47)$$

مولفه‌های روابط فوق به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_{u\theta\bar{a}11}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k \theta_{sj}^k + E_{\tau\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{sj}^k \\ P_{u\theta\bar{a}21}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k \theta_{sj}^k + E_{\tau\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{sj}^k \\ P_{u\theta\bar{a}31}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}11}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}21}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}31}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{n3}^k \theta_{sj}^k \end{aligned} \quad (48)$$

در رابطه (۴۶) ماتریس سفتی ناشی از اثرات حرارتی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{uu_{n\theta}}^{k\tau\tau ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau ij} \end{bmatrix} \quad (49)$$

که $K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau}$ به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned} K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau ij} &= -E_{\tau\tau} (\langle [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k + \langle [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k + \langle [N_{i,x} N_{j,y} + \\ & N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k) \theta^k \end{aligned} \quad (50)$$

برای کار نیروهای اینرسی می‌توان نوشت:

$$\delta L_{F_m} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \rho^k \delta \mathbf{u}^{kT} \ddot{\mathbf{u}}^k \} d\Omega dz_k \quad (51)$$

در رابطه فوق علامت " " بیانگر دوبرار مشتق نسبت به زمان می‌باشد. همچنین ρ^k چگالی لایه k ام می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۵۱) کار نیروهای اینرسی را در چهار چوب کاری کوف می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\delta L_{F_m}^k = \delta \mathbf{q}_{ti}^{kT} \mathbf{M}^{ksij} \ddot{\mathbf{q}}_{sj}^k \quad (52)$$

که

$$\mathbf{M}^{k\tau\tau si} = \begin{bmatrix} m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \end{bmatrix} \quad (53)$$

در رابطه فوق $m_{\tau\tau}^k$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{\tau\tau}^k = \int_{A_k} \rho^k F_{\tau} F_s dz = \rho^k E_{\tau\tau} \quad (54)$$

و اما تکنیک به کار برده شده در چهارچوب کاری کوف ، در این قسمت نیز برای محاسبه کار نیروهای خارجی استفاده می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ بر روی لایه k ام در فاصله $\zeta_k = \zeta_k^1$ نسبت به صفحه مبنا Ω_k اعمال شود. بنابراین برای کار نیروهای خارجی می‌توان نوشت:

$$\delta L_{ext}^k = \int_{\Omega_k} \delta \mathbf{u}^{kT}(x, y, \zeta_1^k) \mathbf{P}^k(x, y, \zeta_1^k) d\Omega \quad (55)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{u}^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{u}^k = F_\tau^1 N_i \mathbf{q}_a^k \quad (i=1,2,\dots, N_n) \quad (56)$$

در رابطه بالا F_τ^1 به مفهوم مقدار تابع ضخامت F_τ به ازای $\zeta_k = \zeta_k^1$ می‌باشد. توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می‌توان به فرم متحدالشکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}^k = F_t^1 \mathbf{P}_t^k + F_r^1 \mathbf{P}_r^k + F_b^1 \mathbf{P}_b^k = F_\tau^1 \mathbf{P}_\tau^k, \quad \tau = t, b, r, \quad r = 2, 3, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_l \quad (57)$$

که \mathbf{P}_τ^k را نیز می‌توان به شکل زیر در راستای درون صفحه‌ای تفکیک کرد:

$$\mathbf{P}_\tau^k = N_i \mathbf{p}_a^k \quad (i=1,2,\dots,9) \quad (58)$$

در رابطه بالا \mathbf{p}_a^k به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p}_a^k = \begin{bmatrix} P_{xai}^k \\ P_{yai}^k \\ P_{zai}^k \end{bmatrix} \quad (59)$$

اندیسهای x, y و z در رابطه فوق به مفهوم توزیع فشار در راستاهای مذکور می‌باشد. بنابراین رابطه (۲-۶۵) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}^k = F_\tau^1 N_i \mathbf{p}_a^k \quad (60)$$

از جایگذاری روابط (۲-۶۴) و (۲-۶۸) در رابطه (۲-۶۳) کار نیروهای خارجی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta L_{ext}^k = \delta \mathbf{q}_a^{kT} \mathbf{P}_a^k \quad (61)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_a^k = (F_\tau^1 F_s^1) \begin{bmatrix} \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{xsj}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{ysj}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{zsj}^k \end{bmatrix} \quad (62)$$

در نهایت معادلات حرکت حاکم بر مساله برای لایه k ام، از قرار دادن روابط (۳۷)، (۴۶)، (۵۲) و (۶۱) در رابطه (۷) به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta \mathbf{q}_a^{kT} : \mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{g}_{sj}^k + \mathbf{M}^{ksij} \ddot{\mathbf{q}}_{sj}^k = \mathbf{P}_a^k - \mathbf{P}_{u\theta a}^k \quad (63)$$

$$\delta \mathbf{g}_a^{kT} : \mathbf{K}_{ou}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{g}_{sj}^k = -\mathbf{P}_{\sigma\theta a}^k \quad (64)$$

در رابطه (۶۳)، $\mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij}$ ماتریس سفتی کل المانی لایه k ام می‌باشد که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij} = \mathbf{K}_{uu, mech}^{k\tau\sigma ij} + \mathbf{K}_{uu, \theta}^{k\tau\sigma ij} \quad (65)$$

بعد از بسط اندیسهای τ, s, i, j و اسمبل کردن سلولهای بنیادین، مجهولات تنش‌های برشی معادله (۶۴) با استفاده از تکنیک انقباض^۱ بر حسب مجهولات جابجایی حل می‌شود (مجهولات تنش‌های برشی حذف می‌شوند) و معادله (۶۳) به شکل زیر بیان می‌شود:

$$Kq + M\ddot{q} = P \quad (66)$$

که در این رابطه داریم:

$$K = [K_{uu} - K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} K_{\sigma u}],$$

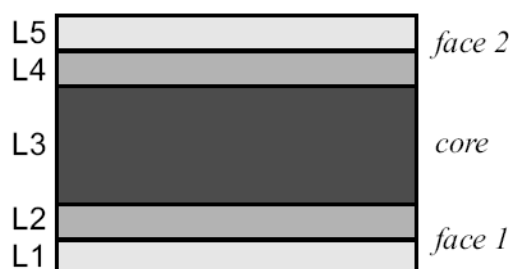
$$P = P + K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} P_{\sigma\theta} - P_{u\theta} \quad (67)$$

۳-۲- فرمولاسیون هیبریدی لایه‌گون- تک لایه (LW/ESL)

همانطور که در بخشهای قبلی بیان شد، اینکه به چه طریقی از فرمولاسیون واحد به یک تئوری مورد نظر برسیم، در انتخاب درجه چند جمله‌ای لژاندر و همچنین در نحوه اسمبل کرده سلولهای بنیادین پیاده‌سازی می‌شود. در این پژوهش از آنجایی که با یک مساله المان محدود روبرو هستیم بنابراین باید از تئوری استفاده کرد که هزینه محاسباتی تحلیل مساله پایین باشد.

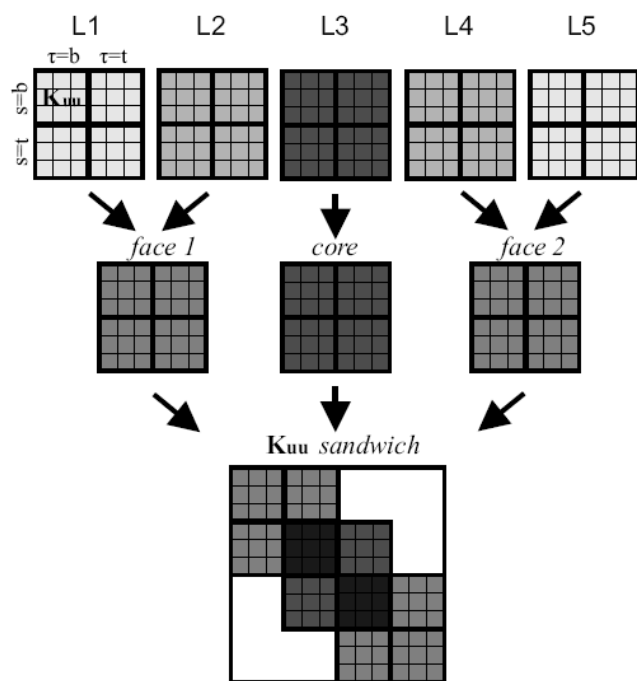
از طرفی به دلیل اینکه ورق مورد نظر، ساندویچی ضخیم با رویه‌های چند لایه و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد استفاده از یک تئوری با دقت بالا ضروری می‌باشد. لکن اگر از تئوری‌های لایه‌گون استفاده شود دقت مورد نظر را دارا می‌باشد ولی عیب آن این است که درجات آزادی آن زیاد است که منجر به حجم محاسباتی بالایی می‌شود.

از طرف دیگر اگر از تئوریهای تک‌لایه استفاده شود، هزینه محاسباتی آن پایین است ولی برای تحلیل ورقهای ساندویچی دقت قابل قبول را ندارد. لذا در این پژوهش از یک مدل هیبریدی لایه‌گون- تک‌لایه بر اساس فرمولاسیون مختلط $RMVT$ که توسط نویسندگان ارائه شده، استفاده می‌شود که دارای دقت بالا و حجم محاسباتی پایین می‌باشد.

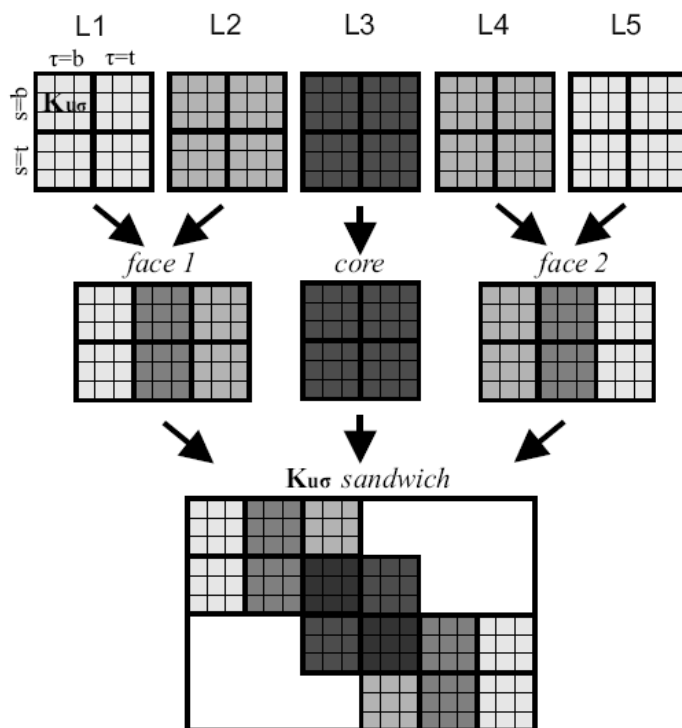


شکل ۵- ورق ساندویچی با رویه‌های دو لایه

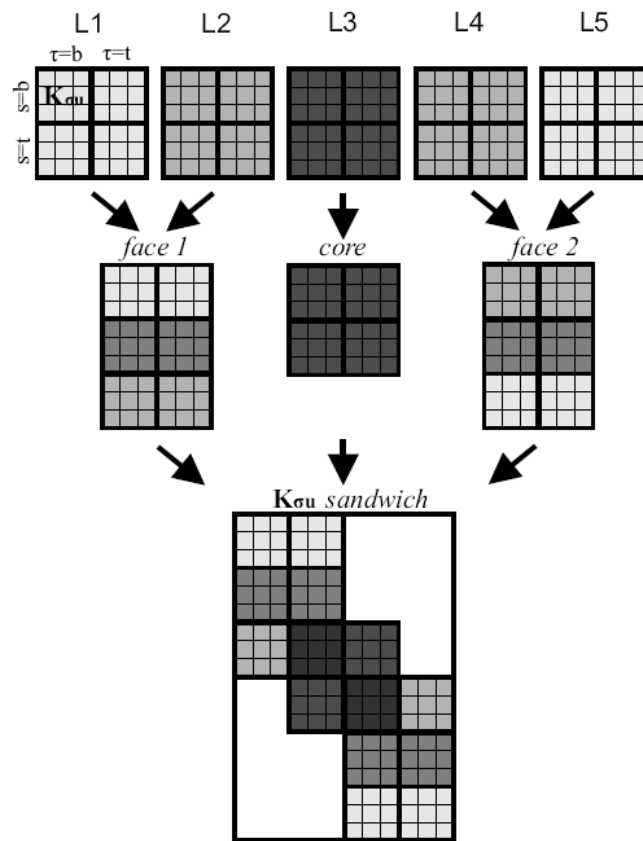
¹ Condensation Technique



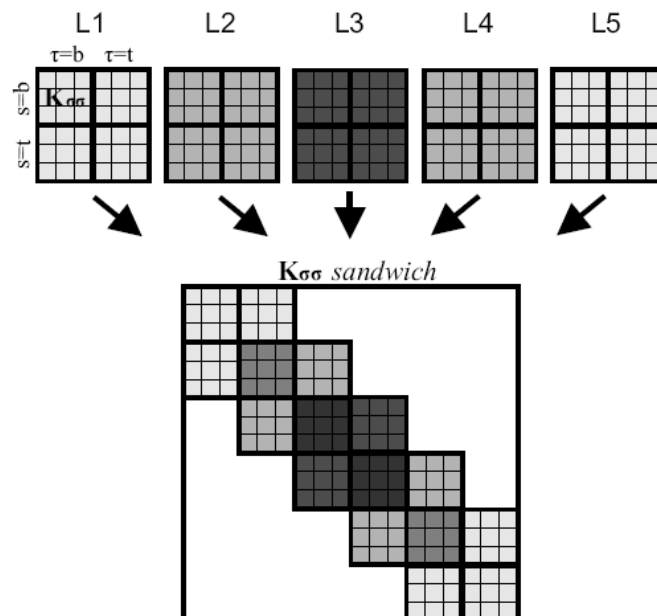
شکل ۶- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{uu}^{k \times n}$ در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۷- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{u\sigma}^{k \times n}$ در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۸- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{\sigma u}^{k_{\sigma u}}$ در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۹- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{\sigma \sigma}^{k_{\sigma \sigma}}$ در فرمولاسیون هیبریدی

به عنوان مثال یک ورق ساندویچی را مطابق شکل (۵) در نظر بگیرید که هر کدام از رویه‌های آن از دو لایه تشکیل شده باشد. فرمولاسیون هیبریدی به این صورت است که، یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه پایین ($face1$)، یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی هسته و یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه بالا ($face2$) در نظر گرفته می‌شود. همچنین به منظور پیوستگی تنش‌های عرضی در سطح مشترک تمام لایه‌ها، یک توزیع کاملاً لایه‌گون بر اساس فرمولاسیون مختلط $RMVT$ برای توزیع تنش‌های عرضی برای تمام لایه‌ها (اعم از لایه‌های رویه‌ها و لایه هسته) در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است همانطور که در بخش اول بیان شد، در فرمولاسیون واحد برای بیان تئوریهای تک‌لایه از بسط تیلور استفاده می‌شود، در حالیکه در فرمولاسیون هیبریدی به منظور ایجاد پیوستگی جابجایی در سطح مشترک رویه‌ها و هسته نمی‌توان از بسط تیلور استفاده کرد بلکه باید از توابع لژاندر که این قابلیت را دارند استفاده شود. نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین برای فرمولاسیون هیبریدی در اشکال (۶) تا (۹) نشان داده شده است. در این اشکال، برای مثال مدل برشی مرتبه اول ($N=1$) برای تک‌لایه‌ها منظور شده است. در فرمولاسیون مختلط همانطور که قبلاً اشاره شد مجهولات گرهی تنش‌های عرضی با استفاده از تکنیک انقباض استاتیکی از معادلات حاکم حذف می‌شوند. لیکن در نهایت تنها مجهولات مساله، مجهولات جابجایی خواهند بود. به عنوان مثال اگر از مدل برشی مرتبه اول ($N=1$) برای میدان جابجایی تک‌لایه‌ها استفاده کنیم، مجهولات مساله برای یک گره در تئوری کاملاً لایه‌گون به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{u}_\tau = \{u_{x_b}^{L1}, u_{y_b}^{L1}, u_{z_b}^{L1}, u_{x_t}^{L1} = u_{x_b}^{L2}, u_{y_t}^{L1} = u_{y_b}^{L2}, u_{z_t}^{L1} = u_{z_b}^{L2}, u_{x_t}^{L2} = u_{x_b}^{L3}, u_{y_t}^{L2} = u_{y_b}^{L3}, u_{z_t}^{L2} = u_{z_b}^{L3}, u_{x_t}^{L3} = u_{x_b}^{L4}, u_{y_t}^{L3} = u_{y_b}^{L4}, u_{z_t}^{L3} = u_{z_b}^{L4}, u_{x_t}^{L4} = u_{x_b}^{L5}, u_{y_t}^{L4} = u_{y_b}^{L5}, u_{z_t}^{L4} = u_{z_b}^{L5}, u_{x_t}^{L5}, u_{y_t}^{L5}, u_{z_t}^{L5}\}^T \quad (68)$$

در حالیکه برای مدل هیبریدی مجهولات مساله برای یک گره عبارتند از:

$$\mathbf{u}_\tau = \{u_{x_b}^{face1}, u_{y_b}^{face1}, u_{z_b}^{face1}, u_{x_t}^{face1} = u_{x_b}^{core}, u_{y_t}^{face1} = u_{y_b}^{core}, u_{z_t}^{face1} = u_{z_b}^{core}, u_{x_t}^{core} = u_{x_b}^{face2}, u_{y_t}^{core} = u_{y_b}^{face2}, u_{z_t}^{core} = u_{z_b}^{face2}, u_{x_t}^{face2}, u_{y_t}^{face2}, u_{z_t}^{face2}\}^T \quad (69)$$

با توجه به روابط (۶۸) و (۶۹) مشاهده می‌شود که تعداد مجهولات برای یک گره در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۸ و در مدل هیبریدی ۱۲ می‌باشد. که این اختلاف برای وقتی که تعداد لایه‌های بیشتر با مدل مرتبه بالاتر مد نظر باشد، بیشتر نیز می‌شود. به عنوان مثال اگر هر کدام از رویه‌ها از ۵ لایه (یعنی کل ورق ۱۱ لایه) تشکیل شده باشد و از مدل مرتبه سه استفاده کنیم، تعداد مجهولات در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۰۲ و در مدل هیبریدی ۳۰ می‌شود. بنابراین همانطور که در فصل نتایج مشاهده خواهد شد، با استفاده از مدل هیبریدی با درجات آزادی کمتر می‌توان به نتایج مدل کاملاً لایه‌گون دست یافت که در حجم محاسباتی تحلیل کل مساله بسیار موثر است. لیکن در حالت کلی می‌توان گفت، تعداد کل درجات آزادی برای یک گره در فرمولاسیون هیبریدی ($9N+3$) است، در حالیکه در مدل کاملاً لایه‌گون ($3[N_l(N+1)-N_l+1]$) می‌باشد. بنابراین از مزایای فرمولاسیون هیبریدی می‌توان گفت که علی‌رغم پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها، تعداد درجات آزادی مجهول مساله مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد که منجر به حجم محاسباتی کمتر تحلیل مساله می‌شود. از دیگر مزایای فرمولاسیون هیبریدی این است که مرتبه مدل را می‌توان بر حسب نیاز، به شکل دلخواه انتخاب کرد. به‌طوریکه در بعضی حالات که ضخامت ورق کم باشد استفاده از مدل‌های مرتبه

بالا با حجم محاسباتی زیاد ضرورتی نداشته و می‌توان از مدلی با مرتبه پایین‌تر که دقت قابل قبول و همچنین حجم محاسباتی کمتری دارد، استفاده کرد. در این پژوهش تئوری هیبریدی "لایه‌گون L - تک‌لایه E " با نماد $LEMN$ نشان داده می‌شود که M بیانگر فرمولاسیون مختلط و N نشان دهنده مرتبه فرمولاسیون می‌باشد.

۴- بحث و بررسی نتایج

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از مساله مذکور پرداخته می‌شود. بدین منظور مطابق روند ذکر شده در بخش‌های قبل، کدنویسی اجزاء محدود از ابتدائی‌ترین مرحله در (M-file) نرم‌افزار مطلب (Matlab) نوشته شده است و نتایج حاصل می‌شوند. این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول صحت سنجی فرمولاسیون هیبریدی و دقت نتایج آنالیز فرکانسی حاصل از مدل هیبریدی بررسی شده و در بخش دوم به بررسی نتایج جدید حاصل از این پژوهش پرداخته خواهد شد.

۴-۱- صحت‌سنجی فرمولاسیون هیبریدی

همانطور که پیش‌تر گفته شد در این تحقیق برای تحلیل یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی یک مدل هیبریدی تک‌لایه-لایه‌گون ارائه گردیده است. در ابتدا به منظور صحت‌سنجی و بررسی دقت این مدل، یک ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده، هسته نرم ارتوتروپیک و رویه‌های چند لایه کامپوزیتی تحت فشار سینوسی تحلیل شده و نتایج حاصل از مدل هیبریدی با نتایج دقیق سه‌بعدی مقایسه می‌شوند. توزیع فشار سینوسی روی سطح بالایی ورق طبق رابطه زیر اعمال می‌شود:

جدول ۱- خواص هندسی و فیزیکی رویه‌های ورق ساندویچی

E_L (GPa)	50
$E_T = E_Z$ (GPa)	10
ν	0.25
G (GPa)	5
h for each layer of face sheets (m)	.02
a=b(m)	4, 10, 100, 1000
θ : orientation (deg)	0/90/0/90/0/90/0/90/0/90 and 90/0/90/0/90/0/90/0/90/0

جدول ۲- خواص هندسی و فیزیکی هسته ورق ساندویچی

$E_L = E_T$ (MPa)	0.01
E_Z (MPa)	75.85
ν	0.01
G (MPa)	22.5
h(m)	.6
a=b(m)	4, 10, 100, 1000

$$P_z = p_z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (70)$$

هر کدام از رویه‌ها از ۱۰ لایه با چیدمان $[0^\circ/90^\circ]_5$ تشکیل شده‌اند. مشخصات هندسی و فیزیکی رویه‌ها و هسته به ترتیب در جداول (۱) و (۲) ارائه شده است [۱۱].

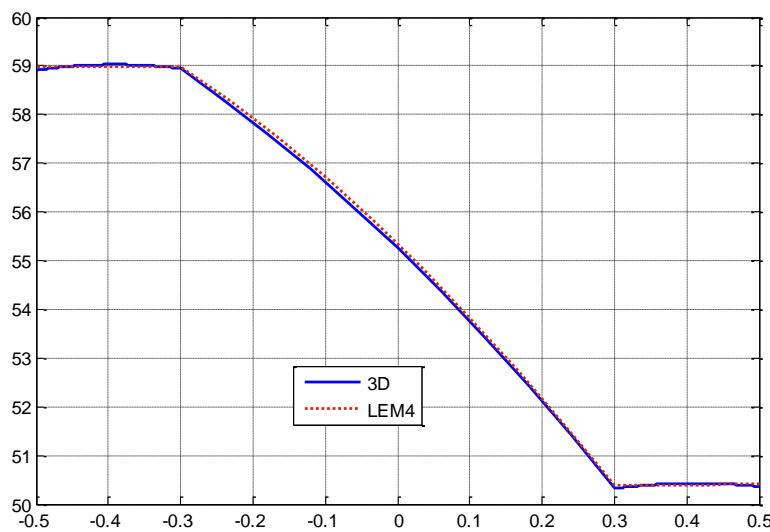
خیز و تنشهای عرضی حاصل از بارگذاری فوق طبق روابط زیر به شکل بی بعد محاسبه می‌شوند:

$$\bar{U}(x, y, z) = \frac{u_z 100h^3 E_2}{p_z a^4}, \quad \bar{\sigma}_{zz}(x, y, z) = \frac{\sigma_{zz}}{p_z}, \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, y, z) = \frac{\sigma_{xz}}{p_z} \quad (71)$$

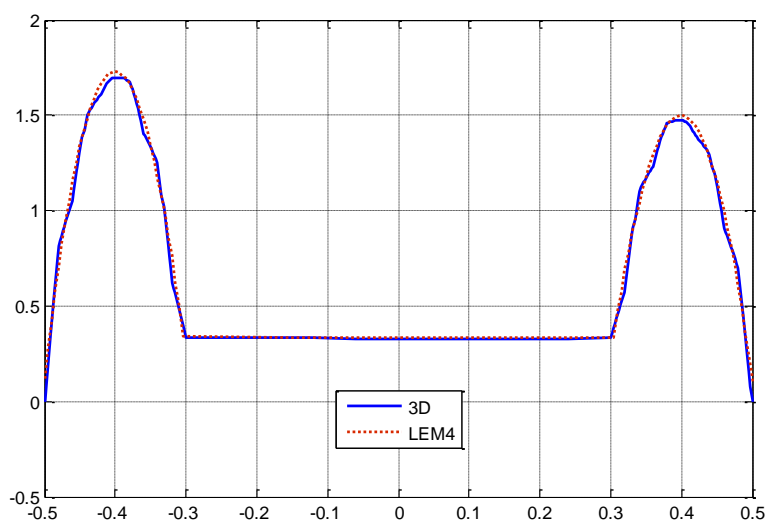
لازم به ذکر است که نتایج همگرایی مش بندی نشان می‌دهد که تعداد ۴ در ۴ المان (در کل ۱۶ المان) برای تحلیل مساله از دقت کافی برخوردار می‌باشد. جدول (۳) مقادیر خیز بی بعد را در مرکز ورق $\bar{U}(a/2, b/2, 0)$ به ازای نسبت طول به ضخامت‌های (a/h) مختلف نشان می‌دهد. همانطور که از این جدول ملاحظه می‌شود تطابق بسیار خوبی بین مدل هیبریدی و نتایج سه بعدی [۱۱] وجود دارد.

جدول ۳- خیز بی بعد در مرکز ورق به ازای a/h های مختلف

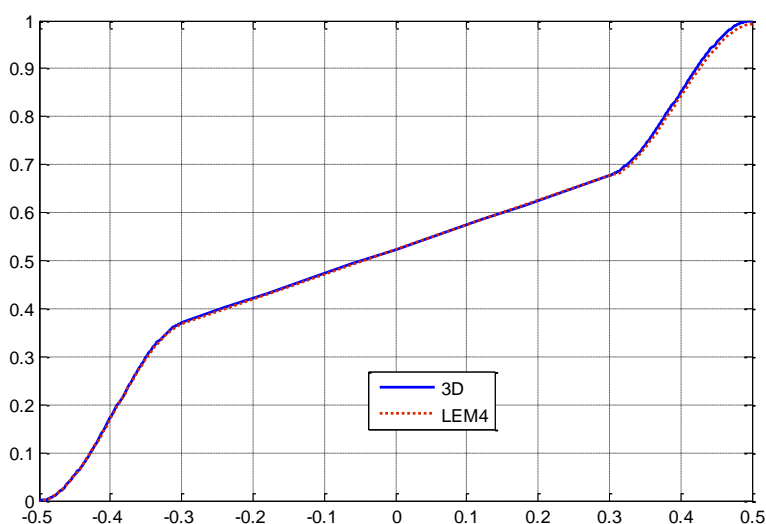
a/h	4	10	100	1000
3D[11]	55.2528	18.3812	2.0327	1.8120
LEM1	54.7422	18.3728	2.0323	1.8319
LEM2	55.2498	18.3939	2.0323	1.8320
LEM3	55.3473	18.3956	2.0323	1.8320
LEM4	55.3475	18.3956	2.0323	1.8320
EM4	19.5724	13.1981	0.9938	1.3523



شکل ۱۰- تغییرات خیز بی بعد بر حسب ضخامت با استفاده از LEM4 برای $a/h=4$



شکل ۱۱- تغییرات تنش برشی عرضی بی بعد $\bar{\sigma}_{xz}$ بر حسب ضخامت با استفاده از LEM4 برای $a/h=4$



شکل ۱۲- تغییرات تنش عمودی عرضی بی بعد $\bar{\sigma}_{zz}$ بر حسب ضخامت با استفاده از مدل LEM4 برای $a/h=4$

در این جدول برای بررسی دقت مدل‌های تک لایه معادل، نتایج مدل $EM4$ (که در آن E به مفهوم تک لایه، M به معنی فرمولاسیون مختلط و ۴ به مفهوم مرتبه چهار می‌باشد) نیز آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در برخی از حالات خطای این مدل به ۱۰۰ درصد می‌رسد که علت اصلی آن تفاوت زیاد خواص هسته با رویه‌ها می‌باشد. بنابراین مشاهده می‌شود که مدل‌های تک لایه معادل برای تحلیل ورق‌های ساندویچی مناسب نمی‌باشند. در شکل (۱۰) تغییرات خیز بی‌بعد مرکز ورق $\bar{U}(a/2, b/2)$ در راستای ضخامت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مدل $LEM4$ به خوبی فرم زیگ‌زاگ میدان جابجایی را به دلیل نرم بودن هسته مدلسازی می‌کند. همچنین در این شکل تطابق خیلی خوبی بین مدل هیبریدی حاضر و نتایج سه بعدی مشاهده می‌شود. به عبارت دیگر در این مدل هیبریدی تعداد درجات آزادی برای هر گره ۳۹ می‌باشد در حالیکه تعداد درجات آزادی برای هر گره در یک مدل کاملاً لایه‌گون ۲۵۵ می‌باشد (که با کامپیوترهای پیشرفته روز با کمبود حافظه مواجه می‌شود). بنابراین مشاهده می‌شود که

در مدل هیبریدی با تعداد درجات آزادی کمتر می‌توان به نتایج سه‌بعدی دست پیدا نمود (که این کم بودن درجات آزادی در یک مساله غیرخطی بسیار حائز اهمیت خواهد بود). شکل (۱۱) توزیع تنش برشی عرضی $\bar{\sigma}_{xz}$ را در نقطه مرزی $(0, b/2)$ و شکل (۱۲) توزیع تنش عمودی عرضی $\bar{\sigma}_{zz}$ را در نقطه $(a/2, b/2)$ در راستای ضخامت نشان می‌دهند. در این اشکال نیز تطابق خوبی بین نتایج مدل هیبریدی و نتایج سه‌بعدی مشاهده می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها مخصوصاً در سطح مشترک بین رویه‌ها و هسته حاصل شده است. جهت اطمینان بیشتر از فرمولاسیون ارائه شده در مورد آنالیز فرکانسی، ارتعاشات آزاد یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی صورت گرفته و نتایج آن با نتایج سه‌بعدی موجود مقایسه شده است. بدین منظور یک ورق ساندویچی با چیدمان $[0^\circ/90^\circ/core/90^\circ/0^\circ]$ در نظر گرفته شده است [۱۲]. خواص ورق مطابق جدول (۴) می‌باشد. نتایج حاصل از مدل‌های مختلف برای شرایط مرزی متفاوت، با نتایج سه‌بعدی به دست آمده توسط Kulkarni و Kapuria [۱۲] در جدول (۵) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی بین نتایج مدل‌های مختلف با نتایج سه‌بعدی مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به جدول (۵) مشاهده می‌شود که مدل LEM2 از دقت کافی برخوردار می‌باشد. بنابراین از این مدل برای بقیه آنالیزها استفاده خواهد شد.

۴-۲- آنالیز فرکانسی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما

در این بخش پژوهش به بررسی آنالیز فرکانسی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما پرداخته می‌شود. همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، در سازه‌های ساندویچی با هسته نرم، تحت شرایط دمایی خواص هسته به شدت وابسته به دما می‌باشد بطوریکه با افزایش دما، خواص ذاتی سازه کاهش می‌یابد. بدین منظور یک ورق مربعی ساندویچی با چیدمان $[(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)_s / core / (0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)_s]$ در نظر گرفته شده است.

خواص مکانیکی - حرارتی و هندسی رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم به شکل زیر می‌باشند [۱۱]:

$$E_1 = 50 \text{ GPa}, \quad E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa}, \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

$$\alpha_L = 1.5e - 8 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_T = 1e - 6 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad \rho_t = \rho_b = 1600 \text{ kg/m}^3 \quad a = b = 1 \text{ m},$$

$$h_t = h_b = 0.01 \text{ m}, \quad h = 0.1 \text{ m}, \quad E_0 = 85 \text{ MPa}, \quad \nu_c = 0.25, \quad \rho_c = 100 \text{ kg/m}^3, \quad \alpha_c = 35e - 5 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

جدول ۴- خواص ورق ساندویچی [۱۲]

E_1 (GPa)	E_2, E_3 (GPa)	G_{12}, G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}, ν_{13}	ν_{23}	ρ (kg/m ³)
Face sheets						
275	6.9	6.9	6.9	0.25	0.3	681.8
Core						
0.5776	0.5776	0.1079	0.22215	0.0025	0.0025	1000

جدول ۵- فرکانسهای بی بعد ($\hat{\omega}_n = 100\omega_n a \sqrt{E_1^f / \rho^c}$) برای ورق ساندویچی مربعی با $h_f / h = 0.1$

a/h	Theory	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_6$
SSSS							
10	3D[12]	9.8281	15.5057	18.0752	21.6965	22.2022	26.9150
	LEM4	9.8283	15.5064	18.0758	21.6969	22.2026	26.9153
	LEM3	9.8285	15.5073	18.0785	21.6991	22.2133	26.9164
	LEM2	9.8287	15.5145	18.0888	21.7020	22.2820	26.9505
	LEM1	9.8307	15.5165	18.0957	21.7082	22.2837	26.9557
20	3D	7.6882	13.8455	15.9204	19.6563	20.6760	24.9485
	LEM4	7.6884	13.8458	15.9206	19.6564	20.6763	24.9487
	LEM3	7.6885	13.8460	15.9209	19.6567	20.6767	24.9488
	LEM2	7.6889	13.8566	15.9369	19.6664	20.7574	24.9911
	LEM1	7.6898	13.8583	15.9409	19.6704	20.7596	24.9952
SCSC							
10	3D(FE) [12]	10.2816	16.1245	18.3029	22.1480	23.1797	27.1464
	LEM4	10.2822	16.1251	18.3035	22.1485	23.1802	27.1467
	LEM3	10.2828	16.1255	18.3037	22.1491	23.1822	27.1472
	LEM2	10.2834	16.1264	18.3044	22.1496	23.1846	27.1498
	LEM1	10.2980	16.1844	18.3298	22.1955	23.3970	27.2697
20	3D(FE)	8.5675	14.3524	16.3014	20.0117	21.2553	25.2762
	LEM4	8.5677	14.3526	16.3017	20.0119	21.2554	25.2763
	LEM3	8.5685	14.3531	16.3019	20.0120	21.2558	25.2768
	LEM2	8.5691	14.3536	16.3023	20.0128	21.2563	25.2771
	LEM1	8.5735	14.3645	16.3124	20.0225	21.2624	25.2816
CCCC							
10	3D(FE) [12]	11.2236	16.6777	18.9650	22.7096	23.5270	28.0728
	LEM4	11.2240	16.6779	18.9654	22.7099	23.5273	28.0731
	LEM3	11.2242	16.6782	18.9658	22.7104	23.5278	28.0736
	LEM2	11.2251	16.6788	18.9663	22.7110	23.5285	28.0742
	LEM1	11.2343	16.6832	18.9753	22.7221	23.5321	28.1123
20	3D(FE)	10.1635	15.2734	17.2645	20.7882	21.8260	26.0346
	LEM4	10.1638	15.2737	17.2648	20.7885	21.8263	26.0348
	LEM3	10.1644	15.2740	17.2651	20.7889	21.8266	26.0351
	LEM2	10.1651	15.2746	17.2655	20.7894	21.8272	26.0358
	LEM1	10.1715	15.2815	17.2715	20.7945	21.8344	26.0423

فرض می‌شود که دمای ورق از ۲۰ درجه به مقادیر ذکر شده در جدول (۶) برسد. نتایج حاصل برای دماهای متفاوت در جدول (۶) نشان داده شده است. در این جدول، ۵ ستون وجود دارد. ستون اول تغییرات دما از ۲۰ درجه تا دمای مورد نظر را نشان می‌دهد. ستون دوم مربوط به چهار فرکانس طبیعی اول می‌باشد. ستون سوم فرکانسهای طبیعی مربوط به وقتی که خواص هسته ثابت (NTD^1) باشد را نشان می‌دهد. ستون چهارم بیانگر فرکانسهای طبیعی مربوط به وقتی که خواص هسته وابسته به دما (WTD^2) می‌باشد و ستون پنجم اختلاف بین نتایج مربوط به خواص وابسته به دما (WTD) و نتایج مربوط به خواص ثابت (NTD) می‌باشد. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که وابستگی خواص هسته به دما تاثیر چشمگیری روی فرکانسهای طبیعی دارد. بطوریکه وقتی که دما افزایش می‌یابد، سفتی ذاتی سازه به دلیل کاهش خواص هسته کمتر می‌شود و در نتیجه فرکانسهای طبیعی تا بیش از ۱۱ درصد کاهش می‌یابند.

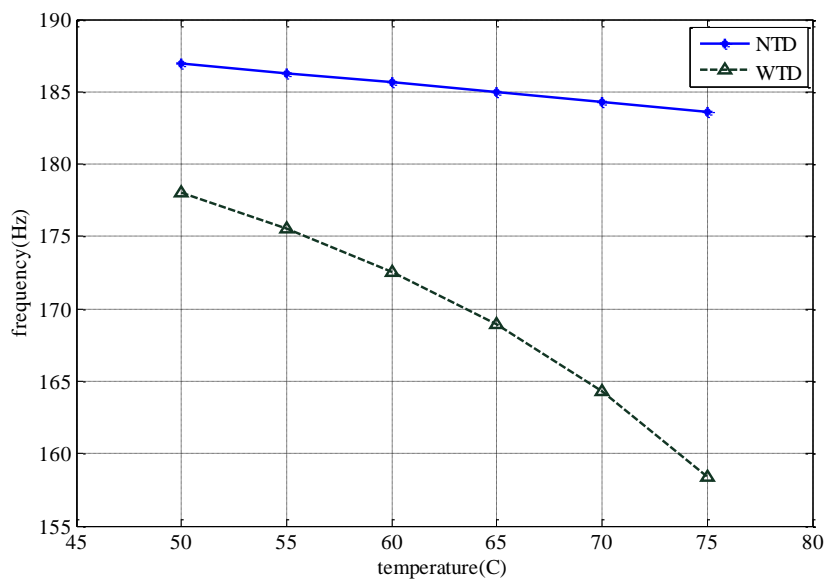
شکل (۱۳) تغییرات فرکانس طبیعی اول سازه را با دما نشان می‌دهد.

¹ Not temperature dependent

² With temperature dependent

جدول ۶- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر حسب دما با $h_f / h = 0.1$

$T(^{\circ}C)$	$f_n(Hz)$	NTD	WTD	Discrepancy%
50	f_1	186.965	178.0387	-4.77432
	f_2	315.9693	299.6672	-5.15939
	f_3	322.8417	306.439	-5.08073
	f_4	412.7263	391.6301	-5.11143
55	f_1	186.3048	175.5331	-5.78176
	f_2	314.9949	295.3374	-6.24058
	f_3	321.8949	302.1247	-6.14182
	f_4	411.5449	386.1216	-6.17753
60	f_1	185.6423	172.5727	-7.04021
	f_2	314.0175	290.1963	-7.58595
	f_3	320.9451	297.0008	-7.46056
	f_4	410.36	379.5761	-7.50168
65	f_1	184.9774	168.9217	-8.67982
	f_2	313.0369	283.8314	-9.32973
	f_3	319.9925	290.6579	-9.16728
	f_4	409.1715	371.4708	-9.21391
70	f_1	184.3101	164.3065	-10.853231
	f_2	312.0532	275.7761	-11.625293
	f_3	319.037	282.6364	-11.409523
	f_4	407.9795	361.2214	-11.460894



شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول با دما

با توجه به شکل (۱۴) مشاهده می‌شود که در حالتی که خواص ثابت بوده با افزایش دما فرکانس طبیعی تا حدودی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در این حالت با وجود اینکه سفتی ذاتی سازه تغییر نکرده، ولی با افزایش دما فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این به دلیل ایجاد تنشهای حرارتی فشاری درون صفحه‌ای (با در نظر گرفتن کرنشهای غیرخطی) بوده، که باعث کاهش سفتی سازه شده و در نتیجه منجر به کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود.

جدول ۷- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر تغییرات خطی دما با $h_f/h = 0.1$

$T(^{\circ}C)$	$f_n(Hz)$	NTD	WTD	Discrepancy%
$T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 55^{\circ}C$	f_1	186.6352	176.8155	-5.26144
	f_2	315.4825	297.555	-5.68257
	f_3	322.3687	304.3343	-5.59434
	f_4	412.136	388.943	-5.62751
$T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 60^{\circ}C$	f_1	186.3048	175.462	-5.81993
	f_2	314.9949	295.2092	-6.28128
	f_3	321.8949	301.996	-6.1818
	f_4	411.5449	385.9565	-6.21764
$T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 65^{\circ}C$	f_1	185.9739	173.9246	-6.47903
	f_2	314.5066	292.5343	-6.98628
	f_3	321.4204	299.329	-6.87305
	f_4	410.9529	382.5486	-6.91181

جدول ۸- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر حسب دما با $h_f/h = 0.1$

B.C.	$f_n(Hz)$	NTD	WTD	Discrepancy%
SSSS	f_1	186.965	178.0387	-4.77432
	f_2	315.9693	299.6672	-5.15939
	f_3	322.8417	306.439	-5.08073
	f_4	412.7263	391.6301	-5.11143
CSCS	f_1	202.0363	192.4455	-4.74707
	f_2	324.1021	307.6198	-5.08553
	f_3	350.0038	333.7738	-4.63709
	f_4	434.5593	413.6531	-4.8109
CCCC	f_1	216.3086	205.6162	-4.94312
	f_2	343.2938	326.6282	-4.85462
	f_3	356.2272	339.6536	-4.65254
	f_4	449.2735	428.234	-4.683

جدول ۹- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق ساندویچی مربعی بر حسب نسبت منظرهای مختلف با $h_f/h=0.1$

a/b	f_n (Hz)	NTD	WTD	Discrepancy%
0.5	f_1	144.1303	137.4949	-4.82592
	f_2	186.9948	178.065	-5.01491
	f_3	247.9446	235.4584	-5.30293
	f_4	298.7884	283.5751	-5.36482
1	f_1	186.965	178.0387	-4.77432
	f_2	315.9693	299.6672	-5.15939
	f_3	322.8417	306.439	-5.08073
	f_4	412.7263	391.6301	-5.11143
1.25	f_1	215.7871	205.1807	-5.1693
	f_2	340.7155	323.3765	-5.36186
	f_3	389.1341	369.0016	-5.45594
	f_4	472.3417	448.3183	-5.35856
1.5	f_1	247.3804	234.9339	-5.2978731
	f_2	361.9391	343.4781	-5.374724
	f_3	466.0306	442.2003	-5.3890285
	f_4	514.6301	489.9043	-5.0470674

در جدول (۷) نتایج برای زمانی که توزیع دما در راستای ضخامت به شکل خطی باشد را نشان می‌دهد. به عبارتی در اثر بارهای حرارتی دمای رویه پایین به T_b و دمای رویه بالا به T_t می‌رسد. همواره مشخص است که شرایط مرزی تاثیر بسزایی روی پاسخ فرکانسی ورق‌های ساندویچی دارد. بدین منظور در این قسمت پاسخ فرکانسی ورق ساندویچی با شرایط مرزی $SSSS$, $CSCS$, و $CCCC$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حروف C و S به ترتیب به مفهوم شرایط مرزی ساده^۱ و گیردار^۲ می‌باشند. فرض شده است که دمای ورق از ۲۰ درجه سانتیگراد به ۵۰ درجه سانتیگراد برسد. نتایج حاصل در جدول (۸) آورده شده است. در جداول (۹) و (۱۰) نیز به ترتیب اثر پارامترهای هندسی نسبت منظر a/b و نسبت ضخامت رویه‌ها به ضخامت کل ورق بر روی پاسخ فرکانسی ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده مطالعه شده است.

¹ Simply Supported

² Clamped

جدول ۱۰- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق ساندویچی مربعی بر حسب نسبت ضخامت رویه‌ها

h_f / h	$f_n (Hz)$	NTD	WTD	Discrepancy%
0.04	f_1	225.01	215.7938	-4.27084
	f_2	395.4022	375.722	-5.23797
	f_3	402.0811	381.4422	-5.41075
	f_4	516.261	489.0692	-5.55991
0.06	f_1	210.6522	201.2004	-4.6977
	f_2	361.1821	342.5171	-5.44936
	f_3	366.4035	347.1738	-5.53893
	f_4	468.7101	443.6542	-5.64762
0.08	f_1	197.6423	188.3839	-4.91465
	f_2	335.1532	317.6889	-5.4973
	f_3	340.6585	322.8834	-5.50511
	f_4	435.285	412.2911	-5.5771
0.1	f_1	186.965	178.0387	-4.77432
	f_2	315.9693	299.6672	-5.15939
	f_3	322.8417	306.439	-5.08073
	f_4	412.7263	391.6301	-5.11143
0.12	f_1	178.4808	169.9309	-5.0313981
	f_2	302.233	287.0228	-5.2993003
	f_3	311.3151	296.2001	-5.1029692
	f_4	398.6662	379.3284	-5.0979046

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش آنالیز فرکانسی یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن اثرات حرارتی و خواص هسته به دما بررسی شده است. از آنجایی که تعداد لایه‌های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از تئوریهای لایه‌گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از تئوریهای تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد.

بنابراین در این پژوهش یک فرمولاسیون جامع ارتقا یافته مختلط با دقت بالا و حجم محاسبات پایین (که تمام تئوریهای موجود اعم از تک لایه، لایه‌گون و تئوریهای مرتبه بالا را در بر می‌گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است.

ضمناً برای بالا بردن دقت محاسبات، پیوستگی تنشهای عرضی در تمام لایه‌ها لحاظ می‌شود و برای جلوگیری از قفل شونده‌گی برشی از روش انتگرال‌گیری کاهش یافته استفاده شده است.

برای آنکه بتوان معادلات حرکت را برای تمام شرایط مرزی (اعم از شرایط مرزی ساده، گیردار، آزاد) حل نمود، یک فرمولاسیون جدید اجزاء محدود استخراج شده است. نتایج بیانگر دقت بالا با حجم محاسبات پایین فرمولاسیون ارائه شده می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما فرکانسهای سازه به شکل چشمگیری کاهش می‌یابند.

سپاسگزاری

با توجه به زحمات و حمایت‌های مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین نویسندگان این مقاله بر خود لازم می‌دانند که کمال تشکر و امتنان را از مسئولین این دانشگاه داشته باشند.

مراجع

- [1] Singh, A.V., "Free Vibration Analysis of Deep Doubly Curved Sandwich Panels", *Computers and Structures*, Vol. 73, pp. 385-394, (1999).
- [2] Kant, T., and Swaminathan, K., "Analytical Solution for Free Vibrations for Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory", *Composite Structures*, Vol. 53, pp. 73-85, (2001).
- [3] Rao, M.K., and Desai, Y.M., "Analytical Solutions for Vibrations of Laminated and Sandwich Plates using Mixed Theory", *Composite Structures*, Vol. 63, pp. 361-373, (2004).
- [4] Morozov, E.V., and Lopatin, A.V., "Fundamental Frequency of the CCCF Composite Sandwich Plate", *Composite Structures*, Vol. 92, Vol. 11, pp. 2747-2757, (2010).
- [5] Matsunaga, H., "Free Vibration and Stability of Angle-ply Laminated Composite and Sandwich Plates under Thermal Loading", *Composite Structures*, Vol. 77, pp. 249-262, (2007).
- [6] Frostig, Y., and Thomsen, O.T., "On the Free Vibration of Sandwich Panels with a Transversely Flexible and Temperature-dependent Core Material- Part I: Mathematical Formulation", *Composites Science and Technology*, Vol. 69, pp. 856-862, (2009).
- [7] Frostig, Y., and Thomsen, O.T., "On the Free Vibration of Sandwich Panels with a Transversely Flexible and Temperature-dependent Core Material-Part II: Numerical Study", *Composites Science and Technology*, Vol. 69, pp. 863-869, (2009).
- [8] Carrera, E., "A Class of Two-dimensional Theories for Anisotropic Multilayered Plates Analysis", *Atti Accad Sci Torino Mem Sci Fis*, 19-20, pp.1-39, (1995).
- [9] Zhang, S., Dulieu-Barton, J.M., Fruehmann, R.K., and Thomsen, O.T., "A Methodology for Obtaining Material Properties of Polymeric Foam at Elevated Temperatures", *Experimental Mechanics*, Vol. 52, pp. 3-15, (2012).

- [10] Reddy, J.N., "An Introduction to the Finite Element Method", 2nd ed, McGraw-Hill, New York, (1993).
- [11] Carrera, E., and Brischetto, S., "A Survey with Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates", Applied Mechanics Reviews, Vol. 62, 010803, (17 pages), (2009).
- [12] Kulkarni, S.D., and Kapuria, S., "Free Vibration Analysis of Composite and Sandwich Plates using an Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral Element Based on Third Order Zigzag Theory", Computation Mechanics, Vol. 42, Vol. 6, pp. 803–824, (2008).

فهرست نمادهای انگلیسی

طول ورق :	a
عرض ورق :	b
اندیس بیانگر پایین (bottom) :	b
ماتریسهای سفتی لایه k ام :	C_{ij}^k
اپراتور دیفرانسیلی :	D_p
مدول یانگ :	E
انتگرال گیری توابع ضخامت :	E_{τ}
تابع ضخامت :	F_{τ}
بردار نیروی المانی :	$\{F^e\}$
ضخامت رویه بالا :	h_t
ضخامت رویه پایین :	h_b
ماتریس سفتی المانی :	$[K^e]$
ماتریس سفتی ناشی از اثرات غیرخطی حرارتی :	$K_{uu_{n10}}^{k\tau s ij}$
ماتریس سفتی ناشی از تنشهای مکانیکی :	$K_{uu_{mech}}^{k\tau s ij}$
ماتریس سفتی ناشی از اثرات غیرخطی تغییر فاز :	$K_{uu_{nISM A}}^{k\tau s ij}$
ماتریس سفتی لایه k ام :	$K_{u\sigma}^{k\tau s}$
ماتریس سفتی لایه k ام :	$K_{uu}^{k\tau s}$
اندیس بیانگر لایه k ام :	k
کار ناشی از تنشهای مکانیکی :	L_{intM}
کار ناشی از تنشهای حرارتی :	L_{intT}
کار نیروهای خارجی لایه k ام :	L_e^k
کار نیروهای خارجی :	L_{ext}

کار نیروهای اینرسی لایه kام	L_{in}^k
طول المان	l_e
ماتریس جرمی المانی	$[M^e]$
ماتریس جرمی لایه kام	$M_{uu}^{k\alpha}$
تعداد لایه ها	N_l
توابع شکل لاگرانژی درجه دو	N_i
بردار نیروهای ناشی از اثرات حرارتی	$P_{u\theta}^k$
بردار نیروهای خارجی	p_{us}^k
چند جمله ای لژاندر	P_n
بردار جابجائیهای گرهی	$q_{\bar{n}}^k$
دما	T
اندیس بیانگر بالا (top)	t
انرژی پتانسیل داخلی	U
بردار درجات آزادی جابجایی	u_{τ}^k
جابجایی در راستای X	u
انرژی پتانسیل خارجی	V
جابجایی در راستای Y	v
جابجایی در راستای Z	w
بردار جابجائیهای گرهی	Δ^e
اختلاف دما	θ
ضرایب انبساط حرارتی لایه kام	α_i^k
سفتی ناشی از ضرایب انبساط حرارتی لایه kام	λ_i^k
مختصاتهای محلی	ζ, η
کرنشهای درون صفحه ای غیرخطی	$\epsilon_{pG_{nl}}^k$
تنش	σ
کرنش	ϵ
تنشهای درون صفحه ای	σ_p
تنشهای عرضی عمود بر صفحه	σ_n
اپراتور تغییراتی	δ
مختصات بی بعد محلی	ζ_k
چگالی لایه kام	ρ^k

Abstract

In this study a frequency analysis of a sandwich plate with multilayered composite face-sheets and flexible core under thermal conditions is investigated for different boundary conditions. In this regard, thermal effects and temperature dependent properties of the core are considered. In this study, for driving the equations of motion, a hybrid LW/ESL finite element formulation, considering the thermal effects is proposed by which the number of unknowns is independent on the number of layers. This new formulation is in the framework of Carrera's Unified Formulation (CUF). The CUF unify many theories in a unified form which can be differed by the order of expansion and definition of the variables in the thickness direction. In order to satisfy the interlaminar continuity of transverse stresses between the layers the Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT) is employed.

In this research for considering the thermal effects, the nonlinear strains are used. Results of this formulation are compared with available results which show the high accuracy with low computational cost of the proposed formulation. Results show that with increasing the temperature, the frequency of structure decreases significantly, due to the degradation of the properties of the core. In this study, some new results are presented for different thermal conditions and also different boundary conditions.