

شبیه‌سازی کاویتاسیون جزئی حول هندسه‌های

با مقاطع دایروی و بیضوی به روش المان مرزی

در این تحقیق با استفاده از روش المان مرزی، نرم‌افزاری جهت شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون جزئی حول هندسه‌های با مقاطع دایروی (متقارن محوری) و بیضوی (شبه‌سه‌بعدی) ارائه می‌شود. با توجه به سرعت بالای همگرایی تحلیل متقارن محوری در روش المان مرزی، ابتدا جریان کاویتاسیون حول هندسه‌های با مقطع دایروی شبیه‌سازی شده و سپس از نتایج این تحلیل جهت شبیه‌سازی جریان حول هندسه‌های با مقطع بیضوی استفاده می‌شود. بدین منظور، با استفاده از بیان انتگرالی تئوری گرین، رینگ‌های چشمه و دوگان روی مرزهای حل توزیع و برای شبیه‌سازی انتهای کاویتا، از دو مدل ساده و جت بازگشتی استفاده می‌شود. طول کاویتا مقداری ثابت و ورودی مسأله است و شکل کاویتا و عدد کاویتاسیون از نتایج این شبیه‌سازی است. به منظور اعتبارسنجی نتایج، معادلات ناویر-استوکس به روش مخلوط چندفاز نیز حل شده و سرعت همگرایی و دقت آن با نتایج روش حاضر مقایسه می‌شود. مقایسه نتایج حاضر با نتایج تجربی و عددی توانایی این روش را در شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون جزئی حول هندسه‌های با مقاطع دایروی و بیضوی را با سرعت همگرایی بالا و دقت نسبتاً مطلوب تایید می‌کند.

مهدی نوروزی^۱

دانشجوی دکترا

محمدحسن جوارشکیان^۲

دانشیار

محمود پسندیده‌فرد^۳

دانشیار

واژه‌های راهنما: کاویتاسیون جزئی، المان مرزی، جت بازگشتی، شبه‌سه‌بعدی، کاویتاتور بیضوی

۱- مقدمه

جریان‌های همراه با کاویتاسیون، به علت ناپایداری جریان، وجود فازهای مختلف و تغییر سریع فازها به یکدیگر دارای پیچیدگی‌های فراوانی هستند. این پدیده غالباً در جریان‌های با سرعت بالا و یا جریان‌های چرخشی رخ می‌دهند و وقوع آن همراه با سر و صدا، فرسایش و کاهش کارایی سیستم‌های هیدرولیکی است؛ اما به‌وجود آمدن کاویتاسیون همیشه دارای چنین اثرات نامطلوبی نیست؛ در جریان‌های خارجی مانند متحرک‌های زیرسطحی می‌توان از این پدیده جهت کاهش نیروی اصطکاک و در نتیجه افزایش سرعت استفاده نمود. بدین ترتیب که با قرارگیری متحرک زیرسطحی درون حباب کاویتا، متحرک به‌جای تماس با آب، با بخار بسیار کم‌فشاری تماس خواهد داشت که این مسأله منجر به کاهش اساسی پسای اصطکاکی و

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، norozi347@yahoo.com

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، javareshkian@um.ac.ir

^۳ دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، fard_m@um.ac.ir

فشاری خواهد شد [۱]. به علت گستردگی وجود این پدیده در سیستم‌های سیالاتی، روش‌های مختلفی برای شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون ارائه شده است که می‌توان این روش‌ها را به دو دیدگاه عمده تقسیم نمود: دیدگاه اول: روش‌های شبیه‌سازی تک فاز و دیدگاه دوم: روش‌های شبیه‌سازی دوفاز. در دیدگاه اول که در جریان‌های با فرض پتانسیلی بودن جریان توسعه یافته‌اند و «روش المان مرزی» یکی از این روش‌هاست، سه فرض اساسی وجود دارد: (۱) مرز کاویتا به صورت یک سطح آزاد تعریف می‌شود. (۲) فشار درون کاویتا مقداری ثابت و معمولاً برابر فشار اشباع بخار مایع می‌باشد. (۳) برای منطقه انتهایی کاویتا می‌بایست مدل مناسبی فرض شود. معادلات حاکم بر این دیدگاه صرفاً برای فاز مایع حل می‌شوند. این دیدگاه که دارای مبنای تحلیل ریاضی است دارای سرعت همگرایی بسیار بالا و درعین حال دقت مطلوب است. بدیهی است فرض پتانسیلی بودن جریان، محدودیت‌هایی را در استفاده از این روش به وجود می‌آورد و در شبیه‌سازی جریان‌هایی که در آن اثرات آشفتگی و لزجت قابل توجه است (مثلاً در اعداد کاویتاسیون نزدیک به ۱ که کاویتا ساختار کف ماندنی دارد و شکل کاویتا، متأثر از اثرات لزجت و ناپایداری می‌باشد، بسیار ناپایدار است)، نتایج این روش با خطا روبرو خواهد بود که در این شرایط استفاده از روش‌های چندفاز با لحاظ اثرات لزجت پیشنهاد می‌شود. دیدگاه دوم بر مبنای شبیه‌سازی جریان‌های لزج توسعه یافته‌اند که برای شبیه‌سازی کاویتاسیون از حل کامل معادلات ناویر-استوکس استفاده نموده و از مدل‌های مختلف آشفتگی جهت شبیه‌سازی آشفتگی جریان استفاده می‌کند. این دیدگاه که دارای مبنای تحلیل عددی است، هزینه محاسباتی و زمانی بسیار بالاتری نسبت به روش‌های دیدگاه اول دارد و با دقت مطلوبی جزئیات بیشتری را نسبت به دیدگاه اول ارائه می‌کند [۲].

در این مقاله، شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون بر اساس دیدگاه اول به روش المان مرزی انجام شده است و برای اعتبارسنجی آن، از حل عددی به روش حجم محدود بر مبنای دیدگاه دوم بهره گرفته شده است. با توجه به این‌که پایه اصلی روش المان مرزی، جریان پتانسیل است، در صورتی می‌توان از این روش برای تحلیل جریان کاویتاسیون استفاده نمود که ثابت شود جریان کاویتاسیون پتانسیلی است. آزمایشات تجربی لابر تاکس و همکاران نشان می‌دهد که جریان در اطراف کاویتا با تقریب خوبی پتانسیلی است [۳]؛ لذا می‌توان از روش المان مرزی برای شبیه‌سازی کاویتاسیون حول اجسام استفاده نمود. اگرچه پدیده کاویتاسیون ذاتاً غیردائم است اما غالباً به صورت دائم تحلیل شده است [۴-۷]. با وجود ماهیت ناپایداری کاویتا در طول زمان و نوسانی بودن طول کاویتا، مشاهدات تجربی و عددی نشان می‌دهد که در هر عدد کاویتاسیون خاص، طول کاویتا حول مقدار ثابتی نوسان می‌کند. مقدار نوسان طول کاویتا حول مقدار متوسط آن، وابسته به عدد کاویتاسیون و هندسه جسم است؛ بدین معنا که هر چه عدد کاویتاسیون کوچکتر (و در نتیجه طول کاویتا بزرگتر) باشد، نوسانات طول کاویتا کمتر خواهد بود و کاویتا پایدارتری ایجاد خواهد شد. از طرف دیگر، در هندسه‌هایی با سطوح بدون انحنا (مانند پرتابه‌ها و اژدرهای زیر آبی)، پایداری طول کاویتا بسیار بیشتر از هندسه‌های با سطوح دارای انحنا (مانند هیدروفویل‌ها) - به علت اثر گرادیان فشار مثبت و اثر آن بر ناپایداری طول کاویتا - است. بر این مبنای در هندسه‌های متقارن محوری مورد بررسی در این پژوهش و در اعداد کاویتاسیون تحلیل حاضر و نیز بر مبنای نتایج تحلیل ناپایداری عددی و تجربی ارائه شده در مرجع [۸]، مقدار نوسان طول کاویتا در بحرانی‌ترین شرایط، بیش از ۱۰ درصد طول متوسط

نخواهد بود. لذا در مورد این هندسه‌ها می‌توان گفت تناظری یک‌به‌یک بین طول متوسط کاویتا و عدد کاویتاسیون وجود دارد. نتایج کاویتاسیون تجربی موجود حول هندسه‌های متقارن محوری نیز بر اساس همین طول متوسط زمانی گزارش شده‌اند [۹].

در روش المان مرزی، برای شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون حول اجسام مختلف، سطوح جسم و کاویتا توسط المان‌هایی تقریب زده می‌شوند. سپس با استفاده از بیان انتگرالی تئوری گرین، رینگ‌های چشمه و دوگان روی المان‌های کاویتا و جسم توزیع می‌شوند. با اعمال شرایط مرزی مناسب بر معادلات گرین برای هر یک از المان‌های جسم و کاویتا و حل دستگاه معادلات به وجود آمده، قدرت پتانسیل‌های توزیع شده روی المان‌های جسم و کاویتا به دست می‌آیند. با استفاده از پتانسیل‌های به دست آمده، بردار سرعت بر روی هر المان به دست می‌آید که با استفاده از این بردار و با بهره‌گیری از یک حل تکراری، مجهولات مسأله (شکل کاویتا و عدد کاویتاسیون) به دست می‌آیند. طول کاویتا (و نیز طول جت بازگشتی در مدل جت بازگشتی) مقداری ثابت و به‌عنوان ورودی مسأله است.

طی دو دهه اخیر، کاربرد روش المان مرزی برای شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون همواره رو به گسترش بوده است. پس از مقاله هس و اسمیت [۱۰] که در آن با استفاده از روش المان مرزی، جریان پتانسیل حول اجسام دلخواه محاسبه شده بود، کاربرد این روش به سرعت افزایش یافت. طی یک دهه پس از آن، مطالعات مختلفی بر روی روش المان مرزی بدون کاویتاسیون انجام گرفت. برای اولین بار اهلمن، جریان کاویتاسیون جزئی دوبعدی حول هیدروفویل را با استفاده از یک روش المان مرزی غیرخطی بر مبنای سرعت (با استفاده از توزیع گردابه در مرز جریان) حل نمود [۱۱] و در ادامه، از همان روش برای حل جریان کاویتاسیون گسترده دوبعدی حول هیدروفویل استفاده کرد [۱۲]. فاین و کیناس برای حل جریان کاویتاسیون جزئی بر روی هیدروفویل دو بعدی، روش المان مرزی غیرخطی دیگری بر مبنای پتانسیل ارائه نمودند. آنها با توزیع چشمه و دوگان در مرز جریان و استفاده از انتگرال گرین به حل این مسأله پرداختند [۱۳، ۵]. روش پتانسیل‌مبنای مراجع [۱۳، ۵]، از حیث سرعت همگرایی، بر روش سرعت مبنای مرجع [۱۱] برتری داشت. از سال (۱۹۹۴) میلادی تاکنون، دو مدل تئوری هیدرودینامیکی برای تحلیل کاویتاسیون حول هندسه متقارن محوری ارائه شده است: مدل جسم کشیده [۱۴] و مدل المان‌های مرزی [۱۵].

هر دو مدل اخیر با دقت خوبی ناحیه کاویتا را شبیه‌سازی می‌نمودند. اهلمن و همکارانش، از «مدل جت بازگشتی» جهت تحلیل کاویتاسیون گسترده حول هندسه‌های متقارن محوری استفاده نمودند [۷] و پسندیده‌فرد و همکاران، با استفاده از مدل جت بازگشتی، جریان کاویتاسیون گسترده و جزئی حول هندسه‌های مختلف متقارن محوری را شبیه‌سازی نمودند [۱].

در مقاله حاضر، با استفاده از روش المان مرزی، شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون جزئی حول هندسه‌های متقارن محوری و شبه‌سه بعدی انجام شده و در انتهای کاویتا از دو مدل ساده و جت بازگشتی استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی نتایج، معادلات ناویر-استوکس نیز برای جریان کاویتاسیون متقارن محوری و سه‌بعدی حل شده است. مهم‌ترین نوآوری پژوهش حاضر، علاوه بر استفاده از مدل جت بازگشتی، بهره‌گیری از قابلیت همگرایی سریع روش المان مرزی متقارن محوری، برای تحلیل جریان کاویتاسیون حول هندسه‌های با مقطع بیضوی (جریان شبه‌سه بعدی) است که روش ارائه شده حاضر، تاکنون گزارش نشده است.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که تحلیل شبه‌سه‌بعدی حاضر با کمترین هزینه محاسباتی و زمانی (تنها طی چند دقیقه)، نتایج نسبتاً دقیقی را ارائه می‌دهد که روش‌های عددی دیگر جهت استخراج نتایج مشابه، نیازمند هزینه محاسباتی بالا و زمان بسیار طولانی (حداقل چندین ساعت) است؛ ضمن اینکه سهولت المان-بندی این روش، قابل مقایسه با شبکه‌بندی‌های پیچیده روش‌های عددی دیگر نیست.

۲- روش المان مرزی

معادلات ارائه شده در این بخش مربوط به جریان‌های متقارن محوری است. بدیهی است برای شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون شبه‌سه‌بعدی (مقطع بیضوی) نیز از این معادلات به نحوی که در ادامه می‌آید استفاده خواهد شد.

۲-۱- روابط ریاضی حاکم

مناسب‌ترین دستگاه مختصات برای جریان‌های متقارن محوری، استوانه‌ای است. بیان انتگرالی تئوری گرین در این دستگاه به صورت زیر است:

$$2\pi\phi(r, x) = \iint_S \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n} G(x, r; \xi, \rho) - \phi(r, x) \frac{\partial G(x, r; \xi, \rho)}{\partial n} \right\} \rho d\phi ds \quad (1)$$

که در آن n بردار عمود بر سطوح، s طول کمان طی شده روی سطوح، x و r مولفه‌های دستگاه مختصات متقارن محوری و توابع G و $\partial G / \partial n$ به ترتیب تابع گرین و مشتق نرمال آن است که به ترتیب معرف یک رینگ چشمه و یک رینگ دوگان می‌باشند و ϕ پتانسیل اختلالی توزیع شده روی سطوح حل هستند [۱]. در واقع پتانسیل اختلالی ϕ در یک نقطه از برهم‌نهی اثر همه اجزای پتانسیلی موجود در حوزه حل به استثنای پتانسیل جریان آزاد حاصل می‌شود و در مقابل، پتانسیل کلی ϕ در یک نقطه به معنای اثر همه عناصر پتانسیلی موجود در حوزه حل در یک نقطه (اعم از پتانسیل جریان آزاد و پتانسیل‌های معرفی-کننده هندسه و کاویته مورد بررسی) است که با استفاده از اصل برهم‌نهی حاصل می‌شود [۷]. رابطه توزیع پتانسیل اختلالی ϕ با توزیع پتانسیل کلی ϕ به صورت زیر است:

$$\phi = \bar{U}_\infty \cdot x + \phi \quad (2)$$

که در آن، \bar{U}_∞ سرعت جریان آزاد گذرنده از روی سطح هندسه است. با در نظر گرفتن \bar{U}_∞ برابر واحد، رابطه (۲) به این صورت درمی‌آید:

$$\phi = x + \phi \quad (3)$$

باتوجه به متقارن محوری بودن تحلیل حاضر، عناصر پتانسیل توزیعی روی سطوح باید به صورت رینگی باشند تا برای استفاده در دستگاه مختصات استوانه‌ای مناسب باشند. رینگ چشمه و دوگان مورد استفاده را می‌توان با انتگرال‌گیری از عناصر پتانسیل حول محور تقارن به دست آورد. بدین ترتیب، تابع پتانسیل یک رینگ چشمه (G) با شعاع ρ که در موقعیت ξ قرار گرفته در نقطه (x, r) به ازای واحد سطح s بدین صورت خواهد بود:

$$G(x, r; \xi, \rho) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho d\phi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\phi)}} = \rho J_1^0(A, B) \quad (4)$$

هم‌چنین تابع پتانسیل یک رینگ دوگان $(\partial G / \partial n)$ که حاصل انتگرال‌گیری از رینگ چشمه در راستای عمود بر المان مرزی است عبارت است از:

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, r; \xi, \rho) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \Phi}} \right\} \rho d\phi = \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \xi_n \frac{\partial G}{\partial \xi} + \rho_n \frac{\partial G}{\partial \rho} \right\} \rho d\phi \quad (5)$$

در شکل (۱)، مولفه‌های مختصات استوانه‌ای استفاده شده در روابط (۴) و (۵) معرفی شده است. با اعمال شرایط مرزی بر انتگرال گرین مشخص می‌شود که بر روی سطح جسم صرفاً رینگ‌های دوگان و بر روی سطح کاویتی مجموع رینگ‌های دوگان و چشمه اعمال می‌شود.

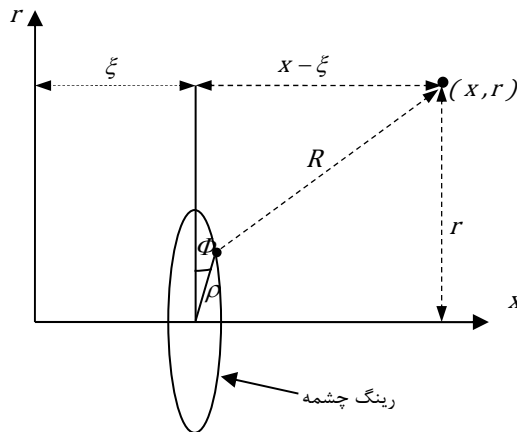
۲-۲- شرایط مرزی

۲-۲-۱- شرط مرزی سینماتیکی بر روی سطح جسم و کاویتی

اقتضای شرط نفوذ ناپذیری سطح این است که جریان هیچ مولفه عمودی بر سطح جسم (S_b) نداشته باشد. علاوه بر این، فرض می‌شود که جریان هیچ مولفه عمودی بر سطح کاویتی (S_c) نیز نداشته باشد. این بدان معناست که جهت جریان بر روی سطح جسم و کاویتی، صرفاً در راستای موازی این سطوح است. بنابراین شرط مرزی سینماتیکی روی سطح جسم و کاویتی به فرم پتانسیل اختلالی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -x_n \quad \text{on } S_b \cup S_c \quad (6)$$

که در رابطه (۶)، x_n مولفه عمودی سطح است. برای ارضای شرط سینماتیکی روی سطح کاویتی، باید سرعت عمود بر المان‌های کاویتی صفر باشد. لذا باید شیب بردار سرعت و شیب مرز کاویتی در هر نقطه روی آن، با هم برابر باشند.



شکل ۱- مختصات استوانه‌ای برای به‌دست‌آوردن رینگ چشمه و دوگان

شرط سینماتیکی روی سطح کاویتی بر معادلات انتگرالی اعمال نمی‌شود و جهت اصلاح شکل کاویتی در تکرارهای متوالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع، حل زمانی همگرا می‌شود که شرط مرزی سینماتیکی روی کاویتی ارضا شود. از نظر فیزیکی، رابطه (۶) بدین معناست که هیچ جریانی (ورودی/خروجی) از مرز کاویتی عبور نمی‌کند.

۲-۲-۲- شرط مرزی دینامیکی روی سطح کاویتی

چون جریان حول کاویتی تا حد زیادی غیرچرخشی است [۳]، می‌توان با استفاده از معادله برنولی، سرعت ثابتی برابر $U_\infty \sqrt{1+\sigma}$ برای جریان روی سطح کاویتی به دست آورد که σ عدد بی‌بعد کاویتاسیون است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \frac{P_\infty - P_c}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (7)$$

در رابطه (۷)، U_∞ و P_∞ به ترتیب سرعت و فشار جریان آزاد و P_c فشار بخار مایع می‌باشد. با بی‌بعد سازی سرعت با U_∞ ، مولفه مماسی سرعت روی سطح کاویتی به فرم پتانسیل اختلالی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \sqrt{1+\sigma} - x_s \quad \text{on } S_c \quad (8)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_0 + \sqrt{1+\sigma}(s-s_0) - (x-x_0) \quad \text{on } S_c \quad (9)$$

۲-۳- مدل بستن انتهای کاویتی

برخلاف حل کامل معادله ناویر-استوکس که در آن نیازی به شبیه‌سازی منطقه انتهای کاویتی نیست، در روش‌های عددی بر پایه پتانسیل (مانند روش المان مرزی)، می‌بایست انتهای کاویتی مدل شود. مدل‌های مختلفی برای انتهای کاویتی ارائه شده است. ساده‌ترین مدل انتهای کاویتی، «مدل بستن ساده» و فیزیکی-ترین مدل انتهای کاویتی، مدل «جت بازگشتی» است.

۲-۳-۱- مدل بستن ساده

در مدل بستن ساده کاویتاسیون جزئی، انتهای کاویتی بر روی جسم بسته می‌شود و در واقع فرض می‌شود در انتهای کاویتی نقطه سکونی ایجاد شده است. این مدل ساده‌ترین مدل ارائه شده برای انتهای کاویتی است. در این مدل انتهای آخرین المان روی کاویتی بر روی سطح جسم ثابت نگه داشته می‌شود.

۲-۳-۲- مدل جت بازگشتی

در مدل جت بازگشتی برای بستن انتهای کاویتی، فرض می‌شود قسمتی از جریان در انتهای کاویتی به درون کاویتی نفوذ می‌کند. این مدل بر اساس این مشاهده فیزیکی است که در شرایط معینی، جریان سیال اصلی

گذرنده از روی سطح کاویتا، تمایل دارد از انتهای کاویتا به درون آن برگردد که این جریان، «جت بازگشتی» نامیده می‌شود. علت به‌وجود آمدن جت بازگشتی، تمایل سیال برای حرکت از محیط با فشار بیشتر (روی سطح کاویتا) به محیط با فشار کمتر (داخل کاویتا) است. آزمایشات تایید می‌کنند که سرعت جت بازگشتی از مرتبه سرعت جریان آزاد است [۱۶]. در تحلیل‌های جریان پتانسیل، فرض می‌شود که جت بازگشتی با ضخامت ثابتی به درون کاویتا برمی‌گردد و هم‌چنین سرعت جریان عمود بر مقطع ورودی جت بازگشتی، برابر سرعت جریان در مرز کاویتا یعنی $U_{\infty} \sqrt{1+\sigma}$ است که با بی‌بعد سازی این سرعت با سرعت جریان آزاد، برابر $\sqrt{1+\sigma}$ خواهد شد [۹]. لذا شرط مرزی دینامیکی روی سطح جت بازگشتی به فرم پتانسیل اختلالی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sqrt{1+\sigma} - x_n \quad \text{on } S_{jet} \quad (10)$$

از طرفی، پتانسیل جریان بر روی سطح جت بازگشتی ثابت فرض می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۰)، پتانسیل روی سطح جت برابر است با:

$$\varphi_{jet} = \varphi_0 + \sqrt{1+\sigma} (s_{jet} - s_0) - (x_{jet} - x_0) \quad (11)$$

که در آن s_{jet} و x_{jet} به ترتیب برابر طول کمان و مولفه x لبه سطح مقطع جت و s_0 و x_0 برابر طول کمان و مولفه x لبه کاویتاتور (شروع کاویتا) می‌باشد.

۲-۴- استخراج معادلات انتگرالی

در رابطه (۱)، قدرت دوگان‌ها روی سطح جسم (φ) و قدرت چشمه‌ها روی سطح کاویتا $(\partial \varphi / \partial n)$ مجهول است. با توجه به شرایط مرزی ارائه شده در بخش ۲-۲، در صورت معلوم بودن عدد کاویتاسیون، φ بر روی کاویتا و جت بازگشتی مطابق روابط (۹) و (۱۱) و $\partial \varphi / \partial n$ بر روی جسم و جت بازگشتی مطابق روابط (۶) و (۱۰) معلوم خواهد بود. با انتقال معلوم‌ها به سمت راست و مجهول‌ها به سمت چپ تساوی، رابطه (۱) روی مرز جسم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$2\pi\varphi + \iint_{S_b} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G dS = \iint_{S_b+S_{jet}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G dS - \iint_{S_c+S_{jet}} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad \text{on } S_b \quad (12)$$

و برای مرز کاویتا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\iint_{S_b} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G dS = \iint_{S_b+S_{jet}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G dS - 2\pi\varphi - \iint_{S_c+S_{jet}} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad \text{on } S_c \quad (13)$$

که مقادیر معلوم مطابق روابط (۶)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) بر دو رابطه انتگرالی (۱۲) و (۱۳) اعمال می‌شوند. برای کامل شدن تعداد معادلات در دستگاه معادلات خطی، از این مفهوم استفاده می‌شود که مجموع قدرت خالص چشمه‌های توزیع شده روی سطح کاویتا با شار عبوری از مقطع عمودی جت بازگشتی برابر است [۱۷]. این مفهوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\iint_{s_c+s_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \sqrt{1+\sigma} \iint_{s_j} dS \quad (14)$$

به منظور استفاده از روش‌های حل عددی معادلات انتگرالی، می‌بایست این معادلات را با گسسته‌سازی، به صورت گروهی از معادلات جبری درآورد. با حل این دستگاه معادلات، قدرت چشمه‌ها و دوگان‌های توزیع شده روی سطح جسم و کاویته به دست می‌آید. برای این منظور، ابتدا برای کاویته و جت بازگشتی، یک شکل اولیه به عنوان حدس اولیه تعریف می‌شود. سپس سطح جسم، کاویته و جت بازگشتی به المان‌های مستقیم‌الخطی تقریب زده شده، با نوشتن معادله (۱۲) برای المان‌های سطح جسم و معادله (۱۳) برای المان‌های سطح کاویته، تعداد $N = N_b + N_c$ معادله جبری به دست می‌آید. مجهولات مسأله شامل N_b قدرت دوگان روی سطح جسم، N_c قدرت چشمه روی سطح کاویته و یک عدد کاویتاسیون می‌باشد. بنابراین تعداد مجهولات $N+1$ است که یکی از تعداد معادلات بیشتر است. برای کامل شدن دستگاه معادلات خطی نیاز به یک معادله کمکی است که در قالب رابطه (۱۴) معرفی گردید. با حل دستگاه معادلات خطی، قدرت چشمه‌های المان‌های توزیع شده روی کاویته، قدرت دوگان‌های المان‌های توزیع شده روی سطح جسم و نیز عدد کاویتاسیون به دست خواهد آمد. با تطبیق شرط مرزی سینماتیکی روی سطح کاویته بر پتانسیل‌های به دست آمده و به روز آوری شکل کاویته، حل تکراری تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد.

۲-۵- الگوریتم حل تکراری و معیار همگرایی

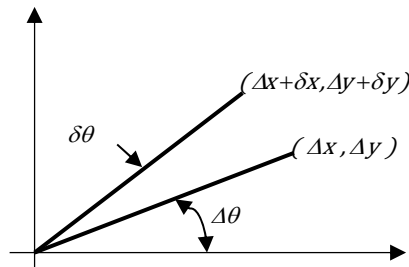
شرط سینماتیکی روی سطح کاویته یعنی رابطه (۶)، بر معادلات (۱۲) و (۱۳)، اعمال نگردید و صرفاً شرط دینامیکی آن مورد استفاده قرار گرفت. از شرط سینماتیکی روی سطح کاویته برای تصحیح شکل کاویته استفاده می‌شود. برای ارضای شرط سینماتیکی روی سطح کاویته، باید سرعت عمود بر المان‌های کاویته صفر شود و شیب بردار سرعت و شیب مرز کاویته در هر نقطه روی آن، با هم برابر شود و هیچ جریانی به مرز وارد و یا از آن خارج نشود. در صورتی که طول و عرض اولیه یک المان از کاویته، مطابق شکل (۲)، $(\Delta x, \Delta y)$ و در تکرار بعد مختصات المان به $(\Delta x + \delta x, \Delta y + \delta y)$ تغییر پیدا کند، با توجه به شرط سینماتیکی روی مرز کاویته، مقدار این تغییر به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \delta x &= -\Delta y \delta \theta \\ \delta y &= \Delta x \delta \theta \end{aligned} \quad (15)$$

و میزان زاویه چرخش المان یعنی $\delta \theta$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta \theta = \frac{v \Delta x - u \Delta y}{u \Delta x + v \Delta y} \quad (16)$$

بدین ترتیب مقدار $(\delta x, \delta y)$ برای نقطه انتهایی هر المان کاویته به دست می‌آید و به منظور تصحیح هندسه کاویته به نقاط انتهایی المان‌ها اضافه می‌شود [۷]. این کار در حالی صورت می‌گیرد که نقطه شروع کاویته بر روی جسم ثابت باقی می‌ماند و بقیه نقاط نسبت به آن تغییر می‌کنند. این حل تکراری و تصحیح شکل کاویته تا جایی صورت می‌گیرد که شرط مرزی سینماتیکی روی مرز کاویته ارضا شود.



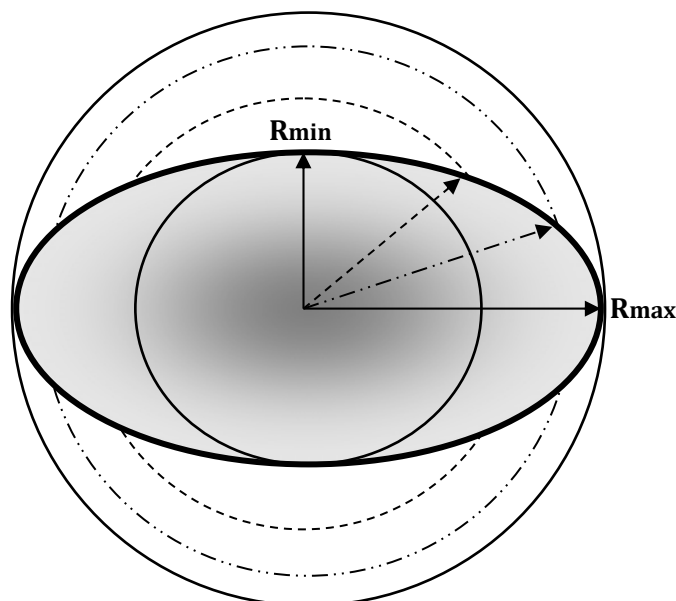
شکل ۲- تصحیح هندسه المان روی کاویتی در تکرار بعدی

ارضای این شرط زمانی است که جمع جبری قدرت چشمه‌های توزیع شده روی مرزهای کاویتی $(\partial\phi/\partial n)$ و تصویر سرعت جریان آزاد در راستای عمود بر المان (x_n) به سمت صفر میل کند. بنابراین عبارت زیر معیار همگرایی خواهد بود:

$$\sum_{j=N_b}^N \left| \frac{\partial\phi_j}{\partial n} + x_n \right| < \varepsilon \quad (17)$$

۲-۶- الگوریتم حل شبه‌سه بعدی با استفاده از روش المان مرزی

به‌علت پیچیدگی‌ها و هزینه بالای محاسباتی در تحلیل سه‌بعدی، روش‌های تحلیل «شبه‌سه‌بعدی» توسعه یافته‌اند. در تحلیل شبه‌سه‌بعدی، از جمع آثار نتایج تحلیل دوبعدی در مقاطع مختلف هندسه سه‌بعدی استفاده می‌شود. این نوع شبیه‌سازی در پژوهش‌هایی با کاربردهای مختلف نیز استفاده شده است [۲۰-۱۸]. بر این مبنا، در شبیه‌سازی حاضر، برای حل جریان کاویتاسیون جزئی حول استوانه با مقطع بیضوی (هندسه سه‌بعدی)، از جمع آثار نتایج تحلیل دوبعدی (متقارن محوری) در مقاطع مختلف استوانه با مقطع بیضوی استفاده شده است. الگوریتم حل جریان کاویتاسیون حول هندسه‌های با مقطع بیضوی به روش المان مرزی بدین صورت است که پس از مشخص نمودن نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی (نسبت منطری کاویتاتور بیضوی)، مقطع بیضوی کاویتاتور به قطاع‌هایی تقسیم می‌شود و برای هر قطاع به‌دست آمده، روش المان مرزی متقارن محوری به ترتیبی که در بخش‌های قبل ذکر شد اجرا و همگرا می‌شود. در واقع حل شبه‌سه‌بعدی ارائه شده حاصل جمع آثار چند حل متقارن محوری در مقاطع مختلف مقطع بیضی است که این مفهوم در شکل (۳) به تصویر کشیده شده است. برای همگرایی حل شبه‌سه‌بعدی، باید کلیه قطاع‌ها در یک عدد کاویتاسیون مشخص همگرا شود؛ به عبارت دیگر باید عدد کاویتاسیون در کلیه قطاع‌های کاویتاتور بیضوی برابر باشد. با توجه به بی‌بعد بودن تحلیل و تناظر یک به یک عدد کاویتاسیون با طول کاویتی (طول بی‌بعد شده نسبت به قطر کاویتاتور)، در یک عدد کاویتاسیون مشخص، نسبت طول کاویتی به قطر هر قطاع مقدار ثابتی است؛ لذا با داشتن قطر هر قطاع کاویتاتور طول کاویتی متناظر با آن نیز محاسبه می‌شود و به عنوان ورودی روش المان مرزی در تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین ترتیب شکل کاویتی جزئی در مقاطع مختلف کاویتاتور بیضوی در یک عدد کاویتاسیون مشخص به دست می‌آید.



شکل ۳- ترکیب چند حل متقارن محوری جهت شبیه‌سازی کاویتاتور شبه‌سه‌بعدی (بیضی)

با توجه به اینکه در جریان با زاویه حمله صفر، جریان‌های عرضی مقدار بسیار ناچیزی دارند، استفاده از معادلات متقارن محوری برای هر مقطع هندسه سه‌بعدی توجیه پذیر است. همان‌گونه که در بخش مقدمه عنوان شد، مزیت این الگوریتم برای تحلیل جریان همراه با کاویتاسیون شبه‌سه‌بعدی، سرعت همگرایی با دقت قابل قبول و نیز سهولت در المان‌بندی آن است.

۳- حل معادله کامل ناویر- استوکس به روش حجم محدود

۳-۱- روش و شرایط حل

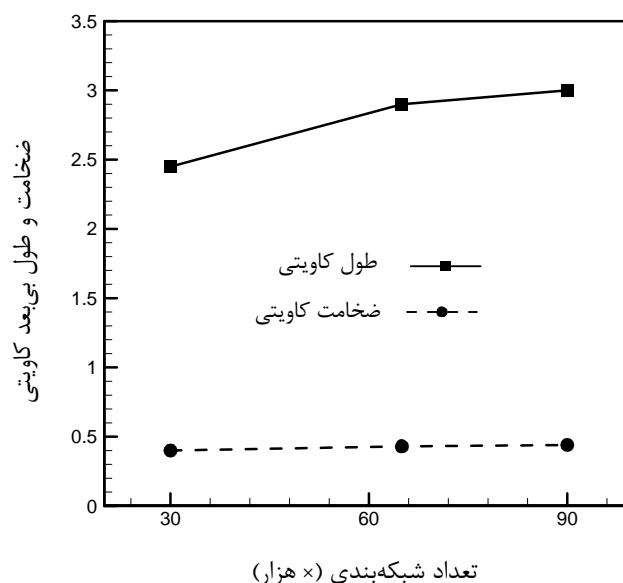
همان‌گونه که در بخش مقدمه بیان شد، فرض اساسی روش المان مرزی، پتانسیلی بودن جریان است و معادله حاکم بر آن معادله لاپلاس است. به‌منظور اعتبارسنجی روش المان مرزی و نیز بررسی نقش لزجت سیال بر نتایج تحلیل جریان همراه با کاویتاسیون، حل کامل معادلات ناویر- استوکس برای هندسه‌های مورد بررسی نیز انجام شده است. دیدگاه عددی مورد استفاده در این بخش حجم محدود است و با توجه به دوفازی بودن جریان، از روش مخلوط چندفاز که در آن دو فاز به صورت یک سیال همگن در نظر گرفته می‌شود استفاده شده است؛ بنابراین یک مجموعه معادلات برای هر دو فاز حل می‌شود. معادله بقای جرم برای مخلوط همگن نوشته می‌شود و معادله مومنتم برای مخلوط، از جمع مومنتم هر یک از فازها به‌دست می‌آید. تحلیل حجم محدود فشار مبنا به‌صورت ضمنی و گسسته‌سازی با دقت مرتبه دوم صورت گرفته است. برای شبیه‌سازی کاویتاسیون، علاوه بر معادلات فوق، یک معادله انتقال برای فاز بخار یا مایع نیز حل می‌شود. در کاویتاسیون طبیعی، انتقال جرم بین فاز بخار و مایع، به‌وسیله ترم‌های چشمه در این معادله در نظر گرفته می‌شوند. یکی از معروف‌ترین و دقیق‌ترین مدل‌های ارائه شده در نرم‌افزار فلوننت ۶/۳ برای شبیه‌سازی کاویتاسیون، مدل اصلاح شده ریلی است که توسط سینگهال توسعه یافته است [۲۱].

این مدل که در این پژوهش جهت شبیه‌سازی کاویتاسیون استفاده شده است، تمامی عوامل مهم تاثیرگذار بر کاویتاسیون مانند دینامیک حباب‌ها، پدیده تغییر فاز و نوسانات فشار توربولانسی را لحاظ می‌کند و قابلیت استفاده برای هندسه‌های مختلف را دارد. برای شبیه‌سازی اغتشاش جریان از مدل هفت معادله‌ای اغتشاشی تنش‌های رینولدز استفاده شده است که روابط آن به طور مبسوط در مرجع [۲۱] ارائه شده است.

۳-۲- هندسه مورد بررسی و شرایط مرزی

در این تحقیق، جهت اعتبارسنجی نتایج روش المان مرزی، با استفاده از روش عددی مخلوط چندفاز، به بررسی جریان پایای کاویتاسیون جزئی حول استوانه سر تخت در اعداد کاویتاسیون در محدوده $0.5-0.15$ (اعداد رینولدز در محدوده $10^7 \times 25/9 - 11/2$) پرداخته شده است.

هندسه مورد بررسی، استوانه‌ای سر تخت با شعاع پیشانی واحد و طول بدون بعد ۲۰ می‌باشد که درون جریان یکنواخت آب با سرعت جریان در محدوده $20-46/33$ متر بر ثانیه قرار دارد. پس از شبکه‌بندی سازمان‌یافته حوزه حل (با تعداد حدود ۹۲۰۰۰ شبکه در حل متقارن محوری و بیش از ۶۰۰۰۰۰ شبکه در حل سه-بعدی)، با استفاده از شرایط مرزی مناسب، این هندسه تحلیل شده است. برای حل متقارن محوری، شرط مرزی ورودی، سرعت یکنواخت موازی با محور تقارن، شرط مرزی بالای محدوده شبکه‌بندی، سرعت محوری ورودی، شرط مرزی روی سطح استوانه، دیواره و شرط مرزی خروجی جریان، به صورت فشار خروجی و برای خط محور پایین نیز از شرط مرزی تقارن محوری استفاده شده است. برای حل سه‌بعدی نیز شرایط مرزی مشابه حل متقارن محوری است. برای اطمینان از استقلال حل از فضای محاسباتی، ارتفاع فضای بالای هندسه متقارن محوری ۷۰ برابر شعاع کاویتاتور در نظر گرفته شده است و طول ورودی جریان (قبل از هندسه) ۵۰ برابر شعاع کاویتاتور و خروجی جریان (بعد از انتهای هندسه) ۶۰ برابر شعاع کاویتاتور در نظر گرفته شده است و جهت استقلال حل از شبکه، در حوزه نزدیک به بدنه هندسه، یعنی محل تشکیل کاویتی، تا ارتفاع چندین برابر ضخامت کاویتی، شبکه بسیار ریز شده است. در شکل (۴) نمودار استقلال حل عددی حاضر از شبکه‌بندی سازمان‌یافته نشان داده شده است.



شکل ۴- استقلال طول و ضخامت بی‌بعد کاویتی (نسبت به قطر کاویتاتور) از شبکه‌بندی.

۴- نتایج

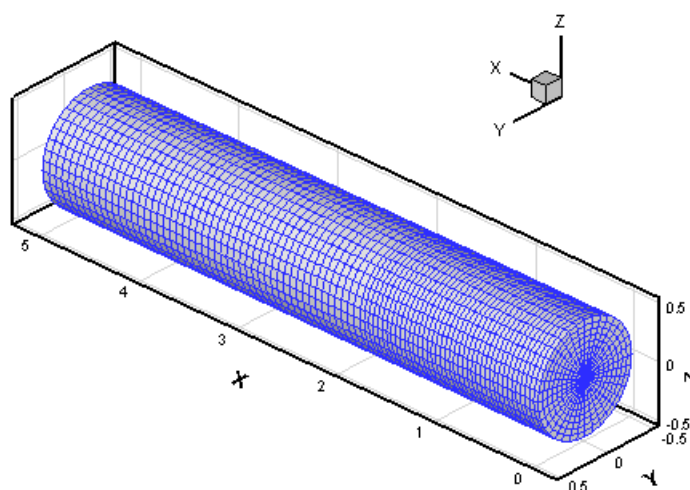
۴-۱- تحلیل متقارن محوری

۴-۱-۱- هندسه مورد بررسی

هندسه بدنه متحرک‌های زیرسطحی معمولاً استوانه‌ای شکل است. به همین دلیل در این مقاله، جریان روی این هندسه مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۵) هندسه استوانه‌ای سرتخت به همراه توزیع المان‌ها روی آن مشاهده می‌شود. قطر استوانه مورد بررسی برابر واحد و طول آن ۲۰ برابر قطر در نظر گرفته شده است که کاویتاتور آن به سه صورت سرتخت، سرکروی و سرمخروطی خواهد بود. کلیه طول‌های ارائه شده در این بخش با قطر کاویتاتور بی‌بعد شده است. با توجه به اینکه طول کاویتی، ورودی روش المان مرزی است، در ناحیه‌ای که برای کاویتاسیون جزئی در نظر گرفته شده است، از شبکه‌بندی ریزتری استفاده شده است (شکل (۵)). بدیهی است در حل المان مرزی تنها یک مقطع طولی استوانه حل می‌شود و نتایج به مقاطع دیگر تعمیم داده می‌شود.

۴-۱-۲- استقلال از المان‌بندی

در شکل‌های (۶) و (۷) استقلال حل از تعداد المان‌های توزیع شده روی استوانه سرتخت مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور دقت بیشتر و با توجه به اینکه شرایط مرزی متفاوتی بر المان‌های توزیع شده روی سطح جسم و سطح کاویتی اعمال می‌شود، استقلال حل از تعداد المان‌های روی سطح جسم و سطح کاویتی به صورت جداگانه بررسی شده است. استقلال از المان‌بندی برای هندسه مورد بررسی، در طول کاویتی ۳ و طول جت بازگشتی ۱ انجام گرفته است که همه طول‌ها با قطر استوانه بی‌بعد شده‌اند. در شکل (۶) تغییر عدد کاویتاسیون نسبت به تعداد المان‌های توزیع شده روی سطح جسم و در شکل (۷) تغییرات عدد کاویتاسیون نسبت به تعداد المان‌های توزیع شده روی سطح کاویتی ارائه شده است. مطابق این دو شکل، با افزایش تعداد المان‌ها، عدد کاویتاسیون به سمت مقدار خاصی میل می‌کند و نوسان ندارد.

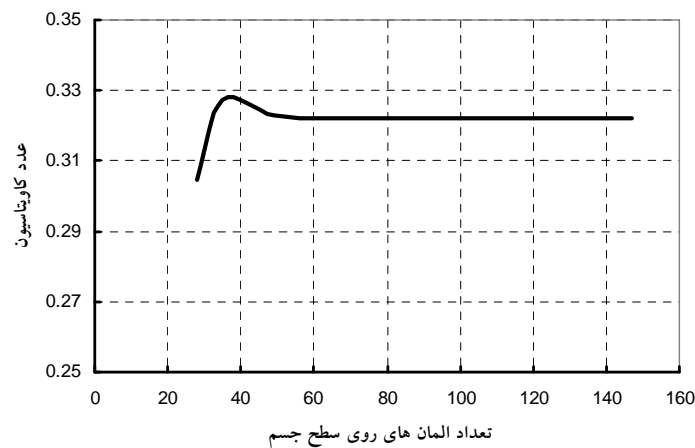


شکل ۵- هندسه متقارن محوری به همراه توزیع المان‌ها بر روی آن.

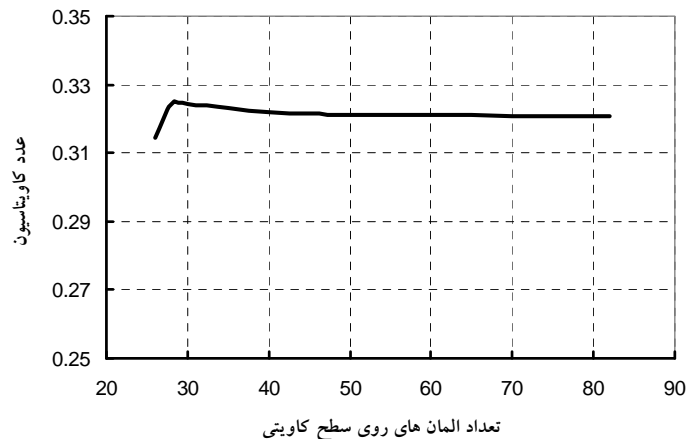
در شکل (۶)، در تعداد المان‌های بیش از ۸۰، حل از تعداد المان‌های توزیع شده بر روی سطح جسم و در شکل (۷)، در تعداد المان‌های بیش از ۴۵، حل از تعداد المان‌های توزیع شده روی سطح کاویتا مستقل شده است. بنابراین در مجموع حل از تعداد المان‌های بیش از ۱۲۵ روی سطح جسم و کاویتا مستقل شده است. برای ترکیب‌های مختلفی از تعداد المان‌های بیش از این مقدار نیز حل مستقل از تعداد المان‌ها بوده است.

۴-۱-۳- شکل کاویتا شبیه‌سازی شده

در شکل (۸) شکل کاویتا ایجاد شده روی هندسه استوانه‌ای سرتخت که از شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون جزئی متقارن محوری به روش المان مرزی با دو مدل ساده و جت بازگشتی در انتهای کاویتا و نیز حل عددی مخلوط چندفاز به دست آمده، در دو عدد کاویتاسیون $0/3$ و $0/5$ با نتایج شبیه‌سازی عددی کاویتا به روش نسبت حجمی سیال مرجع [۲۲] مقایسه شده است. مطابق انتظار، طول کاویتا در عدد کاویتاسیون $0/3$ از طول کاویتا در عدد کاویتاسیون $0/5$ بزرگ‌تر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در عدد کاویتاسیون $0/5$ طول کاویتا پیش‌بینی شده توسط روش المان مرزی (با مدل بستن ساده و مدل جت بازگشتی) اندکی بزرگ‌تر از طول کاویتا پیش‌بینی شده توسط حل عددی معادلات ناویر-استوکس است.

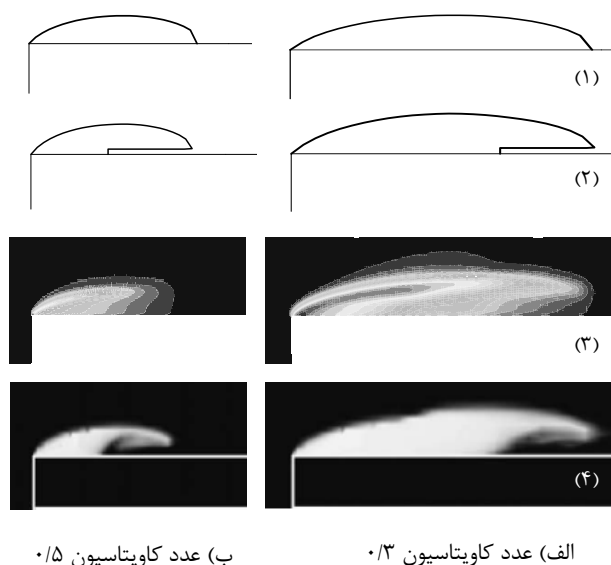


شکل ۶- نمودار تغییرات عدد کاویتاسیون نسبت به تعداد المان‌های توزیع شده روی جسم



شکل ۷- نمودار تغییرات عدد کاویتاسیون نسبت به تعداد المان‌های توزیع شده روی کاویتا

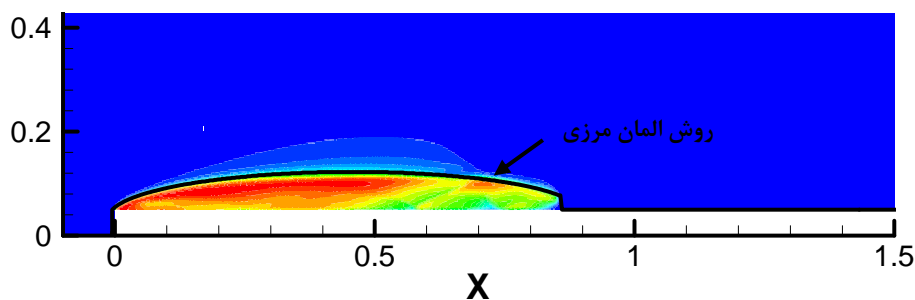
در واقعیت، در اعداد کاویتاسیون بزرگ (طول کاویته کوچک)، مرز مشخصی بین فاز بخار و فاز مایع در لبه کاویته وجود ندارد و کاویته به صورت توده‌ای کف مانند مشاهده می‌شود و این مساله باعث می‌شود که فرض «پتانسیل جریان» و نیز «سرعت ثابت روی کاویته» از واقعیت فاصله بگیرد. برای عدد کاویتاسیون 0.5 ، علت اصلی پیش‌بینی طول بزرگ‌تر در روش المان مرزی نسبت به طول پیش‌بینی شده روش‌های عددی دیگر، اعمال این دو فرض در روش المان مرزی است. این در حالی است که با کاهش عدد کاویتاسیون و در نتیجه افزایش طول کاویته، کاویته مرز مشخصی خواهد داشت و صحت دو فرض فوق در این شرایط باعث پیش‌بینی دقیق هندسه کاویته توسط روش المان مرزی می‌شود. در شکل (۹) هندسه کاویته جزئی حاصل از روش المان مرزی حاضر بر نتایج تحلیل عددی حاصل از روش مخلوط چندفاز در عدد کاویتاسیون 0.15 تطبیق داده شده است. مطابق شکل، طول و ضخامت بیشینه کاویته در این دو روش تطابق بسیار مناسبی با یکدیگر دارند.



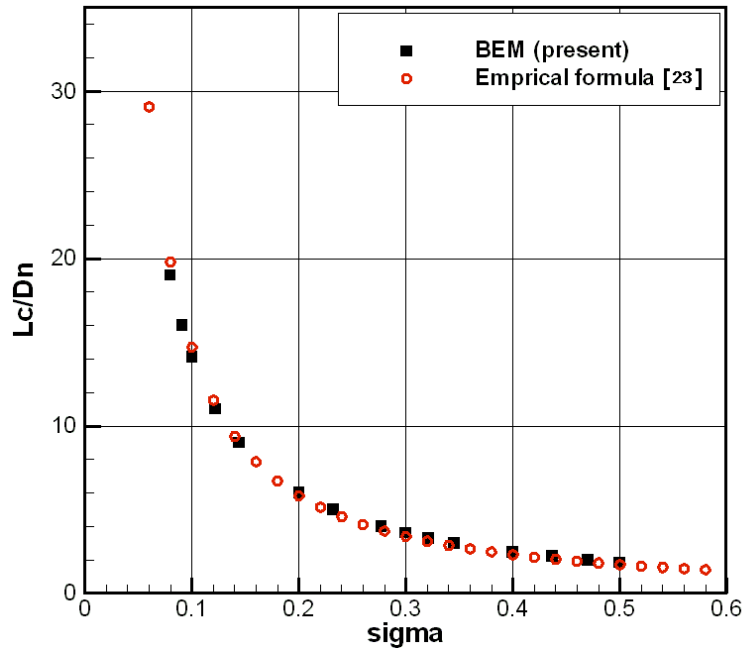
(ب) عدد کاویتاسیون 0.5

(الف) عدد کاویتاسیون 0.3

شکل ۸- مقایسه نمای دوبعدی کاویتاسیون جزئی روی استوانه سر تخت به روش‌های (۱) المان مرزی با مدل بستن ساده، (۲) المان مرزی با مدل جت بازگشتی، (۳) ناویر-استوکس با مدل مخلوط چند فاز و (۴) ناویر-استوکس با مدل نسبت حجمی سیال مرجع [۲۲]. در دو عدد کاویتاسیون الف) 0.3 و ب) 0.5 .



شکل ۹- نمای دوبعدی کاویتاسیون جزئی روی استوانه سر تخت و مقایسه با نتایج عددی مخلوط چند فاز در عدد کاویتاسیون 0.15 .

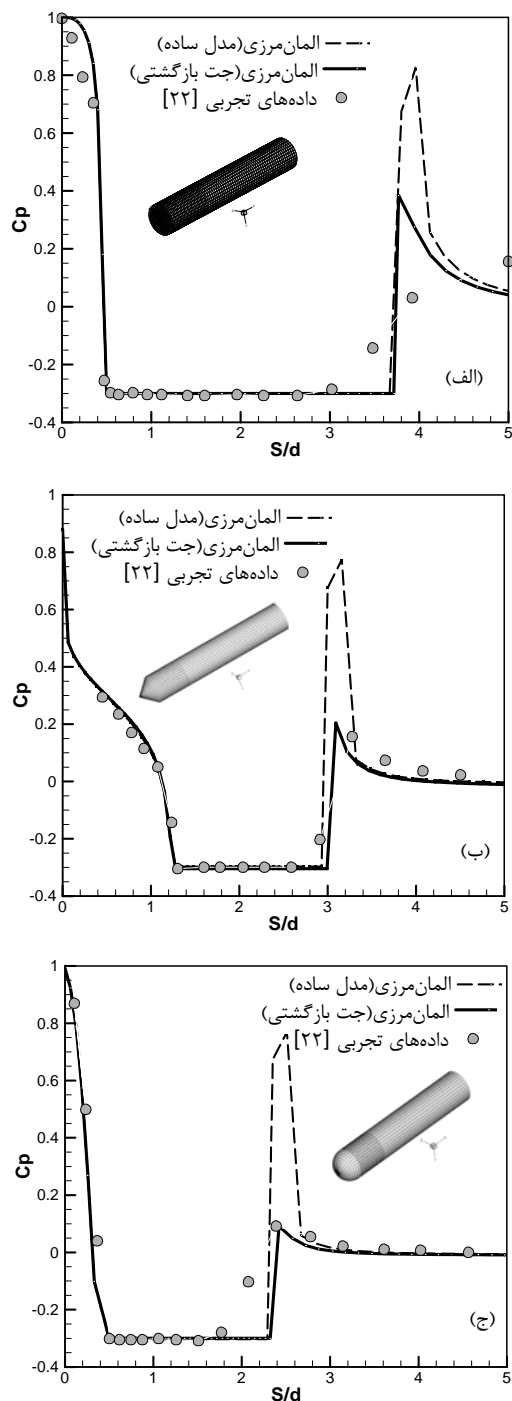


شکل ۱۰- تغییرات طول کاویتی نسبت به عدد کاویتاسیون برای کاویتاسیون جزئی حول استوانه سر تخت، مقایسه نتایج روش المان مرزی (نتایج حاضر) و رابطه تجربی مرجع [۲۳] (شعاع بدون بعد بدنه: ۰/۵، طول بدون بعد بدنه: ۲۰).

به منظور بررسی توانایی روش المان مرزی بر مبنای پتانسیل در پیش‌بینی طول کاویتی مربوط به رژیم کاویتاسیون جزئی، در شکل (۱۰) نتایج این روش با نتایج رابطه‌ی تجربی ارائه شده توسط بیلت و ویر [۲۳] برای طول کاویتی تشکیل شده در اطراف استوانه‌ای سر تخت با کاویتاتور دیسکی، مقایسه شده است. این رابطه تجربی به صورت زیر است:

$$\frac{L_c}{D_n} = \left(\frac{0.751}{\sigma} \right)^{1/0.75} \quad (18)$$

که در آن D_n قطر کاویتاتور و L_c طول کاویتی و σ عدد کاویتاسیون می‌باشد. ملاحظه می‌گردد که نتایج روش المان مرزی با نتایج تجربی مطابقت مناسبی دارد و توانایی آن را جهت مدل‌سازی کاویتاسیون جزئی در اطراف اجسام متقارن محوری و پیش‌بینی طول کاویتی با دقت مناسب، تأیید می‌کند. روند افزایش طول کاویتی با کاهش عدد کاویتاسیون در این شکل را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که کاهش عدد کاویتاسیون منجر به کاهش اختلاف فشار جریان آزاد و فشار درون کاویتی می‌گردد و این باعث می‌شود که گرادیان فشار کمتری در جریان ایجاد شده و خطوط جریان انحنای کمتری داشته باشند؛ لذا تمایل دارند موازی خطوط جریان بالادست رفتار کنند. بنابراین طول کاویتی افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱- تغییر ضریب فشار بر روی استوانه الف) سرتخت، ب) سرمخروطی و ج) سرکروی در عدد کایوتاسیون ۰/۳ و مقایسه نتایج روش المان مرزی با بستن ساده، با مدل جت بازگشتی و داده‌های تجربی مرجع [۲۲].

۴-۱-۴- توزیع ضریب فشار

در شکل (۱۱)، توزیع ضریب فشار روی بدنه استوانه سرتخت، سرمخروطی و سرکروی حاصل از روش المان مرزی در دو مدل بستن ساده و جت بازگشتی در انتهای کاویتا، با داده‌های تجربی مرجع [۲۲] مقایسه گردیده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در روش المان مرزی با مدل بستن ساده، پرش غیرمعقولی در

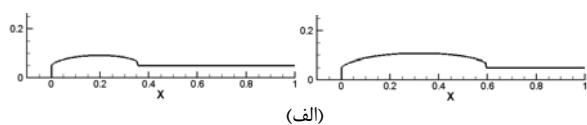
نمودار توزیع ضریب فشار در انتهای کاویتی مشاهده می‌شود که ناشی از ایجاد یک نقطه سکون غیرواقعی در این منطقه، به علت استفاده از مدل بستن ساده انتهای کاویتی است. در روش المان مرزی با مدل جت بازگشتی ضمن اصلاح نسبی نتایج این روش با مدل بستن ساده و از حذف پرش غیرمعمول ضریب فشار، تطابق قابل قبولی بین نتایج حاضر و نتایج تجربی مشاهده می‌شود.

البته حتی با اعمال مدل جت بازگشتی نیز مقدار بیشینه ضریب فشار با مقدار تجربی اختلاف دارد. در روش‌های عددی مراجع [۲۲-۲۴] نیز که در آنها از حل کامل معادله ناویر-استوکس برای شبیه‌سازی کاویتاسیون استفاده شده، مقدار حداکثر ضریب فشار در انتهای کاویتی بیش از مقدار واقعی پیش‌بینی شده است. مطابق شکل (۱۱)، در داده‌های تجربی انتهای کاویتی شاهد «افزایش تدریجی» ضریب فشار تا نقطه بیشینه آن هستیم. در حالی که در روش المان مرزی تغییر فاز «دفعی» است. علت این اختلاف در نتایج روش المان مرزی و داده‌های تجربی این است که در روش المان مرزی، در کل طول کاویتی، سرعت ثابت و برابر $\sqrt{1+\sigma}$ فرض شده است و بنابراین فشار کل حوزه کاویتی نیز ثابت و برابر فشار بخار در نظر گرفته شده است. در حالی که براساس نتایج تحلیل عددی کاویتاسیون (به روش مخلوط چند فاز)، سرعت در انتهای کاویتی در همه حال برابر $\sqrt{1+\sigma}$ نیست و سرعت در این منطقه، مقداری کمتر از $\sqrt{1+\sigma}$ دارد؛ این مساله با مشاهدات تجربی نیز مطابقت دارد؛ چرا که در انتهای کاویتی شاهد حضور جت بازگشتی هستیم که سهم عظیمی از آن را فاز مایع تشکیل می‌دهد. هم‌چنین، در انتهای کاویتی، جریان‌های با جهت حرکت و فازهای مختلف سیال وجود دارد که بر غیرقابل پیش‌بینی بودن انتهای کاویتی در تحلیل‌های پایا می‌افزاید و از طرفی داده-برداری تجربی از این منطقه را نیز با نامعینی‌هایی روبرو می‌کند؛ لذا با نزدیک شدن به انتهای کاویتی، فرض پتانسیلی بودن جریان و محاسبه سرعت بر این مبنا در این ناحیه از کاویتی با واقعیت فاصله می‌گیرد که این اختلاف، در اعداد کاویتاسیون بزرگتر (طول کاویتی کوچک‌تر)، به علت ماهیت ناپایدار جریان سیال و وجود مخلوط دوفاز بخار و مایع در انتهای کاویتی نمایان‌تر است؛ اما در اعداد کاویتاسیون کوچک‌تر که کاویتی حالت پایدارتری دارد تا محدوده وسیعی از لبه حمله این فرض صادق است.

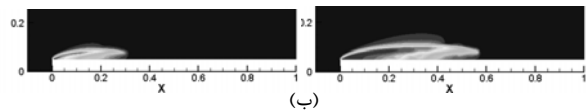
۴-۲- نتایج تحلیل شبه‌سه بعدی

در دو شکل (۱۲) و (۱۳) نتایج شبیه‌سازی شبه‌سه بعدی به روش المان مرزی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی متقارن محوری و سه‌بعدی به روش مخلوط چند فاز به ترتیب در دو عدد کاویتاسیون $0/3$ و $0/2$ با یکدیگر مقایسه شده است. هندسه مورد بررسی استوانه‌ای با مقطع بیضی با نسبت منظری $1/2$ (R_{max} / R_{min}) است که شعاع کوچک بیضی در راستای محور y و شعاع بزرگ بیضی در راستای محور x است و طول استوانه با مقطع بیضی برابر 20 (بی‌بعد شده با قطر کوچک بیضی) در نظر گرفته شده است.

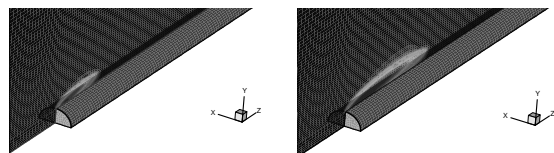
همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج روش شبه‌سه بعدی المان مرزی با تقریب خوبی به نتایج تحلیل سه‌بعدی مخلوط چند فاز نزدیک است. طول کاویتی در روش المان مرزی شبه‌سه‌بعدی، اندکی بیش از طول کاویتی نتایج سه‌بعدی مخلوط چند فاز است. علت این اختلاف نیز، مطابق آنچه در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت، فرض سرعت ثابت جریان روی کاویتی و نیز فرض پتانسیلی بودن جریان است.



(الف)

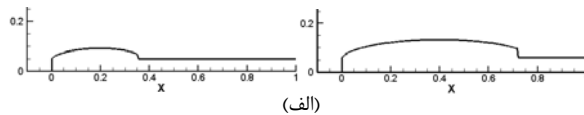


(ب)

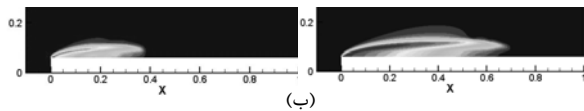


(ج)

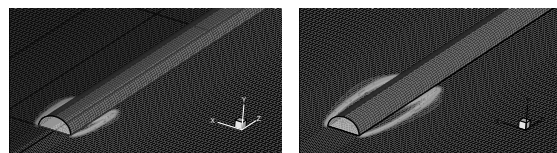
شکل ۱۳- مقایسه نمای کاویتاسیون جزئی روی استوانه سرتخت در شعاع کوچکتر مقطع بیضوی ($R_{min}=0.5$ در راستای محور y) به سه روش (الف) المان مرزی با مدل بستن ساده (شبه‌سه بعدی)، (ب) مخلوط چندفاز متقارن محوری و (ج) مخلوط چندفاز سه‌بعدی در اعداد کاویتاسیون $0/2$ (شکل‌های سمت راست) و $0/3$ (شکل‌های سمت چپ).



(الف)



(ب)



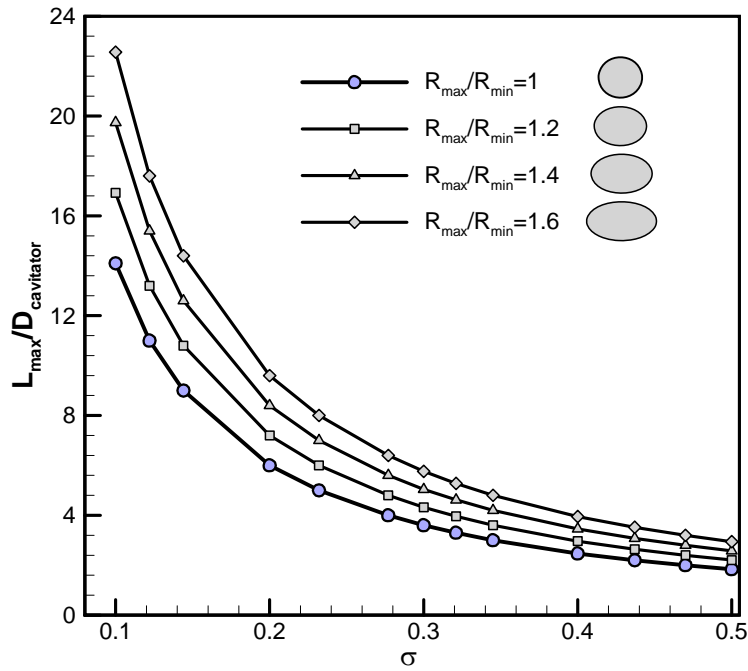
(ج)

شکل ۱۲- مقایسه نمای کاویتاسیون جزئی روی استوانه سرتخت در شعاع کوچکتر مقطع بیضوی ($R_{max}=0.6$ در راستای محور x) به سه روش (الف) المان مرزی با مدل بستن ساده (شبه‌سه بعدی)، (ب) مخلوط چندفاز متقارن محوری و (ج) مخلوط چندفاز سه‌بعدی در اعداد کاویتاسیون $0/2$ (شکل‌های سمت راست) و $0/3$ (شکل‌های سمت چپ).

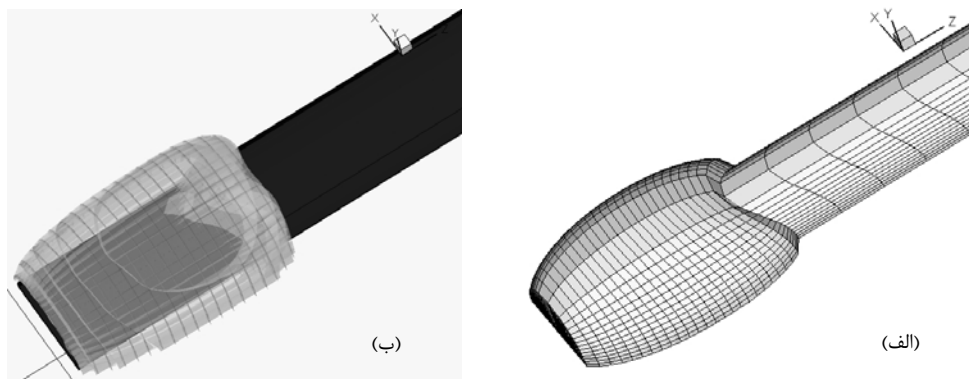
شاهد این مدعا، انطباق بیشتر نتایج این دو روش در عدد کاویتاسیون $0/2$ است که با توجه به اینکه در اعداد کاویتاسیون کوچکتر دو فرض مذکور با واقعیت تطابق بیشتری دارد، نتایج دو روش نیز به یکدیگر نزدیک‌تر شده‌اند. اگرچه در نهایت روش المان مرزی، طول کاویتای را حداکثر 15% بیش از روش عددی مخلوط پیش-بینی می‌کند، اما سرعت همگرایی این روش با روش‌های عددی دیگر از جمله روش مخلوط چند فاز قابل مقایسه نیست.

در شکل (۱۴) نمودار تغییرات طول بیشینه کاویتای حول مقطع بیضوی (بدون بعد شده نسبت به قطر کوچکتر بیضی) نسبت به تغییرات عدد کاویتاسیون در نسبت‌منظری‌های مختلف نشان داده شده است. از آنجایی که در قطاع‌های مختلف یک مقطع بیضوی، طول کاویتای متفاوت است و با توجه به اهمیت بیشتر طول بیشینه کاویتای در کاربردهای عملی، در شکل (۱۴) طول بیشینه کاویتای ایجاد شده حول استوانه با مقطع بیضوی مبنا قرار گرفته است. طول بیشینه در بزرگترین شعاع مقطع بیضوی ایجاد می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت منظری (R_{max} / R_{min})، طول بیشینه کاویتای افزایش یافته است.

در شکل (۱۵) نمای سه‌بعدی جریان کاویتاسیون جزئی به دو روش شبه‌سه بعدی المان مرزی و سه بعدی مخلوط چند فاز در عدد کاویتاسیون $0/3$ نمایش داده شده است. مقایسه نمای سه‌بعدی این دو روش نیز قابلیت روش المان مرزی در پیش‌بینی شبه سه‌بعدی جریان همراه با کاویتاسیون حول هندسه‌های با مقطع بیضوی را مورد تایید قرار می‌دهد.



شکل ۱۴- نمودار تغییرات طول بیشینه کاویتای ایجاد شده حول استوانه با مقطع بیضوی نسبت به عدد کاویتاسیون در نسبت‌منظری‌های مختلف



شکل ۱۵- مقایسه نمای سه‌بعدی کاویتاسیون جزئی روی استوانه سرتخت در عدد کاویتاسیون ۰/۳ به الف) روش المان مرزی با مدل بستن ساده (شبه‌سه‌بعدی) و ب) روش مخلوط چند فاز (سه‌بعدی)

جدول ۱- تعداد شبکه‌بندی و زمان همگرایی روش‌های تحلیل مختلف.

روش تحلیل	ابعاد تحلیل	تعداد المان (شبکه)	زمان همگرایی (دقیقه)
المان مرزی	متقارن محوری	~ ۲۰۰	~ ۳
المان مرزی	شبه‌سه‌بعدی	~ ۲۴۰۰	~ ۲۵
ناویر- استوکس	متقارن محوری	~ ۹۰۰۰۰	~ ۴۰۰
ناویر- استوکس	سه‌بعدی	~ ۶۰۰۰۰۰	~ ۲۱۰۰

۴-۳- مقایسه تعداد شبکه و سرعت همگرایی

در جدول (۱) تعداد شبکه‌بندی و زمان همگرایی دو روش المان مرزی و ناویر- استوکس (مخلوط چند فاز) با یکدیگر مقایسه شده است. رایانه پردازش‌گر استفاده شده برای شبیه‌سازی‌های پژوهش حاضر (مقارن محوری، شبه‌سه‌بعدی و سه‌بعدی)، دارای پردازنده پرسرعت Intel Core 2 Duo T9550 با مشخصات CPU 2.66 GHz و RAM 3 GB می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تعداد المان‌های روش المان مرزی در حالت مقارن محوری، ۴۵۰ برابر کمتر از تعداد شبکه‌بندی روش ناویر- استوکس مقارن محوری و تعداد المان‌های روش المان مرزی شبه‌سه‌بعدی، حداقل ۲۵۰ برابر کمتر از تعداد شبکه سه‌بعدی در روش ناویر- استوکس است. این تفاوت قابل توجه در تعداد المان‌های دو روش المان مرزی و ناویر- استوکس، منجر به تفاوت قابل توجه در سرعت همگرایی می‌شود و سرعت همگرایی روش المان مرزی حدود ۱۰۰ برابر سرعت همگرایی روش ناویر- استوکس می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، با استفاده از روش المان مرزی، جریان کاویتاسیون جزئی حول هندسه‌های مقارن محوری و شبه‌سه‌بعدی، با استفاده از دو مدل ساده و جت بازگشتی در انتهای کاویته شبیه‌سازی گردیده است. نتایج روش المان مرزی در کاویتاسیون جزئی با نتایج تجربی و حل معادلات ناویر- استوکس تطابق نسبتاً مناسبی دارد و در اعداد کاویتاسیون نسبتاً بزرگ (طول کاویته کوچک)، به علت رفتار نوسانی کاویته و دور شدن از فرض پتانسیلی جریان، نتایج این تحلیل با نتایج تجربی و عددی دیگر اندکی اختلاف دارد؛ ولی در اعداد کاویتاسیون کوچک (طول کاویته بزرگ)، به علت رفتار نسبتاً پایدار کاویته، نتایج کاویتاسیون جزئی از دقت مناسبی برخوردار است. ضمن اینکه، استفاده از مدل جت بازگشتی، نقطه سکون غیر متعارف به‌وجود آمده در مدل بستن ساده را اصلاح و توزیع ضریب فشار را در انتهای کاویته به مقادیر آزمایشگاهی نزدیک می‌کند. نکته قابل ملاحظه در روش المان مرزی، سرعت فوق‌العاده بالای همگرایی، دقت نسبتاً مناسب، شبکه‌بندی آسان و نیز سهولت اجرای تحلیل شبه‌سه‌بعدی با استفاده از الگوریتم مقارن محوری می‌باشد.

مراجع

- [1] Pasandideh-fard, Ma., and Nouroozi, M., "Simulation of Cavitation Flows around Axisymmetric Bodies by the Boundary Element Method using Re-entrant Jet Model at the Closure of the Cavity", Journal of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Vol. 41, No. 1, pp. 11-22, (2011). (In Persian)
- [2] Deng, C.L., Fang, W.H., and Fang, L.U., "The Numerical and Experimental Research on Unsteady Cloud Cavitating Flow of 3D Elliptical Hydrofoil", China Ship Scientific Research Center, Journal of Hydrodynamic, Vol. 22, No. 5, pp. 759-763, China, (2010).
- [3] Labertaux, K.R., and Ceccio, S.L., "Partial Cavity Flows (Part 1), Cavities Forming on Models without Spanwise Variation", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 431, pp. 1-41, (2001).

- [4] Rashidi, I., Passandideh-fard, M.O., and Passandideh-fard, M.A., "The Optimum Design of a Cavitator for High Speed Axisymmetric Bodies in Partially Cavitating Flows", *Journal of Fluids Engineering - Trans ASME*, Vol. 135, No. 1, pp. FE-12-1132, (2013).
- [5] Behbahani-Nejad, M., and Changizian, M., "Reduced-order Modeling of Unsteady Partial Cavity Flows using the Boundary Element Method", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 6, pp. 140-152, (2012). (In Persian)
- [6] Krishnaswamy, P., "Flow Modeling for Partially Cavitating Hydrofoils", Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark, pp. 45-45, (2000).
- [7] Uhlman, J.S., "A Note on the Development of a Nonlinear Axisymmetric Re-entrant Jet Cavitation Model", Engineering Technology Center, Anteon Corp, (2006).
- [8] Rashidi, I., "The Optimum Design of a Cavitator for High-speed Axisymmetric Bodies in Partially Cavitating Flows", Ph.D. Thesis, Ferdowsi University of Mashhad, ch. 4-5, pp.73-165, (2013).
- [9] Franc, J.P., and Michel, J.M., "*Fundamental of Cavitation*", Kluwer Academic Publisher, Netherlands, pp. 131-161, (2004).
- [10] Hess, J.L. , and Smith, A.M.O., "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-dimensional Bodies", *Progress in Aeronautical Science*, Vol. 8, pp. 1–138, New York, (1966).
- [11] Uhlman, J.S., "The Surface Singularity Method Applied to Partially Cavitating Hydrofoils", *Journal of Ship Research*, Vol. 31, No. 2, pp. 107-124, USA, (1987).
- [12] Uhlman, J.S., "The Surface Singularity or Boundary Integral Method Applied to Supercavitating Hydrofoils", *Journal of Ship Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 16-20, USA, (1989).
- [13] Kinnas, S.A., and Fine, N.E., "Non-linear Analysis of the Flow Around Partially or Supercavitating Hydrofoils by a Potential Based Panel Method", In *Proceedings of the IABEM-90 Symposium of the International Association for Boundary Element Methods*, Italy, (1990).
- [14] Varghese, A.N., Uhlman, J.S., and Kirschner, I.N., "Axisymmetric Slender-body Analysis of Supercavitating High-speed Bodis in Subsonic Flow", *Proceedings of the 3rd International Symposium on Performance Enhancement for Marine Applications*, RI, USA, pp. 185-200, (1997).
- [15] Kirschner, I.N., Uhlman, J.S., and Varghese, A.N., "Supercavitating Projectiles in Axisymmetric Subsonic Liquid Flows", *Proceedings of the ASME & JSME Fluids Engineering Annual Conference & Exhibition, Cavitation and Multiphase Flow Forum*, FED 210, SC, USA, (1995).
- [16] Callenaere, M., Sranc, J.P., Michel, J.M., and Riondet, M., "The Cavitation Instability Induced by the Development of a Re-entrant Jet", *J. Fluid Mech*, Vol. 444, pp. 223-256, (2001).

- [17] Gilbarg, D., "*Jets and Cavities*", Handbuch der Physik, Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, Germany, (1960).
- [18] Mohanty R.K., Setia N., "A New High order Compact off-step Discretization for the System of 3D Quasi-linear Elliptic Partial Differential Equations", Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 6870–6883, (2013).
- [19] Goel S., "Turbine Airfoil Optimization using Quasi-3D Analysis Codes", International Journal of Aerospace Engineering, Vol. 2009, Article ID 531358, (2009).
- [20] Montenegro, G., Onorati, A., Cerri, T., and Della Torre, A., "A Quasi-3D Model for the Simulation of the Unsteady Flows in I.C. Engine Pipe Systems", SAE Technical Paper, 2012-01-0675, (2012).
- [21] FLUENT 6.3 User's Guide, Centerra Resource Park, Lebanon, NH 03766 pp. 12-86, (2006).
- [22] Farouk, M.O., and Ali, H.N., "Numerical Simulation of 3-D Incompressible Multi-phase Flows over Cavitating Projectiles", European Journal of Mechanics, B/Fluids, Vol. 23, pp. 339-351, (2004).
- [23] Billet, M.L., and Weir, D.S., "The Effect of Gas Diffusion on the Flow Coefficient for a Ventilated Cavity", Journal of Fluids Engineering December issue, American Society of Mechanical Engineers, New York, NY, Vol. 97, No. 4, pp. 501-505, (2010).
- [24] Moin, H., Rashidi, I., Passandideh-fard, MO., Passandideh-fard, MA., and Roohi, E., "Modeling Cavitation over Axisymmetric Bodies: VOF Technique Versus Boundary Element Method", In Proceeding of 16th Annual Conference of CFD Canada, Saskatoon, Canada, 9-11 June, (2008).

فهرست نمادهای انگلیسی

C_p : ضریب فشار

D_c : قطر کاویتاتور

d : قطر کاویتاتور

G : تابع پتانسیل یک رینگ چشمه

L_c : طول کاویته

N : تعداد المان‌های حوزه حل

N_b : تعداد المان‌های روی جسم

N_c : تعداد المان‌های روی کاویته

n : بردار عمود بر سطوح

P_∞ : فشار جریان آزاد

- P_c : فشار بخار مایع
- R_{max} : شعاع بزرگ بیضی
- R_{min} : شعاع کوچک بیضی
- r : مولفه شعاعی دستگاه مختصات متقارن محوری
- S_b : سطح جسم
- S_c : سطح کاویتی
- S_{jet} : سطح جت
- s : طول کمان طی شده روی سطوح
- s_0 : طول کمان لبه کاویتاتور
- s_{jet} : طول کمان طی شده روی لبه سطح مقطع جت
- \bar{U}_∞ : سرعت جریان آزاد گذرنده از روی سطح هندسه
- X : مولفه طولی مختصات متقارن محوری
- x_n : مولفه عمودی سطح
- x_{jet} : مولفه x لبه سطح مقطع جت
- x_0 : مولفه x لبه کاویتاتور

نمادهای یونانی

- σ : عدد بی‌بعد کاویتاسیون
- ε : عدد همگرایی
- φ : پتانسیل کلی
- ϕ : پتانسیل اختلالی توزیع شده روی سطوح
- δx : تغییر طول المان
- δy : تغییر عرض المان
- Δx : طول اولیه المان
- Δy : عرض اولیه المان
- $\delta\theta$: میزان زاویه چرخش المان
- ξ : مولفه طولی در مختصات موضعی
- ρ : شعاع رینگ

Abstract

In this research a software is developed to simulate the partial cavitation over the axisymmetric and quasi three-dimensional bodies using a Boundary Element Method (BEM). According to desirable convergence of axisymmetric simulation in BEM, first the axisymmetric cavitation flow is simulated and this result is used to simulate quasi three-dimensional bodies. In order to simulate the cavitation flow, the source and dipole rings are distributed on body and cavity boundaries, Using Green's theorem integral expression and to simulate closure of cavity, two models is used: simple closure model and re-entrant jet model. The constant length of the cavity is initial prediction and the cavitation number and shape of cavity are the main results of this simulation. The validation of solution, the Navier-Stokes equations based on mixture model is compared to BEM results in convergence and accuracy. Comparison between this results and other experimental and numerical simulation show the ability of BEM in simulation of cavitation flows with desirable convergence and relatively good accuracy.