

تحلیل پایداری حرارتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده با ورق‌های گرافن GPL با استفاده از روش مربعات تفاضلی

مقاله حاضر به تحلیل کمانش حرارتی پوسته استوانه تحت افزایش دمای یکنواخت می‌پردازد. پوسته نانوکامپوزیتی از لایه‌های تقویت شده با ورق‌های گرافن Graphene Platelets تشکیل شده است. نانورق‌ها به صورت تصادفی و یکنواخت در هر لایه توزیع شده‌اند. مقدار کسر حجمی گرافن‌ها به صورت تابعی مدرج FG در جهت ضخامت پوسته تغییر می‌کند. خواص مؤثر الاستیک پوسته با استفاده از قانون هالپین-سای به دست آمده است. میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و معادلات سینماتیکی پوسته استوانه‌ای با استفاده از تئوری غیرخطی هندسی ون-کارمن و دائل استخراج شده‌اند. معادلات تعادل پس از تحلیل پیش‌کمانش توسط روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته GDQ جداسازی شده و در نهایت مسئله مقدار ویژه حل شده تا دمای بحرانی پوسته استوانه محاسبه شود. پس از صحت‌گذاری بر معادلات و روش حل استفاده شده، نتایج جدید برای نشان دادن اثر پارامترهای مختلف مانند هندسه، شرایط مرزی، کسر جرمی نانورق‌های گرافن، الگوی تقویت شدگی به دست آمده است.

میرابوالفضل مختاری^۱
استادیار

واژه‌های راهنما: کمانش، پوسته استوانه‌ای، نانورق‌های گرافن، روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

۱- مقدمه

اخیرا استفاده از تقویت کننده‌ها با ابعاد نانو به استفاده از الیاف به عنوان تقویت کننده ترجیح داده می‌شوند. با ندکی تحقیق بر خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی تقویت کننده‌های اندازه نانو می‌توان دریافت که استفاده از آن‌ها مفیدتر از استفاده از پرکننده‌های ابعاد بزرگ باشد. کامپوزیت‌هایی که با استفاده از نانو تقویت کننده‌ها تقویت شده باشند را نانوکامپوزیت می‌نامند. قابل ذکر است که تاکنون نانوتقویت کننده‌های زیادی به منظور استفاده در ماتریس معرفی شده‌اند. معروف‌ترین آنها عبارتند از: نانو لوله‌های کربنی CNTs، لایه گرافن Graphene Sheets، گرافن اکسید Graphene Oxide و ورق‌های گرافن Graphene Platelets. همچنین رایج است که تغییرات کسر حجمی نانوتقویت کننده‌ها در هر لایه کامپوزیت ثابت اما از لایه‌ای به لایه دیگر به صورت مدرج تابعی تغییر کند. جزییات بیشتر در مورد نانوکامپوزیت‌ها را میتوان در تحقیقی از ابراهیمی و دباغ [۱] به دست آورد.

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی پرواز، دانشگاه امام علی (ع) s.abolfazl.mokhtari@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۹/۰۵/۰۷، تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۰/۲۹

گرافن که به عنوان یک سازه با ابعاد نانو و به صورت تک لایه اتمی و دوبعدی شناخته می‌شود در سال (۲۰۰۴) توسط محققان کشف شده است [۲]. این نانو سازه‌ها خواص حرارتی، مکانیکی و الکتریکی فوق‌العاده‌ای از خود نشان می‌دهند [۳-۶]. بر اساس مقالات تجربی موجود مدول یانگ این سازه‌های کوچک بیشتر از انواع فلزات از جمله فولاد بوده و مقدار آن حدود 1TPa می‌باشد. یکی از مهم‌ترین مشتقات گرافن، نانورق‌های گرافن می‌باشد که از ترکیب شیمیایی گرافن‌های تک لایه اتمی تشکیل می‌شوند. در مقاله ای از رفیعی در سال (۲۰۰۹) [۷] نشان داده شده است که لایه های گرافن با یکدیگر ترکیب شده و ورق‌های (کلوخه) گرافن را ایجاد می‌کنند. ضخامت ورق‌های گرافن بسیار بزرگ‌تر از لایه‌های گرافن می‌باشد. خواص این نوع از تقویت کننده‌ها مستقل از دما در نظر گرفته می‌شود. نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با استفاده از این نوع تقویت کننده که (FG-GPLRC) نامیده می‌شوند از تقویت پلیمر با استفاده از کلوخه گرافن که از ترکیب شیمیایی چندین لایه گرافن تشکیل می‌شوند، ایجاد می‌شود. مدول یانگ معادل این نانو کامپوزیت‌ها با استفاده از رابطه هالپین-سای محاسبه می‌شوند. کسر وزنی این تقویت کننده‌ها کمتر از یک درصد در نظر گرفته می‌شوند. علاوه بر این خواص ترمومکانیکی آن‌ها مستقل از دما فرض می‌شوند. در زیر تعدادی از مقالات در زمینه کمانش سازه‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن آورده شده‌اند. یانگ و همکارانش [۸] کمانش و پس کمانش تیرهای تقویت شده مدرج تابعی با استفاده از نانورق‌های گرافن مدل شده با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی را مطالعه کرده است.

وو و همکارانش [۹] در مورد پایداری دینامیکی تیر FG-GPLRC تحت بارگذاری متناوب طولی و همچنین تغییرات دما تحقیق کرده‌اند. کمانش الاستیک یک تیر تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن توسط کیتروپروچی و همکاران [۱۰] بررسی شده است. در این پژوهش تخلخل بر اساس جامدهای سلولی سلول بسته مدل شده است. سانگ و دستیارانش [۱۱] کمانش و پس کمانش حرارتی تیر FG-GPLRC را با لحاظ کردن اثرات ترک مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که بستر الاستیک اثر ترک را روی دمای کمانش به شدت کاهش می‌دهد. یک حل تحلیلی به منظور مطالعه پایداری درون صفحه تیر خمیده تقویت شده با استفاده از نانوتقویت کننده‌های گرافن تحت بارگذاری نقطه‌ای و مرکزی توسط یانگ و همکارانش [۱۲] ارائه شده است. همچنین، هوانگ و همکاران [۱۳] پدیده کمانش تیرهای منحنی FG-GPLRC با در نظر گرفتن شرایط مرزی الاستیک تحت فشار یکنواخت را تحلیل کردند. برای اولین بار کمانش و پس کمانش ورق FG-GPLRC تحت بارگذاری دوماحوری توسط سانگ و دستیارانش [۱۴] بررسی شده است.

در این مقاله روش اختلال دو مرحله ای به منظور حل معادلات مورد استفاده قرار گرفته است. وو و همکاران [۱۵] کمانش و پس کمانش حرارتی ورق‌های تابعی مدرج تقویت شده با استفاده از گرافن را با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته تحلیل کرده است. در این پژوهش اثرات نحوه توزیع نانوذرات در لایه‌ها بر دمای بحرانی نشان داده شده است. یانگ و همکارانش [۱۶] اثر اندازه و هندسه نانورق‌های گرافن را بر کمانش مکانیکی ورق مورد مطالعه قرار داده است. کمانش دینامیکی ورق‌های ساندویچی با هسته متخلخل تقویت شده با استفاده از نانوذرات گرافن به صورت تابعی مدرج توسط لی و همکاران [۱۷] مورد پژوهش قرار گرفته است. در این کار اثرات بستر الاستیک وینکلر-پسترناک، دمپینگ و حرارت بر پاسخ ورق تحلیل شده است. پایداری غیرخطی ورق FG-GPLRC با استفاده از تکنیک مربعات تفاضلی متغیرات VDQ توسط

غلامی و همکارانش [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. کیانی و میرزایی [۱۹] پس کمانش حرارتی ورق تقویت شده با استفاده از گرافن را بررسی کردند. در کاری دیگر کیانی [۲۰] کمانش حرارتی ورق های لایه‌ای انحراف داده شده را با استفاده از روش المان محدود بررسی کرده است.

در این مطالعه توابع شکل B-spline به منظور تخمین پاسخ مورد استفاده قرار گرفته است. بر پایه روش المان محدود رفتار کمانش پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از گرافن توسط ونگ و همکارانش [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها نشان داده‌اند که افزایش لایه‌های نانوکامپوزیت می‌تواند به طور قابل توجهی میدان تنش ایجاد شده بین لایه‌ها را کاهش دهد. در پژوهش دیگر این محققان [۲۲] کمانش پیچشی پوسته استوانه تقویت شده با نانوتقویت کننده‌های گرافن با فرض بریدگی بر پوسته را مطالعه کردند. لیو و همکاران [۲۳] با ارائه مدل الاستیسیته سه بعدی، کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه FG-GPLRC تحت پیش تنش را مورد مطالعه قرار داد. بر اساس یک مدل مرتبه بالای برشی و پیاده‌سازی روش حل گلرکین و همچنین استفاده از فرضیات تئوری دائل کمانش پوسته استوانه‌ای توسط ژوو و همکارانش [۲۴] بررسی شده است. هابوسی و دستیارانش [۲۵] کمانش دینامیکی متقارن محوری پوسته کروی متخلخل تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن را مطالعه کرد. در این مقاله روش المان محدود و نیومارک به منظور حل معادلات دیفرانسیلی در بعد مکان و زمان استفاده شده است.

همانطور که مطالعات فوق نشان می‌دهد تحقیقات زیادی بر سازه‌های نانوکامپوزیت تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن وجود دارد؛ اگرچه کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای برای پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از نانو لوله‌ها CNTs [۲۶] و لایه‌های گرافن Graphene Sheet [۲۷] توسط شن انجام شده است اما پایداری حرارتی پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از کلوخه‌های گرافن GPLs در تحقیقات صورت گرفته دیده نمی‌شود. به همین منظور پژوهش حاضر به بررسی کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای تحت بار حرارتی یکنواخت می‌پردازد. میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول برشی تخمین زده شده است و روابط سینماتیکی بر اساس مدل دائل و همچنین تئوری غیرخطی ون-کارمن به دست آمده‌اند. قانون میکرو مکانیکی هالپین-سای به منظور همگن سازی مدول یانگ استفاده شده است. روابط تنش-کرنش بر اساس قوانین هوک و ترموالاستیسیته خطی استخراج شده است. تحلیل پیش‌کمانش با فرض تغییر شکل غشایی خطی انجام شده است و پس از آن با ارائه معیار تعادل همسایگی معادلات پایداری استخراج شده‌اند. روند مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته دوبعدی به منظور حل معادلات تعادل استفاده شده تا در نهایت دمای بحرانی کمانش پوسته با استفاده از حل مسئله مقدار ویژه به دست آید. در نهایت اثر پارامترهای مختلف از جمله توزیع تقویت کننده‌ها، هندسه سازه، و شرایط مرزی مختلف بر مقدار دمای بحرانی نشان داده شده است.

۲-ارائه معادلات

پوسته استوانه‌ای ساخته شده از لایه‌های تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن با ضخامت h ، شعاع R و طول L در نظر گرفته شده است. سیستم مختصات متعامد استوانه‌ای (x, θ, z) بر لبه دایره‌ای پوسته طبق شکل (۱) قرار داده شده است. بردار z بر صفحه میانی ضخامت پوسته در نظر گرفته شده و جهت مثبت آن به سمت بیرون فرض شده است.

۱-۲- همگن سازی خواص

در این مقاله نانوکامپوزیت با تعداد لایه‌های زوج در نظر گرفته شده است. سه مدل تابعی مدرج با نام‌های FG-X، FG-O و FG-U مورد استفاده قرار گرفته است. مدل FG-U به صورت یک کامپوزیت همگن و ایزوتروپیک عمل می‌کند و لذا تغییرات کسر جرمی گرافن‌ها در طول ضخامت صفر است. از طرف دیگر مدل FG-X به گونه‌ای است که لایه‌های بالایی و پایینی بیشترین مقدار گرافن را دارند و FG-O به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که لایه‌های میانی بیشترین مقدار از تقویت کننده را دارند. مقدار کسر حجمی هر لایه $V_{GPL}^{(k)}$ برای هر لایه با استفاده از روابط زیر برای هر نوع از الگوی تقویت شدگی محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} U - GPLRC : V_{GPL}^{(k)} &= V_{GPL}^* \\ X - GPLRC : V_{GPL}^{(k)} &= 2V_{GPL}^* |2k - N_L - 1| / N_L \\ O - GPLRC : V_{GPL}^{(k)} &= 2V_{GPL}^* (1 - |2k - N_L - 1| / N_L) \end{aligned} \quad (1)$$

که k از 1 تا N_L تغییر می‌کند. کسر حجمی کل V_{GPL}^* نامیده می‌شود و با استفاده از کسر جرمی کل گرافن استفاده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + \left(\frac{\rho_{GPL}}{\rho_m}\right) (1 - W_{GPL})} \quad (2)$$

در معادله فوق ρ_{GPL} و ρ_m به ترتیب چگالی گرافن و زمینه را نمایش می‌دهند. بر اساس برخی مقالات [۱۵] نشان داده شده است که اندازه و هندسه نانورق‌ها دو عامل تأثیر گذار می‌باشد؛ به همین منظور برای محاسبه و استخراج مدول یانگ مؤثر پوسته از قانون پرکاربرد هالپین-سای که این عوامل را نیز لحاظ می‌کند، استفاده شده است. این اصل به صورت زیر بیان می‌گردد [۱۵]:

$$E^{(k)} = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(k)}} \times E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{(k)}} \times E_m \quad (3)$$

که η_L و η_T پارامترهای کمکی بوده و توسط روابط (۴) معرفی می‌گردند:

$$\eta_L = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right) + \xi_L}, \quad \eta_T = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right) + \xi_T} \quad (4)$$

قابل توجه است که ξ_L و ξ_T مدول یانگ گرافن و زمینه ایزوتروپیک می‌باشد. ضرایب هندسی نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\xi_L = 2 \left(\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}}\right), \quad \xi_T = 2 \left(\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}\right) \quad (5)$$

در رابطه (۵)، t_{GPL} ، a_{GPL} و b_{GPL} ضخامت، طول و عرض نانوگرافن می‌باشند. خواص دیگر ترمومکانیکی مؤثر مانند ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی با استفاده از قانون ترکیب وویت مطابق رابطه زیر حساب می‌شوند:

$$\begin{aligned}\alpha^{(k)} &= \alpha_{GPL} V_{GPL}^{(k)} + \alpha_m V_m^{(k)} \\ \nu^{(k)} &= \nu_{GPL} V_{GPL}^{(k)} + \nu_m V_m^{(k)}\end{aligned}\quad (۶)$$

در این رابطه زیروند m و GPL نشان دهنده زمینه و گرافن می‌باشند. قابل ذکر است که کسر حجمی زمینه پلیمری با استفاده از معادله زیر قابل محاسبه است:

$$V_m = 1 - V_{GPL} \quad (۷)$$

۲-۲- استخراج معادلات تعادل

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته‌ها به منظور فرمول‌بندی روابط حاکم بر مسئله استفاده شده است. این تئوری برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم مناسب بوده که اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در معادلات لحاظ می‌کند. بر اساس این تئوری مؤلفه‌های میدان جابجایی (u, v, w) در هر نقطه از دامنه پوسته استوانه‌ای با استفاده از روابط زیر تخمین زده می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned}u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\psi_1(x, \theta) \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z\psi_2(x, \theta) \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta)\end{aligned}\quad (۸)$$

که (u_0, v_0, w_0) به ترتیب نشان دهنده جابجایی سطح میانی در جهات (x, θ, z) هستند. همچنین (ψ_1, ψ_2) دوران بردار عمود بر سطح میانی حول محورهای (θ, x) هستند. بر اساس فرضیات دائل (پوسته‌های کم عمق) و همچنین تئوری غیرخطی هندسی ون-کارمن مؤلفه‌های کرنش-جابجایی برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\varepsilon^1\} \quad (۹)$$

که

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + \frac{1}{2} w_{0,x}^2 \\ \frac{1}{R} (v_{0,\theta} + w_0) + \frac{1}{2R^2} w_{0,\theta}^2 \\ \frac{1}{R} w_{0,\theta} + \psi_2 \\ w_{0,x} + \psi_1 \\ v_{0,x} + \frac{1}{R} u_{0,\theta} + \frac{1}{R} w_{0,x} w_{0,\theta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_4^1 \\ \varepsilon_5^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{1,x} \\ \frac{1}{R} \psi_{2,\theta} \\ 0 \\ 0 \\ \psi_{2,x} + \frac{1}{R} \psi_{1,\theta} \end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

علامت ، نشان دهنده مشتق جزئی تابع نسبت به جهت بعد از آن می‌باشد. بر اساس قانون هوک (ترموالاستیسیته خطی) قوانین تنش- کرنش برای هر لایه از نانوکامپوزیت به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(k)} \right) \quad (11)$$

در روابط فوق ΔT نشان دهنده اختلاف دمای پوسته با دمای مرجع می‌باشد. علاوه بر این، ثوابت سفتی ماده Q_{ij} برای هر لایه از لمینیت با استفاده از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود.

$$Q_{11}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 - \nu^{(k)2}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{1 - \nu^{(k)2}}$$

$$Q_{66}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad Q_{44}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} = \kappa Q_{66}^{(k)} \quad (12)$$

در تحلیل ورق‌ها و پوسته‌ها بهتر است که به جای تنش از منته‌ها آن استفاده شود. به همین منظور منته‌های تنش غشایی، خمشی و برشی با انتگرال گیری از تنش‌ها در جهت ضخامت محاسبه می‌شوند:

$$(N_{11}, N_{22}, N_{12}) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)^{(k)} dz$$

$$(M_{11}, M_{22}, M_{12}) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)^{(k)} dz$$

$$(Q_1, Q_2) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_5, \sigma_4)^{(k)} dz \quad (13)$$

همچنین نیرو و ممان حرارتی ایجاد شده در اثر بارگذاری حرارتی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(N^T, M^T) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z) \frac{E^{(k)} \alpha^{(k)}}{1 - \nu^{(k)}} \Delta T dz \quad (14)$$

قابل ذکر است که به دلیل بارگذاری حرارتی یکنواخت و همچنین نوع تقویت نانوکامپوزیت ممان حرارتی برابر صفر می‌باشد. حالت استاتیکی اصل جابجایی‌های مجازی به منظور استخراج معادلات تعادل حاکم بر کمانش پوسته استفاده شده است.

در غیاب نیروهای خارجی مکانیکی، انرژی پتانسیل کل پوسته تحت بارگذاری حرارتی P به انرژی کرنشی کل پوسته U کاهش می‌یابد. بنابراین حالت تعادل پوسته استوانه FG-GPLRC به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\delta U = 0 \quad (۱۵)$$

که

$$\delta U = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-0.5h}^{+0.5h} \sigma_i \delta \varepsilon_i R dz dx d\theta, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6 \quad (۱۶)$$

با استفاده از معادله (۱۶) و انجام عملیات‌های ریاضی متناسب (انتگرال‌گیری جزیه‌جز)، معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای به صورت تابعی از منته‌های تنش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta u_0 : N_{11,x} + \frac{1}{R} N_{12,\theta} = 0$$

$$\delta v_0 : N_{12,x} + \frac{1}{R} N_{22,\theta} = 0$$

$$\delta w_0 : Q_{1,x} + \frac{1}{R} Q_{2,\theta} - \frac{1}{R} N_{22} + \left(N_{11} w_{0,x} + \frac{1}{R} N_{12} w_{0,\theta} \right)_{,x} + \left(\frac{1}{R^2} N_{22} w_{0,\theta} + \frac{1}{R} N_{12} w_{0,x} \right)_{,\theta} = 0$$

$$\delta \psi_1 : M_{11,x} + \frac{1}{R} M_{12,\theta} - Q_1 = 0$$

$$\delta \psi_2 : M_{12,x} + \frac{1}{R} M_{22,\theta} - Q_2 = 0 \quad (۱۷)$$

همچنین شرایط مرزی لبه‌های دایروی پوسته با استفاده از انتگرال‌گیری جزیه‌جز به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\text{For a Clamped edges (x = 0, L): } u_0 = \psi_1 = v_0 = \psi_2 = w_0$$

$$\text{For a Simply edges (x = 0, L): } u_0 = M_{11} = v_0 = \psi_2 = w_0 \quad (۱۸)$$

همچنین در زاویه 0 و 2π پیوستگی سینماتیکی و سینتیکی وجود دارد.

۲-۳- پیش‌کمانش

در پایداری حرارتی از نوع چند شاخگی (Bifurcation)، قبل از محاسبه دمای بحرانی کمانش لازم است که تغییر شکل ایجاد شده در پیش‌کمانش را محاسبه کرد. به دلیل کوپلینگ کشش-خمش در پوسته‌های استوانه‌ای معادلات (۱۷) باید برای استخراج تغییر شکل اولیه (در مرحله پیش‌کمانش) حل گردند. در این مقاله بارگذاری حرارتی به صورت یکنواخت و متقارن محوری در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی در لبه‌های پوسته یکنواخت و یکسان فرض شده است.

مطابق با این شرایط پیش کمانش پوسته استوانه‌ای به صورت متقارن محوری خواهد بود. در این حالت حل تنها معادلات اول، سوم و چهارم از معادله (۱۷) کافی می‌باشد. مطالعه غشایی خطی یکی از انواع حل ساده و اما مؤثر در پیش کمانش پوسته‌ها می‌باشد که در این پژوهش نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۲۹]. قابل ذکر است که تمامی انحنایها و ممان‌ها در تحلیل پیش کمانش غشایی خطی نادیده در نظر گرفته می‌شوند. در نهایت حل معادلات زیر به استخراج مسیر تغییر شکل اولیه پوسته استوانه‌ای می‌انجامد:

$$N_{11,x}^0 = 0, \quad N_{22}^0 = 0 \quad (19)$$

اندیس 0 نشان دهنده تحلیل پیش کمانش می‌باشد. با ترکیب معادله دوم و اول و انتگرال‌گیری از آن خواهیم داشت:

$$(A_{11}^2 - A_{12}^2)u_{0,x}^0 = (A_{11} - A_{12})N^T + \frac{C_1 A_{11}}{R} \quad (20)$$

که C_1 ثابت انتگرال‌گیری است. با انتخاب شرایط مرزی غیرمتحرک N_{11}^0 نیروی طولی در تحلیل پیش کمانش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N_{11}^0 = -\left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}}\right)N^T \quad (21)$$

۲-۴- استخراج معادلات پایداری پوسته

به منظور استخراج معادلات پایداری خطی، معیار تعادل همسایگی استفاده شده است. بر پایه این معیار مسیر تعادل ثانویه‌ای در همسایگی مسیر تعادل اولیه وجود دارد که این تعادل ثانویه شامل جابجایی‌های کوچک $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \psi_1^1, \psi_2^1)$ می‌باشد [۲۹]. بنابراین، کل جابجایی را می‌توان به صورت زیر مجزا کرد:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \\ v_0 &= v_0^0 + v_0^1 \\ w_0 &= w_0^0 + w_0^1 \\ \psi_1 &= \psi_1^0 + \psi_1^1 \\ \psi_2 &= \psi_2^0 + \psi_2^1 \end{aligned} \quad (22)$$

با جایگذاری روابط فوق در منته‌های تنش و پس از آن در معادلات تعادل و بعد از خطی سازی، معادلات پایداری پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از نانوورق‌های گرافن تحت بار حرارتی به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$A_{11}u_{0,xx}^1 + A_{12}\left(\frac{1}{R}v_{0,\theta x}^1 + \frac{1}{R}w_{0,x}^1\right) + A_{66}\left(\frac{1}{R}v_{0,\theta x}^1 + \frac{1}{R^2}u_{0,\theta\theta}^1\right) = 0$$

$$\frac{A_{12}}{R} u_{0,x\theta}^1 + \frac{A_{11}}{R} \left(\frac{1}{R} v_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{R} w_{0,\theta}^1 \right) + A_{66} \left(v_{0,xx}^1 + \frac{1}{R} u_{0,\theta x}^1 \right) = 0$$

$$A_{44} (w_{0,xx}^1 + \psi_{1,x}^1) + \frac{A_{44}}{R} \left(\frac{1}{R} w_{0,\theta\theta}^1 + \psi_{2,\theta}^1 \right) - \frac{A_{12}}{R} u_{0,x}^1 - \frac{A_{11}}{R} \left(\frac{1}{R} v_{0,\theta}^1 + \frac{1}{R} w_0^1 \right) - \left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) N^T w_{0,xx}^1 = 0$$

$$D_{11} \psi_{1,xx}^1 + \frac{D_{12}}{R} \psi_{2,\theta x}^1 + D_{66} \left(\frac{1}{R} \psi_{2,\theta x}^1 + \frac{1}{R^2} \psi_{1,\theta\theta}^1 \right) - A_{44} (w_{,x}^1 + \psi_1^1) = 0$$

$$\frac{D_{12}}{R} \psi_{1,x\theta}^1 + \frac{D_{11}}{R^2} \psi_{2,\theta\theta}^1 + D_{66} \left(\psi_{2,xx}^1 + \frac{1}{R} \psi_{1,\theta x}^1 \right) - A_{44} \left(\frac{1}{R} w_{,\theta}^1 + \psi_2^1 \right) = 0 \quad (23)$$

که در روابط فوق (A_{ij}, D_{ij}) ضرایب ماتریس سفتی می‌باشند:

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (Q_{ij}^{(k)}, z^2 Q_{ij}^{(k)}) dz, \quad i, j=1,2,4,5,6 \quad (24)$$

همچنین دو مدل از شرایط مرزی متناسب با پدیده کمناش حرارتی پوسته FG-GPLRC در لبه‌های دایروی استوانه در نظر گرفته شده است. گیردار C و ساده S نام‌های آن‌ها می‌باشد که روابط ریاضی آن‌ها در زیر آورده شده است:

$$\text{Simply: } u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = M_{11}^1 = \psi_2^1 = 0$$

$$\text{Clamped: } u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = \psi_1^1 = \psi_2^1 = 0 \quad (25)$$

قابل ذکر است که در زاویه 0 و 2π نیز شرایط مرزی پیوستگی وجود دارد.

۳- روش حل معادلات

روش حل مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته GDQ یک ابزار حل معادلات دیفرانسیل کوپل بوده که در عین سادگی دارای همگرایی بسیاری مناسبی می‌باشد. این روش به گونه‌ای عمل می‌کند که مشتق یک تابع به طور مثال \mathbf{u} را به یک سری از ضرب ضرایب وزنی و مقدار تابع در نقاط مشخص شده در دامنه حل تبدیل می‌کند [۳۰]. به طور مثال مشتقات مرتبه اول و دوم یک تابع در یک دامنه دوبعدی استوانه‌ای به صورت زیر با استفاده از روش GDQ به روابط جبری تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{,x}|_{x=x_p,\theta=\theta_q} &= \sum_{p'=1}^{N_x} \sum_{q'=1}^{N_\theta} C_{pp'}^x \delta_{qq'}^\theta \mathbf{u}|_{x=x_{p'},\theta=\theta_{q'}} \\
 \mathbf{u}_{,\theta}|_{x=x_p,\theta=\theta_q} &= \sum_{p'=1}^{N_x} \sum_{q'=1}^{N_\theta} \delta_{pp'}^x C_{qq'}^\theta \mathbf{u}|_{x=x_{p'},\theta=\theta_{q'}} \\
 \mathbf{u}_{,x\theta}|_{x=x_p,\theta=\theta_q} &= \sum_{p'=1}^{N_x} \sum_{q'=1}^{N_\theta} C_{pp'}^x C_{qq'}^\theta \mathbf{u}|_{x=x_{p'},\theta=\theta_{q'}} \\
 \mathbf{u}_{,xx}|_{x=x_p,\theta=\theta_q} &= \sum_{p'=1}^{N_x} \sum_{q'=1}^{N_\theta} \bar{C}_{pp'}^x \delta_{qq'}^\theta \mathbf{u}|_{x=x_{p'},\theta=\theta_{q'}} \\
 \mathbf{u}_{,\theta\theta}|_{x=x_p,\theta=\theta_q} &= \sum_{p'=1}^{N_x} \sum_{q'=1}^{N_\theta} \delta_{pp'}^x \bar{C}_{qq'}^\theta \mathbf{u}|_{x=x_{p'},\theta=\theta_{q'}}
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$p = 1, 2, \dots, N_x, \quad q = 1, 2, \dots, N_\theta$$

که N_x و N_θ به ترتیب تعداد نقاط انتخاب شده در جهت x و θ می‌باشد. $\delta_{pp'}^x$ و $\delta_{qq'}^\theta$ برابر یک است زمانی که $p = p'$ و $q = q'$ باشد. علاوه بر این ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول و $C_{pp'}^x$ و $C_{qq'}^\theta$ ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم می‌باشند. این ضرایب وزنی با استفاده از توابع میان یابی چند جمله‌ای لاگرانژ و مشتقاتش به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_{pp'}^x = \begin{cases} \frac{\Pi(x_p)}{(x_p - x_{p'})\Pi(x_{p'})} & \text{when } p \neq p' \\ - \sum_{k=1, k \neq p}^{N_x} C_{pk}^x & \text{when } p = p' \end{cases} \tag{۲۷}$$

$$C_{qq'}^\theta = \begin{cases} \frac{\Pi(\theta_q)}{(\theta_q - \theta_{q'})\Pi(\theta_{q'})} & \text{when } q \neq q' \\ - \sum_{k=1, k \neq q}^{N_\theta} C_{qk}^\theta & \text{when } q = q' \end{cases}$$

$$p, p' = 1, 2, \dots, N_x \quad q, q' = 1, 2, \dots, N_\theta$$

که

$$\Pi(x_p) = \prod_{k=1, k \neq p}^{N_x} (x_p - x_k), \quad \Pi(\theta_q) = \prod_{k=1, k \neq q}^{N_\theta} (\theta_q - \theta_k) \tag{۲۸}$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{pp'}^x = 2 \left(C_{pp}^x C_{pp'}^x - \frac{C_{pp'}^x}{(x_p - x_{p'})} \right), & p \neq p' \\ p, p' = 1, 2, \dots, N_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{pp}^x = - \sum_{k=1, k \neq p}^{N_x} \bar{C}_{pk}^x, & p = p', \\ p = 1, 2, \dots, N_x \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{qq'}^\theta = 2 \left(C_{qq}^\theta C_{qq'}^\theta - \frac{C_{qq'}^\theta}{(\theta_q - \theta_{q'})} \right), & q \neq q' \\ q, q' = 1, 2, \dots, N_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{C}_{qq}^\theta = - \sum_{k=1, k \neq q}^{N_\theta} \bar{C}_{qk}^\theta, & q = q' \\ q = 1, 2, \dots, N_\theta \end{cases}$$

نوع توزیع نقاط در دامنه حل یک نقش مهم را در دقت و همگرایی پاسخ ایفا می‌کند. در این مقاله دامنه پوسته استوانه‌ای با استفاده از مدل گوس-لوباتو-چبیشف که پایداری و دقت آن اثبات شده است جداسازی شده است. این مدل از توزیع در جهات x و θ پوسته به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$x_p = L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{p-1}{N_x-1} \pi \right) \right), \quad p = 1, 2, \dots, N_x \quad (30)$$

$$\theta_q = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{q-1}{N_\theta-1} \pi \right) \right), \quad q = 1, 2, \dots, N_\theta \quad (31)$$

از آوردن معادلات و شرایط مرزی متناسب جداسازی شده جبری در این مقاله به دلیل اختصار صرف‌نظر شده است؛ اگرچه نمونه‌هایی از استفاده این روش در رفرنس [۳۰] آورده شده است. پس از اعمال این روش به معادلات و استخراج معادلات جبری، فرم ماتریسی آن به صورت زیر حاصل می‌شود که یک مسئله مقدار ویژه می‌باشد:

$$(K_E - N^T K_G) X = 0 \quad (32)$$

پس از حل این مسئله مقدار ویژه و با استفاده از معادله (۱۴) دمای بحرانی کمانش پوسته استوانه FG-GPLRC تحت بارحرارتی به دست می‌آید.

۴- نتایج و بحث

در این بخش نتایج عددی حاصل از فرایند توضیح داده شده در قسمت‌های قبل به منظور تحقیق در دمای بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بار حرارتی یکنواخت نشان داده خواهد شد. خواص ترمو- مکانیکی اپوکسی به عنوان زمینه و نانورق‌های گرافن به عنوان تقویت‌کننده در جدول (۱) نشان داده شده است:

جدول ۲- خواص ترمو- مکانیکی نانورق گرافن و اپوکسی [۱۵]

نوع خاصیت	اپوکسی Epoxy	نانورق گرافن GPL
مدول الاستیسیته E (GPa)	3.0	1010
دانسیتة جرمی ρ (kg/m^3)	1200	1062.5
ضریب انبساط حرارتی α ($1/\text{K}$)	60.0×10^{-6}	5.0×10^{-6}
ضریب پواسون ν	0.34	0.186

در این مقاله تمامی نتایج برای نانوتقویت‌کننده‌هایی با ابعاد زیر محاسبه شده‌اند:

$$b_{GPL} = 1.5\mu\text{m}, a_{GPL} = 2.5\mu\text{m}, t_{GPL} = 1.5\text{nm}$$

بعد از نشان دادن همگرایی روش عددی استفاده شده و همچنین صحت سنجی نتایج با پژوهش‌های افراد دیگر، چندین نتیجه عددی جدید به منظور رفتارشناسی پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC تحت بار حرارتی نشان داده خواهد شد و بحث می‌شود. قابل توجه است که در کلیه نتایج دمای مرجع 300K فرض شده است.

۴-۱- همگرایی و اعتبارسنجی

جدول (۲) همگرایی فرمولاسیون و روش‌های عددی مورد استفاده در این مقاله را برای کمانش پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن نشان می‌دهد. در این مطالعه ابعاد پوسته به صورت $R/h = 200$ و $L/h = 200$ انتخاب شده‌اند. علاوه بر این، پوسته ذکر شده به صورت FG-X لایه‌گذاری شده و کسر جرمی گرافن مورد استفاده در آن $W_{GPL} = 0.3\%$ می‌باشد. شرایط مرزی گیردار در دو طرف پوسته C-C فرض شده است. در این قسمت مقادیر بهینه تعداد لایه برای کامپوزیت و تعداد نقاط جداسازی بررسی شده است. اولین نتیجه‌ای که از جدول (۲) گرفته می‌شود این است که تغییر مقدار دمای بحرانی پس از ۱۰ لایه بسیار کاهش می‌یابد و لذا ساخت نانوکامپوزیت با تعداد لایه $N_L = 10$ مناسب می‌باشد. همچنین، با توجه به جدول ذکر شده تعداد نقاط جداسازی ۲۵ در جهات x و θ برای روش GDQ دارای همگرایی بسیار مناسبی می‌باشد. در نتایج دیگر این مقاله $N_x = N_\theta = 25$ و $N_L = 10$ در نظر گرفته شده است.

جدول (۳) نتایج حاصل از فرمولاسیون و روش استفاده شده در این پژوهش را با نتایج مقاله‌ای از شن [۳۱] اعتبارسنجی می‌کند. نتایج برای چهارماده متفاوت و دو حالت خواص وابسته به دما و مستقل از دما صحنه گذاری شده است. به منظور ارائه نتایج نسبت شعاع به ضخامت $R/h = 400$ فرض شده است و شرایط مرزی ساده لحاظ شده است.

جدول ۲- همگرایی دمای بحرانی $T_{cr}(K)$ کمانش پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC گیردار به ازای تعداد لایه‌ها و تعداد نقاط جداسازی دامنه

$N_x = N_\theta$	N_L							
	2	4	6	8	10	12	14	20
13	358.260	358.260	363.370	363.638	363.761	363.828	363.868	363.925
15	353.639	358.230	359.057	359.345	359.478	359.550	359.594	359.655
17	352.603	357.387	358.240	358.536	358.673	358.747	358.791	358.854
19	352.440	357.252	358.108	358.405	358.542	358.617	358.662	358.725
21	352.396	357.221	358.076	358.373	358.510	358.584	358.629	358.692
23	352.370	357.194	358.035	358.325	358.459	358.532	358.575	358.637
25	352.301	357.044	357.878	358.168	358.301	358.374	358.417	358.479

همچنین پارامتری به اسم \bar{Z} تعریف شده که مقدار آن برابر $\frac{L^2}{Rh}$ می‌باشد. این پارامتر نیز برای انجام صحت سنجی 300 در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته مواد مختلف استفاده شده به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{Ti} - 6\text{Al} - 4\text{V}: 122.56e9(1 - 4.586e - 4T)$$

$$\text{Stainless Steel}: 201.04e9(1 + 3.079e - 4T - 6.534e - 7T^2)$$

$$\text{Zirconia}: 244.27e9(1 - 1.371e - 3T + 1.214e - 6T^2 - 3.681e - 10T^3)$$

$$\text{Silicon nitrid}: 348.43e9(1 - 3.070e - 4T + 2.160e - 7T^2 - 8.946e - 11T^3)$$

(۳۳)

همچنین ضریب انبساط حرارتی این مواد به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\text{Ti} - 6\text{Al} - 4\text{V}: 7.5788e - 6(1 + 6.638e - 4T - 3.147e - 6T^2)$$

$$\text{Stainless Steel}: 12.330e - 6(1 + 8.086e - 4T)$$

$$\text{Zirconia}: 12.766e - 6(1 - 1.491e - 3T + 1.006e - 5T^2 - 6.778e - 11T^3)$$

$$\text{Silicon nitrid}: 5.8723e - 6(1 + 9.095e - 4T)$$

(۳۴)

در حالت خواص مستقل از دما مقدار $T = 300K$ جایگذاری می‌شود. نتایج نشان از تطابق خوب فرمولاسیون و روش استفاده شده دارد و حداکثر اختلاف تقریباً 7% می‌باشد که احتمالاً به خاطر استفاده از تئوری کلاسیک و یا تحلیل پیش کمانش غیرخطی در مقاله شن [۳۱] می‌باشد.

جدول ۳- دمای بحرانی $T_{cr}(K)$ کمانش پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک با شرایط مرزی ساده (Simply Supported)

ماده	مرجع	خواص وابسته به دما	خواص مستقل از دما
Ti-6AL-V	Present	459.988	469.645
	Shen [29]	491.267	491.267
Stainlis Steel	Present	392.663	386.658
	Shen [29]	382.266	386.658
Zirconia	Present	365.632	380.972
	Shen [29]	359.146	371.416
Si3N4	Present	478.604	501.393
	Shen [29]	459.439	477.627

۴-۲- نتایج عددی

جداول (۴و۳) اثر طول و شعاع پوسته استوانه را بر کمانش آن نشان می‌دهند. جدول (۳) برای پوسته استوانه تقویت شده با الگوی FG-X و کسر جرمی 0.5% با شرایط مرزی ساده در دو طرف آن (S-S) آماده شده است. از طرفی جدول (۴) دمای بحرانی پوسته با همان شرایط تقویت شدگی اما با شرایط مرزی گیردار را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که برای هر دو حالت شرایط مرزی با افزایش L/h دمای بحرانی پوسته به صورت خیلی اندک و آرام افزایش پیدا می‌کند. دلیل اثر کم طول پوسته بر دمای بحرانی استفاده از پیش کمانش غشایی می‌باشد که باعث می‌شود اثر خمش در شرایط مرزی دیده نشود. همین تئوری غشایی باعث شده تا اختلاف زیادی بین دمای بحرانی کمانش پوسته با شرایط مرزی گیردار و ساده نباشد. از طرف دیگر مشاهده می‌گردد که افزایش نسبت شعاع به ضخامت باعث کاهش شدید دمای بحرانی کمانش می‌شود. شکل (۲) نیز اثر R/h و L/h را بر کمانش پوسته X-GPLRC با شرایط مرزی گیردار (C-C) نشان می‌دهد. کسر جرمی به کار برده شده در پوسته معادل $W_{GPL} = 0.3\%$ می‌باشد. همان نتایج جداول قبل نیز در این قسمت دیده می‌شود.

جدول ۳- دمای بحرانی $T_{cr}(K)$ کمانش پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC به ازای R/h و L/h متفاوت با شرایط مرزی ساده (Simply Supported)

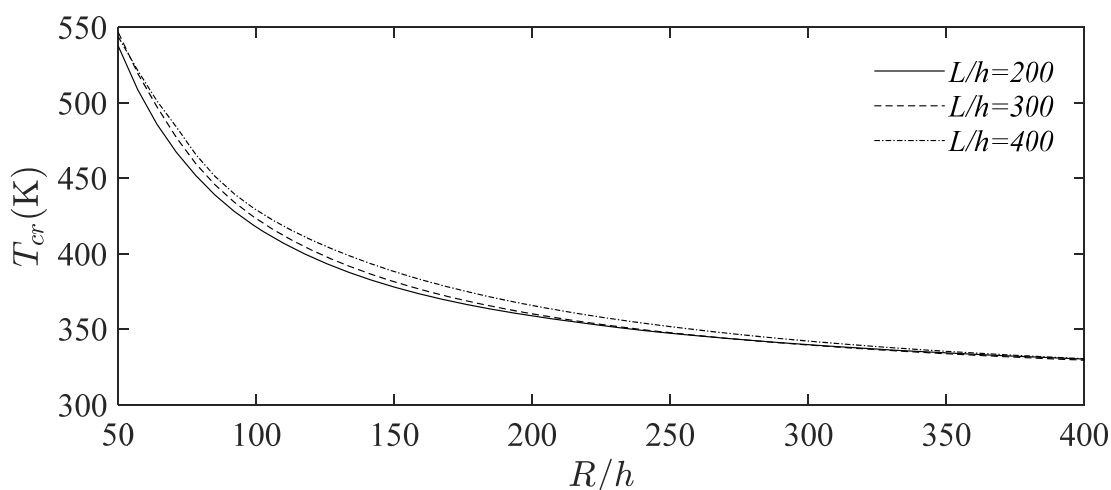
L/h	R/h			
	100	200	300	400
200	416.776	358.547	339.069	329.325
250	416.771	358.524	339.069	329.389
300	417.044	358.522	339.052	329.295
350	417.358	358.523	339.059	329.301
400	417.542	358.618	339.044	329.316
450	417.844	358.879	339.044	329.286
500	418.201	358.957	339.295	329.314
550	418.448	359.107	339.349	329.415

جدول ۴- دمای بحرانی $T_{cr}(K)$ کمانش پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC به ازای R/h و L/h متفاوت با شرایط مرزی گیردار (Clamped)

L/h	R/h			
	100	200	300	400
200	417.881	359.853	340.503	330.765
250	417.562	359.406	340.039	330.281
300	417.481	359.155	339.725	329.995
350	417.859	359.009	339.559	329.824
400	418.292	359.033	339.444	329.715
450	418.526	359.311	339.440	329.627
500	418.775	359.794	339.556	329.617
550	419.010	360.345	339.802	329.661

علاوه بر این مشاهده می‌گردد که اثر طول بر پایداری سیستم با افزایش شعاع کاهش پیدا می‌کند. همینطور نتیجه می‌شود که برای هر نسبت طول به ضخامت تغییرات شعاع بر دمای کمانش در محدوده نسبت‌های R/h کم بسیار بیشتر از محدوده R/h زیاد است. جدول (۵) دمای بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده-گیردار (C-S) با نسبت طول به ضخامت و شعاع به ضخامت 200 برای مدل‌های تقویت‌شدگی و کسر جرمی‌های مختلف را برآورد می‌کند. مشاهده می‌گردد که در یک کسر جرمی ثابت حالت FG-X پایدارترین و FG-O ناپایدارترین سیستم را ایجاد می‌کند. همچنین دیده می‌شود که با تغییر کسر جرمی، دمای کمانش پوسته تقویت شده با مدل U دارای تغییرات بسیار ناچیز است. علاوه بر این، با افزایش کسر جرمی دمای پایداری سیستم در حالت X و O به ترتیب افزایش و کاهش دارد.

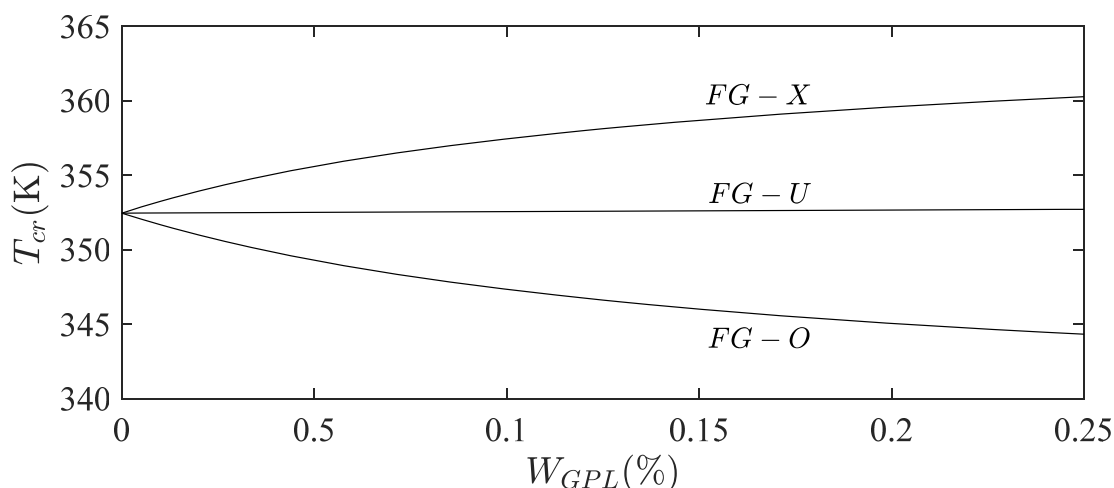
شکل (۳) نیز نمودار تغییرات دمای کمانش پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC با شرایط مرزی گیردار را برای $L/h = R/h = 200$ نشان می‌دهد. علاوه بر نتایج حاصل شده از جدول پنج می‌توان متوجه شد که شیب تغییرات دمای کمانش برای حالت X و O در ابتدا زیاد و پس از آن کاهش می‌یابد.



شکل ۲- تغییرات دمای بحرانی T_{cr} (K) کمانش پوسته گیردار نسبت به تغییرات R/h برای سه مقدار متفاوت L/h

جدول ۵- دمای بحرانی T_{cr} (K) کمانش پوسته استوانه‌ای FG-GPLRC به ازای الگوهای تابعی مدرج و کسر جرمی‌های متفاوت با شرایط مرزی ساده-گیردار (C-S)

$W_{GPL}\%$	FG-Model		
	U	X	O
0.1	351.407	354.409	348.235
0.2	351.457	356.199	346.275
0.3	351.507	358.251	344.931
0.4	351.557	358.251	343.956
0.5	351.607	358.910	343.221
0.6	351.657	359.437	342.650
0.7	351.708	359.872	342.196
0.8	351.758	360.242	341.830
0.9	351.809	360.562	341.529



شکل ۳- تغییرات دمای بحرانی $T_{cr}(K)$ کمانش پوسته گیردار نسبت به تغییرات کسر حجمی نانورق‌های گرافن برای سه حالت مختلف تقویت مدرج تابعی

۵- نتیجه گیری

مدل چندشاخگی کمانش حرارتی برای پوسته استوانه تقویت شده با استفاده از نانورق‌های گرافن با مدل‌های تابعی مدرج تحت بار حرارتی بررسی شده است. گرافن‌ها به صورت تصادفی جهت گذاری شده و به صورت یکنواخت در هر لایه از نانوکامپوزیت توزیع شده است. معادلات تعادل حاکم بر مسئله بر اساس تئوری مرتبه اول برشی، فرضیات دائل و روابط غیرخطی هندسی ون-کارمن به دست آمده‌اند. برای استخراج مسیر پیش از کمانش از حل خطی غشایی استفاده شده است و معیار نقطه همسایگی برای محاسبه دمای بحرانی کمانش استفاده شده است. پس از انجام چندین مطالعه دیده شده است که:

- افزایش نسبت شعاع به ضخامت باعث کاهش دمای بحرانی کمانش در حالی که افزایش نسبت طول به ضخامت تأثیر به سزای بر کمانش ندارد.
- با انتخاب مدل X به عنوان تابعی مدرج برای تقویت سازه بیشترین دمای کمانش دیده می‌شود در حالیکه مدل O کمترین مقدار را دارد و همچنین مدل U دارای دمای بحرانی بین این دو حالت را دارد.
- افزایش کسر جرمی گرافن‌ها در مدل X باعث افزایش پایداری پوسته می‌شود در حالی که افزایش گرافن‌ها در مدل O باعث کاهش آن می‌شود. قابل ذکر است که تغییر کسر جرمی در حالت مدل U تأثیری بر دمای کمانش ندارد.
- به دلیل انتخاب پیش از کمانش غشایی، شرایط مرزی تأثیر ناچیزی بر پایداری سیستم داشته است.

مراجع

- [1] Ebrahimi, F., and Dabbagh, A., "A Comprehensive Review on Modeling of Nanocomposite Materials and Structures", Journal of Computational Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 197-209, (2019).

- [2] Novoselov, K.S., Geim, A.K., Morozov, S.V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S.V., Grigorieva, I.V., and Firsov, A.A., "Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films", *Science*, Vol. 306, pp. 666-669, (2004).
- [3] Reddy, C.D., Rajendran, S., and Liew, K.M., "Equilibrium Configuration and Continuum Elastic Properties of Finite Sized Graphene", *Nanotechnology*, Vol. 17, pp. 864-870, (2006).
- [4] Scarpa, F., Adhikari, S., and Phani, A.S., "Effective Elastic Mechanical Properties of Single Layer Graphene Sheets", *Nanotechnology*, Vol. 20, Art No. 065709, (2009).
- [5] Cadelano, E., Palla, P.L., Giordano, S., and Colombo, L., "Nonlinear Elasticity of Monolayer Graphene", *Physical Review Letters*, Vol. 102, Art No. 235502, (2009).
- [6] Ni, Z., Bu, H., Zou, M., Yi, H., Bi, K., and Chen, Y., "Anisotropic Mechanical Properties of Graphene Sheets from Molecular Dynamics", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 405, pp. 1301-1306, (2010).
- [7] Rafiee, M.A., Rafiee, J., Wang, Z., Song, H., Yu, Z.Z., and Koratkar, N., "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content", *ACS nano*, Vol. 3, pp. 3884-3890, (2009).
- [8] Yang, J., Wu, H., and Kitipornchai, S., "Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Multilayer Graphene Platelet-reinforced Composite Beams", *Composite Structures*, Vol. 161, pp. 111-118, (2017).
- [9] Wu, H., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Dynamic Instability of Functionally Graded Multilayer Graphene Nanocomposite Beams in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 162, pp. 244-254, (2017).
- [10] Kitipornchai, S., Chen, D., and Yang, J., "Free Vibration and Elastic Buckling of Functionally Graded Porous Beams Reinforced by Graphene Platelets", *Materials and Design*, Vol. 116, pp. 656-665, (2017).
- [11] Song, M., Chen, L., Yang, J., Zhu, W., and Kitipornchai, S., "Thermal Buckling and Postbuckling of Edge-cracked Functionally Graded Multilayer Graphene Nanocomposite Beams on an Elastic Foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 161, pp. 105040, (2019).
- [12] Yang, Z., Yang, J., Liu, A., and Fu, J., "Nonlinear In-plane Instability of Functionally Graded Multilayer Graphene Reinforced Composite Shallow Arches", *Composite Structures*, Vol. 204, pp. 301-312, (2018).
- [13] Huang, Y., Yang, Z., Liu, A., and Fu, J., "Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Shallow Arches with Elastic Rotational Constraints under Uniform Radial Load", *Materials*, Vol. 11, pp. 910, (2018).
- [14] Song, M., Yang, J., Kitipornchai, S., and Zhu, W., "Buckling and Postbuckling of Biaxially Compressed Functionally Graded Multilayer Graphene Nanoplatelet-reinforced Polymer Composite Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 131, pp. 345-355, (2017).

- [15] Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J., "Thermal Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Graphene Nanocomposite Plates", *Materials and Design*, Vol. 132, pp. 430-441, (2017).
- [16] Yang, J., Dong, J., and Kitipornchai, S., "Unilateral and Bilateral Buckling of Functionally Graded Corrugated Thin Plates Reinforced with Graphene Nanoplatelets", *Composite Structures*, Vol. 209, pp. 789-801, (2019).
- [17] Li, Q., Wu, D., Chen, X., Liu, L., Yu, Y., and Gao, W., "Nonlinear Vibration and Dynamic Buckling Analyses of Sandwich Functionally Graded Porous Plate with Graphene Platelet Reinforcement Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 148, pp. 596-610, (2018).
- [18] Gholami, R., and Ansari, R., "Nonlinear Stability and Vibration of Pre/post-buckled Multilayer FG-GPLRPC Rectangular Plates", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 65, pp. 627-660, (2019).
- [19] Kiani, Y., and Mirzaei, M., "Isogeometric Thermal Postbuckling of FG-GPLRC Laminated Plates", *Steel and Composite Structures*, Vol. 32, pp. 821-832, (2019).
- [20] Kiani, Y., "NURBS-based Thermal Buckling Analysis of Graphene Platelet Reinforced Composite Laminated Skew Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 43, Issue. 1, pp. 90-108, (2020).
- [21] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., and Yang, J., "Eigenvalue Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells Reinforced with Graphene Platelets (GPL)", *Composite Structures*, Vol. 202, pp. 38-46, (2018).
- [22] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., Lu, F., and Yang, J., "Torsional Buckling of Graphene Platelets (GPLs) Reinforced Functionally Graded Cylindrical Shell with Cutout", *Composite Structures*, Vol. 197, pp. 72-97, (2018).
- [23] Liu, D., Kitipornchai, S., Chen, W., and Yang, J., "Three-dimensional Buckling and Free Vibration Analyses of Initially Stressed Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Cylindrical Shell", *Composite Structures*, Vol. 189, pp. 560-569, (2018).
- [24] Zhou, Z., Ni, Y., Tong, Z., Zhu, S., and Sun, J., "Accurate Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 151, pp. 537-550, (2019).
- [25] Haboussi, M., Sankar, A., and Ganapathi, M., "Nonlinear Axisymmetric Dynamic Buckling of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Spherical Caps", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 28, Issue. 2, pp. 127-140, (2021).
- [26] Shen, H.S., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 1030-1038, (2012).
- [27] Shen, H.S., and Xiang, Y., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of FG-GRC Laminated Cylindrical Shells with Temperature-dependent Material Properties", *Meccanica*, Vol. 54, pp. 283-297, (2019).

- [28] Reddy, J.N., "Theory and analysis of elastic plates and shells", CRC Press, (2006).
- [29] Eslami, M.R., "Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells", Springer, Switzerland, (2018).
- [30] Tornabene, F., Viola, E., and Inman, D. J., "2-D Differential Quadrature Solution for Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 328, pp. 259-290, (2009).
- [31] Shen, H.S., "Thermal Postbuckling Behavior of Functionally Graded Cylindrical Shells with Temperature-dependent Properties", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 1961-1974, (2004).

فهرست نمادهای انگلیسی

- A_{ij} : ضرایب سفتی کششی
- a_{GPL} : اندازه طول نانوورق گرافن
- b_{GPL} : اندازه عرض نانوورق گرافن
- C : ماتریس ضرایب وزنی
- D_{ij} : ضرایب سفتی خمشی
- E_{GPL} : مدول یانگ گرافن
- E_m : مدول یانگ پلیمر
- h : ضخامت پوسته
- L : طول پوسته استوانه
- M_{ij} : منتهجه خمشی پوسته
- M^T : منتهجه ممان حرارتی
- N_L : تعداد لایه‌های نانوکامپوزیت
- N_x : تعداد نقاط طولی
- N_θ : تعداد نقاط زاویه‌ای
- N_{ij} : منتهجه تنش درون صفحه
- N^T : منتهجه نیروی حرارتی
- P : انرژی پتانسیل کل
- Q_i : منتهجه تنش برشی
- Q_{ij} : سفتی‌های پوسته
- R : شعاع پوسته استوانه
- T : دمای پوسته

- T_0 : دمای اولیه پوسته
 t_{GPL} : اندازه ضخامت نانوورق گرافن
 U : انرژی کرنشی
 u : جابجایی طولی پوسته
 u_0 : جابجایی طولی تار خنثی
 $V_{GPL}^{(k)}$: کسر حجمی گرافن در هر لایه
 V_{GPL}^* : کسر حجمی کل گرافن
 v : جابجایی زاویه‌ای پوسته
 v_0 : جابجایی زاویه‌ای تار خنثی
 W_{GPL} : کسر جرمی گرافن
 W : جابجایی عرضی پوسته
 W_0 : جابجایی عرضی تار خنثی
 x : جهت طولی پوسته استوانه
 Z : جهت عمود بر پوسته
 α : ضریب انبساط حرارتی
 ε_{ij} : کرنش
 ξ_L : پارامتر هندسی طولی نانوورق گرافن
 ξ_T : پارامتر هندسی عرضی نانوورق گرافن
 η_L : توابع کمکی
 η_T : توابع کمکی
 ν : ضریب پواسون
 θ : جهت زاویه‌ای پوسته استوانه
 ρ_{GPL} : دانسیته جرمی گرافن
 ρ_m : دانسیته جرمی پلیمر
 σ_{ij} : تنش
 ψ_1 : دوران پوسته حول محور زاویه‌ای
 ψ_2 : دوران پوسته حول محور طولی

Abstract

In the current paper thermal buckling of cylindrical shells subjected to uniform temperature rise is investigated. Nanocomposite shell reinforced by graphene platelets (GPLs). It is assumed that the GPLs are randomly oriented and uniformly distributed along in each layer. Variation of volume fraction from each layer to other is based on the several functionally graded types. The effective material properties are obtained using the Halpin-Tsai rule. The equilibrium equations are obtained considering the first order shear deformation shell theory, Donnell assumption, and Von-karman type of geometrical nonlinearity. The linear obtained stability equations are discrete utilizing the generalized differential quadrature procedure along the shell domain. Then the eigenvalue problem is solved and critical buckling temperature is calculated. In the section of numerical results, after validation, the effects of geometric parameter, boundary conditions, mass fraction of GPL, and also type of functionally graded on the stability of structure are studied.