

## بررسی مد ترکیبی مکانیک شکست در استوانه ایزوتروپیک نامحدود تضعیف شده توسط چندین ترک استوانه ای

مهدی پورسیفی<sup>۱</sup>

دانشجوی دکترا

رضا تیموری فعال<sup>۲</sup>

دانشیار

تحلیل تنش یک استوانه با ماده ایزوتروپیک تضعیف شده توسط چندین ترک استوانه ای هم محور با استوانه و تحت بارگذاری برشی و شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه، در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا حل نایجابی های سومیقلیانا و ولترا در استوانه با استفاده از حل گلرکین برای مسائل متقارن محوری بدست می‌آید. سپس با استفاده از حل نایجابی بدست آمده، معادلات انتگرالی برای استوانه حاوی تعداد دلخواه ترک ایجاد می‌گردند. حل عددی این معادلات انتگرالی که دارای تکینگی از نوع کوشی می‌باشند، منجر به محاسبه دانسیته نایجابی های سومیقلیانا و ولترا روی سطوح ترکها می‌گردد. با استفاده از دانسیته نایجابی های محاسبه شده، ضرایب شدت تنش مدهای اول و دوم برای نوک ترکها در چندین مثال مورد بررسی، بدست می‌آیند و اعتبار سنجی جواب ها در حالت‌های خاص با مراجع موجود صورت می‌گیرد.

واژه های راهنما: استوانه نامحدود، نایجابی سومیقلیانا، نایجابی ولترا، ماده ایزوتروپیک، ضریب شدت تنش، تکینگی کوشی

### ۱- مقدمه

ترکهای استوانه ای عموماً در استوانه های ایزوتروپیک یا استوانه های ساخته شده از مواد مرکب که کاربردهای وسیعی در صنعت دارند، مشاهده می‌شوند. خصوصاً فصل مشترک لایه ها در استوانه های کامپوزیتی از جمله نواحی ضعیفی هستند که در معرض لایه شدن و ایجاد ترک قرار دارند و عموماً ترکهای مشابه ترک های استوانه ای در این فصل مشترک ها ایجاد می‌شوند. بنابراین تحلیل شکست استوانه های ایزوتروپیک دارای ترک استوانه ای به عنوان یک پیش نیاز برای تحلیل ترک در استوانه های ساخته شده از مواد مرکب می‌باشد. همانطوری که در این مقاله مشاهده خواهد شد چنین تحلیلی حتی برای استوانه های ایزوتروپیک دارای ترک استوانه ای نیز به اندازه کافی دشوار و نیازمند انجام محاسبات طولانی است.

<sup>۱</sup>دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان m\_pourseifi@yahoo.com

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان faal92@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۸/۲۳

طی دهه های گذشته تلاش های گسترده ای برای تحلیل تنش محیط های مختلف حاوی ترک استوانه ای انجام شده است که در ابتدا به بررسی آنها پرداخته می شود.

فاریس<sup>۱</sup> و همکارانش [۱] در یک "محیط بی نهایت" الاستیک ایزوتروپیک با استفاده از تکنیک نابجایی سومیقلیانا<sup>۲</sup> به تحلیل میدان تنش در نوک ترک استوانه ای پرداختند. آنها دانسیته های نابجایی مربوط به مدهای اول و دوم را با حل عددی دو معادله انتگرالی تکین کوپل بدست آوردند و سپس با استفاده از آنها ضرایب شدت تنش مد اول و دوم مکانیک شکست را محاسبه نمودند. همچنین آنها نشان دادند که برای طول ترک های بزرگتر از چهار برابر شعاع ترک، نرخ رهایی انرژی متناسب با شعاع ترک می باشد.

دمیر<sup>۳</sup> و همکارانش [۲] میدان تنش اطراف ترک استوانه ای در یک "محیط الاستیک بی نهایت" ایزوتروپیک همگن را با مدل کردن یک ترک بصورت توده ای<sup>۴</sup> از نابجایی های حلقه ای سومیقلیانا بدست آوردند. آنها با اعمال شرایط مرزی و شرایط نابجایی یک جفت معادلات انتگرالی تکین کوشی نوع اول بدست آوردند که این معادلات انتگرالی با بکارگیری تکنیک روش مرتب سازی<sup>۵</sup> (روش انتخاب نقاط گسسته سازی معادلات) حل و دانسیته نابجایی را بصورت تقریبا تحلیلی محاسبه نمودند. سپس با جایگذاری دانسیته نابجایی بدست آمده، میدان تنش را در اطراف نوک ترک استوانه ای بصورت تحلیلی بدست آوردند. همچنین آنها نشان دادند که میدان تنش در فاصله دور از نوک ترک استوانه ای می تواند با یک جفت ابر نابجایی<sup>۶</sup> حلقه ای سومیقلیانا نشان داده شوند بگونه ای که بزرگی و مکان آنها متناسب با توزیع نابجایی های مربوطه بدست می آیند.

زبیب<sup>۷</sup> و همکارانش [۳] برای یک ترک استوانه ای در محیط الاستیک بی نهایت، ضریب شدت تنش مد اول را بصورت تحلیلی ارائه دادند. آنها در تحلیل مسئله، مشابه مرجع [۲] از ابر نابجایی حلقه ای سومیقلیانا استفاده کردند و بر اساس آن روابط تحلیلی برای انتگرال [و ضریب شدت تنش مد اول ترک استوانه ای ارائه دادند که البته روابط استخراج شده فقط برای نسبت شعاع ترک به طول ترک کوچکتر از یک معتبر می باشند. برهم کنش بین دو ترک استوانه ای در یک "محیط بی نهایت" الاستیک همگن، تقویت شده با الیاف استوانه ای را کلوز<sup>۸</sup> و زبیب مورد بررسی قرار دادند [۴]. آنها مدل سازی ترک ها را با استفاده از نابجایی حلقه ای سومیقلیانا انجام دادند و سپس تاثیر فاصله بین ترک ها و اندازه ترک ها را روی ضرایب شدت تنش را بررسی کردند. البته آنها برای ساده سازی ریاضیات مسئله فرض کردند که محیط و الیاف از ماده مشابه می باشند.

آیتو<sup>۹</sup> [۵] میدان تنش برای نوک ترک استوانه ای واقع در فصل مشترک یک "محیط استوانه ای" از ماده الاستیک با یک "محیط بی نهایت" از ماده الاستیک دیگر را محاسبه نمود و فرض کرد که سطوح ترک استوانه ای در محل اتصال تحت بار برشی می باشد. او در تحلیل مسئله از تبدیل فوریه استفاده نموده و با حل عددی معادلات انتگرالی بدست آمده ضرایب شدت تنش نوک ترک را محاسبه کرد.

<sup>1</sup>Farris

<sup>2</sup>Somigliana

<sup>3</sup>Demir

<sup>4</sup>Pile-up

<sup>5</sup>Collocation Technique

<sup>6</sup>Superdislocation

<sup>7</sup>Zbib

<sup>8</sup>Close

<sup>9</sup>Itou

دالیول<sup>۱</sup> و همکارانش [۶] ضریب شدت تنش را برای یک ترک استوانه ای در فصل مشترک بین "دو استوانه الاستیک" همگن محدود هم محور و غیر متشابه بدست آوردند به گونه ای که بارگذاری بر روی سطح ترک را بصورت برشی طولی بطور محوری متقارن در نظر گرفتند. آنها با اعمال شرایط مرزی ترکیبی مسئله، به یک جفت معادلات انتگرالی فردهولم نوع دوم رسیدند که با حل عددی معادلات انتگرالی و تبدیل آنها به معادلات سری دوگانه، ضرایب شدت تنش نوک ترک را محاسبه نمودند.

شویه- لی<sup>۲</sup> و دیو<sup>۳</sup> [۷]، آیتو و شیمای<sup>۴</sup> [۸] و آیتو [۹] مسئله ترک استوانه ای واقع در ناحیه ای بین "دو استوانه" الاستیک هم محور را بررسی کردند. آنها فرض کردند که ناحیه ای که ترک بین دو استوانه قرار دارد از ماده ای ناهمگن می باشد و بارگذاری را هم بصورت "پیچشی" در نظر گرفتند. بررسی انجام شده توسط آنها در صورتی ارزشمندتر می شد که ترک استوانه ای را در فصل مشترک بین ناحیه ناهمگن و الاستیک در نظر می گرفتند. لی<sup>۵</sup> و ونگ<sup>۶</sup> [۱۰] و فنگ<sup>۷</sup> و همکارانش [۱۱] مطالعه بر روی ترک استوانه ای واقع در فصل مشترک بین دو محیط الاستیک همگن و غیر متشابه را انجام دادند بگونه ای که لایه بین دو محیط از مواد هوشمند می باشد و بار را نیز بصورت "ضربه پیچشی" در نظر گرفتند. با اعمال تبدیل های فوری و لاپلاس مسئله مقدار مرزی به معادلات انتگرالی تکین کوشی تبدیل می شود که با حل عددی این معادلات انتگرالی و معکوس لاپلاس عددی، ضرایب شدت تنش دینامیکی محاسبه می شوند.

لی و همکارانش [۱۲] مسئله ترک استوانه ای در فصل مشترک "لوله های دو لایه مرکب" با ضخامت محدود را بررسی کردند. بارگذاری را بصورت "پیچشی" در نظر گرفتند. آنها با بکارگیری تبدیل انتگرالی فوری و اعمال شرایط مرزی به معادلات انتگرالی تکین کوشی رسیدند که با حل عددی آنها و محاسبه ضریب شدت تنش، تاثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی را روی رفتار شکست بررسی نمودند. همانطور که بررسی مقالات نشان می دهد تحلیل ترک های استوانه ای اکثرا یا در محیط های بینهایت انجام گرفته است و یا برای محیط های محدود تضعیف شده تنها با یک ترک استوانه ای با بارگذاری پیچشی در نظر گرفته شده است.

در این مقاله هدف تحلیل محیط های استوانه ای تحت بارگذاری برشی و یا شعاعی، تضعیف شده با چندین ترک استوانه ای می باشد بطوری که برای انجام تحلیل از حل نابجایی حلقه ای سومیقلیانا و ولتر<sup>۸</sup> استفاده می شود. درضمن مسئله "مد ترکیبی" مکانیک شکست مطرح می باشد.

در تحلیل صورت گرفته استوانه نامحدود حاوی دو ترک استوانه ای با شعاع ها و ارتفاع های متفاوت در نظر گرفته شده و برهم کنش آنها در نظر گرفته شده است. بدیهی است که مسئله استوانه های ترکدار تحت کشش از لحاظ کاربردی اهمیت خاصی دارد.

<sup>1</sup>Dhaliwal

<sup>2</sup>Xue-Li

<sup>3</sup>Duo

<sup>4</sup>Shima

<sup>5</sup>Li

<sup>6</sup>Weng

<sup>7</sup>Feng

<sup>8</sup>Volterra

## ۲- حل نابجایی حلقه ای سومیقلیانا و ولترا در استوانه

در مسائل سه بعدی تئوری الاستیسیته، با در نظر گرفتن مختصات استوانه ای بصورت  $(r, z, \theta)$ ، بردار جابجایی  $\mathbf{u}$  و تانسور تنش  $\mathbf{T}$  در غیاب نیروهای حجمی بصورت زیر می باشند [۱۳]

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} [-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) + 2(1 - \nu)\Delta\mathbf{G}] \quad (۱)$$

$$\mathbf{T} = (1 - \nu)[(\nabla\Delta\mathbf{G})^T + (\nabla\Delta\mathbf{G})] - \nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \nu\mathbf{U}(\nabla \cdot \mathbf{G})$$

بطوری که  $\mathbf{U}$  ماتریس واحد،  $\mathbf{G}$  بردار گالرکین بای هارمونیک،  $\nabla$  عملگر گرادیان،  $\mu$  و  $\nu$  بترتیب مدول برشی و ضریب پواسون ماده می باشند. برای مسائل متقارن محوری، با در نظر گرفتن تنها مولفه محوری بردار گالرکین بصورت  $\mathbf{G} = \chi(r, z)\mathbf{e}_z$  که در آن  $\mathbf{e}_z$  بردا یکه در جهت محور  $Z$  است. مولفه های جابجایی و تنش بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \\ u_z(r, z) &= \frac{1}{2\mu} \left[ (1 - 2\nu)\Delta + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right] \chi \\ \sigma_{rr}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2}) \chi \right] \\ \sigma_{rz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [(1 - \nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \chi \right\} \\ \sigma_{zz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [(2 - \nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \chi \right\} \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  لاپلاسین تعریف شده برای مسائل متقارن محوری می باشد و  $\chi$  نیز تابع بای هارمونیک می باشد که معادله حاکم زیر را ارضا می کند

$$\Delta\Delta\chi(r, z) = 0 \quad (۳)$$

مطابق شکل (۱) برای یک استوانه توپر از ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی به شعاع  $b$ ، ناپیوستگی هندسی ایجاد شده یک نابجایی حلقه ای می باشد که بصورت یک برش شروع شونده از  $r = a$  در جهت افزایش  $Z$  می باشد بگونه ای که خط نابجایی یک حلقه واقع در صفحه موازی سطح آزاد استوانه می باشد. بردار برگرز شامل دو مولفه شعاعی  $b_r$  (سومیقلیانا) و مولفه محوری  $b_z$  (ولترا) که عمود بر صفحه نابجایی است می باشد.

شرایط مرزی نابجایی بر اساس چند مقداری بودن تغییر مکان ها روی حلقه نابجایی بصورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} u_r(a^+, z) - u_r(a^-, z) &= b_r H(z) \\ u_z(a^+, z) - u_z(a^-, z) &= b_z H(z) \end{aligned} \quad (۴)$$

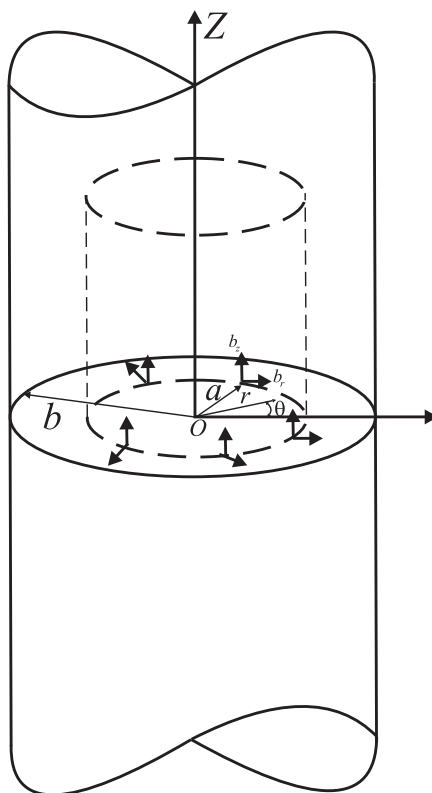
که در آن  $H(\cdot)$  تابع پله واحد<sup>۱</sup> می باشد. شرایط پیوستگی مولفه های تنش روی حلقه نابجایی عبارتند از

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(a^-, z) &= \sigma_{rz}(a^+, z) \\ \sigma_{rr}(a^-, z) &= \sigma_{rr}(a^+, z) \end{aligned} \quad (۵)$$

شرط مرزی روی مرز بیرونی استوانه با توجه به صفر بودن مولفه های تنش بصورت زیر بیان می گردد

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(b, z) &= 0 \\ \sigma_{rr}(b, z) &= 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

<sup>۱</sup>Heaviside step function



شکل ۱- نمایش نابجایی حلقه ای سومیقلیانا و ولترا واقع در یک استوانه توپر

برای حل معادله (۳) از تبدیل فوریه و معکوس آن بصورت زیر استفاده می شود

$$\hat{\chi}(r, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(r, z) e^{i\xi z} dz, \quad \chi(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(r, \xi) e^{-i\xi z} d\xi, \quad (7)$$

با اعمال تبدیل فوریه بالا به رابطه (۳)، معادله دیفرانسیل بسط بدست می آید

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \xi^2 \right)^2 \hat{\chi}^j = 0 \quad (8)$$

که در رابطه بالا  $j = 1, 2$  بترتیب نشان دهنده نواحی  $0 \leq r \leq a$  و  $a \leq r \leq b$  می باشند و  $\hat{\chi}^j$  تبدیل فوریه  $\chi^j$  می باشد. جواب های معادله دیفرانسیل (۸) عبارتند از

$$\begin{aligned} \xi^2 \hat{\chi}^1 &= A_1(\xi) I_0(r\xi) + B_1(\xi) r\xi I_1(r\xi), & 0 \leq r \leq a \\ \xi^2 \hat{\chi}^2 &= A_2(\xi) I_0(r\xi) + B_2(\xi) r\xi I_1(r\xi) + C_2(\xi) K_0(r\xi) + D_2(\xi) r\xi K_1(r\xi), & a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (9)$$

که  $A_1, B_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  ضرایب مجهول و  $I_0, I_1, K_0, K_1$  بترتیب توابع بسط تعمیم یافته نوع اول و دوم از مرتبه صفر و یک می باشند. با جایگذاری معادله اول (۹) در (۷) و با استفاده از رابطه (۲)، معادلات تنش و تغییر مکان برای ناحیه ۱ بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} u_r^1 &= \frac{i}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A_1(\xi) I_1(r\xi) + B_1(\xi) r\xi I_0(r\xi)\} e^{-i\xi z} d\xi \\ u_z^1 &= \frac{1}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A_1(\xi) I_0(r\xi) + B_1(\xi) [r\xi I_1(r\xi) + 4(1-\nu) I_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^1 &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{A_1(\xi)[I_1(r\xi)/r\xi - I_0(r\xi)] \\ &\quad + B_1(\xi)[(2\nu - 1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \\ \sigma_{rz}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{A_1(\xi)I_1(r\xi) + B_1(\xi)[2(1 - \nu)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \\ \sigma_{zz}^1 &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{A_1(\xi)I_0(r\xi) + B_1(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2 - \nu)I_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از معادله دوم (۹) و روابط (۷) و (۲)، معادلات تنش و تغییر مکان برای ناحیه ۲ عبارت اند از

$$\begin{aligned}u_r^2 &= \frac{i}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A_2(\xi)I_1(r\xi) + B_2(\xi)r\xi I_0(r\xi) \\ &\quad - C_2(\xi)K_1(r\xi) - D_2(\xi)r\xi K_0(r\xi)\} e^{-i\xi z} d\xi \\ u_z^2 &= \frac{1}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A_2(\xi)I_0(r\xi) + B_2(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 4(1 - \nu)I_0(r\xi)] \\ &\quad + C_2(\xi)K_0(r\xi) + D_2(\xi)[r\xi K_1(r\xi) - 4(1 - \nu)K_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \\ \sigma_{rr}^2 &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{-A_2(\xi)[I_1(r\xi)/r\xi - I_0(r\xi)] - B_2(\xi)[(2\nu - 1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)] \\ &\quad + C_2(\xi)[K_1(r\xi)/r\xi + K_0(r\xi)] + D_2(\xi)[(2\nu - 1)K_0(r\xi) + r\xi K_1(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \quad (11) \\ \sigma_{rz}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{-A_2(\xi)I_1(r\xi) - B_2(\xi)[2(1 - \nu)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)] \\ &\quad + E(\xi)K_1(r\xi) + D_2(\xi)[2(-1 + \nu)K_1(r\xi) + r\xi K_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi \\ \sigma_{zz}^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \{A_2(\xi)I_0(r\xi) + B_2(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2 - \nu)I_0(r\xi)] \\ &\quad + C_2(\xi)K_0(r\xi) + D_2(\xi)[r\xi K_1(r\xi) + 2(-2 + \nu)K_0(r\xi)]\} e^{-i\xi z} d\xi\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تبدیل فوریه تابع پله واحد و معکوس آن بصورت :

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\xi) + \frac{i}{\xi}] e^{-i\xi z} d\xi$$

با اعمال شرایط ناپیوستگی تغییر مکان ها (۴) و شرایط پیوستگی بردار تنش روی حلقه نابجایی (۵) و همچنین شرایط مرزی (۶)، ضرایب مجهول بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned}A_1(\xi) &= \Gamma(\xi) \{[-K_1(a\xi)(a^2\xi^2 - 4\nu + 4) + (2\nu - 3)a\xi K_0(a\xi)]ib_r \\ &\quad - a\xi[2(\nu - 1)K_1(a\xi) - a\xi K_0(a\xi)]b_z\} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\xi)}{\Psi(b, \xi)} \{-b^2\xi^2[(a^2\xi^2 - 4\nu + 4)I_1(a\xi) + (2\nu - 3)a\xi I_0(a\xi)]Q(b\xi) \\ &\quad + a\xi(b^2\xi^2 - 4\nu + 4)I_0(a\xi) + I_1(a\xi)\{\xi^2[2a^2(\nu - 1) - b^2] - 2(\nu - 1)(2\nu - 3)\} \\ &\quad + (2\nu - 2)[(a^2\xi^2 - 4\nu + 4)I_1(a\xi) + 2(2\nu - 3)a\xi I_0(a\xi)]I_1(b\xi)K_1(b\xi) \\ &\quad + 2(\nu - 1)(2\nu - 3)a\xi K_0(a\xi)[I_1(b\xi)]^2\}ib_r \\ &\quad - \{a\xi\{[-(b^2\xi^2 - 2\nu + 2)I_1(a\xi) - 2(\nu - 1)a\xi I_0(a\xi)] \\ &\quad + [a\xi I_0(a\xi) + 2(\nu - 1)I_1(a\xi)]\{(-2\nu + 2)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2\xi^2 Q(b\xi)\}\}\}b_z\} \\ B_1(\xi) &= \Gamma(\xi) \{[a\xi K_0(a\xi) + K_1(a\xi)]ib_r + a\xi K_1(a\xi)b_z\} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\xi)}{\Psi(b, \xi)} \{[(a^2\xi^2 - 2\nu + 2)I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)]ib_r - a^2\xi^2 I_0(b\xi)b_z \\ &\quad + [2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2\xi^2 Q(b\xi)]\{[I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)]ib_r + a\xi I_1(a\xi)b_z\}\}\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 A_2(\xi) &= \frac{\Gamma(\xi)}{\Psi(b, \xi)} \{ \{ \xi^2 [2a^2(\nu - 1) - b^2] - 2(\nu - 1)(2\nu - 3) \} I_1(a\xi) \\
 &+ a\xi I_0(a\xi) (b^2 \xi^2 - 4\nu + 4) + [(3 - 2\nu)a\xi I_0(a\xi) - I_1(a\xi)(a^2 \xi^2 - 4\nu + 4)] \\
 &\quad [b^2 \xi^2 Q(b\xi) + 2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi)] \} ib_r \\
 &\quad - a\xi \{ a\xi I_0(a\xi) [2(\nu - 1)I_1(b\xi)K_1(b\xi) - b^2 \xi^2 Q(b\xi) + 2(\nu - 1)] \\
 &+ I_1(a\xi) \{ 2(\nu - 1)[2(\nu - 1)I_1(b\xi)K_1(b\xi) - 1] - b^2 \xi^2 [2(\nu - 1)Q(b\xi) - 1] \} b_z \} \\
 B_2(\xi) &= \frac{\Gamma(\xi)}{\Psi(b, \xi)} \{ [I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)] \{ b^2 \xi^2 Q(b\xi) + 2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) \} \\
 &\quad + a\xi [a\xi I_1(a\xi) - I_2(a\xi)] - 2\nu I_1(a\xi) \} ib_r \\
 &\quad - a\xi \{ a\xi I_0(a\xi) - I_1(a\xi) [2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b\xi)] \} b_z \} \\
 C_2(\xi) &= \Gamma(\xi) \{ [(a^2 \xi^2 - 4\nu + 4)I_1(a\xi) + a(2\nu - 3)\xi I_0(a\xi)] ib_r \\
 &\quad - a\xi [a\xi I_0(a\xi) + 2(\nu - 1)I_1(a\xi)] b_z \} \\
 D_2(\xi) &= \Gamma(\xi) \{ [I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)] ib_r + a\xi I_1(a\xi) b_z \}
 \end{aligned}$$

در روابط بالا  $\Gamma(\xi) = \frac{\mu[\pi\delta(\xi) + \frac{1}{\xi}]}{\sqrt{2\pi(\nu-1)}}$  و  $\Psi(b, \xi) = (2\nu - 2 - b^2 \xi^2)[I_1(b\xi)]^2 + b^2 \xi^2 [I_0(b\xi)]^2$  می باشد. همچنین

$$Q(b, \xi) = I_0(b\xi)K_0(b\xi) + I_1(b\xi)K_1(b\xi) \tag{۱۳}$$

با توجه به زوج بودن توابع  $I_0$  و  $K_0$  و فرد بودن توابع  $I_1$  و  $K_1$  و همچنین با استفاده از روابط ریاضی موجود در پیوست ۱ و انجام یک سری محاسبات طولانی، که بدلیل محدودیت فضا جزئیات آن نشان داده نمی شود، معادلات تغییر مکان و تنش ها برای ناحیه (۱) را می توان بدست آورد. بنابراین معادلات تغییر مکان ناحیه (۱) با جایگذاری روابط (۱۲) در دو رابطه اول (۱۰) بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 2(\nu - 1)u_r^1 &= \frac{(2\nu - 1)r(a^2 - b^2)b_r}{2ab^2} \\
 &- \frac{b_r}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{ A_{1r}(\xi)I_1(r\xi) + B_{1r}(\xi)r\xi I_0(r\xi) \} \sin(\xi z) d\xi \\
 &+ \frac{b_z}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{ A_{1z}(\xi)I_1(r\xi) + B_{1z}(\xi)r\xi I_0(r\xi) \} \cos(\xi z) d\xi \\
 &+ \frac{zb_r}{2ar\pi\sqrt{p}} \{ [(2\nu - 1)r^2 + 2a^2 - 2(1 - \nu)m]K(x) \\
 &+ \frac{1}{q} [a^2(2r^2 - m) + 2(1 - \nu)pq]E(x) + \frac{(a - r)}{(a + r)} [(2\nu - 1)r^2 - a^2]\Pi(w, x) \} \\
 &- \frac{b_z}{\pi\sqrt{p}} \left[ \frac{1}{2r} [r^2 - a^2 - 2(\nu - 1)m]K(x) + \frac{1}{2rq} [2(\nu - 1)pq + ya^2 - r^2n]E(x) \right] \tag{۱۴} \\
 2(\nu - 1)u_z^1 &= -b_z \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \\
 &- \frac{b_r}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{ A_{1r}(\xi)I_0(r\xi) + B_{1r}(\xi) [r\xi I_1(r\xi) + 4(1 - \nu)I_0(r\xi)] \} \cos(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{b_z}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{ A_{1z}(\xi)I_0(r\xi) + B_{1z}(\xi) [r\xi I_1(r\xi) + 4(1 - \nu)I_0(r\xi)] \} \sin(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{b_r}{2a\pi\sqrt{p}} \left[ (m - 2\nu a^2)K(x) + \frac{a}{q} [(y + n) - pq]E(x) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{zb_z}{\pi\sqrt{p}} \left[ \frac{5-6\nu}{2} K(x) + \frac{2a^2+m}{2q} E(x) + \frac{3(1-\nu)(a-r)}{r+a} \Pi(w, x) \right]$$

که در روابط بالا  $E(x), K(x)$  و  $\Pi(w, x)$  به ترتیب انتگرال های بیضوی کامل نوع اول، دوم و سوم می باشند. همچنین برای روابط بالا پارامترهای زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} p &= z^2 + (a+r)^2 \\ q &= z^2 + (a-r)^2 \\ m &= z^2 + r^2 + a^2 \\ n &= z^2 + r^2 - a^2 \\ y &= z^2 + a^2 - r^2 \\ x &= 4 \frac{ar}{p} \\ w &= \frac{4ar}{(a+r)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

و ضرایب  $A_{1r}(\xi), A_{1z}(\xi), B_{1r}(\xi)$  و  $B_{1z}(\xi)$  در پیوست ۲ مقاله آمده اند. مولفه های تنش در ناحیه (۱) نیز با جایگذاری روابط (۱۲) در سه رابطه آخر (۱۰) بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} (\nu-1)\sigma_{rr}^1(r, z) &= -\frac{\mu b_r(a^2-b^2)}{2ab^2} \\ &+ \frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1r}(\xi) \left[ \frac{I_1(r\xi)}{r\xi} - I_0(r\xi) \right] \\ &\quad + B_{1r}(\xi) [(2\nu-1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\ &- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1z}(\xi) \left[ \frac{I_1(r\xi)}{r\xi} - I_0(r\xi) \right] \\ &\quad + B_{1z}(\xi) [(2\nu-1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\ &+ \frac{\mu z b_r}{\pi\sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{q} \left[ \frac{1}{2ar^2} [2(1-\nu)pq - m(a^2+r^2)] + a \left[ 5 - 2z^2 \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right] \right\} E(x) \right. \\ &\left. \left( \frac{az^2}{pq} + \frac{z^2+vm}{ar^2} \right) K(x) + \frac{(a-r)^2}{2ar^2} \Pi(w, x) \right\} - \frac{\mu ab_z}{\pi\sqrt{p}} \left\{ \frac{a^2-r^2+2(\nu-1)m}{2ar^2} K(x) \right. \\ &\left. + \left\{ \frac{1}{2ar^2q} [m(r^2-a^2) - 2(\nu-1)pq] + \frac{1}{q} \left[ \frac{3a^2+r^2}{2a} + 2z^2 \left( \frac{r-a}{p} - \frac{r+a}{q} \right) \right] \right\} E(x) \right\} \quad (16) \\ (\nu-1)\sigma_{rz}^1 &= -\frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1r}(\xi) I_1(r\xi) \\ &\quad + B_{1r}(\xi) [2(1-\nu)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\ &- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1z}(\xi) I_1(r\xi) + B_{1z}(\xi) [2(1-\nu)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\ &\quad - \frac{\mu b_r}{\pi\sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{a}{pq} [rp(r-a) + a(a+r)y + 2r^2z^2] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{a} [a^2+r^2 - 2(1-\nu)m] \right] K(x) + \frac{1}{q} \left\{ \frac{1}{2ar} [a^2(r^2-a^2-y) - r^2n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\nu)pq] \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2az^2 \left[ \frac{a+r}{p} + \frac{r-a}{q} \right] E(x) \right\} - \frac{\mu az b_z}{\pi} \left\{ \frac{1}{ra} \left[ \frac{(a^2-r^2)}{2pq} (p-2ar) + 2(1-\nu) \right] K(x) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{1}{2arq} [a^2-r^2 + 4(1-\nu)m] + 2(r^2-a^2) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right] \frac{1}{q} E(x) \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(v-1)\sigma_{zz}^1 &= \frac{(b^2 - a^2)v\mu b_r}{ab^2} \\
&+ \frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1r}(\xi)I_0(r\xi) + B_{1r}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2-v)I_0(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\
&- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{1z}(\xi)I_0(r\xi) + B_{1z}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2-v)I_0(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\
&\quad + \frac{z\mu b_r}{2\pi\sqrt{p}} \left\{ \left( \frac{2v-1}{2a} - a \frac{z^2}{pq} \right) K(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q} \left\{ 2a \left[ 1 - \frac{(a+r)^2}{p} - \frac{(r-a)^2}{q} \right] + \frac{m}{2a} \right\} E(x) + \frac{v(a-r)}{a(r+a)} \Pi(w, x) \right\} \\
&+ \frac{\mu a b_z}{2\pi\sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{2aq} [2(3-2v)q - r(r-a)] + \frac{1}{2pq} [2az^2 - (a+r)y] \right\} K(x) \\
&\quad + \left\{ \frac{3a^2 + r^2 - 2(3-2v)n}{2qa} + \frac{2z^2}{q} \left[ \frac{r-a}{p} - \frac{r+a}{q} \right] \right\} E(x)
\end{aligned}$$

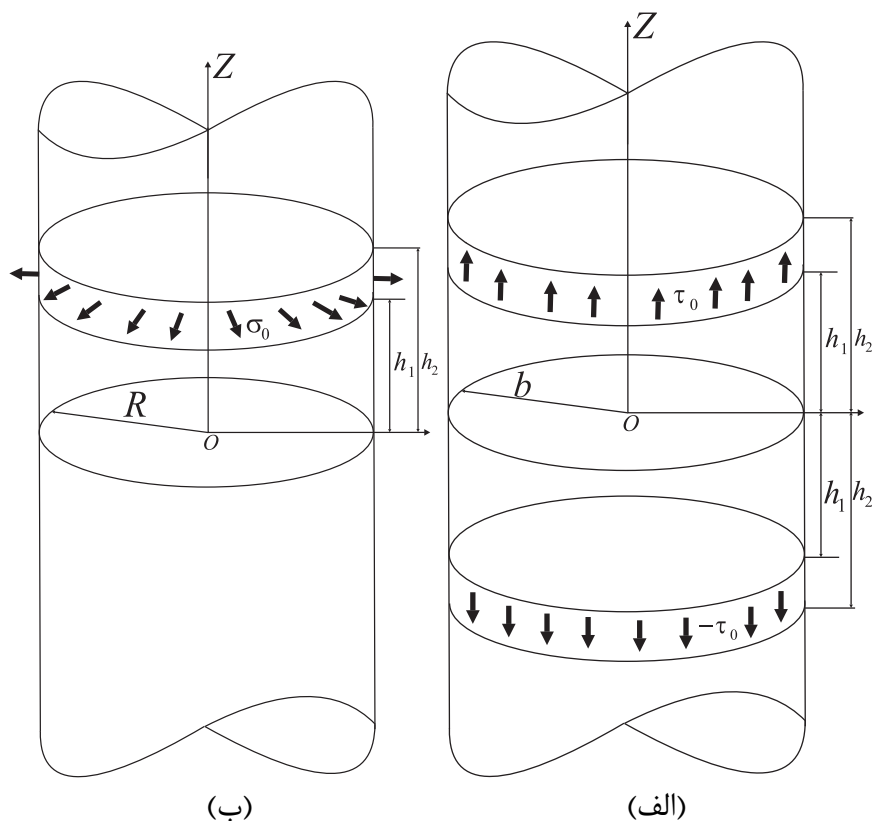
همچنین روابط تغییر مکان برای ناحیه (۲) بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
2(v-1)u_r^2 &= -\frac{a[b^2 + (1-2v)r^2]b_r}{2b^2r} \\
&- \frac{b_r}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{C_r(\xi)I_1(r\xi) + D_r(\xi)r\xi I_0(r\xi)\} \sin(\xi z) d\xi \\
&+ \frac{b_z}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{C_z(\xi)I_1(r\xi) + D_z(\xi)r\xi I_0(r\xi)\} \cos(\xi z) d\xi \\
&\quad + \frac{z b_r}{2a r \pi \sqrt{p}} \{ [2a^2 + (1-2v)r^2 + 2(1-v)m] K(x) \\
&\quad + \frac{1}{q} [a^2(m-2r^2) - 2(1-v)pq] E(x) + (a-r) \frac{1}{(r+a)} [a^2 \\
&\quad + (1-2v)r^2] \Pi(w, x) \} \\
&- \frac{b_z}{2r\pi\sqrt{p}} \{ [a^2 + r^2 + 2(v-1)m] K(x) - \left[ \frac{r^2n + a^2y + 2(v-1)pq}{q} \right] E(x) \} \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2(v-1)u_z^2 &= \frac{(v-1)a^2b_z}{b^2} \\
&- \frac{b_r}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{C_{2r}(\xi)I_0(r\xi) + D_{2r}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 4(1-v)I_0(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\
&- \frac{b_z}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \{C_{2z}(\xi)I_0(r\xi) + D_{2z}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 4(1-v)I_0(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\
&\quad - \frac{b_r}{\pi\sqrt{p}} \left[ \frac{m-2va}{2a} K(x) + \frac{a^2(y+n) - pq}{2aq} E(x) \right] \\
&- \frac{b_z z}{\pi\sqrt{p}} \left[ \frac{(2v-1)}{2} K(x) + \frac{a^2 - m}{2q} E(x) + \frac{(1-v)(r-a)}{r+a} \Pi(w, x) \right]
\end{aligned}$$

که در آن ضرایب  $B_{2z}(\xi)$  و  $A_{2r}(\xi), A_{2z}(\xi), B_{2r}(\xi)$  در پیوست ۲ مقاله آمده اند. بطور مشابه با منطقه (۱) با جایگذاری روابط (۱۲) در سه رابطه آخر (۱۱) مولفه های تنش در منطقه (۲) بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 (v-1)\sigma_{rr}^2(r, z) &= \frac{\mu b_r a (b^2 - r^2)}{2b^2 r^2} \\
 &+ \frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2z}(\xi)[I_1(r\xi)/r\xi - I_0(r\xi)] \\
 &\quad + B_{2z}(\xi)[(2v-1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2r}(\xi)[I_1(r\xi)/r\xi - I_0(r\xi)] \\
 &\quad + B_{2r}(\xi)[(2v-1)I_0(r\xi) - r\xi I_1(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{\mu b_r z}{\pi \sqrt{p}} \left\{ \left[ \frac{1}{ar^2} [(1-v)m - (a^2 + r^2)] - \frac{az^2}{pq} \right] K(x) \right. \\
 &+ \frac{1}{q} \left\{ \frac{m(a^2 + r^2) - 2(1-v)pq}{2ar^2} - a \left\{ 1 - 2 \left[ \frac{(a-r)^2}{q} + \frac{(a+r)^2}{p} \right] \right\} \right\} E(x) + \frac{(a-r)^2}{2ar^2} \\
 &\Pi(w, x) \left. \right\} + \frac{\mu b_z}{\pi \sqrt{pq}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ q \frac{r^2 + a^2 + 2(v-1)m}{r^2} + \frac{a(a-r)p + r(a+r)n + 2a^2 z^2}{p} \right] \right\} \\
 &K(x) + \left\{ \frac{(a^2 - r^2)r^2 - a^2 y - r^2 n - 2(v-1)pq}{2r^2} + 2z^2 a \left( \frac{r-a}{q} - \frac{r+a}{p} \right) \right\} E(x) \left. \right\} \\
 (v-1)\sigma_{rz}^2(r, z) &= \\
 &- \frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2r}(\xi)I_1(r\xi) + B_{2r}(\xi)[2(1-v)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2z}(\xi)I_1(r\xi) + B_{2z}(\xi)[2(1-v)I_1(r\xi) + r\xi I_0(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \quad (18) \\
 &+ \frac{\mu b_r}{2\pi \sqrt{pq}} \left\{ \left[ q \frac{2(1-v)m - (r^2 + a^2)}{ar} - \frac{a^2(a-r)}{r} - \frac{a(a+r)n + 2raz^2}{p} \right] K(x) \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{a^2(a^2 - r^2 + y) + r^2 n - 2(1-v)pq}{2ar} + 2az^2 \left( \frac{a+r}{p} + \frac{r-a}{q} \right) \right] E(x) \left. \right\} \\
 &+ \frac{\mu b_z az}{\pi \sqrt{pq}} \left\{ \left[ \frac{r^2 + a^2}{2ar} - \frac{(a+r)^2}{p} \right] K(x) + \left[ \frac{2(a+r)^2}{p} - \frac{2(a-r)^2}{q} - \frac{r^2 + a^2}{2ar} \right] E(x) \right\} \\
 (v-1)\sigma_{zz}^2 &= -\frac{av\mu b_r}{b^2} \\
 &+ \frac{\mu b_r}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2r}(\xi)I_0(r\xi) + B_{2r}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2-v)I_0(r\xi)]\} \sin(\xi z) d\xi \\
 &- \frac{\mu b_z}{\pi} \int_0^\infty \{A_{2z}(\xi)I_0(r\xi) + B_{2z}(\xi)[r\xi I_1(r\xi) + 2(2-v)I_0(r\xi)]\} \cos(\xi z) d\xi \\
 &\quad + \frac{b_r \mu z}{\pi \sqrt{pq}} \left\{ \left[ a \left[ \frac{(a+r)^2}{p} - 1 \right] + \frac{(2v-1)q}{2a} \right] K(x) \right. \\
 &\quad + \left. \left[ \frac{m}{2a} + 2a \left[ 1 - \frac{(a+r)^2}{p} \frac{(a-r)^2}{q} \right] \right] E(x) \right\} \\
 &- \frac{vq(r-a)}{a(r+a)} \Pi(w, x) - \frac{b_z \mu}{\pi \sqrt{pq}} \left\{ \left[ \frac{a^2 z^2}{p} - q + \frac{r}{2} \left[ \frac{a(a-r)}{r} + \frac{(a+r)n}{p} \right] \right] K(x) \right. \\
 &\quad + \left. \left[ a^2 \left[ 1 - \frac{2z^2}{p} - \frac{2z^2}{q} \right] + n - \frac{r}{2} \left[ \frac{a^2 + r^2}{r} + \frac{4az^2}{p} - \frac{4az^2}{q} \right] \right] E(x) \right\}
 \end{aligned}$$



شکل ۲- نمایش استوانه توپر نامحدود تحت بار برشی خود تعادلی  
(الف) برشی (ب) شعاعی روی سطح جانبی آن

### ۳- تحلیل استوانه فاقد عیب تحت بار خارجی

در این بخش از مقاله میدان تنش در اثر دو نوع بارگذاری روی سطوح جانبی استوانه، در حالتی که استوانه فاقد هرگونه عیبی می باشد بدست می آید.

#### ۳-۱- استوانه نامحدود تحت کشش با بارگذاری برشی خود تعادلی روی سطح جانبی

همانطور که در شکل (۲- الف) مشاهده می شود استوانه روی سطح جانبی خود تحت تاثیر دو بار خارجی برشی خود تعادلی، بصورت  $\sigma_{rz}(b, z) = \tau_0[H(z - h_1) - H(z - h_2)]$ ,  $h_1 < h_2$  و  $\sigma_{rz}(b, z) = \tau_0[H(z + h_1) - H(z + h_2)]$  قرار می گیرد. معمولاً در انجام آزمایش کشش بر روی قطعات استوانه ای، قطعه تحت این نوع از بارگذاری قرار می گیرد. با توجه به متقارن بودن بارگذاری نسبت به صفحه  $z = 0$ ، شرایط مرزی متناظر عبارتند از

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(b, z) &= 0 \\ \sigma_{rz}(b, z) &= \tau_0[H(z - h_1) - H(z - h_2)] \end{aligned} \quad (19)$$

با استفاده روابط مربوط به میدانهای تنش و تغییر مکان (رابطه (۱۰)) و با بکارگیری تبدیل فوریه تابع پله واحد و همچنین با اعمال شرایط مرزی بالا، روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 A(\xi)[I_1(b\xi)/b\xi - I_0(b\xi)] + B(\xi)[(2\nu - 1)I_0(b\xi) - b\xi I_1(b\xi)] &= 0 \\
 A(\xi)I_1(b\xi) + B(\xi)[2(1 - \nu)I_1(b\xi) + b\xi I_0(b\xi)] & \\
 = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi\xi}} [\pi\delta(\xi) + \frac{i}{\xi}] (e^{i\xi h_1} - e^{i\xi h_2}) & \quad (20)
 \end{aligned}$$

با حل دو معادله بالا، ضرایب  $A(\xi)$  و  $B(\xi)$  بدست می آیند که با استفاده از روابط (۱۰) و جایگذاری ضرایب بدست آمده در آنها، میدان تنش بصورت زیر محاسبه می گردد

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{\tau_0 b}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Psi(\xi)} \left\{ \left( \frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) I_1(b\xi) I_1(r\xi) + \left[ b\xi - \frac{(2\nu - 1)}{b\xi} \right] I_0(r\xi) I_1(b\xi) \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{(1 - 2\nu)}{r\xi} + r\xi \right] I_1(r\xi) I_0(b\xi) \{ \cos[\xi(z - h_1)] - \cos[\xi(z - h_2)] \} \right\} d\xi \\
 \sigma_{rz} &= \frac{\tau_0 b}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Psi(\xi)} \left\{ I_1(r\xi) I_0(b\xi) + r\xi I_0(r\xi) I_0(b\xi) - \frac{r}{b} I_0(r\xi) I_1(b\xi) \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{2(1 - \nu)}{b\xi} + b\xi \right] I_1(b\xi) I_1(r\xi) \right\} \{ \sin[\xi(z - h_1)] - \sin[\xi(z - h_2)] \} d\xi \quad (21)
 \end{aligned}$$

### ۳-۲- استوانه نامحدود تحت بارگذاری شعاعی روی سطح جانبی

با توجه به شکل (۲-ب)، شرایط مرزی بارگذاری نوع دوم بصورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(b, z) &= \sigma_0 [H(z - h_1) - H(z - h_2)] \\
 \sigma_{rz}(b, z) &= 0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

در این نوع بارگذاری، با استفاده روابط مربوط به مولفه های تنش و تغییر مکان در ناحیه (رابطه (۱۰)) و با بکارگیری تبدیل فوریه تابع پله واحد و همچنین با اعمال شرایط مرزی (۲۲) روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 A(\xi)[I_1(b\xi)/b\xi - I_0(b\xi)] + B(\xi)[(2\nu - 1)I_0(b\xi) - b\xi I_1(b\xi)] &= \\
 \frac{\sigma_0 i}{\sqrt{2\pi\xi}} [\pi\delta(\xi) + \frac{i}{\xi}] (e^{i\xi h_1} - e^{i\xi h_2}) & \quad (23) \\
 A(\xi)I_1(b\xi) + B(\xi)[2(1 - \nu)I_1(b\xi) + b\xi I_0(b\xi)] &= 0
 \end{aligned}$$

با حل دو معادله رابطه (۲۳)، ضرایب  $A(\xi)$  و  $B(\xi)$  بدست می آیند که با جایگذاری آنها در روابط (۱۰)، مولفه های تنش بصورت زیر بیان می شوند

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{b\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Psi(\xi)} \left\{ I_0(r\xi) I_1(b\xi) - \frac{b}{r} I_1(r\xi) I_0(b\xi) + b\xi I_0(b\xi) I_0(r\xi) \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{2(\nu - 1)}{r\xi} - r\xi \right] I_1(r\xi) I_1(b\xi) \{ \sin[\xi(z - h_1)] - \sin[\xi(z - h_2)] \} \right\} d\xi \\
 \sigma_{rz} &= -\frac{b\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Psi(\xi)} \left\{ r I_0(r\xi) I_1(b\xi) - b I_0(b\xi) I_1(r\xi) \right. \\
 &\quad \left. \{ \cos[\xi(z - h_1)] - \cos[\xi(z - h_2)] \} \right\} d\xi \quad (24)
 \end{aligned}$$

#### ۴- تحلیل استوانه ایزوتروپیک با چندین ترک استوانه ای

در این بخش چگونگی بکارگیری حل نابجایی حلقه ای بدست آمده در بخش ۲ برای تحلیل یک استوانه ایزوتروپیک تضعیف شده توسط چندین ترک استوانه ای مورد بررسی قرار می گیرد. فرض می شود که استوانه مورد بررسی توسط  $N$  ترک استوانه ای تضعیف شده است. معادلات پارامتری ترک ها را می توان بصورت زیر بیان نمود

$$r_j = l_j \quad (25)$$

$$z_j(t) = \frac{1}{2}L_j t + \frac{1}{2}(d_{uj} + d_{lj}), L_j = (d_{uj} - d_{lj}), -1 \leq t \leq 1$$

که در آن شعاع ترک  $j$  ام،  $d_{uj}$ ،  $d_{lj}$  و  $L_j$  بترتیب مختصات لبه بالایی، پائینی و طول ترک  $j$  ام می باشند. مطابق اصل باکنر مسئله استوانه تضعیف شده توسط چندین ترک را می توان به دو مسئله تفکیک نمود. در مسئله اول ترک ها حذف و بردار تنش سطحی ناشی از بارگذاری خارجی روی سطوح فرضی ترک بدست می آید. در مسئله دوم منفی بردارهای تنش های سطحی بدست آمده از مسئله اول بر روی سطوح ترک ها بدون در نظر گرفتن بار خارجی اعمال می گردد. حاصل جمع میدان های تنش دو مسئله میدان تنشی را ارائه می دهد که در آن بردار تنش سطحی در سطح ترک صفر می باشد (سطوح آزاد ترک همواره عاری از تنش هستند). بنابراین در این بخش از مقاله حل مسئله دوم مورد نظر بوده و فرض می شود بارگذاری خارجی، بارگذاری های معرفی شده در بخش (۳) باشند. در حل مسئله چندین ترک مولفه های تنش سطحی با استفاده از اصل باکنر در روی ترک ها بدست می آیند. اگر توزیع نابجایی حلقه ای (شعاعی و محوری) با چگالی های مجهول  $b_{rz}$  و  $b_{rj}$  در راستای ترک  $j$  ام، در نقطه ای از ترک به مختصات  $(l_j, z_j(t))$  روی المان بینهایت کوچک  $ds_j$  قرار داده شود بطوری که  $ds_j = z_j'(t)dt$  (پریم در مفهوم مشتق نسبت به  $t$  است) است، بردار تنش روی سطح ترک استوانه ای  $j$  ام ناشی از توزیع نابجایی روی ترک ها با استفاده از اصل جمع آثار بدست می آید که عبارت اند از

$$\sigma_{rr}(r_i, z_i(s)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 [k_{11ij}(s, t)b_{rj}(t) + k_{12ij}(s, t)b_{zj}(t)]z_j'(t) dt \quad (26)$$

$$\sigma_{rz}(r_i, z_i(s)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 [k_{21ij}(s, t)b_{rj}(t) + k_{22ij}(s, t)b_{zj}(t)]z_j'(t) dt$$

$$-1 \leq s \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

کرنل های معادله انتگرالی (۲۶) در پیوست ۳ مقاله ارائه شده اند. بر طبق اصل باکنر سمت های چپ معادله انتگرالی (۲۶)، منفی بردار تنش ایجاد شده توسط بار خارجی اعمالی روی سطوح جانبی استوانه و در محل فرضی ترک می باشند. با استفاده از تعریف نابجایی، بازشدگی های دهانه ترک ها برحسب چگالی نابجایی های شعاعی و محوری در راستای  $r$  و  $z$  برای ترک  $j$  ام از روابط زیر بدست می آیند

$$u_{rj}^+(s) - u_{rj}^-(s) = \int_{-1}^s b_{rj}(t)z_j'(t) dt, j = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

$$u_{zj}^+(s) - u_{zj}^-(s) = \int_{-1}^s b_{zj}(t)z_j'(t) dt, j = 1, 2, \dots, N$$

برای ترک های احاطه شده در محیط مانند ترک های استوانه ای، جابجایی روی مرز ترک ها تک مقداری است، بنابراین برای چگالی های نایجایی باید شرایط زیر برقرار باشند

$$\int_{-1}^1 b_{rj}(t)z'_j(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 b_{zj}(t)z'_j(t) dt = 0 \quad (28)$$

دانشیته های نایجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۲۶) و شرط یکتایی جواب روی مرز ترک ها یعنی روابط (۲۸) بدست می آیند. لازم به ذکر است جهت تعیین دانشیته نایجایی از حل عددی معرفی شده در مرجع [۱۴] استفاده می گردد. برای ترک های استوانه ای دانشیته های نایجایی  $b_{rj}(t)$  و  $b_{zj}(t)$  بر حسب توابع  $g_{rj}(t)$  و  $g_{zj}(t)$  بصورت زیر بیان می شوند

$$b_{rj}(t) = \frac{g_{rj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (29)$$

$$b_{zj}(t) = \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

با استفاده از حل اروین ضرایب شدت تنش مد اول و دوم مکانیک شکست برای لبه بالایی ترک استوانه ای به صورت زیر در نظر گرفته می شوند [۱۵]

$$K_{Iuj} = \lim_{z \rightarrow d_{uj}} \sqrt{2\pi(z - d_{uj})} \sigma_{rr}(a, z)$$

$$K_{Iuj} = \frac{2\sqrt{\pi}\mu}{(1 + \kappa)} \lim_{z \rightarrow d_{uj}} \frac{1}{\sqrt{2(d_{uj} - z)}} [u_r^+(a, z) - u_r^-(a, z)] \quad (30)$$

$$K_{IIuj} = \lim_{z \rightarrow d_{uj}} \sqrt{2\pi(z - d_{uj})} \sigma_{rz}(a, z)$$

$$K_{IIuj} = \frac{2\sqrt{\pi}\mu}{(1 + \kappa)} \lim_{z \rightarrow d_{uj}} \frac{1}{\sqrt{2(d_{uj} - z)}} [u_z^+(a, z) - u_z^-(a, z)]$$

که در روابط بالا  $\mu$  و  $\kappa$  به ترتیب ثابت کلسف و مدول برشی ماده می باشند. مقدار  $\kappa$  برای حالت کرنش صفحه ای برابر  $\kappa = 3 - 4\nu$  می باشد که در آنها  $\nu$  ضریب پواسون می باشد. برای مد اول با جایگذاری رابطه اول (۲۹) در (۲۷) و جایگزین کردن معادله بدست آمده در اولین رابطه (۳۰)، رابطه زیر بدست می آید

$$K_{Iuj} = \frac{\sqrt{\pi}\mu L_j}{4(1 - \nu)} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2[d_{uj} - z(s)]}} \int_1^s \frac{g_{rj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (31)$$

بطوری که  $z(s) = \frac{1}{2}L_j s + (\frac{d_{uj} + d_{lj}}{2})$ ,  $-1 \leq s \leq 1$  می باشد. با استفاده از قانون هوییتال، حد رابطه (۲۷) محاسبه می گردد و ضریب شدت تنش بصورت زیر بدست می آید

$$K_{Iuj} = -\frac{\mu\sqrt{\pi}L_j}{2\sqrt{2}(1 - \nu)} g_{rj}(1) \quad (32)$$

بطور مشابه، ضریب شدت تنش مد دوم برای لبه بالایی ترک استوانه ای بصورت زیر محاسبه می گردد

$$K_{IIj} = -\frac{\mu\sqrt{\pi L_j}}{2\sqrt{2}(1-\nu)} g_{zj}(1) \quad (33)$$

برای لبه پایینی ترک نیز رابطه مشابهی بدست می آید.

## ۵- مثال های عددی

در این بخش از مقاله، به ارزیابی حل ارائه شده در تحلیل مسئله ترک های استوانه ای پرداخته می شود. ابتدا اعتبار حل انجام شده، در حالت خاص، با دو مسئله محیط بینهایت تضعیف شده توسط ترک های استوانه ای بررسی می گردد. بگونه ای که در مسئله اول محیط بینهایت حاوی یک ترک استوانه ای بوده و در مسئله دوم تضعیف محیط بینهایت با دو ترک های استوانه ای در نظر گرفته می شود. سپس دو مسئله استوانه تضعیف شده با دو ترک استوانه ای تحت بارگذاری ارائه شده در قسمت های قبل، حل می شود. در تمام مسائل مقدار نسبت پواسون  $\nu = 0.3$  در نظر گرفته می شود.

مثال ۱- محیط بینهایت تضعیف شده با یک ترک استوانه ای

برای اولین مثال محیط بینهایت با یک ترک استوانه ای به شعاع  $l$  و طول  $L$  در نظر گرفته می شود. مقادیر ضرایب شدت تنش بی بعد مد اول و دوم برای حالت های  $2l/L = 0.1, 1, 10$  در جدول (۱) آمده است، بطوریکه  $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi L/2}$  می باشد. ملاحظه می گردد که نتایج بدست آمده با نتایج مراجع مختلف انطباق مناسبی دارد.

مثال ۲- محیط بینهایت تضعیف شده با دو ترک استوانه ای

در این مثال فرض می شود که محیط بینهایت توسط دو ترک استوانه ای با شعاع ها و طولهای یکسان تضعیف شده است. در این مسئله تاثیر متقابل دو ترک نسبت به هم بررسی می شود. همانطور که از اطلاعات جدول (۲) ملاحظه می شود وقتی فاصله بین دو ترک  $(d_{12} - d_{u1})$  نسبت به طول آنها به سمت بینهایت میل می کند نتایج، به سمت نتایج بدست آمده برای یک ترک استوانه ای سوق پیدا می کند. در این مسئله مقادیر ضرایب شدت تنش نسبت به  $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi L_1/2}$  بی بعد شده اند که در آن طول هر دو ترک برابر  $L_1$  می باشد.

**جدول ۱-** مقایسه ضرایب شدت تنش بی بعد بدست آمده برای یک ترک استوانه ای در محیط بینهایت با نتایج بدست آمده

در مراجع موجود

$2l/L$		مقاله حاضر	مرجع [۳]	مرجع [۱۶]	مرجع [۱۷]
0.1	$K_I/K_0$	0.1686	0.1754	0.17	0.17
	$K_{II}/K_0$	-0.0530	—	-0.055	-0.052
1	$K_I/K_0$	0.5403	0.5410	0.5408	0.54
	$K_{II}/K_0$	-0.0834	—	-0.0838	-0.083
10	$K_I/K_0$	0.9750	0.9795	0.9754	0.97
	$K_{II}/K_0$	-0.0058	—	-0.0058	-0.0057

**جدول ۲-** مقایسه ضرایب شدت تنش بی بعد مد اول و دوم برای دو ترک استوانه ای در محیط بینهایت با نتایج بدست آمده

در مراجع موجود.  $L_1/L_2 = 1, l_1/l_2 = 1, 2l_1/L_1 = 1$

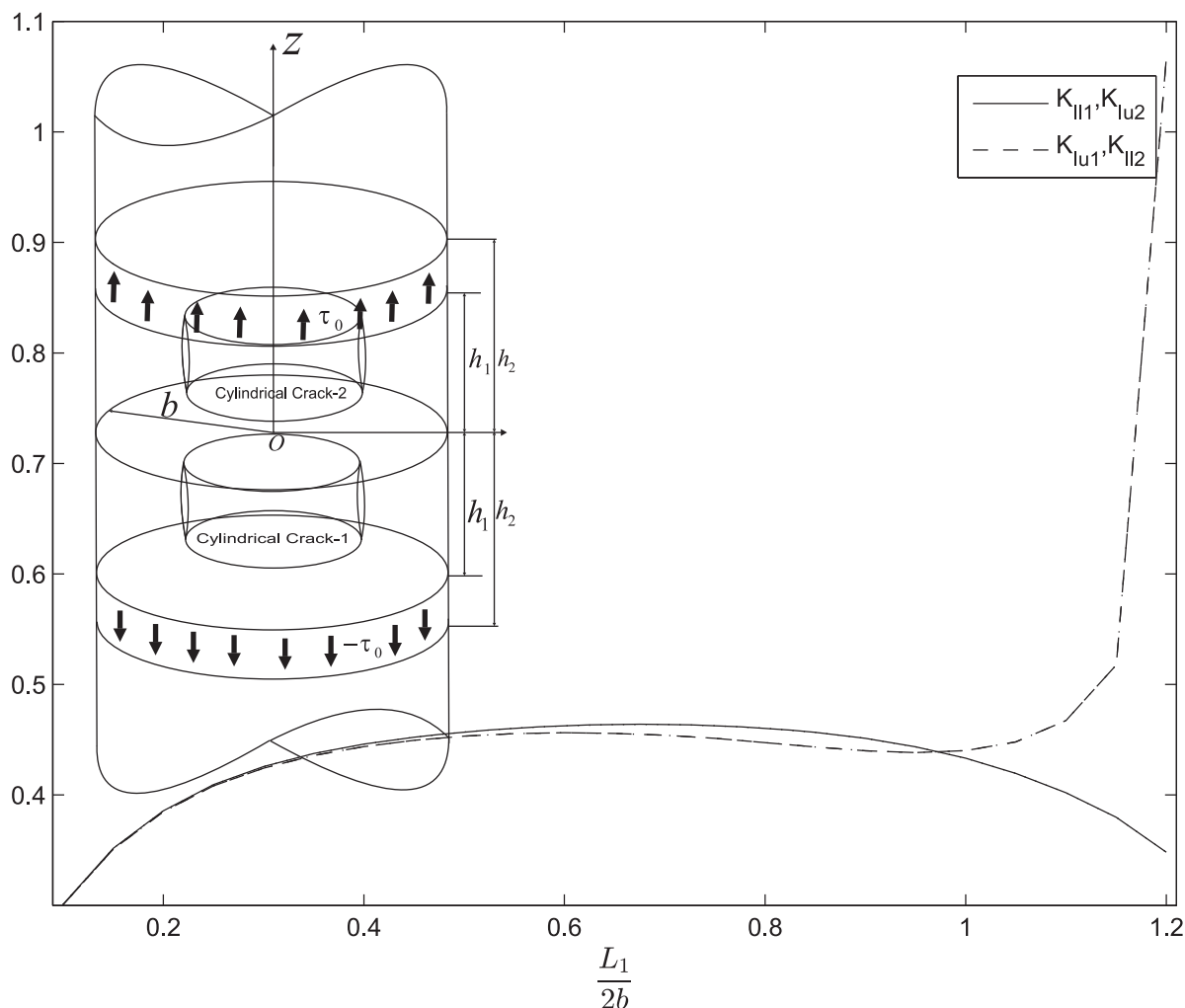
	مقاله حاضر	مرجع [۴]
$2(d_{I2} - d_{u1})/L_1 = 0.01$	$K_I/K_0$	1.2174
	$K_{II}/K_0$	$1.475 \times 10^{-5}$
$2(d_{I2} - d_{u1})/L_1 = 1$	$K_I/K_0$	0.5544
	$K_{II}/K_0$	-0.0600
$2(d_{I2} - d_{u1})/L_1 = \infty$	$K_I/K_0$	0.5403
	$K_{II}/K_0$	-0.0834

مثال ۳- استوانه نامحدود تضعیف شده با دو ترک استوانه ای متقارن تحت بارگذاری ترکیبی کششی خود تعادلی و شعاعی روی سطح جانبی

در این مثال فرض می شود محیط استوانه با دو ترک استوانه ای که نسبت به مبدا مختصات بصورت متقارن می باشند تضعیف شده است. مرکز ترک ها ثابت و به ترتیب در ارتفاع های  $z = -1.2b$  و  $z = 1.2b$  قرار دارند. استوانه بطور همزمان تحت بارهای برشی خود تعادلی جانبی بصورت های  $\sigma_{rz}(b, z) = \tau_0[H(z + h_1) - H(z + h_2)]$  و  $\sigma_{rz}(b, z) = \tau_0[H(z - h_1) - H(z - h_2)]$  در آن  $h_1 = 3b$  و  $h_2 = 4b$  و نیز بار شعاعی جانبی بصورت  $\sigma_{rr}(b, z) = \sigma_0[H(z - h_3) - H(z - h_4)]$  و  $h_3 = -2.5b$  و  $h_4 = 2.5b$  می باشد. شعاع ترک ها ثابت و یکسان ( $l_1 = l_2 = 0.5b$ ) در نظر گرفته می شوند در حالیکه طول ترک ها با وجود یکسان بودن تغییر می کنند. تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد نوک ترک ها در اشکال (۳) و (۴) مشاهده می شوند که در آنها این ضرایب نسبت به ضریب  $K_0 = \tau_0\sqrt{\pi b}$  بی بعد شده اند که در آن  $b$  شعاع استوانه می باشد. در این اشکال برای اینکه ترکها قابل رویت باشند بارگذاری شعاعی نشان داده نشده است. در شکل (۳) ضرایب شدت تنش مد اول مکانیک شکست و در شکل (۴) ضرایب شدت تنش مد دوم مکانیک شکست قابل مشاهده هستند.

ضرایب شدت تنش نوکهای پایینی دو ترک پایینی و بالایی به ترتیب با نمادهای  $K_{II1}$  و  $K_{II2}$  و ضرایب شدت تنش نوکهای بالایی دو ترک پایینی و بالایی به ترتیب با نمادهای  $K_{Iu1}$  و  $K_{Iu2}$  مشخص می شوند. در ضمن بدلیل تقارن هندسه و بار گذاری نسبت به صفحه  $z = 0$  ضرایب شدت تنش دو نوک نزدیک شونده به هم یعنی  $K_{II2}$  و  $K_{Iu1}$  یکسان و ضرایب شدت تنش دو نوک دور شونده از هم یعنی  $K_{II1}$  و  $K_{Iu2}$  یکسان هستند. بدلیل وجود نواحی با تمرکز تنش بالا ضرایب شدت تنش دو نوک نزدیک شونده به هم با افزایش طول ترکها تقریباً افزایش می یابند. اما ضرایب شدت تنش دو نوک دور شونده از هم تحت تاثیر چندین عامل قرار دارند. عوامل افزایش طول و نزدیک شونده گی به بار نزدیکتر (باید توجه کرد که هر نوک از ترکها درحین نزدیک شدن به یک بار برشی از دیگری دور می شود) این ضرایب را افزایش و عوامل دور شونده گی این دو نوک از یکدیگر و کاهش تاثیر مقابل آنها و دور شونده گی از بار نزدیکتر این ضرایب را کاهش می دهند. لذا مصالحه بین این عوامل سبب افزایش اولیه این ضرایب با افزایش طول ترکها و کاهش ثانویه آنها با افزایش طول ترکها می شود. لازم بذکر است که بدلیل وجود مد ترکیبی مکانیک شکست تفسیر فیزیکی نتایج اندکی دشوار می باشد.





**شکل ۳-** نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد مد اول بر حسب  $\frac{L_1}{2b}$  برای دو ترک استوانه ای با شعاع یکسان تحت بارگذاری ترکیبی برشی و شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه

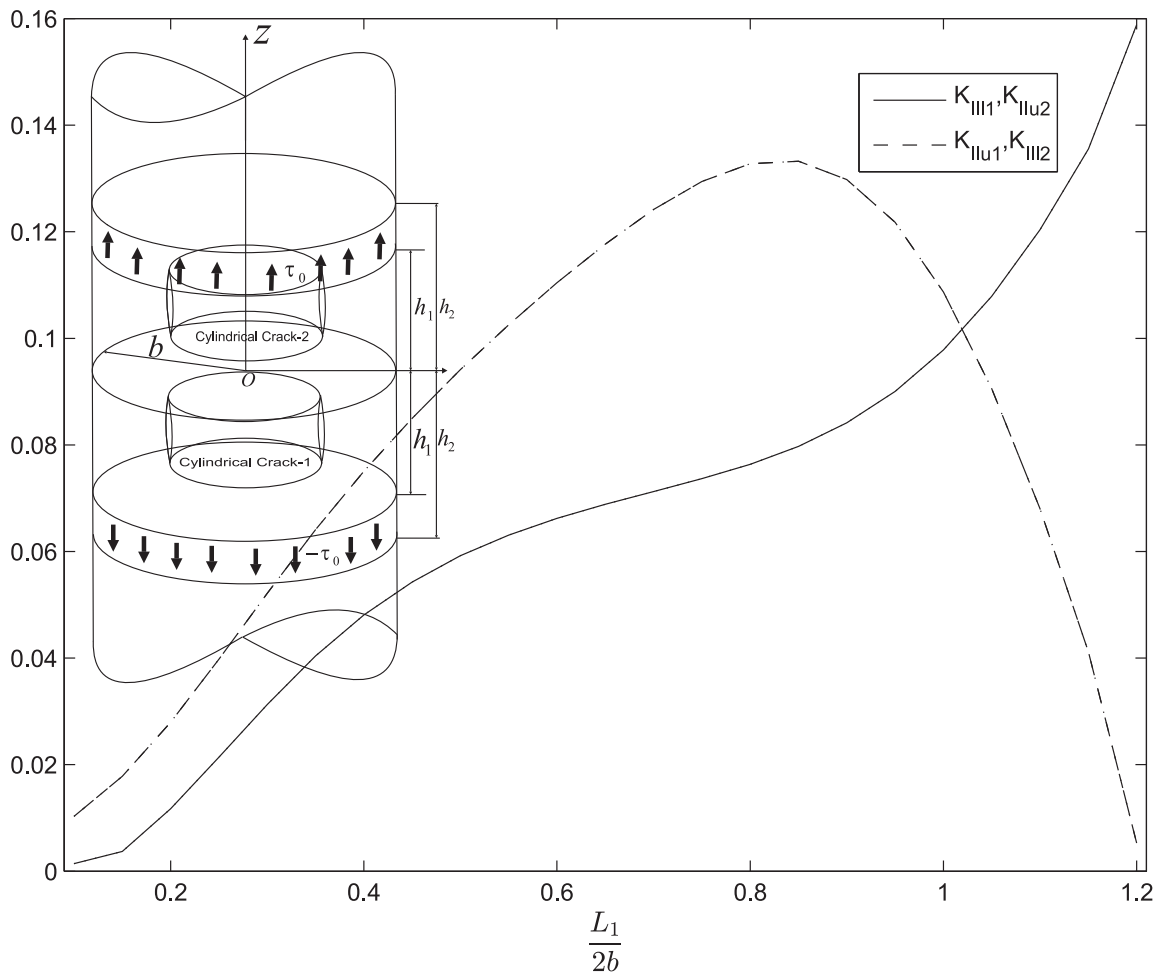
بعنوان مثال در حین کشش (اعمال بارهای برشی خود تعادلی که بطور عمده روی مقدار ضریب شدت تنش مد دو اثرگذارند) بدلیل اثر پواسون، سطح مقطع استوانه می تواند کاهش یابد و این نکته می تواند در مقدار ضریب شدت تنش مد یک که بطور عمده ناشی از بار شعاعی است تاثیر بگذارد. یکی دیگر از دلایل کاهش ضرایب شدت تنش دو نوک دور شونده این موضوع می تواند باشد که برای  $\frac{L_1}{2b} > 0.125$  این دو نوک از منطقه اعمال بار شعاعی خارج می شوند لذا همانطور که در شکل مشاهده می شود در انتهای نمودارهای (۳) و (۴) به عدد  $0.125$  نزدیک شده و کم کم ضرایب شدت تنش کاهش می یابند.

مثال ۴- استوانه نامحدود تضعیف شده با دو ترک استوانه ای نامتقارن تحت بارگذاری ترکیبی برشی خود تعادلی و شعاعی روی سطح جانبی

در مثال آخر نیز، فرض می شود که استوانه با دو ترک استوانه ای با طول های یکسان و شعاع های متفاوت تضعیف شده است بطوریکه مرکز ترکها ثابت و شعاع آنها به ترتیب  $l_1 = 0.4b$  و  $l_2 = 0.6b$  می باشند بارگذاری در این مثال نیز مشابه بارگذاری ترکیبی مثال قبل می باشد. نمودارهای تغییرات ضرایب شدت تنش

بی بعد نوک ترکها در اشکال (۵) و (۶) مشاهده می شوند که در آنها نیز این ضرایب نسبت به ضریب  $K_0 = \tau_0 \sqrt{\pi b}$  بی بعد شده اند. عوامل تاثیر گذار بر افزایش و کاهش ضرایب شدت تنش را می توان بصورت زیر طبقه بندی نمود.

- (۱) افزایش طول ترک : عامل افزایش ضریب شدت تنش
- (۲) نزدیک شدن به بار برشی پایینی : عامل افزایش ضریب شدت تنش (شدت این عامل برای ترک پایینی بیشتر از ترک بالایی است. باید توجه کرد که هر نوک از ترکها درحین نزدیک شدن به یک بار برشی از دیگری دور می شود)
- (۳) نزدیک شدن به بار برشی بالایی : عامل افزایش ضریب شدت تنش (شدت این عامل برای ترک بالایی بیشتر از ترک بالایی است)
- (۴) برای ضریب شدت تنش مد اول عامل (۱) تاثیر گذارتر است چرا که بارگذاری شعاعی نسبت به دو ترک بطور متقارن قرار گرفته و ترکها تحت پوشش بار شعاعی قرار دارند. این ضرایب تقریبا با افزایش طول افزایش می یابند. البته برای دو نوک نزدیک شونده تمایل به افزایش در حالت نزدیکی زیاد دو نوک به یکدیگر بدلیلی تاثیر متقابل ترکها بر هم بیشتر است.



**شکل ۴-** نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد مد دوم بر حسب  $\frac{L_1}{2b}$  برای دو ترک استوانه ای با شعاع یکسان تحت بارگذاری ترکیبی برشی و شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه

مشابه مثال قبل خروج تدریجی دو نوک دور شونده از منطقه تحت اثر بار شعاعی عامل دیگری برای کاهش ضرایب شدت تنش این نوکها در انتهای نمودار شکل (۵) می باشد. با توجه به عوامل بالا نتایج زیر برای ضریب شدت تنش مد دوم بدست می آیند:

الف) ضریب شدت تنش نوک پایینی ترک پایینی در اثر عوامل (۱) و (۲) افزایش و در اثر دور شدن از بار برشی بالایی کاهش می یابد اما چون عامل (۲) بر اثر دور شدن از بار برشی بالایی غلبه دارد (ترک پایینی به بار پایینی نزدیکتر از بار بالایی است) لذا در مجموع ضریب شدت تنش این نوک با افزایش طول ترک افزایش می یابد.

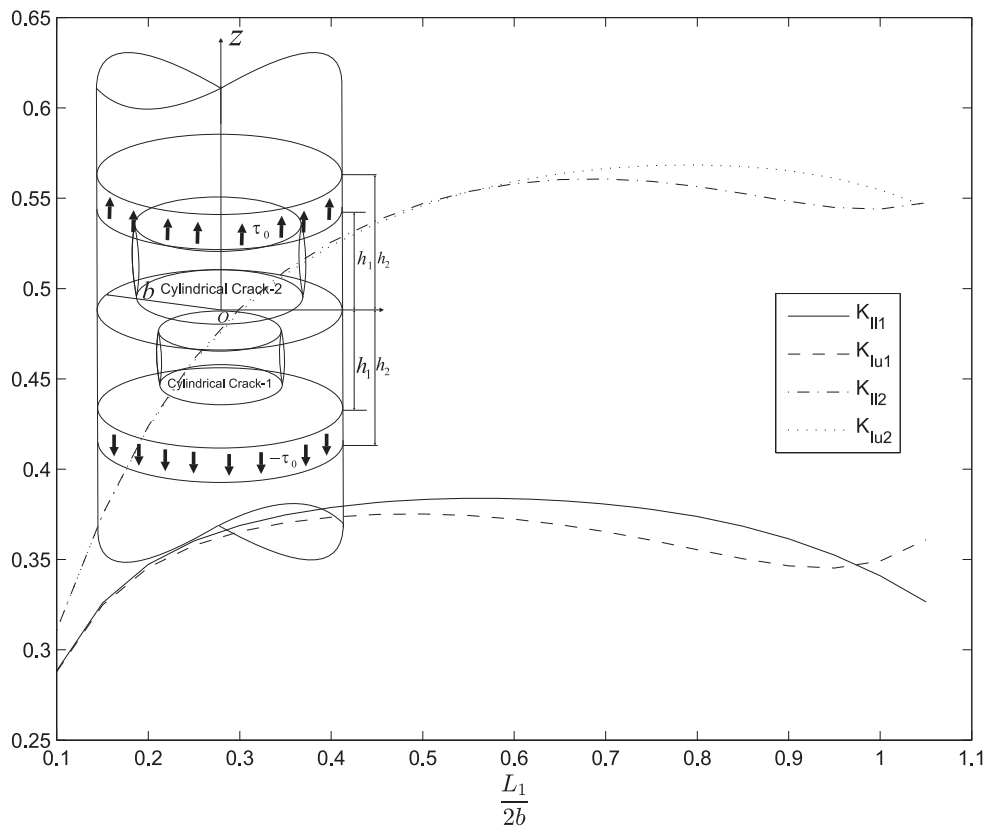
ب) ضریب شدت تنش نوک بالایی ترک پایینی در اثر عوامل (۱) و (۳) افزایش و در اثر دور شدن از بار برشی پایینی کاهش می یابد اما چون اثر دور شدن از بار برشی پایینی بر عامل (۳) غلبه دارد (ترک پایینی به بار پایینی نزدیکتر از بار بالایی است) لذا در مجموع ضریب شدت تنش این نوک با افزایش طول ترک در ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. البته ضریب شدت تنش نوک پایینی ترک بالایی نیز بطور مشابه عمل می کرد که بدلیل اینکه شعاع آن نسبت به ترک پایینی بیشتر است و به سطح استوانه نزدیکتر است از بار برشی اثرگذاری بیشتری دارد. در ضمن در مقایسه با مثال قبل نسبت به ترک هم شعاع با ترک پایینی که در موقعیت مشابه قرار داشت به بار نزدیکتر است و کاهش ضریب شدت تنش جبران شده است.

ج) ضریب شدت تنش نوک بالایی ترک بالایی در اثر عوامل (۱) و (۳) افزایش و در اثر دور شدن از بار برشی پایینی کاهش می یابد. در این حالت اثر دور شدن از بار برشی پایینی کم تاثیرتر از عوامل دیگر است. بنابراین ضریب شدت تنش این نوک با افزایش طول افزایش می یابد.

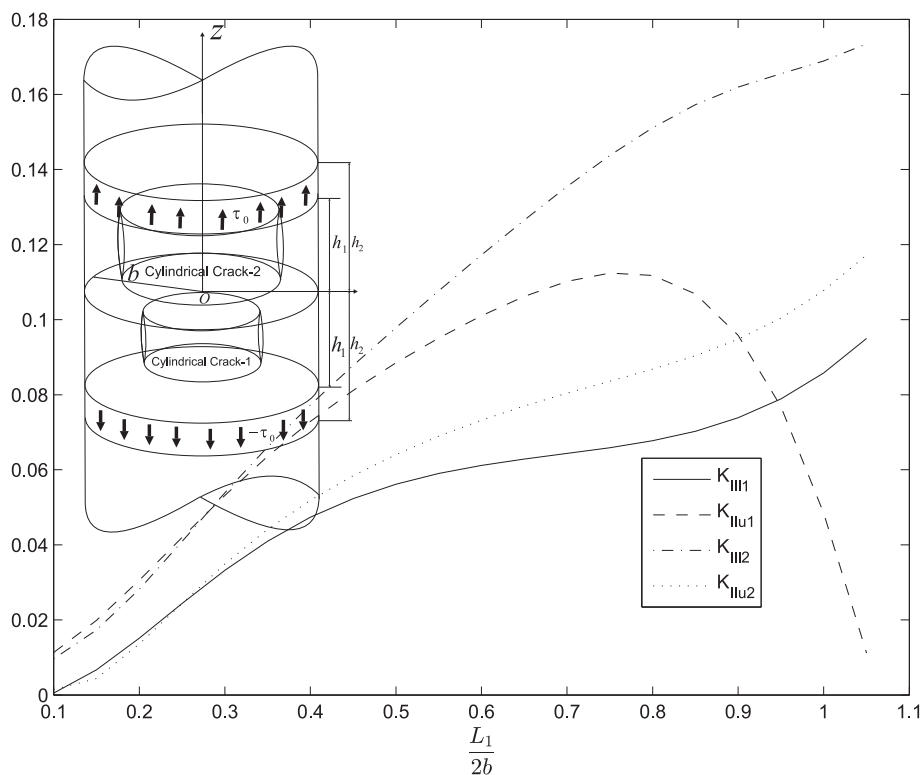
## ۶ - نتیجه گیری

با توجه به مثالهای حل شده نتایج زیر بدست می آیند :

- ۱) ضرایب شدت تنش بی بعد نوکهای بهم نزدیک شونده ترکها افزایش می یابند.
- ۲) ضرایب شدت تنش بی بعد مد دوم با نزدیک شدن نوکهای ترک به بارهای برشی افزایش و با دور شدن از بارهای برشی کاهش می یابند. اما بسته به غلبه اثر بار بالایی یا پایینی ممکن است مصالحه ای بر سر افزایش این ضرایب با افزایش طول ترکها و اثر بار صورت بگیرد.



شکل ۵- نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد مد اول بر حسب  $\frac{L_1}{2b}$  برای دو ترک استوانه ای غیرهم شعاع تحت بارگذاری ترکیبی برشی و شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه



شکل ۶- نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد مد اول بر حسب  $\frac{L_1}{2b}$  برای دو ترک استوانه ای غیرهم شعاع تحت بارگذاری ترکیبی برشی و شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه

## مراجع

- [1] Farris, T. N., Kokini, K., and Demir, I., "The Cylindrical Crack", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 56, No. 4, pp. 981-983, (1989).
- [2] Demir, I., Hirth, J. P., and Zbib, H. M., "The Extended Stress Field around a Cylindrical Crack using the Theory of Dislocation Pile-ups", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, No. 7, pp. 829-845, (1992).
- [3] Zbib, H. M., Hirth, J. P., and Demir, I., "The Stress Intensity Factor of Cylindrical Cracks", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, No. 2, pp. 247-253, (1995).
- [4] Close, S., and Zbib, H. M., "The Stress Intensity Factors and Interaction between Cylindrical Cracks in Fiber-matrix Composites", *Studies in Applied Mechanics*, Vol. 44, pp. 3-27, (1996).
- [5] Itou, S., "Stresses around a Cylindrical Interface Crack under Shear", *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 36, No. 4, pp. 631-638, (1990).
- [6] Dhaliwal, R. S., Saxena, H. S., He, W., and Rokne, J. G., "Stress Intensity Factor for the Cylindrical Interface Crack between Nonhomogeneous Coaxial Finite Elastic Cylinders", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 43, No. 6, pp. 1039-1051, (1992).
- [7] Xue-Li, H., and Duo, W., "The Crack Problem of a Fiber-matrix Composite with a Nonhomogeneous Interfacial Zone under Torsional Loading Part I. A Cylindrical Crack in the Interfacial Zone", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 54, No. 1, pp. 63-69, (1996).
- [8] Itou, S., and Shima, Y., "Stress Intensity Factors around a Cylindrical Crack in an Interfacial Zone in Composite Materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36, No. 5, pp. 697-709, (1999).
- [9] Itou, S., "Stress Intensity Factors for a Moving Cylindrical Crack in a Nonhomogeneous Cylindrical Layer in Composite Materials", *Archive of Applied Mechanics*. Vol. 75, No. 1, pp. 18-30, (2005).
- [10] Li, C., and Weng, G. J., "Dynamic Stress Intensity Factor of a Cylindrical Interface Crack with a Functionally Graded Interlayer", *Mechanics of Materials*. Vol. 33, No. 6, pp. 325-333, (2001).
- [11] Feng, W. J., Su, R. K. L., and Jiang, Z. Q., "Torsional Impact Response of a Cylindrical Interface Crack between a Functionally Graded Interlayer and a Homogeneous Cylinder", *Composite Structures*, Vol. 68, No. 2, pp. 203-209, (2005).
- [12] Li, Y. D., Zhao, H., and Xiong, T., "The Cylindrical Interface Crack in a Layered Tubular Composite of Finite Thickness under Torsion", *European Journal of Mechanics-A/Solids*. Vol. 39, pp. 113-119, (2013).

- [13] Lur'e, A. I., "Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity", Interscience Publishers, (1964).
- [14] Faal, R. T., Fariborz, S., and Daghyani, H. R., "Antiplane Deformation of Orthotropic Strips with Multiple Defects", Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 1, No. 7, pp. 1097-1114, (2006).
- [15] Erdogan, F., "Stress Intensity Factors", Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, No. 4, pp. 92-1002, (1983).
- [16] Kasano, H., Matsumoto, H., and Nakahara, I., "A Torsion-free Axisymmetric Problem of a Cylindrical Crack in a Transversely Isotropic Body", Bulletin of JSME. Vol. 27, No. 229, pp. 1323-1332, (1984).
- [17] Gordeliy, E., and Detournay, E., "Displacement Discontinuity Method for Modeling Axisymmetric Cracks in an Elastic Half-space", International Journal of Solids and Structures. Vol. 48, No. 19, pp. 2614-2629, (2011).

## فهرست نمادهای انگلیسی

$u$ : بردار جابجایی

$T$ : تانسور تنش

$U$ : ماتریس واحد

$G$ : بردار گالرکین بای هارمونیک

$r, z$ : مختصه شعاعی و محوری در مختصات استوانه ای

$u_r, u_z$ : تغییر مکان شعاعی و محوری

$b$ : شعاع استوانه

$a$ : شعاع حلقه نابجایی

$b_r, b_z$ : دانسیته نابجایی در جهت  $r, z$

$H(\cdot)$ : تابع واحد پله

$A_1, B_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ : ضرایب مجهول مربوط به تابع بای هارمونیک

$I_0, K_0, I_1, K_1$ : توابع بسل تعمیم یافته نوع اول و دوم از مرتبه صفر و یک

$p, q, m, n, x, y, w$ : توابع معرفی شده در این مقاله بر حسب  $r, z, a$

$h_1, h_2$ : مختصه های مشخص کننده محل بار برشی بر روی سطح جانبی استوانه

$h_3, h_4$ : مختصه های مشخص کننده محل بار شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه

$l_j$ : شعاع ترک  $j$ ام

$L_j$ : طول ترک  $j$  ام

$d_{uj}, d_{lj}$ : مختصات لبه بالایی و پائینی ترک  $j$  ام

$k_{11ij}(s, t), k_{12ij}(s, t), k_{21ij}(s, t), k_{22ij}(s, t)$ : کرنل های معادلات انتگرالی

$b_{rj}(t), b_{zj}(t)$ : دانسیته های نابجایی بی بعد

$g_{rj}(t), g_{zj}(t)$ : ضرایب غیر تکین دانسیته های نابجایی

$K_{Iuj}, K_{IIuj}$ : ضرایب شدت تنش نوک های ترک

$s, t$ : متغیر های معرفی شده جهت نرمالیزه کردن معادلات انتگرالی

$N$ : تعداد ترک استوانه ای

$Q(b, \xi)$ : توابع معرفی شده در این مقاله بر حسب  $b, \xi$

### نمادهای یونانی

$\theta$ : مختصه زاویه ای در مختصات استوانه ای

$\nabla$ : عملگر گرادیان

$\Delta$ : لاپلاسین متقارن محوری

$\mu$ : مدول برشی

$\nu$ : ضریب پواسون

$\chi$ : تابع بای هارمونیک

$\sigma_{rr}, \sigma_{zz}$ : مولفه های تنش عمودی در راستاهای شعاعی و محوری

$\sigma_{rz}$ : مولفه تنش برشی در راستای شعاعی

$\delta(\cdot)$ : تابع دلتای دیراک

$\xi$ : متغیر انتگرال گیری

$\Psi(b, \xi), \Gamma(\xi)$ : توابع معرفی شده در این مقاله بر حسب  $b, \xi$

$\tau_0$ : بزرگی بار برشی بر روی سطح جانبی استوانه

$\sigma_0$ : بزرگی بار شعاعی بر روی سطح جانبی استوانه

$\kappa$ : ثابت کلسف

$\hat{\chi}(r, \xi)$ : تبدیل فوریه مختلط تابع بای هارمونیک در جهت  $z$

پیوست ۱

$$\int_0^\infty I_1(a\xi)K_1(r\xi)\cos(z\xi)d\xi = \frac{1}{2ar\sqrt{p}}[mK(x) - pE(x)]$$

$$\int_0^\infty \xi K_0(r\xi)I_1(a\xi)\cos(z\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{p}}\left[\frac{n}{q}E(x) - K(x)\right]$$

$$\int_0^\infty \xi K_1(r\xi)I_0(a\xi)\cos(z\xi)d\xi = -\frac{1}{2r\sqrt{p}}\left[\frac{y}{q}E(x) - K(x)\right]$$

$$\int_0^\infty \xi^2 I_1(a\xi)K_1(r\xi)\cos(z\xi)d\xi =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{pq}}\left\{\left[\frac{a^2+r^2}{r} + \frac{4az^2}{p} - \frac{4az^2}{q}\right]E(x) - \left[\frac{a(a-r)}{r} + \frac{(a+r)n}{p}\right]K(x)\right\}$$

$$\int_0^\infty \xi^2 I_0(a\xi)K_0(r\xi)\cos(z\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{pq}}\left\{\left[1 - \frac{2z^2}{p} - \frac{2z^2}{q}\right]E(x) + \frac{z^2}{p}K(x)\right\}$$

$$\int_0^\infty I_0(a\xi)K_0(r\xi)\cos(z\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{p}}K(x)$$

$$\int_0^\infty I_0(a\xi)K_1(r\xi)\sin(z\xi)d\xi = \frac{z}{2r\sqrt{p}}\left[\frac{(r-a)}{(r+a)}\Pi(t,x) + K(x)\right]$$

$$\int_0^\infty K_0(r\xi)I_1(a\xi)\sin(z\xi)d\xi = \frac{z}{2a\sqrt{p}}\left[\frac{(r-a)}{(r+a)}\Pi(t,x) - K(x)\right]$$

$$\int_0^\infty \xi I_0(a\xi)K_0(r\xi)\sin(z\xi)d\xi = \frac{z}{\sqrt{pq}}E(x)$$

$$\int_0^\infty \xi I_1(a\xi)K_1(r\xi)\sin(z\xi)d\xi = \frac{z}{2ra\sqrt{p}}\left[\frac{m}{q}E(x) - K(x)\right]$$

$$\int_0^\infty \xi^2 K_0(r\xi)I_1(a\xi)\sin(z\xi)d\xi =$$

$$\frac{z}{\sqrt{pq}}\left\{\left[\frac{1}{2a} - \frac{2(a+r)}{p} - \frac{2(a-r)}{q}\right]E(x) - \left[\frac{1}{2a} - \frac{(a+r)}{p}\right]K(x)\right\}$$

$$\int_0^\infty \xi^2 I_0(a\xi)K_1(r\xi)\sin(z\xi)d\xi =$$

$$\frac{z}{\sqrt{pq}}\left\{\left[\frac{2(a+r)}{p} - \frac{2(a-r)}{q} - \frac{1}{2r}\right]E(x) + \left[\frac{1}{2r} - \frac{(a+r)}{p}\right]K(x)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} I_1(a\xi)K_1(r\xi)\sin(z\xi)d\xi =$$

$$\frac{z}{4ar\sqrt{p}}\left\{-(a-r)^2\Pi(t,x) + [m + (r^2 + a^2)]K(x) - pE(x)\right\}$$



## پیوست ۲

$$\begin{aligned}
A_{1r}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{-b^2 \xi^2 [(a^2 \xi^2 - 4\nu + 4)I_1(a\xi) + (2\nu - 3)a\xi I_0(a\xi)]Q(b, \xi) \\
&+ a\xi(b^2 \xi^2 - 4\nu + 4)I_0(a\xi) + I_1(a\xi)\{\xi^2[2a^2(\nu - 1) - b^2] - 2(\nu - 1)(2\nu - 3)\} \\
&+ (2\nu - 2)[(a^2 \xi^2 - 4\nu + 4)I_1(a\xi) + 2(2\nu - 3)a\xi I_0(a\xi)]I_1(b\xi)K_1(b\xi) \\
&+ 2(\nu - 1)(2\nu - 3)a\xi K_0(a\xi)[I_1(b\xi)]^2\} \\
A_{1z}(\xi) &= -\frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{a\xi\{[-(b^2 \xi^2 - 2\nu + 2)I_1(a\xi) - 2(\nu - 1)a\xi I_0(a\xi)] \\
&+ [a\xi I_0(a\xi) + 2(\nu - 1)I_1(a\xi)]\}\{-2\nu + 2\}I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b, \xi)\} \\
B_{1r}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{(a^2 \xi^2 - 2\nu + 2)I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi) \\
&+ [2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b, \xi)][I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)]\} \\
B_{1z}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{[2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b, \xi)]a\xi I_1(a\xi) - a^2 \xi^2 I_0(b\xi)\} \\
A_{2r}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{\{\xi^2[2a^2(\nu - 1) - b^2] - 2(\nu - 1)(2\nu - 3)\}I_1(a\xi) + a\xi I_0(a\xi)(b^2 \xi^2 - 4\nu + 4) \\
&+ [(3 - 2\nu)a\xi I_0(a\xi) - I_1(a\xi)(a^2 \xi^2 - 4\nu + 4)][b^2 \xi^2 Q(b\xi) + 2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi)]\} \\
A_{2z}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{a\xi\{a\xi I_0(a\xi)\{2(\nu - 1)[I_1(b\xi)K_1(b\xi) + 1] - b^2 \xi^2 Q(b, \xi)\} \\
&+ I_1(a\xi)\{-b^2 \xi^2 + 2\nu - 2\}[2(\nu - 1)I_1(b\xi)K_1(b\xi) - 1] - 2(\nu - 1)b^2 \xi^2 I_0(b\xi)K_0(b\xi)\} \\
B_{2r}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} \{a^2 \xi^2 I_1(a\xi) - 2\nu I_1(a\xi) - a\xi I_2(a\xi) \\
&+ [I_1(a\xi) - a\xi I_0(a\xi)][2(1 - \nu)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b, \xi)]\} \\
B_{2z}(\xi) &= \frac{1}{\Psi(b, \xi)} a\xi\{a\xi I_0(a\xi) - I_1(a\xi)[(-2\nu + 2)I_1(b\xi)K_1(b\xi) + b^2 \xi^2 Q(b, \xi)]\}
\end{aligned}$$

پیوست ۳

کرل های انتگرالی :

$$\begin{aligned}
 k_{11ij}(s, t) &= -\frac{\mu r_j (r_i^2 - b^2)}{2b^2(\nu - 1)r_i^2} + \frac{\mu}{(\nu - 1)\pi} \\
 &\int_0^\infty \{A_{2rj}(\xi)[I_1(r_i\xi)/r_i\xi - I_0(r_i\xi)] + B_{2rj}(\xi)[(2\nu - 1)I_0(r_i\xi) - r_i\xi I_1(r_i\xi)]\} \sin[\xi(z_i - z_j)] d\xi \\
 &- \frac{\mu(z_i - z_j)}{\pi(\nu - 1)\sqrt{pq}} \left\{ \left\{ \frac{r_j(r_j + r_i)^2}{pq} + (\nu - 2)\left(\frac{1}{r_j} + \frac{r_j}{r_i^2}\right) - \frac{r_j}{q} + \frac{(1 - \nu)}{r_j r_i^2} [m + (r_i^2 + r_j^2)] \right\} K(x) \right. \\
 &+ \left\{ \frac{m}{2r_i r_j q} \left(\frac{r_j^2}{r_i} + r_i\right) + \frac{r_j}{q} - \frac{2r_j(r_j - r_i)^2}{q^2} - \frac{2r_j(r_j + r_i)^2}{pq} - \frac{(1 - \nu)p}{r_j r_i^2} - \frac{2r_j}{q} \right\} E(x) \\
 &+ \left\{ \frac{(r_i - r_j)(2\nu - 3)}{2(r_i + r_j)} \left(\frac{r_j}{r_i^2} - \frac{1}{r_j}\right) - \frac{(1 - \nu)}{r_j r_i^2} (r_j - r_i)^2 \right\} \Pi(w, x) \Big\} \\
 k_{12ij}(s, t) &= -\frac{\mu}{\pi(\nu - 1)} \\
 &\int_0^\infty \{A_{2zj}(\xi)[I_1(r_i\xi)/r_i\xi - I_0(r_i\xi)] + B_{2zj}(\xi)[(2\nu - 1)I_0(r_i\xi) - r_i\xi I_1(r_i\xi)]\} \cos(\xi(z_i - z_j)) d\xi \\
 &+ \frac{\mu}{\pi(\nu - 1)\sqrt{pq}} \left\{ \left\{ \frac{q}{2} \left(\frac{r_j^2}{r_i^2} + 1\right) + \frac{r_i}{2} \left[ \frac{r_j(r_j - r_i)}{r_i} + \frac{(r_j + r_i)n}{p} \right] + \frac{r_j^2(z_i - z_j)^2}{p} + \frac{(\nu - 1)q}{r_i^2} m \right\} K(x) \right. \\
 &+ \left\{ \frac{r_j^2 - r_i^2}{2} - \frac{(\nu - 1)pq}{r_i^2} - \frac{r_j^2 y}{2r_i^2} - \frac{n}{2} + \frac{2(z_i - z_j)^2 r_j}{q} \left[ \frac{(r_i - r_j)}{q} - \frac{(r_j + r_i)}{p} \right] \right\} E(x) \Big\} \\
 k_{21ij}(s, t) &= \\
 &-\frac{\mu}{\pi(\nu - 1)} \int_0^\infty \{A_{2rj}(\xi)I_1(r_i\xi) + B_{2rj}(\xi)[2(1 - \nu)I_1(r_i\xi) + r_i\xi I_0(r_i\xi)]\} \cos[\xi(z_i - z_j)] d\xi \\
 &+ \frac{\mu}{\pi(\nu - 1)\sqrt{pq}} \left\{ \left\{ \frac{(1 - \nu)mq}{r_j r_i} - \frac{r_j}{2} \left[ \frac{r_j(r_j - r_i)}{r_i} + \frac{(r_j + r_i)n}{p} \right] - \frac{r_i r_j (z_i - z_j)^2}{p} - \frac{q}{2} \left(\frac{r_i}{r_j} + \frac{r_j}{r_i}\right) \right\} K(x) \right. \\
 &+ \left\{ \frac{r_j r_j^2 + r_i^2}{2} - \frac{(1 - \nu)pq}{r_j r_i} + \frac{r_j y}{2r_i} + \frac{r_i n}{2r_j} - r_i r_j + 2r_j(z_i - z_j)^2 \left[ \frac{(r_j + r_i)}{p} + \frac{(r_i - r_j)}{q} \right] \right\} E(x) \Big\} \\
 k_{22ij}(s, t) &= \\
 &-\frac{\mu}{\pi(\nu - 1)} \int_0^\infty \{A_{2z}(\xi)I_1(r_i\xi) + B_{2z}(\xi)[2(1 - \nu)I_1(r_i\xi) + r_i\xi I_0(r_i\xi)]\} \sin(\xi(z_i - z_j)) d\xi \\
 &+ \frac{\mu r_j(z_i - z_j)}{\pi(\nu - 1)\sqrt{pq}} \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r_j}{r_i} + \frac{r_i}{r_j}\right) - \frac{(r_j + r_i)^2}{p} \right\} K(x) + \left\{ \frac{2(r_j + r_i)^2}{p} - \frac{2(r_j - r_i)^2}{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_j}{r_i} + \frac{r_i}{r_j}\right) \right\} E(x) \right\}
 \end{aligned}$$

**Abstract**

In this article, stress analysis of an isotropic infinite cylinder weakened by multiple concentric cylindrical cracks subjected to shear and radial loadings on the lateral surface of the cylinder is accomplished. First, using the dislocation solution, integral equations for the infinite cylinder with arbitrary number of the cylindrical cracks are constructed. The numerical solution of resulting integral equations which are of the Cauchy type singular equations leads to evaluation of Somigliana and Volterra dislocation densities on the crack surfaces. Using related dislocation density, the stress intensity factors of crack tips for some examples are attained and validation of the results of this study with others available in the literature is done.