

## تحلیل تنش پادصفحه ای صفحات دایروی ساخته شده از ماده ایزوتروپیک تقاطعی تضعیف شده توسط چندین ترک

علیرضا حسنی<sup>۱</sup>

دانشجوی دکترا

رضا تیموری فعال<sup>۲</sup>

دانشیار

تحلیل تنش پادصفحه ای یک صفحه دایروی با ماده ایزوتروپیک تقاطعی تضعیف شده توسط چندین عیب در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا حل نابجایی در صفحه دایروی با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی محدود بدست می‌آید. سپس با استفاده از حل نابجایی بدست آمده، معادلات انتگرالی برای صفحه دایروی حاوی تعداد دلخواه ترک حاصل می‌گردد. حل عددی این معادلات انتگرالی که دارای تکینگی از نوع کوشی می‌باشند، منجر به محاسبه دانسیته نابجایی روی سطح ترک می‌گردد. با استفاده از دانسیته نابجایی محاسبه شده، ضرایب شدت تنش نوک ترکها برای چندین مثال مورد بررسی، بدست می‌آیند.

واژه‌های راهنما: صفحه دایروی، نابجایی پادصفحه‌ای، ایزوتروپیک تقاطعی، ضریب شدت تنش، تکینگی کوشی

### ۱- مقدمه

وجود عیوب به شکل ترک و حفره در مواد غیر ایزوتروپیک نظیر مواد ایزوتروپیک تقاطعی، نواحی با تغییرات تنش زیاد ایجاد می‌کند. این نواحی اصلی‌ترین مکان برای پیدایش مدهای مختلف شکست در سازه‌ها می‌باشد؛ حتی اگر بارگذاری اعمال شده در حد متوسط باشد. منظور از کلمه بارگذاری متوسط آنست که بارگذاری می‌تواند نسبت به حد تسلیم ماده چندان زیاد نباشد و قسمتهایی از جسم که تمرکز تنش وجود ندارند را دچار تسلیم یا واماندگی نکنند اما در مجاورت نوک ترکها و نقاط با تمرکز تنش بالا مدهای مختلف شکست رویت شود. بنابراین تحلیل تنش در مجاورت عیوب به عنوان اولین مرحله در فرآیند طراحی ضروری است. در مسائل الاستیسیته پاد صفحه ای استفاده از روش توزیع نابجایی پاد صفحه ای برای بدست آوردن راه‌حلهایی برای مسائل ترک در محیط‌های نامحدود یا محدود یک روش معمول به شمار می‌رود. این موضوع به این خاطر است که حل نابجایی همانند یک حل تابع گرین برای مسائل اصلی ترک می‌باشد. مرور مطالعاتی کارهای پیشین نشان دهنده توجه روز افزون پژوهشگران به تحلیل تنش در محیط‌های تضعیف شده توسط مجموعه ای از ترکها و حفره‌ها می‌باشد. در میان کارهای انجام شده مسئله محیط‌های محدود

<sup>۱</sup>دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان ahasani1111@gmail.com

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان faal92@yahoo.com

تضعیف شده توسط عیوب کمتر مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین بررسی صفحه دایروی با چندین ترک به عنوان یک محیط محدود خالی از لطف نخواهد بود.

تحلیل تنش پادصفحه‌ای یک صفحه مدور و یک صفحه نامحدود با حفره دایروی با شرایط مرزی آزاد و ثابت توسط Wang و Chen مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. صفحات توسط دو ترک موازی و نیز مایل نسبت به یکدیگر تضعیف شده‌اند که بار ثابت روی وجوه ترکها اعمال می‌شود. در تحلیل مسئله از روش تصاویر استفاده می‌شود. معادلات انتگرالی بدست آمده که از نوع فردهولم هستند، بطور عددی حل شده و ضرایب شدت تنش نوک ترک بدست آمده‌اند. در مقاله‌ای دیگر، Chen با استفاده از روش مشابهی، مسئله مربوط به یک صفحه دایروی و یک نیم صفحه ایزوتروپیک با ترک منحنی شکل را بررسی نمود [۲].

در سومین مقاله، Chen با استفاده از روش تصاویر، مسئله مربوط به یک صفحه دایروی و یک حلقه دایروی ایزوتروپیک تضعیف شده با یک نابجایی نقطه ای را به کمک تابع تنش مختلط، حل نمود [۳]. قابل توجه آنستکه نابجایی نقطه‌ای مذکور از نوع نابجایی لبه‌ای یا گوه‌ای فرض شده و تغییر شکل درون صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. Chang با استفاده از توابع مختلط، برش پادصفحه‌ای یک دیسک حاوی ترک شعاعی تحت پیچش و یک صفحه نامحدود شامل یک سوراخ دایروی تضعیف شده با یک ترک را مورد بررسی قرار داد [۴].

به عنوان یک مثال از محیط های محدود می‌توان به گوه و قطاع دایروی اشاره نمود که برای تحلیل چنین محیط هایی از مختصات قطبی استفاده می‌شود. از آنجایی که چنین مختصاتی در تحلیل صفحه دایروی با چندین ترک نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، به مرور کارهای انجام شده در این محیط ها نیز پرداخته می‌شود. تحلیل تنش برای قطاع دایروی از جنس ایزوتروپیک تقاطعی از دیگر مطالعات فعال و همکارانش است [۵]. در این مقاله از روش توزیع نابجایی برای تحلیل تنش قطاع دایروی استفاده شده است.

تحلیل تنش در گوه محدود ایزوتروپیک باحفره های متعدد توسط فعال و همکاران انجام شده است [۶]. در این مقاله در ابتدا با استفاده از روش تصاویر حل نابجایی در گوه بدست آمده و سپس با استفاده از روش توزیع نابجایی تحلیل مسئله صورت گرفته است.

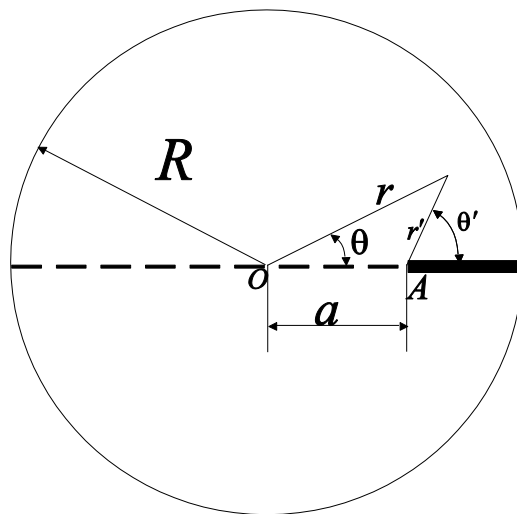
علاوه بر این مقاله‌ای در زمینه تحلیل تنش قطاع دایروی ترک‌دار و بدون ترک از جنس ماده ایزوتروپیک تقاطعی با شرایط مرزی مختلف در مرجع [۷] مورد بررسی قرار گرفته که توسط فعال و همکاران انجام شده است. در این مقاله از روش تحلیل مستقیم و بدون استفاده از روش توزیع نابجایی برای تحلیل تنش قطاع تضعیف شده توسط ترک استفاده شده و بر خلاف کارهای قبلی از روش توزیع نابجایی استفاده نشده است. فعال و همکاران تحلیل تنش پاد صفحه‌ای قطاع دایروی نامتجانس تضعیف شده با چندین عیب را انجام دادند؛ آنها با استفاده از تبدیل فوریه محدود کسینوسی و روش توزیع نابجایی، معادلات انتگرالی را که دارای تکنیکی کوشی بودند، بدست آورده و با روشهای عددی اقدام به حل آنها کردند [۸].

Ma و Lin با استفاده از روش تصاویر و تبدیل ملین تحلیل گوه حلقوی نامتجانس را انجام دادند [۹]. تا آنجایی که نویسندگان مقاله اطلاع دارند هیچ پژوهشی روی صفحه دایروی ساخته شده از ماده ایزوتروپیک تقاطعی که تحت تغییر شکل برشی پادصفحه‌ای است، انجام نشده است. در ضمن استفاده از روش نابجایی امکان تحلیل تعداد دلخواه ترک را مهیا می‌سازد که در این مقاله این روش مورد استفاده قرار گرفته است.

در بخش‌های پیش رو ابتدا میدان‌های تنش و جابجایی برای یک صفحه دایروی حاوی یک نابجایی پیچشی بدست می‌آید. از حل نابجایی بدست آمده جهت تشکیل معادله انتگرالی برای صفحه دایروی تضعیف شده توسط چندین ترک، استفاده می‌گردد. با استفاده از تحلیل صورت گرفته ضرایب شدت تنش نوک ترکها بدست می‌آیند. در انتها چند مثال عددی جهت بررسی تاثیر بارگذاری، طول و موقعیت قرارگیری ترکها و اثرات متقابل آنها روی یکدیگر آورده شده است. در ضمن اثرات نسبت ارتوتروپیک ماده روی ضرایب شدت تنش نوک ترکها بررسی شده است.

## ۲- بررسی صفحه دایروی تضعیف شده به وسیله نابجایی پادصفحه‌ای

یک صفحه دایروی با شعاع  $R$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. صفحه دایروی از ماده ایزوتروپیک تقاطعی خاص تشکیل شده است؛ به طوری که خواص ماده تشکیل‌دهنده صفحه در جهت محور  $r$  و محور  $\theta$  یکسان نباشند. به عبارت دیگر، مدول برشی در جهت محور  $r$ ، یعنی  $G_{rz}$ ، بامدول برشی در جهت محور  $\theta$ ، یعنی  $G_{\theta z}$ ، متفاوت می‌باشد. البته از آنجایی که مدول برشی در دو راستای درون صفحه ای از هم متفاوت می‌باشد، حتی می‌توان ماده مورد نظر را ارتوتروپیک نیز نامید.



شکل ۱- نمایش یک صفحه دایروی با نابجایی پادصفحه‌ای

با توجه به عدم وجود نیروهای بدنی تنها معادله تعادل که خود به خود ارضا نمی‌گردد به شکل زیر خواهد بود

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (1)$$

روابط بین تنش‌های غیر صفر با جابجایی پاد صفحه ای از قرار زیر است

$$\tau_{rz} = G_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2)$$

$$\tau_{\theta z} = G_{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

جایگذاری معادلات (۲) در معادله (۱) نتیجه می دهد

$$r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r \frac{\partial w}{\partial r} + G^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (۳)$$

که در آن  $G = \sqrt{G_{\theta z}/G_{rz}}$  می باشد.  $w(r, \theta)$  جابجایی صفحه دایروی در راستای محور  $Z$  است. شایان ذکر است سایر مولفه‌های جابجایی در مد سوم مکانیک شکست صفر هستند. حل معادله (۳) به کمک تبدیل فوریه محدود سینوسی که به شکل زیر می باشد، بدست می آید.

$$F_s(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (۴)$$

و عکس تبدیل فوریه سینوسی نیز به این صورت تعریف می گردد.

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin(n\theta) \quad (۵)$$

شرط مرزی روی مرز بیرونی صفحه دایروی با توجه به صفر بودن تنش  $\tau_{rz}$  به صورت زیر بیان می گردد.

$$\frac{\partial w}{\partial r}(R, \theta) = 0 \quad (۶)$$

یک نابجایی پادصفحه ای به شکل برشی شعاعی با دانسیته  $b_z$  در فاصله  $a$  از مرکز دایره و در زاویه  $\theta = 0$  در نظر گرفته می شود. شرایط مرزی متناظر با این نابجایی عبارت است از

$$w(r, 0^+) - w(r, 0^-) = b_z H(r - a) \quad (۷)$$

که در آن  $H(\cdot)$  تابع پله واحد<sup>۱</sup> می باشد. در ضمن برای نابجایی از نوع ولترا شرایط پیوستگی تنش روی خط نابجایی به این صورت بیان می گردد که

$$\tau_{\theta z}(r, 0^+) = \tau_{\theta z}(r, 0^-) \quad (۸)$$

در این مسئله به دلیل پاد متقارن بودن مسئله نسبت به قطر دایره که شامل برش نابجایی نیز می باشد، حل مسئله نابجایی برای ناحیه  $0 \leq \theta \leq \pi$  انجام می گیرد. لذا شرایط مرزی (۷) و (۸) به شکل زیر جایگزین می شوند.

$$w(r, 0^+) = \frac{b_z}{2} H(r - a), a \leq r \leq R \quad (۹)$$

$$w(r, \pi) = 0$$

اعمال تبدیل فوریه محدود سینوسی به معادله حاکم بر مسئله یعنی معادله (۳)، همراه با انتگرال گیری جز به جز و در نظر گرفتن شرایط مرزی (۹)، نتیجه می دهد که

<sup>۱</sup>Heaviside

$$r^2 \frac{d^2 W_s(r, n)}{dr^2} + r \frac{dW_s(r, n)}{dr} - (nG)^2 W_s(r, n) = -n \frac{b_z}{\pi} H(r - a) \quad (10)$$

حل کلی معادله دیفرانسیل معمولی (۱۰) به صورت زیر بدست می آید.

$$W(r, n) = A_{1n} r^{nG} \quad \text{for } 0 \leq r \leq a \quad (11)$$

$$W(r, n) = A_{2n} r^{nG} + B_{2n} r^{-nG} + \frac{b_z}{\pi n G^2} \quad \text{for } a \leq r \leq R$$

که  $A_{1n}$ ،  $A_{2n}$  و  $B_{2n}$  با اعمال شرایط مرزی (۶) و همچنین شرایط پیوستگی روی دایره  $r = a$  بدست می آیند. بر طبق معادله (۵) میدان‌های جابجایی در صفحه دایروی به صورت زیر حاصل می گردد.

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} r^{nG}) \sin(n\theta) \quad \text{for } 0 \leq r \leq a \quad (12)$$

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{2n} r^{nG} + B_{2n} r^{-nG} + \frac{b_z}{\pi n G^2} \right) \sin(n\theta) \quad \text{for } a \leq r \leq R$$

شرایط پیوستگی روی دایره  $r = a$  به صورت زیر نوشته می شوند.

$$w(a^-, \theta) = w(a^+, \theta) \quad (13)$$

$$\tau_{rz}(a^-, \theta) = \tau_{rz}(a^+, \theta)$$

با اعمال شرط مرزی (۶) و شرایط پیوستگی (۱۳) ضرایب مجهول در رابطه (۱۲) بصورت زیر بدست می آیند.

$$A_{1n} = \frac{b_z}{2\pi n G^2} a^{-nG} [1 - (a/R)^{2nG}] \quad (14)$$

$$A_{2n} = -\frac{b_z}{2\pi n G^2} a^{nG} R^{-2nG}$$

$$B_{2n} = -\frac{b_z}{2\pi n G^2} a^{nG}$$

با قرار دادن ضرایب بدست آمده بالا در روابط (۱۱)، جابجایی پادصفحه‌ای در کل ناحیه حاصل می گردد. همچنین با بکار بردن روابط (۲) تنش‌های موجود در هر دو ناحیه بدست می آیند.

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{2\pi G r} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (a/R)^{2nG}] (r/a)^{nG} \sin(n\theta), \quad 0 \leq r \leq a \quad (15)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{2\pi G r} \sum_{n=1}^{\infty} [(a/r)^{nG} - (ar/R^2)^{nG}] \sin(n\theta), \quad a \leq r \leq R$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (a/R)^{2nG}] (r/a)^{nG} \cos(n\theta), \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} [2 - (ar/R^2)^{nG} - (a/r)^{nG}] \cos(n\theta), \quad a \leq r \leq R$$

با بکار بردن روابط موجود در پیوست می توان معادلات تنش را بصورت زیر بازنویسی نمود.

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{4\pi Gr} [p(r/a, \theta) - p(ra/R^2, \theta)], \quad 0 \leq r \leq a \quad (16)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{4\pi Gr} [p(a/r, \theta) - p(ra/R^2, \theta)], \quad a \leq r \leq R$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{b_z G_{rz}}{4\pi r} [q(r/a, \theta) - q(ra/R^2, \theta)], \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{b_z G_{rz}}{4\pi r} [q(a/r, \theta) + q(ra/R^2, \theta)], \quad a \leq r \leq R$$

که در آنها توابع  $p(r, \theta)$  و  $q(r, \theta)$  به صورت زیر تعریف می شوند.

$$p(r, \theta) = \frac{\sin\theta}{\cosh(G \ln r) - \cos\theta} \quad (17)$$

$$q(r, \theta) = \frac{\sinh(G \ln r)}{\cosh(G \ln r) - \cos\theta}$$

برای مطالعه رفتار میدان تنش در محل نابجایی، لازم است مختصات محلی  $(r', \theta')$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شود. موقعیت دستگاه مختصات  $(r', \theta')$  نسبت به دستگاه مختصات  $(r, \theta)$  به گونه ای است که رابطه زیر بین مختصات آنها برقرار می باشد.

$$r = \sqrt{a^2 + (r')^2 + 2ar' \cos\theta'} \quad (18)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{r' \sin\theta'}{\sqrt{a^2 + (r')^2 + 2ar' \cos\theta'}} \right), \quad 0 \leq \theta' \leq 2\pi$$

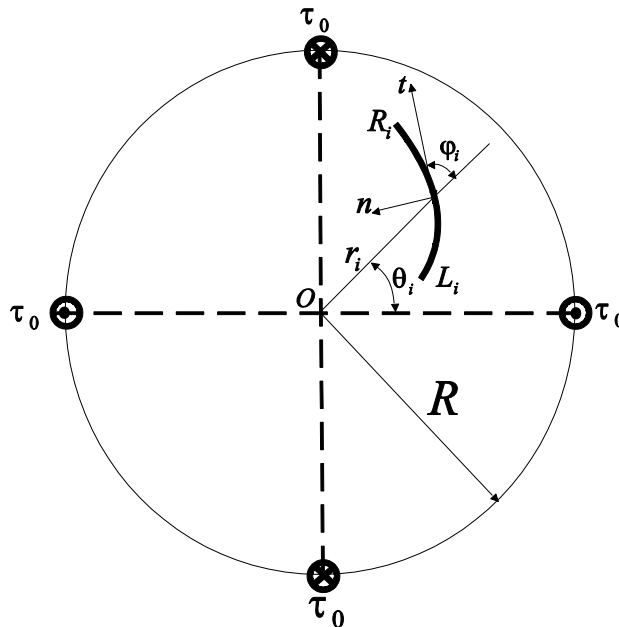
با قرار دادن معادلات (۱۸) در روابط تنش (۱۶) نتیجه می شود

$$(\tau_{\theta z}, \tau_{rz}) \sim \frac{1}{r'} \quad \text{as } r' \rightarrow 0 \quad (19)$$

رابطه بالا نشان دهنده وجود تکینگی از نوع کوشی در محل نابجایی می باشد که در مرجع [۱۰] هم به آن اشاره شده است.

### ۳- تحلیل صفحه دایروی فاقد عیب تحت بار خارجی

در این بخش از مقاله میدان تنش در اثر بارگذاری روی لبه بیرونی صفحه دایروی، در حالتی که محیط فاقد هرگونه عیبی مانند ترک یا حفره باشد، بدست می آید. همانطور که در شکل (۲) مشاهده می شود صفحه دایروی تحت تاثیر چهار بار خارجی  $\tau_0$  که بصورت خودتعادلی اعمال می شوند، قرار می گیرد.



شکل ۲- صفحه دایروی تحت بارگذاری خارجی خودتعادلی

شرایط مرزی متناظر با یکی از این بارها عبارت است از

$$\tau_{rz}(R, \theta) = \tau_0 \delta(\theta) \quad (20)$$

که در آن  $\delta(\cdot)$  تابع دلتای دیراک است. با توجه به متقارن بودن میدان جابجایی این بار تنها نسبت به خط  $\theta = 0$ ، و استفاده از روش جداسازی، جابجایی پادصفحه ای به صورت زیر ارائه می گردد.

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{nG} \cos(n\theta) \quad \text{for } 0 \leq r \leq R \quad (21)$$

با استفاده از خاصیت تعامد تابع کسینوس  $\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}$  و اعمال شرط مرزی (۲۰) به رابطه (۲۱)، ضرایب زیر حاصل می گردند.

$$D_n = \frac{\tau_0}{\pi G G_{rz} R^{nG-1}} \quad (22)$$

$$D_0 = \frac{R \tau_0}{2\pi G G_{rz}}$$

که در آنها  $D_n = n A_n$  می باشد. لذا تنش های صفحه دایروی بصورت زیر بیان می گردند.

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{R\tau_0}{2\pi r} + \frac{\tau_0 R}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{nG} \cos(n\theta) \quad (23)$$

$$\tau_{\theta z} = -\frac{GR\tau_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{nG} \sin(n\theta)$$

به وسیله توابع معرفی شده در رابطه (۱۷) مولفه‌های غیر صفر تنش بصورت زیر بازنویسی می گردند.

$$\tau_{rz}(r, \theta) = -\frac{\tau_0 R}{2\pi r} q(r/R, \theta) \quad (24)$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\tau_0 RG}{2\pi r} p(r/R, \theta)$$

برای حالتی از بارگذاری که بار خارجی  $\tau_0$  در زاویه  $\theta_0$  قرار دارد، می توان در روابط (۲۴) به جای  $\theta$  عبارت  $\theta - \theta_0$  را جایگزین کرد. باید توجه نمود از آنجایی که مرز بیرونی صفحه دایروی عاری از تنش است لذا برای بارگذاری خودتعادلی لازم است که بارگذاری خارجی به صورتی اعمال گردند که علاوه بر متعادل بودن نیروها، کوپل ناشی از آنها نیز خودتعادلی باشد. برای این منظور همانطور که در شکل (۲) ملاحظه می گردد، چهار بار خارجی با بزرگی  $\tau_0$  در زوایای  $\theta = \theta_0$ ،  $\theta = \theta_0 + \pi/2$ ،  $\theta = \theta_0 + \pi$ ،  $\theta = \theta_0 + 3\pi/2$  قرار داده می شوند.

#### ۴- صفحه دایروی با چندین ترک

در این بخش چگونگی بهره مندی از حل نابجایی بدست آمده در بخش ۲ برای تحلیل یک صفحه دایروی تضعیف شده توسط چندین ترک و حفره مورد بررسی قرار می گیرد. به این منظور نیاز است که نابجایی‌هایی با دانسیته نامشخص بروی ترک توزیع گردند، تا شرط بردار تنش صفر بر روی ترک را ارضا نمایند. در ضمن محیط مورد بررسی توسط  $N$  ترک تضعیف شده است. بردار تنش روی سطوح ترک  $i$ -ام (شکل ۲) بر حسب مولفه‌های تنش در مختصات قطبی به صورت زیر بیان می شود.

$$\tau_{tz}(r_i, \theta_i) = \tau_{\theta z}(r_i, \theta_i) \sin\phi_i + \tau_{rz}(r_i, \theta_i) \cos\phi_i \quad (25)$$

$$\tau_{nz}(r_i, \theta_i) = \tau_{\theta z}(r_i, \theta_i) \cos\phi_i - \tau_{rz}(r_i, \theta_i) \sin\phi_i$$

که  $\phi_i$  زاویه بین خط مماس بر ترک  $i$ -ام و راستای شعاعی  $r_i$  است. فرض بر این است نابجایی‌ها با دانسیته نامعلوم  $B_{zj}(r_j)$  روی سطح ترکها توزیع شده‌اند. بردار تنش روی سطح ترکها در حضور توزیع نابجایی با دانسیته نامعلوم  $B_{zj}(r_j)$  با استفاده از رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) بدست می آید.

$$\tau_{nz}(r_i, \theta_i) = -\frac{B_{zj}(r_j)G_{rz}}{4\pi r_i} \sqrt{(dr_j)^2 + (r_j d\theta_j)^2} \quad (26)$$

$$\{[q(r_i/r_j, (\theta_i - \theta_j)) - q(r_i r_j / R_2^2, (\theta_i - \theta_j))]\} \cos\phi_i$$



$$+ \frac{1}{G} [p(r_i/r_j, (\theta_i - \theta_j)) - p(r_i r_j / R_2^2, (\theta_i - \theta_j))] \sin \phi_i \} \text{for } 0 \leq r_i \leq r_j$$

$$\tau_{nz}(r_i, \theta_i) = \frac{B_{zj}(r_j) G_{rz}}{4\pi r_i} \sqrt{(dr_j)^2 + (r_j d\theta_j)^2} \{ [q(\frac{r_j}{r_i}, (\theta_i - \theta_j)) + q(\frac{r_i r_j}{R_2^2}, (\theta_i - \theta_j))] \cos \phi_i$$

$$- \frac{1}{G} [p(\frac{r_j}{r_i}, (\theta_i - \theta_j)) - p(\frac{r_i r_j}{R_2^2}, (\theta_i - \theta_j))] \sin \phi_i \} \text{for } r_j \leq r_i \leq R$$

در مرحله بعد باید به کمک اصل جمع آثار تنش روی مرز ترکها بدست آید. از معادلات (۲۶) روی سطوح ترکها انتگرال گیری می شود. به منظور انتگرال گیری آسان، معادلات هندسی ترکها به شکل پارامتری نمایش داده می شوند. با بیان معادله ترک به وسیله پارامترهای بی بعد  $-1 \leq s \leq 1$  و  $-1 \leq t \leq 1$ ، بردار تنش روی ترک  $i$ -ام برای صفحه دایروی ساخته شده از ماده ایزوتروپیک تقاطعی با  $N$  ترک به شکل زیر نمایش داده می شود.

$$\tau_{nz}(r_i(s), \theta_i(s)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 b_{zj}(t) k_{ij}(s, t) dt \quad (27)$$

$$-1 \leq s \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

که  $b_{zj}(t)$  دانسیته نابجایی در طول بی بعد سطح ترک  $j$ -ام است. کرنل معادله انتگرالی ظاهر شده در رابطه (۲۷) در پیوست مقاله ارائه شده است.

بر طبق اصل باکنر<sup>۱</sup> سمت چپ معادله انتگرالی (۲۷)، بعد از تغییر علامت، بردار تنش ایجاد شده توسط بار خارجی روی مرز صفحه دایروی و در محل فرضی ترک در صفحه بدون عیب می باشد. با این توضیحات با بکارگیری روابط (۲۴) و (۲۵) تنش روی سطح ترک  $i$ -ام به شکل زیر نوشته می شود.

$$\tau_{nz}(r_i, \theta_i) = \frac{\tau_0 R G}{2\pi r} p(r_i/R, \theta_i) \cos \phi_i - \frac{\tau_0 R}{2r\pi} q(r_i/R, \theta_i) \sin \phi_i \quad (28)$$

همانطور که در رابطه (۱۹) نشان داده شد تکینگی در همسایگی نابجایی از نوع کوشی می باشد. لذا باید هنگامی که  $i = j$  است کرنل معادله انتگرالی (۲۷) نیز این نوع تکینگی را از خود نشان دهد؛ که به وضوح چنین امری قابل تایید است.

دانسیته نابجایی  $b_{zj}(t)$  بر حسب تابع  $g_{zj}(t)$  و همراه با توابع وزنی مشخص برای انواع مختلف عیب در محیط بصورت زیر بیان می شود.

<sup>۱</sup> مطابق اصل باکنر مسئله یک جسم ترکدار که تحت بارگذاری خارجی یا جابجایی مشخص در مرزهای آن می باشد را می توان به دو مسئله تفکیک کرد. در مسئله اول یک جسم بدون ترک با هندسه و بارگذاری خارجی مشابه در نظر گرفته می شود و در محل فرضی ترک بردار تنش سطحی بر روی وجوه فرضی ترک بدست می آید. در مسئله دوم بارگذاری خارجی از جسم ترکدار زودوده می شود و بردار تنش محاسبه شده در مسئله اول با علامت مخالف بر روی سطوح ترک اعمال می شود. با جمع آثار دو مسئله، بردار تنش روی وجوه ترک صفر شده و حل مسئله واقعی بدست می آید.

$$b_{zj}(t) = \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ برای ترک داخل محیط} \quad (۲۹)$$

$$b_{zj}(t) = g_{zj}(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \text{ برای ترک لبه‌ای}$$

حل همزمان رابطه (۲۷) به همراه شرط یکتایی جواب روی مرز ترک یعنی

$$\int_{-1}^1 \sqrt{(r'_j(t))^2 + (r_j(t)\theta'_j(t))^2} b_{zj}(t) dt = 0, j = 1, 2, \dots, N$$

روی سطح ترکها نتیجه می دهد. لازم به ذکر است جهت تعیین دانسیته نابجایی از حل عددی معرفی شده از مرجع [۱۱] استفاده می گردد.

در نهایت با استفاده از مرجع [۵] ضرایب شدت تنش برای نوک ترکهای لبه‌ای و داخل محیط به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{cases} k_{IIIli} = \frac{1}{2} GG_{rz} [(r'_i(-1))^2 + (r_i(-1)\theta'_i(-1))^2]^{\frac{1}{4}} g_{zi}(-1) \\ k_{IIIRi} = -\frac{1}{2} GG_{rz} [(r'_i(1))^2 + (r_i(1)\theta'_i(1))^2]^{\frac{1}{4}} g_{zi}(1) \end{cases} \quad (۳۰)$$

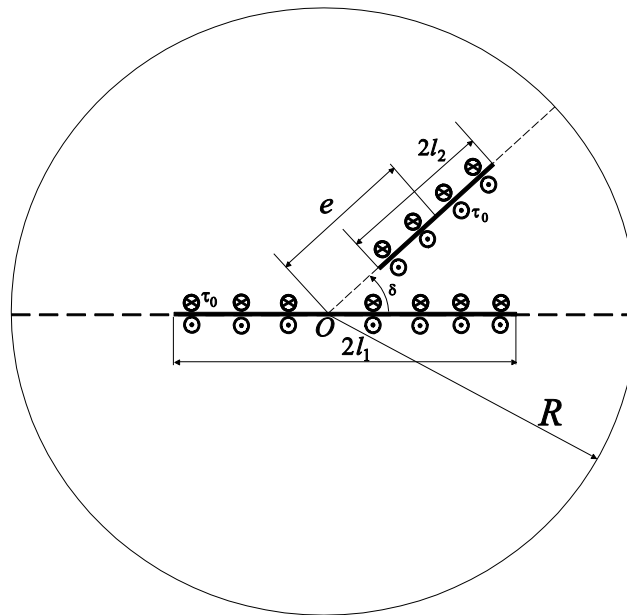
برای ترک داخل محیط

$$k_{IIIli} = GG_{rz} [(r'_i(-1))^2 + (r_i(-1)\theta'_i(-1))^2]^{\frac{1}{4}} g_{zi}(-1)$$

برای ترک لبه‌ای

## ۵- مثال‌های عددی

به منظور اعتبار سنجی حل انجام شده در حالت خاص مسئله صفحه دایروی ایزوتروپیک ( $G = 1$ ) تضعیف شده توسط دو ترک در نظر گرفته می شود و نتایج با نتایج موجود در مرجع [۱] مقایسه می شود (شکل (۳)). برای این منظور صفحه دایروی با دو ترک زاویه دار نسبت به یکدیگر تحت بردار تنش برشی ثابت  $\tau_0$  روی مرزهای ترک، در حالی که مرزهای صفحه دایروی عاری از تنش هستند، در نظر گرفته می شود. مرکز ترک افقی بر مرکز دایره منطبق است ولی برای ترک مایل امتداد ترک از مرکز دایره می گذرد (شکل ۳). نصف طول هر دو ترک  $l_1 = l_2 = 0.2R$  و زاویه بین آنها  $\delta$  است. همچنین مراکز دو ترک در فاصله  $e = 0.5R$  از یکدیگر قرار دارند. ضرایب شدت تنش بی بعد برای نوک ترکها در زوایای مختلف ترک دوم، در جدول (۱) آمده است و ملاحظه می گردد با نتایج مرجع [۳] انطباق مناسبی دارد.



شکل ۳- صفحه دایروی ایزوتروپیک ( $G = 1$ ) تضعیف شده توسط دو ترک زاویه دار نسبت به یکدیگر تحت بردار تنش برشی ثابت روی مرزهای ترک

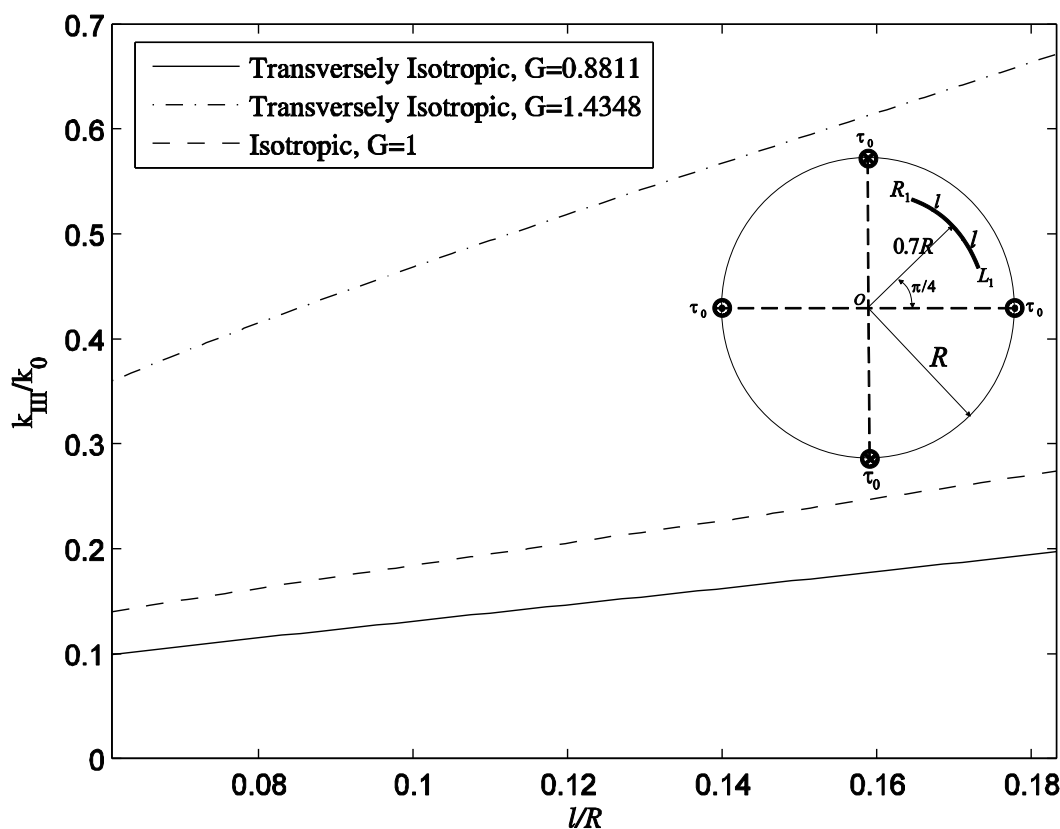
جدول ۱- مقایسه ضرایب شدت تنش بی بعد بدست آمده برآید و ترک زاویه دار نسبت به یکدیگر در صفحه دایروی ایزوتروپیک

	مرجع مورد مطالعه	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 150^\circ$	$\delta = 180^\circ$
$k_L)_1/k_0$	مقاله حاضر	1.1334	1.1047	1.0749	1.0530	1.0161	0.9302	0.8150
	[4]	1.132	1.111	1.082	1.054	1.014	0.929	0.819
$k_R)_1/k_0$	مقاله حاضر	1.2952	1.1256	1.0203	0.9855	0.9662	0.9475	0.9332
	[4]	1.294	1.132	1.028	0.987	0.964	0.946	0.937
$k_L)_2/k_0$	مقاله حاضر	1.3027	1.1827	1.0901	1.0340	0.9806	0.9079	0.8371
	[4]	1.303	1.185	1.091	1.034	0.981	0.909	0.836
$k_R)_2/k_0$	مقاله حاضر	1.1598	1.1266	1.0821	1.0442	1.0083	0.9746	0.9581
	[4]	1.160	1.128	1.083	1.045	1.009	0.975	0.958

در پایان چهار مثال جهت بررسی کارایی حل بدست آمده، ارائه می شود. در این مثال ها نسبت مدول ناحیه دایروی متشکل از ماده ایزوتروپیک تقاطعی ( $G_{rz} = 80 [GPa]$ ) و  $G = 0.8811$  و  $G = 1.4348$  ( $G_{rz}$ ) در نظر گرفته می شود که  $G < 1$  برای ماده ای با لایه های کربنی و  $G > 1$  برای نوعی از آلیاژ فلزی می باشد.

**مثال ۱- یک ترک منحنی شکل احاطه شده در محیط**

برای اولین مثال یک ترک دایروی که مرکز آن در نقطه  $(0.7R, \pi/4)$  قرار دارد، در نظر گرفته می شود. شکل (۴) نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k/k_0)$  در نوکهای ترک را بر حسب طول ترک بی بعد  $l/R$  نشان می دهد؛ که  $l$  نصف طول ترک و  $k_0 = \tau_0 \sqrt{l}$  می باشند. در شکل (۴) به علت تقارن مسئله، منحنی ضریب شدت تنش دو نوک ابتدایی و انتهایی ترک روی هم قرار می گیرند. بنابراین در بررسی مثال، یکی از نوکهای ترک در نظر گرفته می شود. منحنیهای با مقادیر بیشتر ضریب شدت تنش بی بعد  $(k/k_0)$  مربوط به ماده با  $G$  بزرگتر می باشد. همانطور که مشاهده می شود با افزایش طول ترک ضرایب شدت تنش بی بعد افزایش می یابد.



**شکل ۴- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k_{III}/k_0)$  یک ترک دایروی بر حسب طول ترک بی بعد برای صفحات دایروی ایزوتروپیک و ایزوتروپیک تقاطعی**

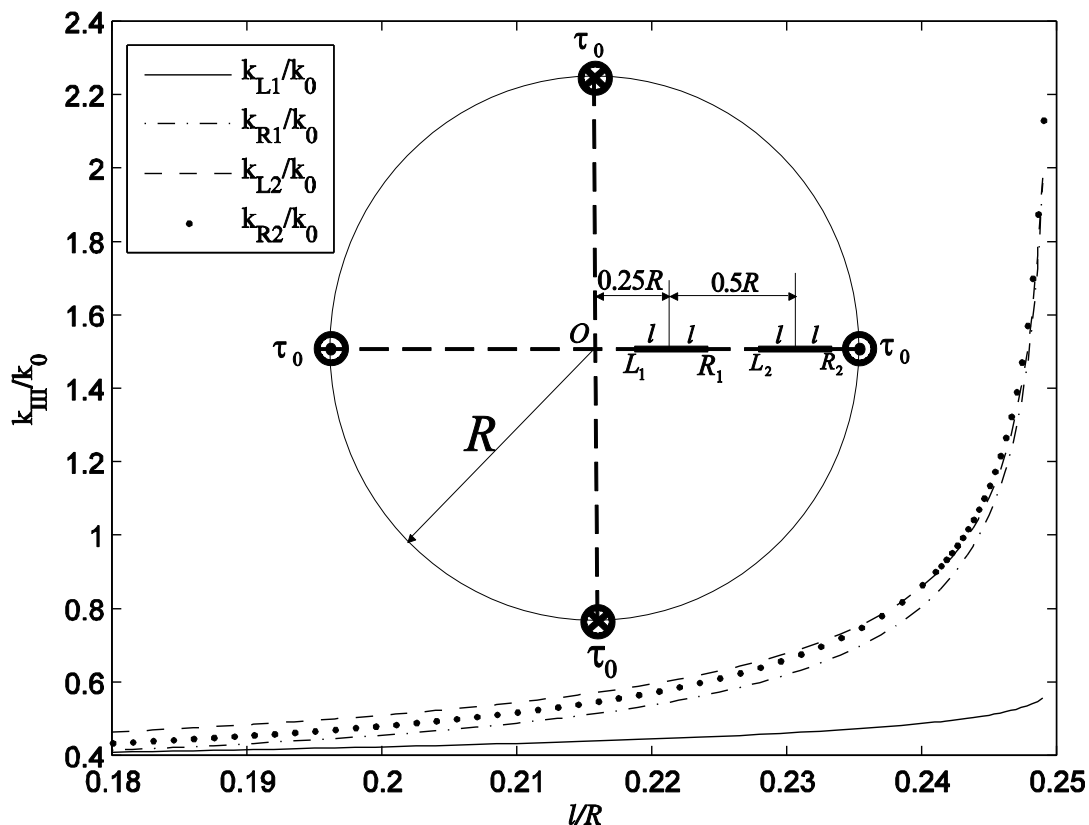
**مثال ۲- دو ترک شعاعی احاطه شده در محیط**

در این مثال فرض می شود که صفحه دایروی توسط دو ترک شعاعی، که روی خط مبنای  $\theta = 0$  قرار گرفته اند، تضعیف شده است. مراکز دو ترک در فاصله  $0.5R$  از یکدیگر قرار دارند و فاصله مرکز ترک اول از مرکز صفحه دایروی  $d_1 = 0.25R$  فرض می شود. در شکل (۵) نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k/k_0)$  بر حسب طول بی بعد ترک  $l/R$  ب رای ماده ایزوتروپیک مشاهده می شود؛ که  $l$  نصف طول ترک می باشد. در اینجا عامل تعیین کننده تأثیر متقابل تکینگی تنش نوک یک ترک بر روی دیگر نوکها می باشد.

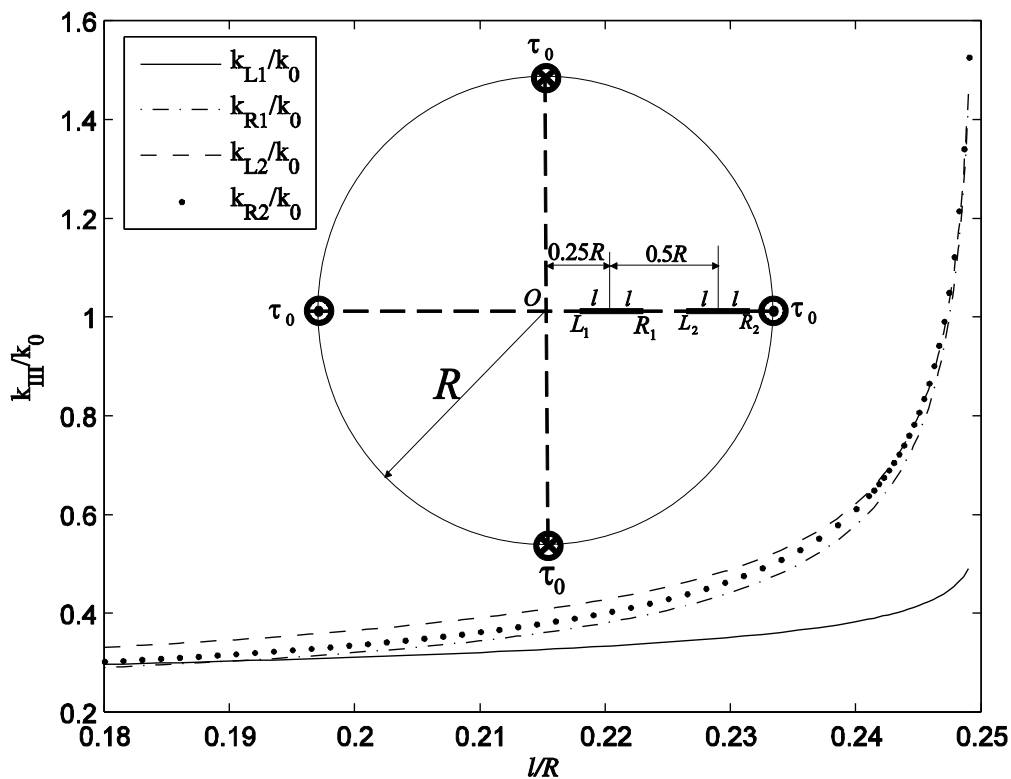
نوکهای  $R_1$  و  $L_2$  که در حال نزدیک شدن به یکدیگر هستند با افزایش ضرایب شدت تنش روبرو می شوند و در نهایت از آنجایی که فاصله این دو نوک بسیار کوچک می شود ضرایب شدت تنش آن ها به سمت یک عدد مشخص میل می کنند. ضریب شدت تنش نوک  $L_1$  نیز به علت افزایش طول ترک دچار افزایش اما با شیب کم می شود. نزدیکی نوک  $R_2$  به محل بارگذاری باعث بالا بودن ضریب شدت تنش از ابتدا می شود که با افزایش طول ترک رشد چشمگیری در مقدار  $(k/k_0)$  مشاهده می گردد.

در شکل (۶) نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k/k_0)$  برحسب  $l/R$  برای ماده ایزوتروپیک تقاطعی با  $G < 1$  مشاهده می شود. ضرایب شدت تنش برای ماده ایزوتروپیک تقاطعی نسبت به ماده ایزوتروپیک از مقدار کمتری برخوردار است و این مشابه روند موجود در مثال (۱) است.

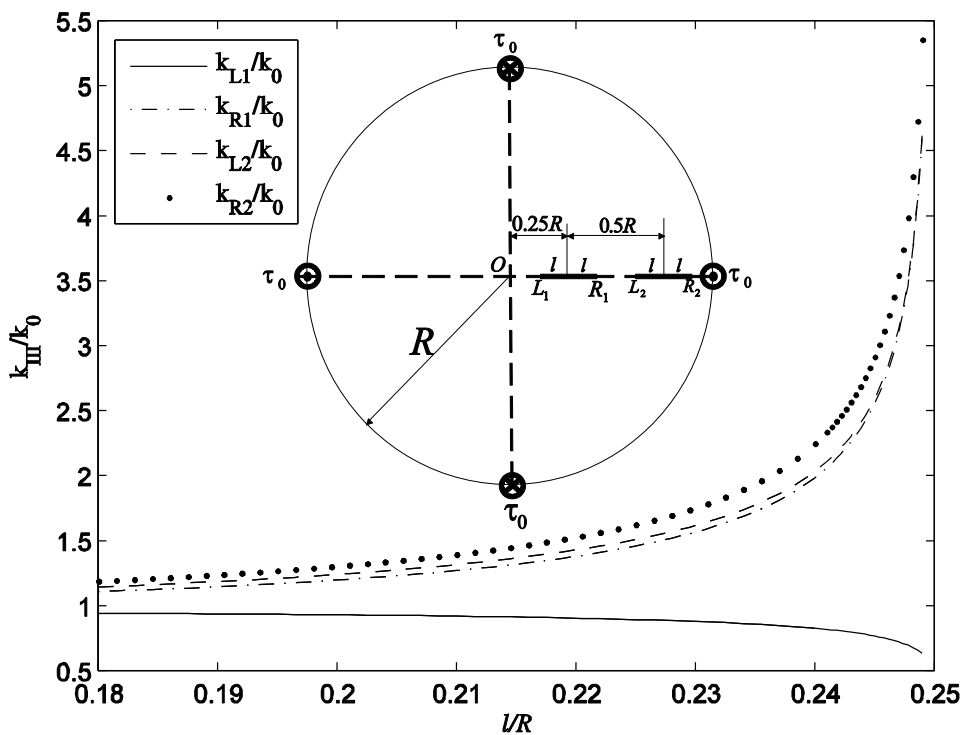
در شکل (۷) نیز نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده  $(k/k_0)$  برحسب طول بی بعد  $l/R_1$  برای ماده ایزوتروپیک تقاطعی با  $G > 1$  مشاهده می شود. ضرایب شدت تنش برای این نوع ماده ایزوتروپیک تقاطعی نسبت به ماده ایزوتروپیک از مقدار بیشتری برخوردار است که مربوط به بزرگی  $G$  می باشد.



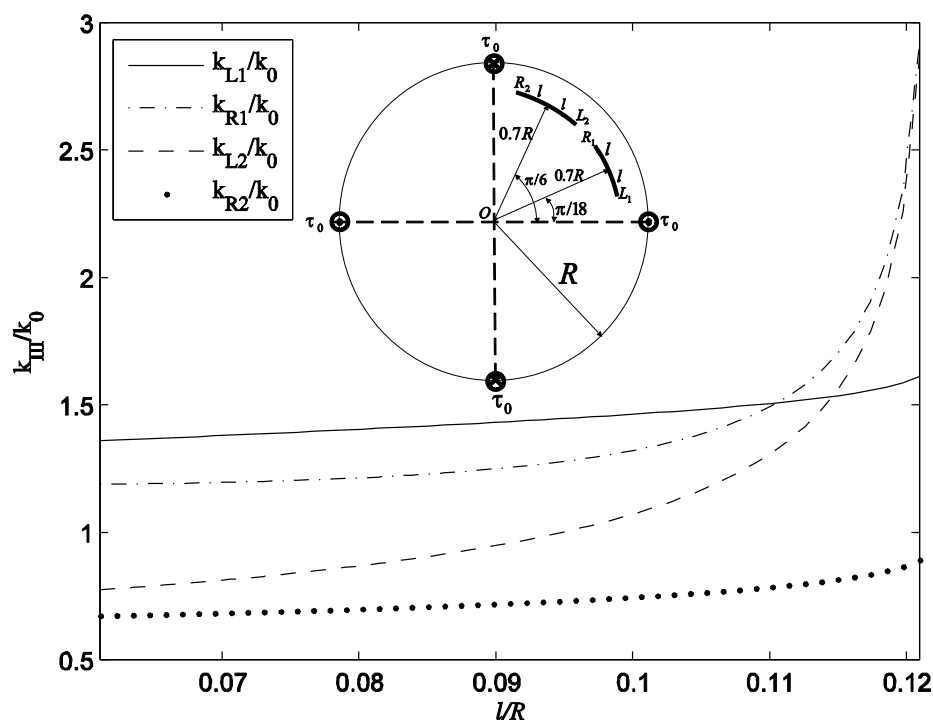
شکل ۵- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k_{III}/k_0)$  بر حسب طول ترک بی بعد برای صفحات دایروی ایزوتروپیک تضعیف شده توسط دو ترک شعاعی



شکل ۶- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد ( $k_{III}/k_0$ ) بر حسب طول بی بعد ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک تقاطعی ( $G < 1$ ) تضعیف شده توسط دو ترک شعاعی



شکل ۷- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد ( $k_{III}/k_0$ ) بر حسب طول بی بعد ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک تقاطعی ( $G > 1$ ) تضعیف شده توسط دو ترک شعاعی

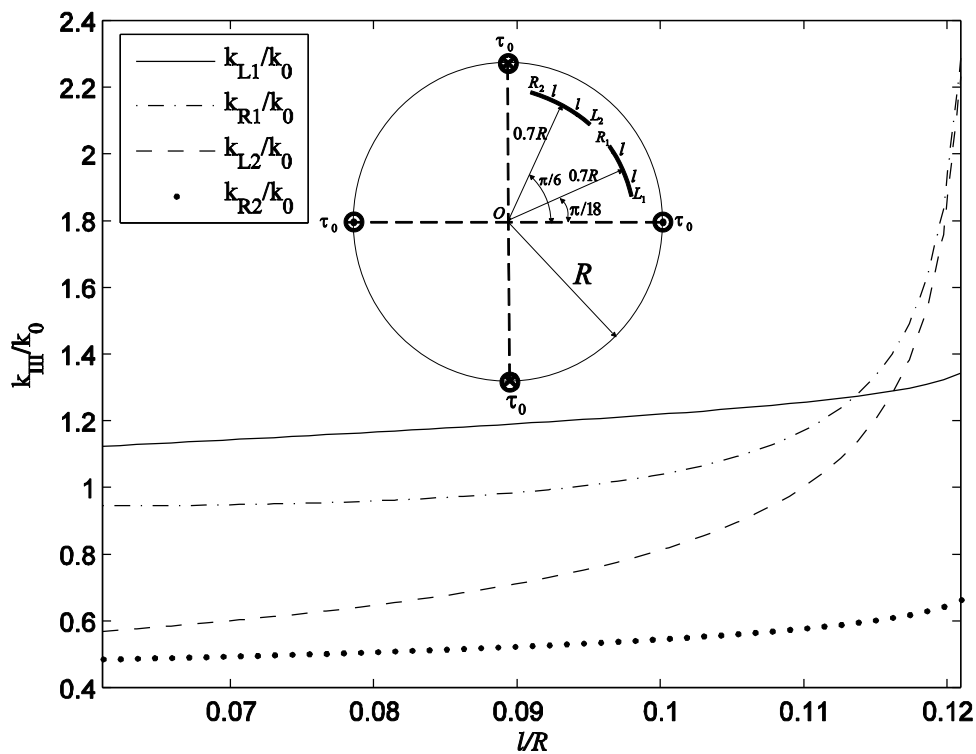


شکل ۸- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد ( $k_{III}/k_0$ ) بر حسب طول ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک تضعیف شده توسط دو ترک دایروی

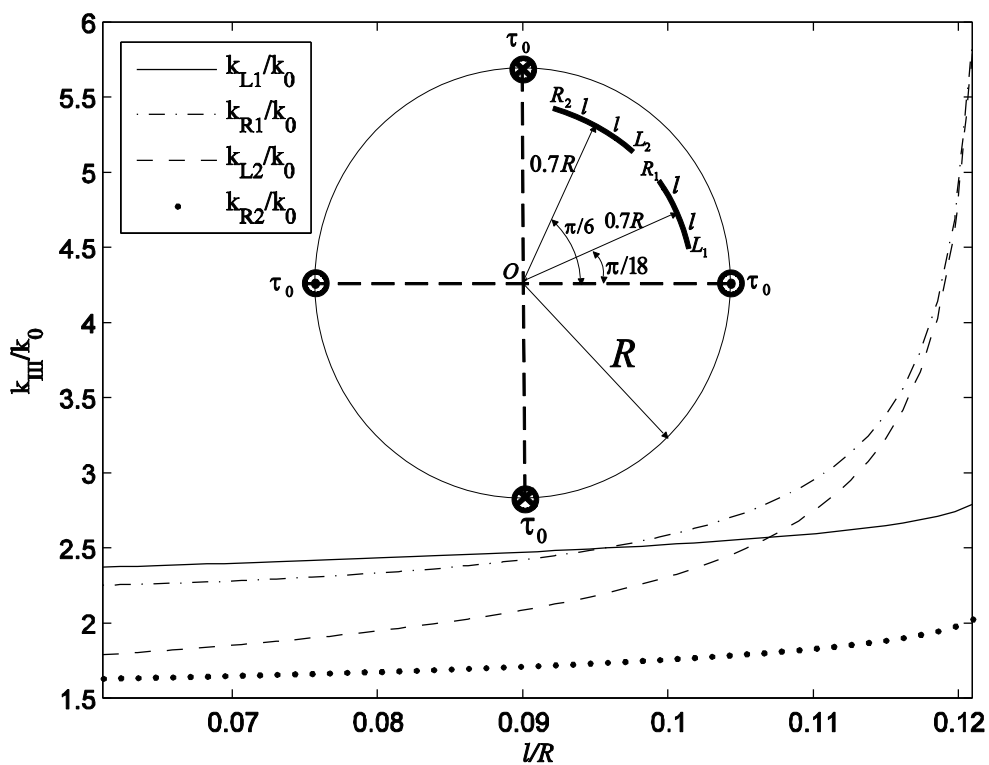
#### مثال ۴- دو ترک منحنی احاطه شده در محیط

برای سومین مثال دو ترک دایروی که مراکز آنها به ترتیب در نقاط  $(0.7R, \pi/6)$  و  $(0.7R, \pi/18)$  قرار دارد در نظر گرفته می شود. نمودارها در این مثال، ضرایب شدت تنش بی بعد ( $k/k_0$ ) در نوک ترکها را بر حسب طول بی بعد  $l/R$  نشان می دهد؛ که  $l$  نصف طول ترک و  $k_0 = \tau_0 \sqrt{l}$  می باشند. شکل (۸) مربوط به ماده ایزوتروپیک از این مثال است. همانطور که می توان دید تغییرات ضرایب شدت تنش ( $k/k_0$ ) برای نوک  $R_2$  نسبت به سه نوک دیگر بررسی شده کمتر است. علاوه بر این دورتر بودن موقعیت این نوک نسبت به نقاط بارگذاری در کمتر بودن مقادیر و تغییرات ضرایب شدت تنش مؤثر است.

برای نوک  $L_1$  ضرایب شدت تنش با نزدیک شدن به بارگذاری به شدت افزایش می یابد. نوکهای  $R_1$  و  $L_2$  نیز که در حال نزدیک شدن به یکدیگر می باشند با افزایش ضرایب شدت تنش روبرو می شوند و در نهایت از آنجایی که فاصله این دو نوک بسیار کوچک می شود ضرایب شدت آن ها به سمت یک عدد میل می کنند. نکته برجسته در نمودار ایزوتروپیک تقاطعی این است که با توجه اینکه مواد در راستای زاویه ای نسبت به راستای شعاعی از مدول برشی کمتری برخوردارند، لذا ضرایب شدت تنش در ماده ایزوتروپیک تقاطعی با  $G < 1$  نسبت به ماده ایزوتروپیک از مقدار کمتری برخوردار است. برای دو ترک شعاعی روندی مشابهی هنگام بررسی اثر نسبت مدول برشی وجود داشت؛ بنابراین مقادیر ضرایب شدت تنش برای ماده ایزوتروپیک تقاطعی با  $G > 1$  از سایر موارد بیشتر می باشد. این موضوع در شکل های (۹) و (۱۰) قابل مشاهده می باشد.

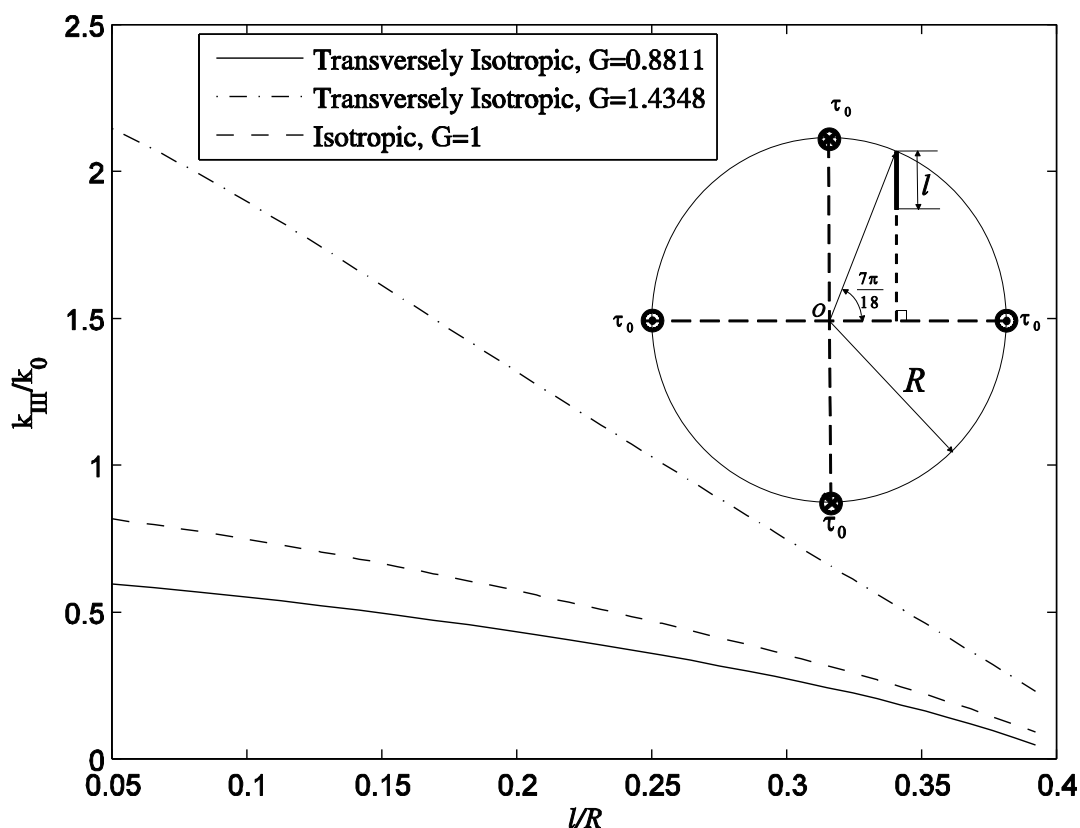


شکل ۹- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k_{III}/k_0)$  بر حسب طول ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک تقاطعی  $G < 1$  تضعیف شده توسط دو ترک دایروی



شکل ۱۰- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k_{III}/k_0)$  بر حسب طول ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک تقاطعی  $G > 1$  تضعیف شده توسط دو ترک دایروی





شکل ۱۱- نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد  $(k_{III}/k_0)$  بر حسب طول بی بعد ترک برای صفحه دایروی ایزوتروپیک و ایزوتروپیک تقاطعی تضعیف شده توسط یک ترک لبه ای

#### مثال ۴- یک ترک لبه ای

در این مثال یک ترک لبه ای که بصورت یک ترک مستقیم وتری می باشد در نظر گرفته می شود. نوک غیر تکین این ترک از مرز صفحه دایروی از زاویه  $\theta = 7\pi/18$  شروع می شود و ترک در راستای عمود بر وتر گذرنده از دو نقطه اعمال بار امتداد می یابد. با افزایش طول ترک، نوک تکین ترک به سه بار دورتر نزدیک شده و از یک بار نزدیکتر دور می شود. همین امر سبب کاهش ضریب شدت تنش این نوک علیرغم افزایش طول ترک می شود.

#### ۶- نتیجه گیری

با توجه به مثالهای حل شده نتایج زیر بدست می آیند :

- ۱) ضرایب شدت تنش بی بعد نوکهای بهم نزدیک شونده ترکها به شدت افزایش می یابند.
- ۲) ضرایب شدت تنش بی بعد برای مواد ایزوتروپیک ( $G = 1$ ) و ارتروپیک ( $G \neq 1$ ) با افزایش طول ترکها افزایش می یابد.
- ۳) برای ماده ارتروپیک تقاطعی ( $G < 1$ ) بدلیل اینکه ماده در جهت زاویه ای نسبت به جهت شعاعی نرمتر است ضرایب شدت تنش بی بعد برای نوک ترکها نسبت به حالتها دیگر کمتر است.

## مراجع

- [1] Chen, Y.Z., and Wang, Z.X., "Solutions of Multiple Crack Problems of a Circular Region with Free or Fixed Boundary Condition in Antiplane Elasticity", *International Journal of Fracture*, Vol. 30, pp. 287–293, (1986).
- [2] Chen, Y.Z., "Image Method for Curved Crack Problem in Antiplane Elasticity", *International Journal of Fracture*, Vol. 48, pp. 75–78, (1991).
- [3] Chen, Y.Z., "A Point Dislocation in Circular Regions or in an Annular Region", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, pp. 229–236, (1994).
- [4] Chang, S., "Antiplane Shear Interactions between a Circular Boundary and a Radial Crack", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, pp. 331–340, (1986).
- [5] Faal, R.T., Hassani, A.R., and Milani, A.S., "Stress Analysis of Transversely Isotropic Sectors Weakened by Multiple Defects", *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 49, pp. 3627–3640, (2012).
- [6] Faal, R.T., Fariborz, S., and Daghyani, H.R., "Stress Analysis of a Finite Wedge Weakened by Cavities", *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 49, pp. 75–85, (2007).
- [7] Faal, R.T., and Hassani, A.R., "Stress Analysis of the Cracked and Uncracked Transversely Isotropic Sectors with Different Types of Boundary Conditions", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 18, pp. 773-784, (2013).
- [8] Faal, R.T., Pasrad, A.R., and Milani, A.S., "Anti-plane Stress Analysis of Dissimilar Sectors with Multiple Defects", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 37, pp. 265-283, (2013).
- [9] Lin, R.L., and Ma, C.C., "Theoretical Full-field Analysis of Dissimilar Isotropic Composite Annular Wedges under Anti-plane Deformations", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 6041-6080, (2004).
- [10] Weertman, J., and Weertman, J. R., "*Elementary Dislocation Theory*", Oxford University Press, London, (1992).
- [11] Faal, R.T., Fariborz, S., and Daghyani, H.R., "Antiplane Deformation of Orthotropic Strips with Multiple Defects", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, pp. 1097-1114, (2006).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- $a$  : فاصله شعاعی نوک نابجایی از مرکز صفحه دایروی
- $A_{2n}, B_{2n}, A_{1n}, D_n$  : ضرایب ثابت روابط تغییر مکان
- $b_{zj}(t)$  : دانسیته نابجایی بی بعد
- $B_{zj}(r_j)$  : دانسیته نابجایی
- $g_{zi}(-1)$  : ضریب غیر تکین دانسیته نابجایی
- $G$  : نسبت مدول برشی در جهت زاویه ای به مدول برشی در جهت شعاعی
- $G_{rz}, G_{\theta z}$  : مدولهای برشی در جهات شعاعی و زاویه ای
- $k_{ij}(s, t)$  : کرنل معادله انتگرالی
- $k_{IIIi}, k_{IIIRi}$  : ضرایب شدت تنش نوکهای ترک
- $p(r, \theta)$  و  $q(r, \theta)$  : توابع معرفی شده در این مقاله
- $r$  : مختصه شعاعی
- $r'$  : مختصه شعاعی محلی
- $R$  : شعاع صفحه دایروی
- $s, t$  : متغیرهای معرفی شده جهت نرمالیزه کردن معادلات انتگرالی
- $w$  : تغییر مکان عمود بر صفحه دایروی
- $W_s$  : تبدیل فوریه سینوسی تغییر مکان عمودی

### نمادهای یونانی

- $\delta(\theta)$  : تابع دلتای دیراک
- $\theta$  : مختصه زاویه ای
- $\theta'$  : مختصه زاویه ای محلی
- $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$  : مولفه های تنش برشی در راستاهای شعاعی و زاویه ای
- $\tau_0$  : اندازه بارخارجی
- $\tau_{tz}, \tau_{nz}$  : مولفه های تنش برشی در راستاهای مماس و عمود بر ترک
- $\phi_i$  : زاویه بین خط مماس بر ترک  $i$ -ام و راستای شعاعی  $r_i$

**Abstract**

In this article, the antiplane stress analysis of a transversely isotropic circular plane weakened by multiple defects is accomplished. The solution of a screw dislocation problem in a circular plane is first obtained by means of a finite Fourier sin transform. Next, using the resultant dislocation solution, integral equations of the circular plane with arbitrary number of cracks are obtained. The numerical solution of ensuing integral equations which are of the Cauchy type singular leads to evaluation of dislocation density on the crack surfaces. Using corresponding dislocation density, the stress intensity factors of crack tips for some examples are attained.