

## پاسخ آشوبناک مدل غیرخطی یک چهارم دو درجه آزادی خودرو تحت تحریک جاده

در این تحقیق برای مدل‌سازی واقع‌بینانه‌تر رفتار غیرخطی سیستم تعلیق خودرو، با منظور کردن جرم فنربندی نشده، مدل یک چهارم دو درجه آزادی خودرو مورد بررسی قرار گرفته است. برای فنر و میراثی سیستم تعلیق از مدل غیرخطی استفاده شده است. تأیر به صورت فنر سفت شونده مدل شده است. تحریک جاده، سینوسی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که سیستم در بازه‌های مشخصی از فرکانس تحریک رفتار آشوبناک دارد که با استفاده از پدیده دوشاخگی شناسایی شده است. مقایسه نتایج حاصل با نتایج ارائه شده در ادبیات فن برای مدل غیرخطی یک چهارم دو درجه آزادی خودرو حاکی از وجود رفتارهایی در پاسخ غیرخطی سیستم می‌باشد که در مدل یک درجه آزادی قابل شناسایی نیست.

موسی رضائی<sup>۱</sup>

دانشیار

حامد سمندری<sup>۲</sup>

کارشناسی ارشد

فرزاد فلاحی<sup>۳</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما: مدل یک چهارم خودرو، ارتعاشات غیرخطی، آشوب، دمپر الکترومغناطیسی، دوشاخگی

### ۱- مقدمه

تأثیرات ناهمواری سطح جاده بر روی پایداری خودرو و راحتی سفر از دیرباز مورد توجه محققان و صنایع خودروسازی بوده است. بدین منظور مدل‌سازی ارتعاشی خودرو با استفاده از مدل‌های ریاضی به منظور کاهش ارتعاشات ناخواسته خودرو در تحقیقات اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱-۶].

در تحلیل رفتار دینامیکی سیستم تعلیق خودرو، اجزاء ارتعاشی سیستم تعلیق در سه دسته‌ی کلی بدنه خودرو<sup>۴</sup>، سیستم تعلیق و چرخ‌ها<sup>۵</sup> قرار می‌گیرند. بر این اساس مدل‌های ارائه شده برای مطالعه رفتار دینامیکی سیستم تعلیق خودرو را می‌توان به سه دسته شامل: مدل یک چهارم خودرو، مدل نصف خودرو و مدل کامل خودرو تقسیم کرد. در مدل یک چهارم خودرو بدنه با یک فنر و دمپر به چرخ و از طریق آن به جاده مرتبط است [۷ و ۸]. در شکل (۱-الف) نمای شماتیک این مدل آورده شده است. مجموعه چرخ، ترمزها و میله‌های رابط تعلیق به عنوان جرم فنربندی نشده شناخته می‌شوند. از این مدل برای مطالعه حرکت

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

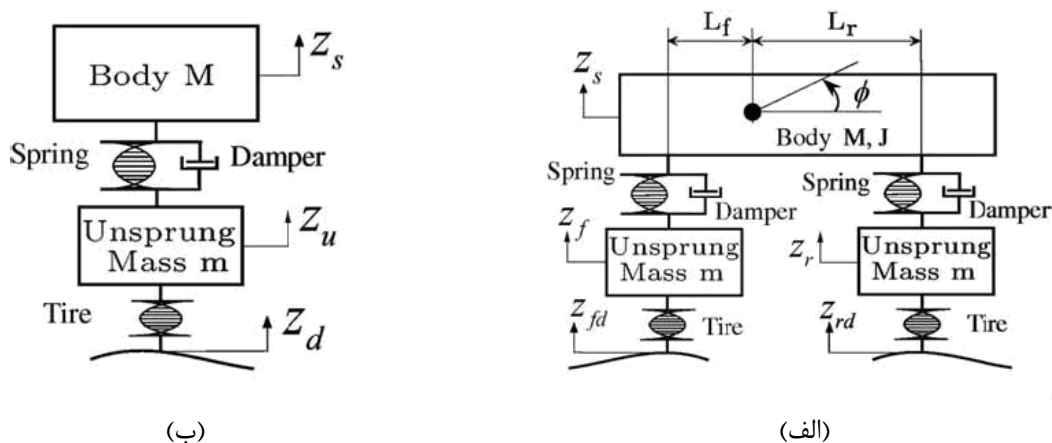
<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد سیستم محرکه خودرو، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

<sup>۴</sup> Sprung mass

<sup>۵</sup> Unsprung mass

ارتعاش عمودی<sup>۱</sup> خودرو استفاده می‌شود. در شکل (۱-ب) مدل نصف خودرو که شامل دو چرخ جلو و عقب می‌باشد آورده شده است. این مدل برای بررسی حرکت ارتعاش عمودی و کله‌زنی<sup>۲</sup> خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد [۹]. در مدل دیگری برای نصف خودرو، با انتخاب دو چرخ جلو می‌توان به بررسی حرکت ارتعاش عمودی و چرخشی حول محور طولی خودرو<sup>۳</sup> پرداخت. مدل پیچیده‌تر خودرو، مدل هفت درجه آزادی است که برای بررسی حرکت ارتعاش عمودی، کله‌زنی و پیچشی خودرو حول محور طولی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۰].



شکل ۱- الف) مدل یک چهارم خودرو ب) مدل نصف خودرو [۱۱]

در مطالعه دینامیک خودرو به کمک مدل‌های معرفی شده به علت استفاده از مدل‌های خطی برای مدل‌سازی اجزاء خودرو در مقایسه با نتایج تجربی تضاد مشاهده می‌شود. منشاء این تضاد خاصیت غیر خطی اجزاء خودرو می‌باشد که سبب بوجود آمدن پدیده‌هایی از قبیل آشوب می‌شود که در تحقیقات مبتنی بر مدل‌های خطی قابل مشاهده نیست. با ورود مدل‌های غیرخطی اجزاء تشکیل دهنده خودرو، مدل‌های معرفی شده برای خودرو مورد بازبینی قرار گرفته‌اند.

توسعه مدل‌های غیرخطی ابتدا با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی برای سفتی فنر در سیستم تعلیق و سفتی تایر آغاز شد. در تحقیقات بعدی رفتار غیرخطی دمپر نیز مورد توجه قرار گرفت. در عمده تحقیقات انجام شده، رفتار غیرخطی دمپر به صورت دوخطی<sup>۴</sup> منظور شده است [۱۱].

توسعه این مدل‌ها با معرفی دمپرهای الکترو مغناطیسی در صنعت خودروسازی که دارای ویژگی غیرخطی و هیستریستیک هستند وارد مرحله‌ای تازه شد. این نوع دمپرها دارای ویژگی‌های میرائی متفاوتی نسبت به دمپرهای متداول هستند [۱۲ و ۱۳ و ۱۴]. اما مدل مورد استفاده در این تحقیقات با وجود توجه به ویژگی اجزاء غیرخطی ساده و از نوع یک چهارم با یک درجه آزادی است که در نظر نگرفتن جرم فنربندی نشده سبب بوجود آمدن کاستی در این مدل می‌شود.

<sup>1</sup> Heave

<sup>2</sup> Pitch

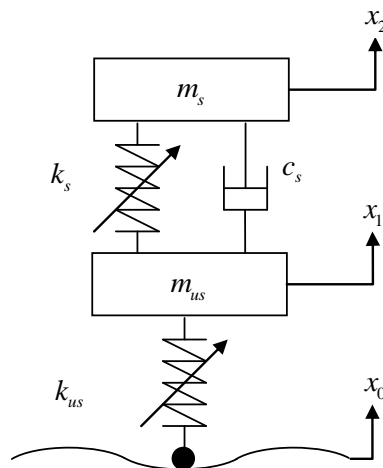
<sup>3</sup> Roll

<sup>4</sup> Bilinear

در این تحقیق به منظور در نظر گرفتن مدل واقع بینانه‌تر برای سیستم تعلیق، با منظور کردن جرم فنربندی نشده و استفاده از مدل‌های جدید ارائه شده برای اجزاء سیستم تعلیق مدل غیرخطی یک چهارم کاملتری از خودرو ارائه شده است. در مدل حاضر پاسخ فرکانسی سیستم و عوامل تاثیرگذار بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. برای پیش‌بینی و آنالیز پدیده‌های مربوط به آشوب در استخراج پاسخ سیستم از روش‌های عددی استفاده شده است و از نمودارهای پاسخ فرکانسی، چنگانگی<sup>۱</sup> و پوانکاره<sup>۲</sup> برای شناسایی نواحی آشوبناک در پاسخ استفاده شده است. همچنین برای فراهم آوردن امکان مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده در ادبیات فن با میل دادن جرم فنربندی نشده به صفر و سفتی تایر به بی نهایت، نتایج حاصل از مدل با نتایج مربوط به مدل یک چهارم یک درجه آزادی مقایسه شد که حاکی از صحت روش می‌باشد.

## ۲- مدل سازی

در مقاله ارائه شده توسط G. Litak و همکاران [۱۳ و ۱۲] برای مدل سازی خودرو از مدل یک چهارم خودرو با یک درجه آزادی استفاده شده است که در آن برای مدل سازی سفتی و میرایی سیستم تعلیق، مدل ریاضی غیرخطی بکار برده شده است و با استفاده از این مدل غیرخطی به بررسی پاسخ اجباری سیستم تحت تحریک جاده پرداخته شده است. اما استفاده از مدل یک چهارم یک درجه آزادی خودرو و صرفنظر کردن از تاثیرات جرم فنربندی نشده سبب ایجاد کاستی در پاسخ سیستم می‌شود. بنابراین در این مقاله با در نظر گرفتن درجه آزادی مربوط به چرخ، مدل مورد استفاده در مراجع مذکور مورد بازبینی قرار گرفته است شکل (۲) نمایی از این مدل را نشان می‌دهد.



شکل ۲- مدل غیرخطی یک چهارم - دو درجه آزادی خودرو تحت تحریک جاده

در مدل ارائه شده در این مقاله، جرم فنربندی نشده که شامل تایر و ترمز و ... می‌باشد به صورت یک درجه آزادی در نظر گرفته شده است. برای نامگذاری کمیت‌های مربوط به جرم فنربندی نشده از زیرنویس  $us$  و

<sup>1</sup> Bifurcation

<sup>2</sup> Poincaré map

برای نامگذاری کمیت‌های مربوط به جرم فنربندی شده از زیرنویس  $s$  استفاده شده است. در مدل ریاضی استفاده شده برای چرخ از میرائی موجود در تایر در مقابل میرائی سیستم تعلیق صرفنظر شده و سفتی تایر به صورت سخت شونده در نظر گرفته شده است [۱۵]. رابطه نیرو و جابجایی در چرخ به صورت زیر است:

$$F_{k_{us}} = k_{us}(x_1 - x_0) + \varepsilon k_{us}(x_1 - x_0)^3, \varepsilon > 0 \quad (1)$$

در رابطه فوق  $F_{k_{us}}$  بیانگر نیروی اعمالی به جرم فنربندی نشده و  $\varepsilon$  نشان دهنده میزان رفتار غیرخطی سفتی تایر می‌باشد.

برای مدل‌سازی سفتی سیستم تعلیق، از مدل ریاضی ارائه شده در مراجع [۱۲ و ۱۳] استفاده شده است. در این مدل سفتی سیستم تعلیق خودرو از نوع نرم‌شونده در نظر گرفته شده است که از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$F_{k_s} = k_s(x_2 - x_1) - \alpha k_s(x_2 - x_1)^3 \quad (2)$$

در رابطه فوق  $F_{k_s}$  نیروی ایجاد شده در فنر سیستم تعلیق می‌باشد. کمیت  $\alpha$  نشان دهنده میزان رفتار غیرخطی فنر سیستم تعلیق خودرو بوده که در تحلیل سیستم برای بررسی تاثیرات آن در پاسخ اجباری و رفتار غیرخطی سیستم استفاده خواهد شد.

برای میرائی سیستم تعلیق همانگونه که گفته شد از مدل ریاضی ارائه شده در مراجع [۱۲ و ۱۳] استفاده شده است. مدل ریاضی مورد استفاده برای دمپر، در رابطه (۳) ارائه شده است.

$$F_{c_s} = -c_s \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) + \eta c_s \left[ \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) \right]^3 \quad (3)$$

این مدل با مدل‌های معمول ریاضی ارائه شده برای مدل‌سازی دمپرهای هیدرولیکی متفاوت است. این تفاوت منشاء فیزیکی داشته و علت آن استفاده از دمپرهای الکترومغناطیسی و هیستریستیک در سیستم تعلیق خودرو است [۱۶ و ۱۷]. در این مدل وجود دو جمله وابسته به توان‌های اول و سوم سرعت سبب پایدار نمودن سیستم در سرعت‌های بالا و افزایش انرژی برای سرعت‌های پایین شده است.

در رابطه فوق  $F_{c_s}$  بیانگر نیروی ناشی از میرائی سیستم تعلیق خودرو است.  $\eta$  کمیتی است که تغییر آن سبب تغییر رفتار غیرخطی سیستم در پاسخ به تحریک اجباری سیستم می‌شود.

برای خودرو، سطح جاده به عنوان عامل تحریک شناخته می‌شود. در این مقاله تحریک ناشی از جاده به صورت سینوسی در نظر گرفته شده است که از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$x_0 = A \sin \Omega t \quad (4)$$

در معادله فوق  $A$  دامنه ناهمواری سطح جاده و  $\Omega = \frac{2\pi v_0}{\lambda}$  فرکانس تحریک جاده است که در آن  $v_0$  سرعت حرکت خودرو و  $\lambda$  طول موج هارمونیک می‌باشد.

با در نظر گرفتن مدل ارائه شده در شکل (۲) و معرفی اجزاء سیستم تعلیق خودرو، معادلات حرکت سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m_s \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -F_{k_s} - m_s g - F_{c_s} \quad (5)$$

$$m_{us} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{k_s} + F_{c_s} - F_{k_{us}} - m_{us} g \quad (6)$$

برای فراهم ساختن امکان مقایسه نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج ارائه شده در مراجع [۱۲ و ۱۳]، پارامترهای سیستم بگونه‌ای انتخاب می‌شود که با مشخصات ارائه شده در مراجع مذکور یکسان باشد. مشخصات در نظر گرفته شده برای سیستم تعلیق در جدول (۱) ارائه شده است. نظر به اینکه در مراجع مذکور از مدل یک درجه آزادی خودرو استفاده شده است در حالیکه در تحقیق حاضر مدل بهبود یافته دو درجه آزادی خودرو بکار رفته است لذا مقادیر جرم فنربندی نشده از مرجع [۱۸] و مقادیر ثابت‌ها در رابطه‌ی بین تایر و جابجایی نسبی جرم فنربندی نشده از مرجع [۱۵] انتخاب شده‌اند که این مقادیر نیز در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱- مقادیر عددی پارامترهای سیستم تعلیق

240 Kg	جرم فنربندی شده	$m_s$
40 Kg	جرم فنربندی نشده	$m_{us}$
800000 N/m	سفتی تایر	$k_{us}$
0.2	مقدار ثابت کوچک	$\varepsilon$
200000 N/m	سفتی فنر سیستم تعلیق	$k_s$
250 N.s/m	ثابت میرایی	$c_s$

برای استخراج پاسخ فرکانسی، از روش عددی رانگ-کوتای مرتبه ۴ استفاده شده و خطای مطلق در انجام محاسبات  $10^{-6}$  در نظر گرفته شده است. برای استفاده از الگوریتم رانگ-کوتا، ابتدا باید معادلات حاکم بر سیستم در فضای حالت بیان شوند (معادلات ۷ تا ۱۲):

$$y_1 = x_1 \quad (7)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad (8)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{(F_{k_s} + F_{c_s} - F_{k_{us}} - m_{us}g)}{m_{us}} \quad (9)$$

$$y_3 = x_2 \quad (10)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_4 \quad (11)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \frac{(-F_{k_s} - F_{c_s} - m_s g)}{m_s} \quad (12)$$

### ۳- تحلیل مدل

در این بخش به بررسی پاسخ اجباری سیستم به کمک نمودارهای پاسخ فرکانسی، چندگانگی و پوآنکاره پرداخته می‌شود. در تحلیل دینامیکی سیستم بطور معمول از پاسخ فرکانسی استفاده می‌شود و نمودارهای چندگانگی و پوآنکاره برای تایید پاسخ آشوبناک بکار می‌روند [۱۹]. زمانی که فرکانس تحریک در ناحیه ناپایدار پاسخ فرکانسی قرار دارد پاسخ آشوبناک سیستم بسیار محتمل است. از این رو می‌توان از مطالعه

ناحیه ناپایدار نمودار پاسخ فرکانسی برای پیش‌بینی رفتار آشوبناک استفاده کرد [۲۰]. برای مدل خودرو نمودارهای پاسخ فرکانسی به صورت تغییرات  $A_{out}$  (رابطه ۸) به عنوان دامنه نوسانات در برابر فرکانس تحریک جاده رسم می‌شود.

$$A_{out} = \left| \frac{(y_{max} - y_{min})}{2} \right| \quad (13)$$

در رابطه بالا  $y_{min}$  و  $y_{max}$  به ترتیب بیانگر ماکزیمم و مینیمم دامنه نوسانات سیستم در پاسخ پایدار است. برای دستیابی به دید کافی از سیستم، ابتدا منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای سیستم خطی متناظر با صفر فرض کردن جملات غیر خطی رسم شده است. در شکل (۳-الف) و (۳-ب) پاسخ فرکانسی بر اساس مقادیر ارائه شده در جدول (۱) و بازای دامنه ناهمواری جاده برابر ۰/۱۱ متر آورده شده است [۷]. در منحنی‌های ارائه شده برای پاسخ فرکانسی، فرکانس تحریک نسبت به  $\omega = \sqrt{k_s/m_s}$  بی بعد شده است که به آن فرکانس تحریک نرمالیزه شده ( $\bar{f}$ ) می‌گوییم. منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای حالت کاهش فرکانس تحریک از حداکثر مقدار تا مقدار صفر استخراج شده است. گام کاهش فرکانس تحریک نرمالیزه شده برابر ۰/۰۰۱، در نظر گرفته شده است و برای دستیابی به پاسخ حالت ماندگار، زمان ارتعاش در هر فرکانس تحریک ۴۰ برابر زمان تناوب جرم فربندی شده در سیستم خطی متناظر منظور شده است. همچنانکه در شکل‌های (۳-الف) و (ب) دیده می‌شود پیک‌های متناظر با فرکانس‌های طبیعی جرم‌های فربندی شده و فربندی نشده در سیستم خطی متناظر به ترتیب در  $\bar{f} = 0.89$  و  $\bar{f} = 5.48$  ظاهر می‌شود. در ادامه سیستم خطی متناظر بصورت تحلیلی حل شده و نتایج با نتایج عددی مقایسه شده است.

معادلات خطی حاکم بر سیستم را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_2 + k_s(x_2 - x_1) + c_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = -m_s g \\ m_{us} \ddot{x}_1 - k_s(x_2 - x_1) - c_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{us}(x_1 - x_0) = -m_{us} g \end{cases} \quad (14)$$

معادلات اخیر به صورت ماتریسی زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{pmatrix} m_{us} & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_s + k_{us} & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{us} x_0 - m_{us} g \\ -m_s g \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با فرض پاسخ به صورت  $\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\Omega t} \\ x_2 = A_2 e^{i\Omega t} \end{cases}$  و جایگذاری آن در معادلات و صرفنظر کردن از میرایی سیستم، معادله مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$m_s m_{us} \Omega^4 - (m_{us} k_s + m_s k_s + m_s k_{us}) \Omega^2 + k_s k_{us} = 0 \quad (16)$$

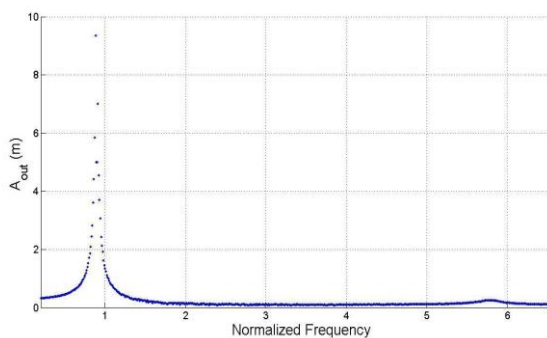
که با اعمال مقادیر عددی پارامترها و حل آن، فرکانس‌های طبیعی سیستم حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \Omega_1 = 25.74 \\ \Omega_2 = 158.65 \end{cases}$$

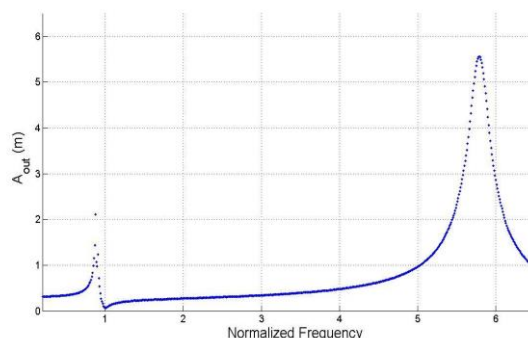
با در نظر گرفتن فرکانس طبیعی سیستم خطی یک درجه آزادی متناظر، فرکانس‌های طبیعی نرمالیزه شده به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = 0.89 \\ \bar{f}_2 = 5.49 \end{cases}$$

که با دقت قابل قبولی با نتایج عددی مطابقت دارد.



(ب)



(الف)

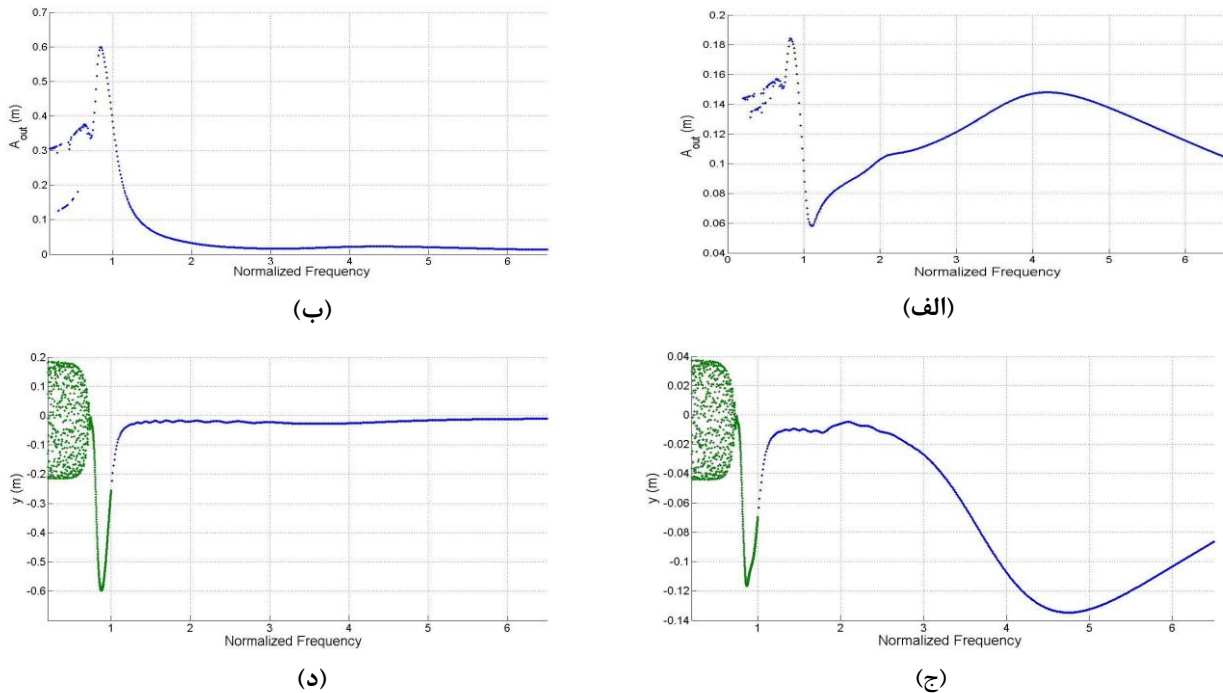
**شکل ۳- پاسخ فرکانسی مدل خطی یک چهارم - دو درجه آزادی خودرو تحت تحریک جاده**  
الف) برای جرم فنربندی نشده ب) برای جرم فنربندی شده

### ۳-۱- بررسی تاثیرات اجزاء غیرخطی بر پاسخ سیستم

در این بخش با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی پارامترهای سیستم تعلیق خودرو ( $\alpha$  و  $\eta$ )، نحوه تغییر پیک‌های پاسخ فرکانسی و گذار سیستم از حالت پایا به حالت آشوبناک بررسی می‌شود. پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر متفاوتی از  $\alpha$  و  $\eta$  مورد بررسی قرار گرفت و از بین حالات مختلف دو دسته حالت حدی به عنوان نماینده حالات دیگر انتخاب گردید. در حالت اول ( $\alpha = 0.3$  و  $\eta = 0.08$ ) میرایی غیرخطی نسبت به حالت دوم ( $\alpha = 1.2$  و  $\eta = 0.0$ ) از شدت بیشتری برخوردار است. برای اینکه تفاوت‌ها به شکل محسوس‌تری قابل مشاهده باشد همزمان با کاهش اثر بخش غیرخطی میرایی ( $\eta$ )، برای بخش غیرخطی سفتی سیستم تعلیق ( $\alpha$ ) از مقداری بزرگتر استفاده شده است. در نهایت با انتخاب مقادیر مناسب برای  $\alpha$  و  $\eta$  با توجه به مراجع [۱۲ و ۱۳] مقایسه‌ای مابین مدل یک چهارم دو درجه آزادی با مدل یک چهارم یک درجه آزادی ارائه شده در این مراجع انجام شده است.

در شکل (۴- الف) و (ب) با فرض  $\alpha = 0.3$  و  $\eta = 0.08$  نمودارهای مربوط به پاسخ فرکانسی سیستم به ترتیب برای جرم فنربندی نشده و جرم فنربندی شده آورده شده است. دو پیک در فرکانس‌های تحریک  $\bar{f} = 0.85$  برای جرم فنربندی شده و  $\bar{f} = 4.2$  برای جرم فنربندی نشده دیده می‌شود. بلافاصله بعد از اولین پیک یک سقوط بزرگ در مقدار ماکزیمم دامنه خروجی دیده می‌شود که حاکی از وجود رفتار آشوبناک است. مشاهده می‌شود که پیک دوم در نمودار پاسخ فرکانسی برای جرم فنربندی نشده در فرکانس تحریکی کمتر و با دامنه خروجی ماکزیمم به مراتب کوچکتر نسبت به سیستم خطی متناظر اتفاق افتاده است. در نزدیکی پیک دوم هیچگونه تغییر ناگهانی که حاکی از وجود رفتار آشوبناک باشد دیده نمی‌شود که

نمودار چندگانگی برای جرم فنربندی نشده نیز این مسئله را تأیید می‌کند (شکل ۴-ج). برای بررسی رفتار آشوبناک جرم فنربندی شده نمودار چندگانگی در شکل (۴-د) رسم شده است که مؤید پاسخ آشوبناک برای فرکانس تحریک کمتر از  $\bar{f} = 0.6$  می‌باشد. قابل ذکر است که در فرکانس‌های تحریک نرمالیزه شده کمتر از  $0/6$  نوعی رفتار دوگانه با دو دامنه ماکزیمم خروجی دیده می‌شود.

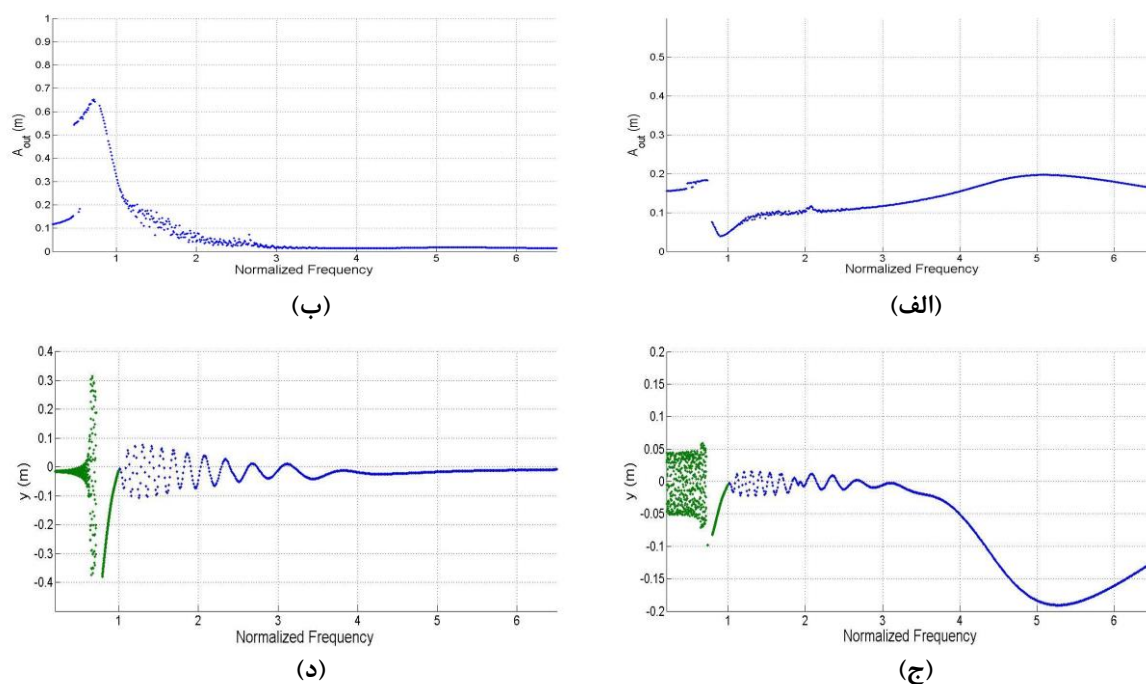


**شکل ۴-** نمودارهای پاسخ فرکانسی برای مدل غیر خطی به ازای  $\alpha = 0.3$  و  $\eta = 0.08$  (الف) برای جرم فنربندی نشده (ب) برای جرم فنربندی شده، و نمودارهای چندگانگی (ج) برای جرم فنربندی نشده (د) برای جرم فنربندی شده

در شکل (۵-الف) و (ب) نمودارهای مربوط به پاسخ فرکانسی به ترتیب برای جرم فنربندی نشده و جرم فنربندی شده با  $\alpha = 1.2$  و  $\eta = 0.02$  آورده شده است. در این حالت دو پیک در فرکانس‌های تحریک  $\bar{f} = 0.72$  برای جرم فنربندی شده و  $\bar{f} = 5.1$  برای جرم فنربندی نشده دیده می‌شود. برای جرم فنربندی شده سقوط در دامنه ماکزیمم خروجی از فرکانس تحریک نزدیک به پیک به فرکانسی کمتر ( $\bar{f} = 0.5$ ) منتقل شده است. برای جرم فنربندی نشده در محدوده فرکانسی  $\bar{f} = 3$  تا  $\bar{f} = 1.2$  چندگانگی در دامنه خروجی سیستم<sup>۱</sup> مشاهده می‌شود که این حالت برای جرم فنربندی شده نسبت به جرم فنربندی نشده از شدت بیشتری برخوردار است. نمودارهای چندگانگی نیز وجود پاسخ آشوبناک برای جرم فنربندی شده و جرم فنربندی نشده را در محدوده‌های فرکانسی  $\bar{f} = 3$  تا  $\bar{f} = 1.2$  و  $\bar{f} = 0.6$  تا  $\bar{f} = 0.5$  تایید می‌کنند (شکل ۵-ج) و (د). بعلاوه مشاهده می‌شود که در فرکانس‌های تحریک پایین‌تر جرم فنربندی نشده پاسخ آشوبناک خود را حفظ می‌کند ولی جرم فنربندی شده به سمت پاسخ آرام‌تر میل می‌کند.

<sup>1</sup> Beeping

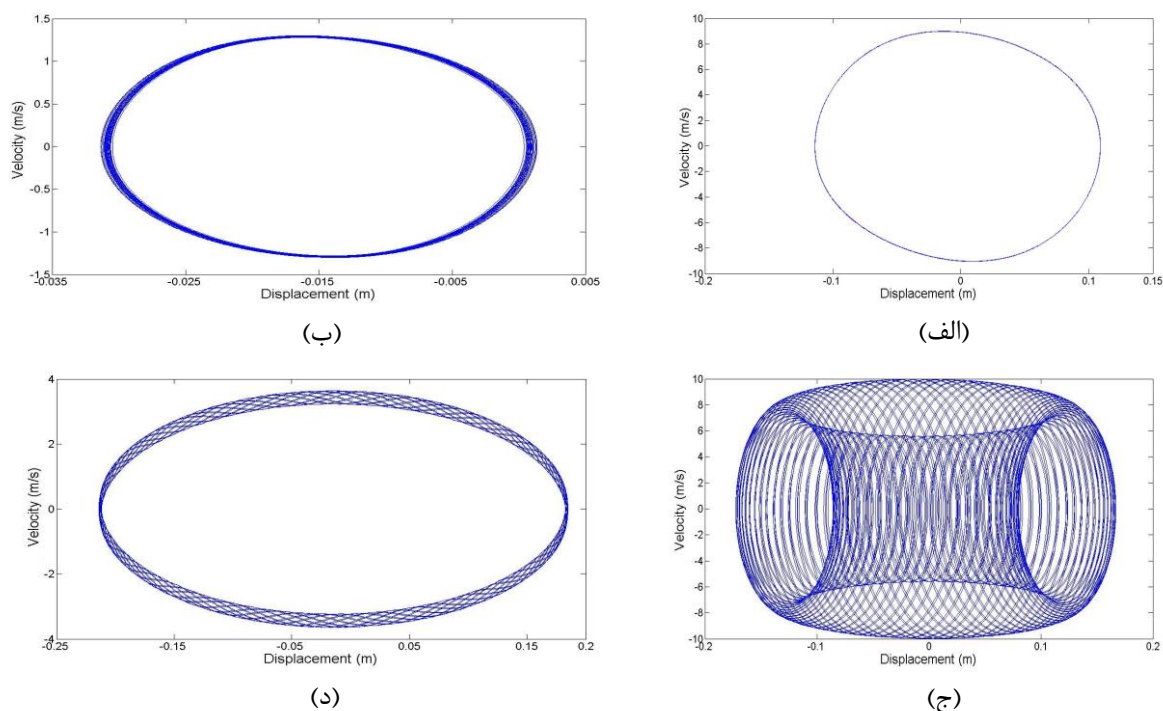




**شکل ۵-** نمودارهای پاسخ فرکانسی برای مدل غیر خطی به ازای  $\alpha = 1.2$  و  $\eta = 0.02$  (الف) برای جرم فنربندی نشده (ب) برای جرم فنربندی شده، و نمودارهای چندگانگی (ج) برای جرم فنربندی نشده (د) برای جرم فنربندی شده

از مقایسه نمودارهای ارائه شده در شکل (۴) و شکل (۵) تاثیر تغییرات پارامترهای غیرخطی بین دو حالت، که در یکی میرایی نسبت به دیگری غالب در نظر گرفته شده است آشکار می‌شود. چنانکه مشاهده می‌شود در نمودار پاسخ فرکانسی با کاهش میرایی غیرخطی و افزایش سفتی غیرخطی فاصله دو پیک افزایش یافته است. از طرف دیگر در شکل (۵)، در محدوده فرکانسی  $\bar{f} = 1.2$  تا  $\bar{f} = 3$  رفتار نوسانی در پاسخ فرکانسی مشاهده می‌شود ولی در حالت مورد بررسی در شکل (۴) میرایی زیاد سبب استهلاک سریع این نوع پاسخ و تغییر رفتار از پاسخی آشوبناک به پاسخ غیر آشوبناک می‌شود. همچنین در شکل (۵) برای فرکانس تحریک کمتر از  $\bar{f} = 0.5$  جرم فنربندی شده پاسخی به مراتب آرامتر نسبت به حالت مورد بحث در شکل (۴) دارد و دوگانگی در دامنه خروجی از بین رفته است.

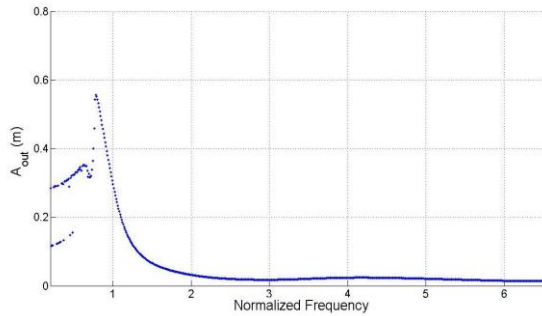
در شکل (۶) نمودار پوانکاره سیستم برای  $\alpha = 1.2$  و  $\eta = 0.0$  در فرکانس‌های تحریک  $\bar{f} = 2.8$  و  $\bar{f} = 0.6$  برای جرم‌های فنربندی نشده و فنربندی شده رسم شده است. در این نمودارها مشاهده می‌شود که در فرکانس  $\bar{f} = 2.8$  رفتار آشوبناک در ارتعاش جرم فنربندی شده آغاز شده و جرم فنربندی نشده را تحت تاثیر قرار داده است و در آغاز ورود به ناحیه چندگانگی در پاسخ، نمودار مربوط به جرم فنربندی نشده برخلاف نمودار مربوط به جرم فنربندی شده یک حلقه بسته است. در فرکانس  $\bar{f} = 0.6$  عکس این حالت رخ داده است و جرم فنربندی نشده ابتدا از خود پاسخی آشوبناک نشان می‌دهد که این پاسخ بر روی پاسخ جرم فنربندی شده تاثیر گذاشته و سبب ورود سریع تر آن به ناحیه پاسخ آشوبناک می‌شود. اما همانگونه که گفته شد با کاهش بیشتر فرکانس، جرم فنربندی شده دوباره وارد ناحیه پاسخ غیر آشوبناک می‌شود.



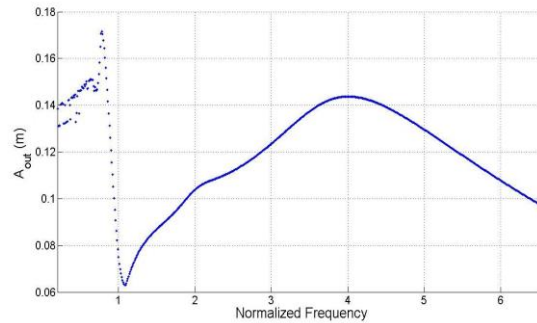
شکل ۶- نمودار پوانکاره سیستم بازای  $\alpha = 1.2$  و  $\eta = 0.02$  در فرکانس تحریک  $\bar{f} = 2.8$  (الف) برای جرم فنربندی نشده (ب) برای جرم فنربندی شده، و در فرکانس تحریک  $\bar{f} = 0.6$  (ج) برای جرم فنربندی نشده (د) برای جرم فنربندی شده

### ۳-۲- مقایسه مدل غیرخطی ارائه شده حاضر با مدل یک درجه آزادی

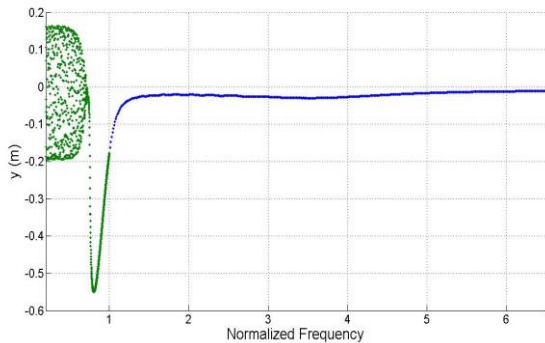
مدل استفاده شده در این مقاله مدلی واقعی تر از مدل یک چهارم یک درجه آزادی ارائه شده در تحقیقات پیشین می باشد [۲۱ و ۱۳ و ۱۲]. وجود رفتارهایی در پاسخ اجباری سیستم که در مدل یک درجه آزادی از چشم دور مانده بود سبب پررنگ شدن نقش درجات آزادی دیگر در پاسخ سیستم شده است. برای مقایسه، نمودارهای پاسخ فرکانسی و چندگانگی برای حالت  $\alpha = 1.5$  و  $\eta = 0.1$  در شکل (الف-۷) و (ب) آورده شده است که با مقادیر مورد استفاده در مراجع [۲۱ و ۱۳ و ۱۲] مطابقت دارد. سیستم دارای دو پیک در فرکانس تحریک  $\bar{f} = 0.8$  برای جرم فنربندی شده و  $\bar{f} = 4$  برای جرم فنربندی نشده می باشد. برای جرم فنربندی شده بلافاصله بعد از پیک در فرکانس تحریک  $\bar{f} = 0.8$  یک سقوط ناگهانی در اندازه دامنه خروجی ماکزیمم مشاهده می شود. در فرکانس تحریک  $\bar{f} = 0.69$  پیک دیگری با دامنه خروجی کوچکتر دیده می شود که این پدیده در سیستم با میرائی تضعیف شده این پدیده مشاهده نمی شود (شکل (ب-۵)). با مراجعه به نمودارهای چندگانگی مشخص می شود که این نقطه محل تغییر پاسخ سیستم از پاسخ غیر آشوبناک به پاسخی آشوبناک است (شکل (ج-۷) و (د)). تغییرات در دامنه خروجی به *Hopf Bifurcation* مربوط است که این پدیده با فرکانس ارتعاشی پایه سیستم و فرکانس تحریک در تناسب است همچنین محل آن با تغییر سریع در دامنه خروجی ارتباط دارد. در شکل (الف-۸) و (ب) نمودار پاسخ فرکانسی و چندگانگی استخراجی برای مدل یک درجه آزادی آورده شده است که با نمودار استخراجی برای مدل دو درجه تطابق خوبی دارد.



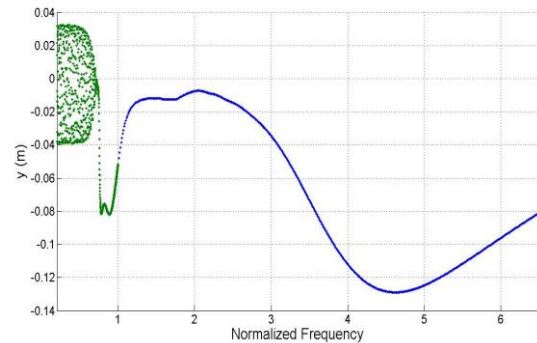
(ب)



(الف)

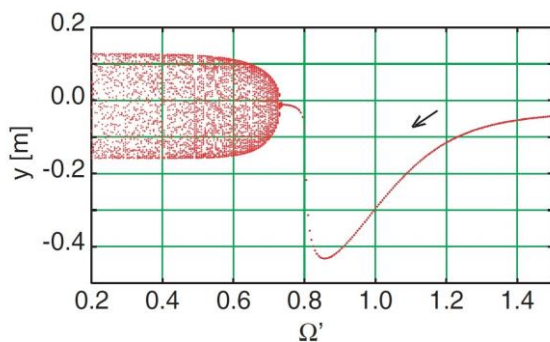


(د)

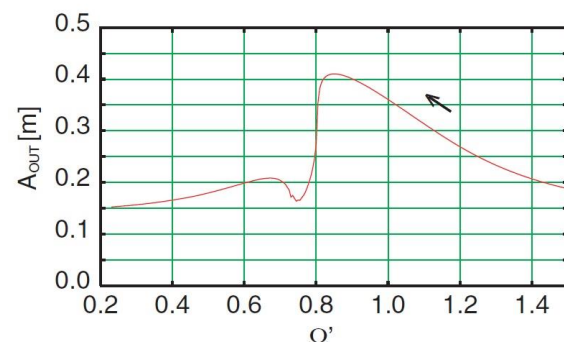


(ج)

**شکل ۷-** نمودارهای پاسخ فرکانسی برای مدل غیر خطی به ازای  $\alpha=1.5$  و  $\eta=0.1$  (الف) برای جرم فنربندی نشده (ب) برای جرم فنربندی شده، و نمودارهای چندگانگی (ج) برای جرم فنربندی نشده (د) برای جرم فنربندی شده



(ب)

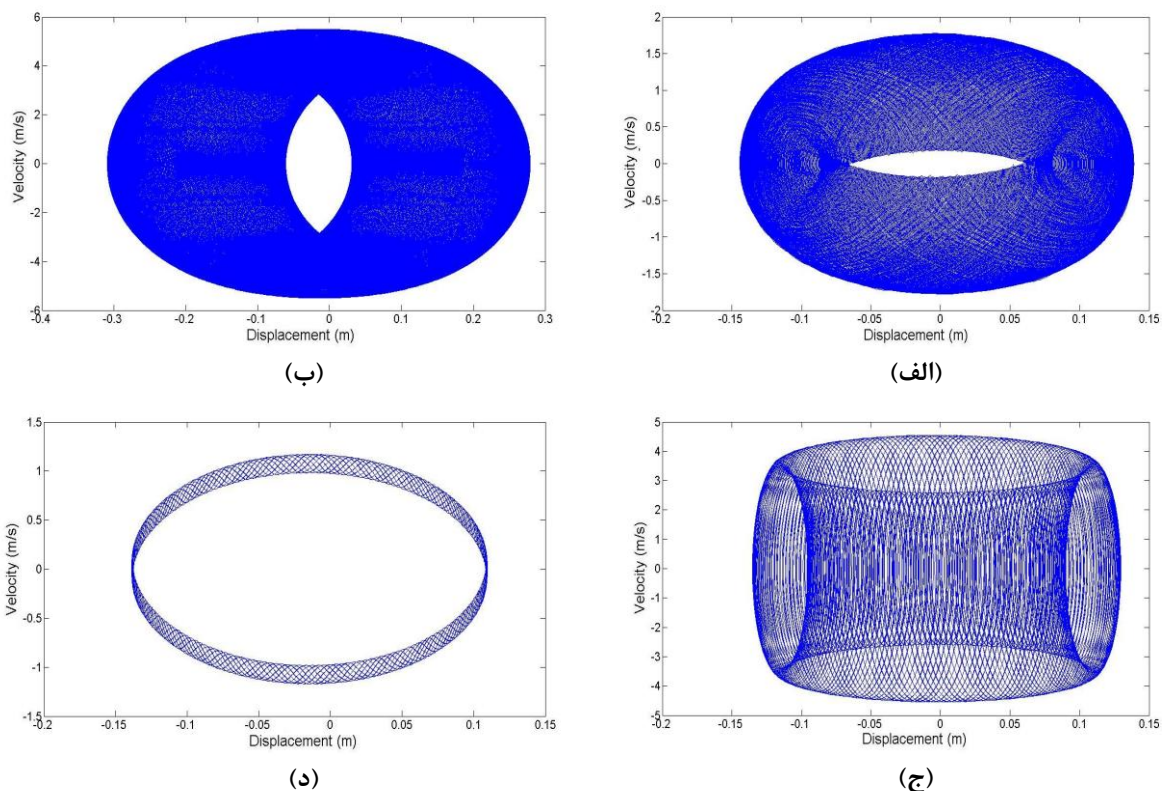


(الف)

**شکل ۸-** نمودارهای: (الف) پاسخ فرکانسی و (ب) چندگانگی برای سیستم یک درجه آزادی [۱۳]

در نمودار پاسخ فرکانسی در محدوده فرکانسهای تحریک کمتر از  $\bar{f}=0.5$  برای دامنه ماکزیمم خروجی دو دسته مقدار دیده می شود. برای بررسی دقیق تر این مطلب در این ناحیه به بررسی رفتار سیستم به کمک نمودارهای پوانکاره پرداخته شده است. در شکل (۹-الف) و (ب) نمودارهای پوانکاره سیستم در فرکانس تحریک  $\bar{f}=0.3$  و شرایط اولیه  $[x_2, v_2, x_1, v_1] = [-0.15, 0.1, 0.15, -0.1]$  به ترتیب برای جرم فنربندی نشده و جرم فنربندی شده رسم شده است که هر دو نمودار حاکی از وجود رفتار آشوبناک می باشند. از طرف دیگر شکل (۹-ج) و (د) به ترتیب نشان دهنده نمودارهای پوانکاره برای جرم فنربندی نشده و جرم فنربندی شده در همان فرکانس تحریک و با شرایط اولیه  $[x_2, v_2, x_1, v_1] = [0, 0, 0.15, -0.1]$  است. در این نمودارها

مشاهده می‌شود که نمودار پوانکاره جرم فنربندی شده تقریباً به شکل یک حلقه بسته است اما جرم فنربندی نشده همچنان رفتاری آشوبناک دارد.



**شکل ۹-** نمودارهای پوانکاره سیستم با  $\alpha = 1.5$  و  $\eta = 0.1$  برای شرایط اولیه  $[x_2, v_2, x_1, v_1] = [-0.15, 0.1, 0.15, -0.1]$  (الف برای جرم فنربندی نشده و (ب) برای جرم فنربندی شده و شرایط اولیه  $[x_2, v_2, x_1, v_1] = [0, 0, 0.15, -0.1]$  (ج) برای جرم فنربندی نشده و (د) برای جرم فنربندی شده

همانگونه که گفته شد در محدوده فرکانس‌های تحریک کمتر از  $\bar{f} = 0.5$  سیستم دارای دوگونه پاسخ پایدار است. که امکان شناسایی آنها در مدل غیرخطی یک چهارم یک درجه آزادی امکان پذیر نبود در تحلیل رفتار سیستم با توجه به شکل (۹-ج) و (د)، مشاهده می‌شود که جرم فنربندی نشده به شکل یک جاذب برای جرم فنربندی شده عمل کرده و سبب کاهش ارتعاش آن شده است که این کاهش در مقدار دامنه ارتعاشی با تغییر از رفتار آشوبناک به رفتار غیرآشوبناک همراه است. البته قابل ذکر است که علاوه بر دامنه و فرکانس تحریک، وجود میرائی غالب نیز برای تغییر رفتار به حالت غیرآشوبناک لازم است.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل غیرخطی یک چهارم دو درجه آزادی خودرو بر اساس مدل‌های جدید ارائه شده برای المان‌های غیرخطی سیستم تعلیق مورد بررسی قرار گرفت و به بررسی پاسخ فرکانسی سیستم و نواحی مهم در پاسخ پرداخته شد. از نمودارهای چندگانگی و پوانکاره برای شناسایی نواحی که در آن پاسخ سیستم آشوبناک است استفاده گردید. همچنین با انتخاب مقادیر عددی با توجه به مراجع [۱۲ و ۱۳ و ۱۴] مقایسه‌ای بین نتایج انجام شد. مشاهده شد که علاوه بر رفتارهای بحث شده در مراجع مذکور در بازه‌های مشخصی از

فرکانس‌های تحریک، سیستم رفتار دوگانه کاملاً متمایز از خود نشان می‌دهد و علاوه بر دامنه و فرکانس تحریک شرایط اولیه نیز عاملی برای تعیین نوع پاسخ از نظر آشوبناک بودن یا عدم آشوبناک بودن است. این دوگانگی در پاسخ از برهم کنش جرم فنربندی شده و جرم فنربندی نشده ناشی می‌شود که در مدل‌های غیرخطی یک چهارم یک درجه آزادی ارائه شده در مراجع پیشین امکان مشاهده آن وجود نداشت.

برای مدل یک چهارم دو درجه آزادی تاثیر اجزاء سیستم در پاسخ سیستم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که میرایی غیرخطی در مقایسه با سایر عوامل غیرخطی‌ساز نقش بیشتری در رفتار سیستم دارد. همچنین بررسی‌های انجام شده بر پاسخ سیستم مشخص کرد که ضریب میرایی (17) نقش عمده‌ای در پایدار شدن پاسخ و کاهش نواحی آشوبناک دارد.

## مراجع

- [1] Genta, G., “*Motor Vehicle Dynamics*”, 2<sup>nd</sup> Edition, World Scientific, Singapore, (2003).
- [2] Takashi, T., “Modeling, Analysis and Control Methods for Improving Vehicle Dynamic Behavior (overview), R&D Review of Toyota CRDL, Vol. 38, pp. 1-9, (2003).
- [3] Verros, G., Natsiavias, S., and Stepan, G., “Control and Dynamics of Quarter-car Models with Dual-rate Damping”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 6, pp. 1045-1063, (2000).
- [4] Gobbi, M., and Matstinu, G., “Analytical Description and Optimization of the Dynamical Behavior of Passively Suspended Road Vehicle”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, pp. 457-481, (2001).
- [5] Von Wager, U., “On Non-linear Stochastic Dynamics of Quarter-car Model”, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 39, pp. 753-765, (2004).
- [6] Turkay, S., Natsiavias, S., and Papadimitriou, C., “Design Optimization of Quarter-car Models with Passive and Semi-active Suspension under Random Road Excitation”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 11, pp. 229-236, (2005).
- [7] Robson, J.D., “Road Surface Description and Vehicle Response”, *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 9, pp. 25-35, (1979).
- [8] Williams, R.A., “Automotive Active Suspension, Part 1: Basic Principles”, *Journal of Automotive Engineering*, Part D, Vol. 211, pp. 425-426, (1997).
- [9] Queslati, F., and Sankar, S., “A Class of Semi-active Suspension Schemes for Vehicle Vibration Control”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, pp. 391-411, (1994).
- [10] Ikenaga, S., Lewis, F.L., Campos, J., and Davis, L., “Active Suspension Control of Ground Vehicle Based on Full-vehicle Model”, *Proceeding of American Control Conference*, Chicago, USA, (2000).

- [11] Zhu, Q., and Ishitobi, M., "Chaotic Vibration of a Nonlinear Full-vehicle Model", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 747-759, (2006).
- [12] Litak, G., Borowiec, M., Ali, M., Saha, L.M., and Firswell, M.I., "Pulsive Feedback Control of a Quarter Car Model Forced by a Road Profile", *Journal of Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 33, pp. 1672-1676, (2007).
- [13] Litak, G., Borowiec, M., Firswell, M.I, and Szabelski, K., "Chaotic Vibration of a Quarter-car Model Excited by the Road Surface Profile", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1373-1383, (2008).
- [14] Litak, G., Borowiec, M., Firswell, M.I, and Przystupa, W., "Chaotic Response of a Quarter Car Model Forced by a Road Profile with Stochastic Component", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, pp. 2448-2456, (2009).
- [15] Jazar, R.N, "*Vehicle Dynamics Theory and Application*", Springer, New York, USA, (2008).
- [16] Lai, CY, and Liao, WH, "Vibration Control of a Suspension System via a Magneto-rheological Fluid Damper", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 8, pp. 527-547, (2002).
- [17] Du, H, Sze, KY, and Lam, J., "Semi Active H (infinity) Control of Vehicle Suspension with Magneto-rheological Damper", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, pp. 981-996, (2005).
- [18] Fateh, M.M., and Alavi, S.S., "Impedance Control of an Active Suspension System", *Mechatronics*, Vol. 19, pp. 134-140, (2009).
- [19] Nayefeh, A. H., and Balakumar, B., "Applied Nonlinear Dynamic, Analytical, Computational and Experimental Method", Wiley, New York, USA, (1995).
- [20] Hallar, G., "*Chaos Near Resonance*" Springer, New York, USA, (1997).
- [21] Zhu, Q., and Ishitobi, M., "Chaos and Bifurcation in a Nonlinear Vehicle Model", *Journal of Solid and Vibration*, Vol. 275, pp. 1136-1146, (2004).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$A$ : دامنه ناهمواری جاده

$A_{out}$ : دامنه نوسانات

$C_s$ : میرایی سیستم تعلیق

$F_{c_s}$ : نیروی ایجاد شده در دمپر سیستم تعلیق

$F_{k_{us}}$ : نیروی اعمالی به جرم فنربندی شده

$F_s$ : نیروی ایجاد شده در فنر سیستم تعلیق

$g$ : شتاب گرانش

$k_s$ : سفتی سیستم تعلیق

$k_{us}$ : سفتی تایر

$m_s$ : جرم فنربندی شده

$m_{us}$ : جرم فنربندی نشده

$v_0$ : سرعت حرکت خودرو

$X_1$ : جابجایی جرم فنربندی نشده

$X_2$ : جابجایی جرم فنربندی شده

### نمادهای یونانی

$\alpha$ : ضریب بخش غیرخطی سفتی سیستم تعلیق

$\epsilon$ : ضریب بخش غیرخطی سفتی تایر

$\eta$ : ضریب بخش غیرخطی میرایی سیستم تعلیق

$\Omega$ : فرکانس تحریک

**Abstract**

In this paper, in order to make a realistic model for investigating the nonlinear behavior of the car suspension system, the unsprung mass is taken into the account and a two-degree of freedom quarter car model is used. A non-linear model is applied to the spring and damping of the suspension system. The tire is modeled as a hardening spring and the road excitation considered as a sinusoid wave. The results indicate that the system has a chaotic behavior in a specific excitation frequency interval which is identified by bifurcation diagrams. Comparing the results with those in the literature shows that using a nonlinear two-degree of freedom model reveals some behaviors that one degree of freedom model fails to exhibit.