

بررسی تحلیلی رفتار دینامیکی ورقهای هدفمند ویسکوالاستیک تحت بارهای عرضی با تغییرات زمانی دلخواه

محمد شریعیات^۱

دانشیار

رویا عاقب^۲

دانشجوی کارشناسی ارشد

در مقاله کنونی، رفتار دینامیکی ورق ویسکوالاستیک هدفمند روی تکیه‌گاه‌های ساده، تحت بار عرضی با تغییرات زمانی دلخواه، به روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل انتگرالی توارثی برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک مواد و تابع توانی برای توصیف تغییرات هدفمند ویژگیهای مواد در جهت عرضی استفاده شده‌اند. برای یافتن پاسخ معادله دیفرانسیلی-انتگرالی حاکم بر ورق، حل مکانی ناویر و حل زمانی رانگ-کوتا با تبدیل انتگرال‌های زمانی به شیوه دوزنقه‌ای استفاده شده است. اثر ویژگی‌های مختلف مواد و پارامترهای هندسی بر تاریخچه زمانی پاسخ ورق، به طور گسترده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که به دلیل ماهیت میراسازی مواد، در زمان‌های ابتدایی سختی ورق افزایش و در نتیجه، خیز دینامیکی بیشینه ورق کاهش و فرکانس طبیعی آن افزایش می‌یابد.

واژه‌های راهنما: مواد ویسکوالاستیک، مواد هدفمند، ورق مستطیلی، مدل توارثی انتگرالی، حل تحلیلی

۱- مقدمه

ویسکوالاستیسیت یا میرایی ساختاری، از ویژگی‌های ذاتی مواد می‌باشد. با توجه به توسعه تکنولوژی‌های تولید مواد ویسکوالاستیک هدفمند که به طور همزمان ویژگی‌های میراسازی ارتعاشات و پیوستگی تغییرات مولفه‌های تنش را دارا می‌باشند، بررسی رفتار سازه‌های ساخته شده با این مواد با مدل‌های دقیق‌تر ضروری به نظر می‌رسد. ویژگی‌های مکانیکی مواد یاد شده رفتاری متغیر با زمان و مکان دارند. در این حالت، ویژگی‌های مواد در راستای یک بعد به صورت تابعی پیوسته و تدریجی تغییر می‌کنند. ماهیت میراسازی این مواد، هم به افزایش سختی و هم به تغییر فرکانسهای طبیعی در اثر میرایی می‌انجامد. لذا به طور کلی، رفتار سازه مورد نظر که می‌تواند ورق نیز باشد، بهبود می‌یابد.

Reddy و Praveen [۱]، پاسخ ورق هدفمند سرامیکی- فلزی را به روش المان محدود و با در نظر گرفتن نیروی برشی عرضی، اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های بزرگ بررسی نمودند. Cederbaum و Aboudi [۲]،

^۱ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، قطب علمی سازه‌ها و سامانه‌های

هوشمند shariyat@kntu.ac.ir

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخ ورق‌های کامپوزیتی ویسکوالاستیک را تحت بار با تغییرات زمانی پله‌ای مورد بررسی قرار دادند. آنها از روابط بولتزمن^۱ و سری فوریه برای یافتن پاسخ فرکانسی استفاده کردند. پاسخ دینامیکی و شبه دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک با استفاده از نظریه تبدیل لاپلاس و با روش اجزاء محدود توسط Chen [۳] بررسی شد. Aköz و Ilyasov [۴] پایداری ورقهای ویسکوالاستیک تحت بار عرضی با تغییرات زمانی مثلثی را مورد بررسی قرار داده و معادلات ساختاری ویسکوالاستیک را با فرم بولتزمن-ولترا^۲ ارائه و معادلات حاصله را به شیوه تبدیل لاپلاس حل نمودند.

برخی از پژوهشگران، نکات مرتبط با نحوه استفاده از تناظر الاستیک-ویسکوالاستیک در ورق‌های ویسکوالاستیک هدفمند تحت بار گسترده و نیروهای برشی درون صفحه‌ای را مورد کاوش قرار داده و ثابت نمودند که اصل تناظر مواد ویسکوالاستیک، ضمن آنکه تنها برای تغییرات سینوسی بار قابل استفاده است، برای نوع خاصی از مواد هدفمند که تابع وارهدگی آنها جدایش‌پذیر است، صادق است [۵-۸]. Abdoun و Azrar [۹]، پاسخ ورق ویسکوالاستیک تحت بارگذاری هارمونیک را به شیوه المان محدود بررسی نمودند. برای توصیف ویژگی‌های ویسکوالاستیک مواد، از ماتریس وارهدگی پیچیده‌ای که تابعی از فرکانس وارهدگی بود استفاده شد. پاسخ ضربه ورق ویسکوالاستیک بدون اصطکاک، توسط Assie و همکاران [۱۰ و ۱۱] به شیوه المان محدود به دست آمد. فرم معادلات حرکت به صورت انتگرالی حاصل گردید. در این زمینه، مدل ساده وارهدگی مواد غیر همگن استفاده شده و از مدل جامد ویسکوالاستیک خطی برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک بهره گرفته شد. همچنین، رفتار گذرای ورق‌های کامپوزیتی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری با تغییرات زمانی مثلثی توسط Assie و همکاران بررسی شد. آنها از مدل ریچارد برای توصیف خاصیت ویسکوالاستیک و از تئوری برشی مرتبه اول و روش اجزاء محدود برای یافتن معادلات حاکم استفاده کردند. حل زمانی با استفاده از روش نیومارک انجام پذیرفت [۱۲]. Altenbach و Eremeyev [۱۳ و ۱۴] رفتار خمشی ورق هدفمند ساخته شده از فوم‌های فلزی یا فوم‌های پلیمری ناهمگن ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند.

با توجه به تحقیقات صورت گرفته بر روی مواد هدفمند و مواد ویسکوالاستیک، جای تحلیل دینامیکی تحت بارهای با تغییرات زمانی دلخواه و تحلیل فرکانسی ورق ویسکوالاستیک هدفمند در حالت کلی خالی به نظر می‌رسد. کارهای صورت گرفته بر پایه استفاده از مدول مختلط^۳ انجام شده‌اند که این مورد تنها برای بارهای با تغییرات زمانی هارمونیک مناسب می‌باشد. در مقاله کنونی سعی شده است که پاسخی نیمه تحلیلی برای خمش و تغییرشکل دینامیکی ورق ویسکوالاستیک هدفمند تحت بار گسترده‌ی دینامیکی دلخواه ارائه شود. همچنین، از آنجا که در معادله حاکم بدست آمده، خیز، مشتقات زمانی آن و نیز انتگرال زمانی آن به طور هم‌زمان آشکار می‌شوند، روش عددی ویژه‌ای برای حل معادلات نهایی ارائه شده است. از آنجا که در مقاله کنونی، تاریخچه‌ای کلی برای بار در نظر گرفته شده است، فرمول‌بندی برای هر نوع تغییرات زمانی مناسب بوده و از فرم انتگرال کنولوشن برای حل مسائل استفاده شده است.

¹ Boltzman

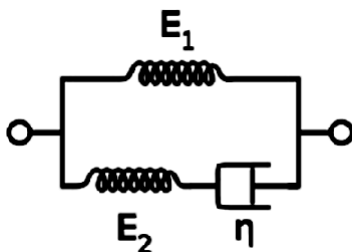
² Boltzman-Voltra

³ Complex modulus

۲- معادلات حاکم بر ورق ویسکوالاستیک هدفمند

۲-۱- توصیف تغییرات ویژگیهای مواد ویسکوالاستیک هدفمند

در مقاله کنونی، از مدل جامد استاندارد خطی شکل (۱) که پاسخی نزدیک به جامد ویسکوالاستیک داشته و هم در وارهدگی تنش^۱ و هم در خزش^۲ رفتاری مناسب از خود نشان می‌دهد [۱۵]، استفاده شده است.



شکل ۱- مدل جامد ویسکوالاستیک خطی استاندارد

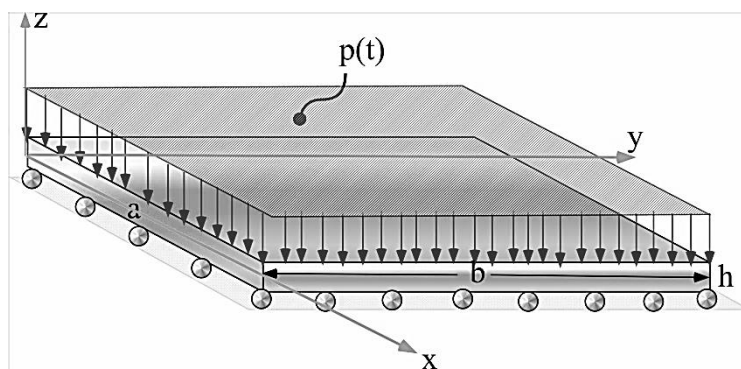
با توجه به اینکه در تئوری‌های ورق، جابجایی عرضی تمامی ذرات ضخامت یکسان فرض می‌شود، جرم معادل ورق را می‌توان جرم ظاهری آن پنداشت. تابع وارهدگی مدل ویسکوالاستیک، به فرم معادله (۱) است [۱۵]:

$$E(t) = E_1 + E_2 e^{-\alpha t} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، α عکس زمان وارهدگی است:

$$\alpha = \frac{1}{t_r} = \frac{E_2}{\eta} \quad (2)$$

که در آن، t_r زمان وارهدگی^۳ و η میزان میرایی (طبق شکل ۱) است. شرایط بارگذاری، ابعاد و دستگاه محورهای مختصات ورق دارای تکیه‌گاه‌های ساده مورد بررسی، در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲- پارامترهای هندسی و جهت محورهای دستگاه مختصات مورد استفاده

تغییرات هدفمند ویژگیهای مواد به کار رفته به صورت تابعی توانی اختیار شده‌اند:

¹ Relaxation

² Creep

³ Relaxation

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \quad (۳)$$

که در آن، E_m مدول الاستیسیته فلز و E_c مدول الاستیسیته سرامیک می‌باشد. به طور ضمنی فرض شده است که لایه بالایی ورق، سرامیکی و لایه زیرین، فلزی باشد. با توجه به اینکه هر دو ماده تشکیل دهنده ماده هدفمند دارای ویژگی ویسکوالاستیک می‌باشند، با فرض ماهیت ویسکوالاستیک مشابه برای مواد تشکیل دهنده، از ترکیب روابط (۲) و (۳) می‌توان نوشت:

$$E(z, t) = \left[(E_{1c} - E_{1m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_{1m} \right] + \left[(E_{2c} - E_{2m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_{2m} \right] e^{-\alpha t} \quad (۴)$$

فرض یاد شده، مانند فرض ضریب پواسون یکسان برای مواد تشکیل دهنده ماده هدفمند است. طبق رابطه (۱)،

$$E(z, 0) = E_1(z) + E_2(z), \quad E(z, \infty) = E_1(z) \quad (۵)$$

۲-۲- معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک هدفمند

برای جابه‌جایی‌های کوچک، روابط کرنش-جابجایی به گونه زیرند:

$$\varepsilon_{ij}(X_i, t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(X_i, t) + u_{j,i}(X_i, t)] \quad (۶)$$

که در آن، i و j شماره‌های مختصات و u_i جابه‌جایی در جهت مختص X_i است. ارتباط میان مولفه‌های تنش $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ و کرنش $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ (روابط بولتزمن-ولترا) به فرم رابطه (۶) است [۱۶]:

$$\sigma_i(z, t) = C_{ij}(z, t) \left[\varepsilon_j(t) - \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon_j(\tau) d\tau \right] = C_{ij}(z, t) \varepsilon_j(t) - \int_0^t \frac{dC_{ij}(z, \tau)}{d\tau} \varepsilon_j(\tau) d\tau \quad (۷)$$

که در آن، C_{ij} تنسور ضرائب الاستیک-ویسکوالاستیک است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z, t) &= \frac{E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y(x, y, z, t) &= \frac{E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy}(x, y, z, t) &= \frac{E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-\nu) (1-R^*) \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن R^* اپراتور انتگرالی است:

$$R^* \varphi = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (۹)$$

با توجه به فرضیات تئوری کلاسیک، میدان جابجایی را می‌توان به فرم رابطه (۱۰) ارائه نمود [۱۷]:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (10)$$

که در آن u_0 و v_0 جابه‌جایی صفحه مرجع (مانند لایه میانی) ورق است. چشم‌پوشی از مولفه جابه‌جایی درون صفحه‌ای، به ویژه زمانی که تکیه‌گاه ساده از نوع جابجا شونده است، مناسب نمی‌باشد؛ به ویژه در مسائلی مانند کمانش و ارتعاش ورق تحت نیروهای درون صفحه‌ای. زیرا در این حالتها، چشم‌پوشی از مولفه جابه‌جایی درون صفحه‌ای، موجب صفر شدن کار نیروی خارجی درون صفحه‌ای می‌گردد. برای حالتیکه تکیه‌گاه ساده آزادی حرکت درون صفحه‌ای ندارد، از آنجا که در تکیه‌گاهها و نقطه میانی ورق، مقدار مولفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای صفر است (لذا، کار نیروهای درون صفحه‌ای تکیه‌گاه صفر است)، می‌توان با تقریب خوبی، از مولفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای در سایر مقاطع ورق (دربرابر خیز) چشم‌پوشی نموده و از نتیجه ضمنی تئوری خمشی که بیان می‌دارد که در حین تغییر شکل ورق، هر نقطه به نقطه‌ای در زیر آن منتقل می‌شود، بهره جست.

بر این پایه، در حالتی که تغییر شکلها عمدتاً خمشی می‌باشند، از رابطه (۱۰) داریم:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

با جایگزینی رابطه (۱۱) در رابطه (۸)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z, t) &= \frac{zE(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y(x, y, z, t) &= \frac{zE(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy}(x, y, z, t) &= \frac{zE(z, 0)}{1-\nu^2} (1-\nu)(1-R^*) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

در نتیجه، روابط گشتاورها بر واحد طول، به فرم رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y, z, t) z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) dz \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(x, y, z, t) z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-R^*) \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right) dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y, z, t) z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z, 0)}{1-\nu^2} (1-\nu)(1-R^*) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} dz \end{aligned} \quad (13)$$

همچنین، مشابه با رابطه (۳)، برای تغییرات چگالی جرمی مخلوط هدفمند در راستای عرضی داریم:

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \quad (14)$$

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \right] dz = \frac{\rho_c - \rho_m}{n+1} + \rho_m h$$

فرض عدم تغییرات ρ با زمان، متاثر از این فرض تئوریهای تک لایه معادل است که مقدار خیز $w(x, y, t)$ در تمام ضخامت یکسان است. به بیان دیگر، ورق در جهت ضخامت تراکم‌ناپذیر و فاصله عرضی نقاط، ثابت است. در نتیجه، با توجه به اینکه تغییر حجمی در جهت عرض روی نمی‌دهد: $\rho V = \rho_0 V_0$ ، که در آن، V_0 و ρ_0 به ترتیب، حجم و چگالی جرمی اولیه می‌باشند، چگالی جرمی با زمان تغییر نمی‌کند. از سوی دیگر، مدول الاستیسیته متاثر از میزان میرایی سازه‌ای مواد است که تغییرات آن با زمان در شکل (۱) مدلسازی شده‌اند. در نتیجه، سختی مقطع ورق با زمان تغییر خواهد نمود. بر پایه دو موضوع بیان شده، ویژگیهای ویسکوالاستیک مواد، ممان اینرسی خمشی مقطع و نه ممان اینرسی جرمی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. از قانون دوم نیوتن برای المانی از ورق، می‌توان نوشت [۱۷]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y, t) = -I_0 \ddot{w}(t) \quad (15)$$

همچنین با توجه به روابط میان روابط نیروهای برشی بر واحد طول Q_x و Q_y با مقادیر گشتاور بر واحد طول مقطع:

$$Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (16)$$

با جایگزینی رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) داریم:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + I_0 \ddot{w}(x, y, t) = -p(x, y, t) \quad (17)$$

در نتیجه، با جایگزینی روابط (۱۳) در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$\left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z, 0)}{1 - \nu^2} (1 - R^*) dz \right] \nabla^4 w(x, y, t) - p(x, y, t) + I_0 \ddot{w}(x, y, t) = 0 \quad (18)$$

معادله (۱۸) یک معادله بولتزمن-ولترا دیفرانسیلی-انتگرالی برحسب زمان و مکان است. لذا برخلاف معادلات حاکم بر حرکت معمولی، علاوه بر مشتقات زمانی، شامل انتگرال زمانی نیز می‌باشد. لذا حل آن به روشهای معمول، امکان‌پذیر نمی‌باشد. در بخش آینده، روش حل این معادله به روش نیمه تحلیلی، ارائه شده است.

۳- روش حل معادله حاکم

۳-۱- پاسخ ناوبر^۱ برای وابستگی مکانی

با توجه به اینکه لبه‌های ورق روی تکیه‌گاه ساده قرار دارند، حل مسئله خمش با استفاده از کلاسیک حل ناوبر، با بکارگیری سریهای فوریه زیر برای بار و خیز صورت می‌پذیرد [۱۷]:

¹ Navier

$$p(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (19)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

پاسخ خیز ارائه شده در رابطه (۱۹)، شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را برآورده می‌سازد:

$$\begin{aligned} w(t) = 0 \quad \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, a) \\ w(t) = 0 \quad \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} = 0 \quad (y = 0, b) \end{aligned} \quad (20)$$

از آنجا که طبق رابطه (۹)، رابطه (۲۱) برقرار است:

$$R^*(w_{mn}) = \alpha \frac{E(z, 0) - E(z, \infty)}{E(z, 0)} \int_0^t w_{mn}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \quad (21)$$

ضرایب $w_{mn}(t)$ باید به گونه‌ای باشند که معادله (۱۸) برقرار باشد. با جایگزینی رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸) داریم:

$$[ASw_{mn}(t) - BS \int_0^t w_{mn}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau] - p_{mn}(t) + I_0 \ddot{w}_{mn}(t) = 0 \quad (22)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [(E_{1c} + E_{2c}) - (E_{1m} + E_{2m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + (E_{1m} + E_{2m})] z^2 dz \\ B &= \frac{\alpha}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [(E_{2c} - E_{2m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_{2m}] z^2 dz, \quad S = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

برای بار گسترده یکنواخت:

$$\begin{aligned} p_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y, t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy \\ p(x, y, t) = p_0 &\Rightarrow p_{mn}(t) = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] \end{aligned} \quad (24)$$

۲-۳- روش عددی دوزنقه‌ای^۱ برای محاسبه انتگرال زمانی

با انتخاب پاسخ ناویر، مشتقات مکانی خیز به عباراتی جبری تبدیل شدند. از آنجا که هدف نهایی از بکارگیری روشهای نیمه تحلیلی و گسسته‌سازی، تبدیل کلیه مشتقات به عبارات جبری است، در گام بعدی، مشتقات و انتگرالهای زمانی آشکار شده در رابطه (۲۲) را به عباراتی جبری تبدیل می‌کنیم. ابتدا انتگرال زمانی رابطه (۲۲) را به روش عددی دوزنقه‌ای، جایگزین می‌کنیم [۱۸]:

$$\int_0^t w_{mn}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\Delta t}{2} \left[w_{mn}(t_0) e^{-\alpha(t_N-t_0)} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} w_{mn}(t_i) e^{-\alpha(t_N-t_i)} + w_{mn}(t_N) \right] \quad (25)$$

^۱ Trapezoidal

با جایگزینی معادله (۲۵) در معادله (۲۲) خواهیم داشت:

$$ASw_{mn}(t_N) - \frac{\Delta t}{2}BSw_{mn}(t_N) + I_0\rho\ddot{w}_{mn}(t_N) = p_{mn} + \frac{\Delta t}{2}BSw_{mn}(t_0)e^{-\alpha(t_N-t_0)} + BS\sum_{i=1}^{t_N-1}[w_{mn}(t_i)e^{-\alpha(t_N-t_i)}]\Delta t \quad (26)$$

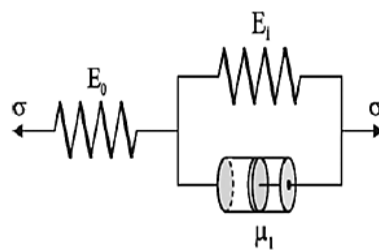
معادله (۲۶)، یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان است که می‌توان آن را به شیوه عددی حل نمود. نکته قابل توجه آن است که تعداد عبارات انتگرال‌گیری (N) در آخرین عبارت سوم دوم رابطه (۲۶) و نیز عبارات طرف اول رابطه یاد شده، متغیرند؛ به گونه‌ای که با پشت سر گذاشتن هر مرحله زمانی، یک عبارت به آخرین عبارت (جمع) سوم سمت دوم رابطه (۲۶)، بر پایه نتایج مرحله زمانی قبلی، افزوده می‌گردد. مقدار زمانی حل عددی (Δt) باید کوچکتر از پرپود طبیعی اول پاسخ خیز باشد تا بتوان نوسانات ورق را با دقت خوبی مشاهده و دنبال نمود.

در تحقیق کنونی، این مقدار، از مرتبه $\Delta t = 10^{-5} s$ اختیار شده است. همچنین، معادله مرتبه دو (۲۶)، با روش رانگ کوتای مرتبه دوم حل شده است.

۴- نتایج

۴-۱- صحنه‌گذاری نتایج

تحلیل ورق ویسکوالاستیک هدفمند، تاکنون انجام نشده است. تحلیل‌های صورت پذیرفته برای ورق ویسکوالاستیک، از جمله تحلیل‌های ارائه شده در سالهای اخیر، عمدتاً در ارتباط با ارتعاش آزاد یا ورقهای تحت بار هارمونیک بوده‌اند. به همین دلیل، صحنه‌گذاری نتایج تحلیل اجباری بر پایه مقایسه با نتایج Wang و Tsai [۱۹] انجام پذیرفته است. نتایج مرجع [۱۹]، بر پایه فرمولبندی اجزاء محدود مبتنی بر تئوری خمشی مرتبه اول برشی و مدل ویسکوالاستیک جامد سه پارامتری نشان داده شده در شکل (۳) ارائه شده‌اند.

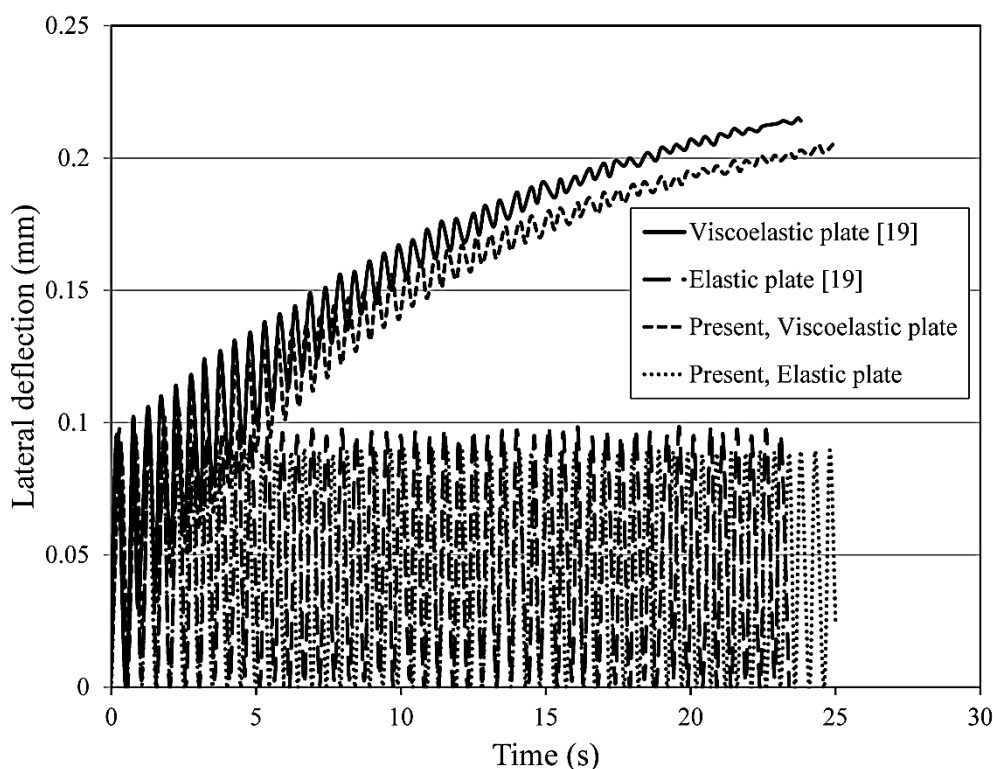


شکل ۳- جامد سه پارامتری

در این زمینه، یک ورق مستطیلی با ابعاد $(10 \times 10) m$ و ضخامت $1 m$ دارای تکیه‌گاههای ساده با مشخصات زیر، تحت بار یکنواخت ناگهانی با تغییرات زمانی پله، به شدت $p = 10 N/m^2$ قرار داده شده و تاریخچه‌های زمانی میزان جابه‌جایی مرکز ورق، برای مختلف برای ورقهای الاستیک و ویسکوالاستیک در شکل ۴ مقایسه شده‌اند.

$$E_0 = 9.8 \times 10^7 N/m^2, \quad E_1 = 2.45 \times 10^7 N/m^2, \quad \rho = 2200 kg/m^3, \quad \nu = 0.35, \quad \eta = 2.744 \times 10^8 Ns/m^2$$

مقایسه نتایج کنونی با نتایج مرجع [۱۱] در شکل (۴)، بیانگر سازگاری نتایج فرمول‌بندی و روش حل عددی کنونی با نتایج مرجع [۱۱] می‌باشد. از آنجا که بار دینامیکی وارده دارای تغییرات پله‌ای با زمان است، خیز بیشینه حاصله، دو برابر خیز استاتیکی بوده و نوسان پیرامون خیز استاتیکی انجام می‌شود. در ورق ویسکوالاستیک، به دلیل میرایی ساختاری حاصله، نوسانات به تدریج با زمان میرا می‌شوند ولی چون، ورودی ارتعاش، اجباری است، بخش به جای مانده از انرژی بار که همچنان به ورق انتقال می‌یابد، صرف ایجاد خیز استاتیکی می‌شود تا سرانجام، پس از میرا شدن ارتعاش، خیز کاملاً استاتیکی حاصل گردد. بدیهی است که در لحظه ابتدایی، به دلیل صلب شدن میراساز در مدل نشان داده شده در شکل (۳)، سفتی ورق متأثر از E_0 می‌باشد و در حالت پایدار، سفتی مجموعه متناسب با $(1/E_0 + 1/E_1)^{-1} = E_0 E_1 / (E_0 + E_1)$ است. به همین دلیل، خیز ورق مرتباً با زمان افزایش می‌یابد.



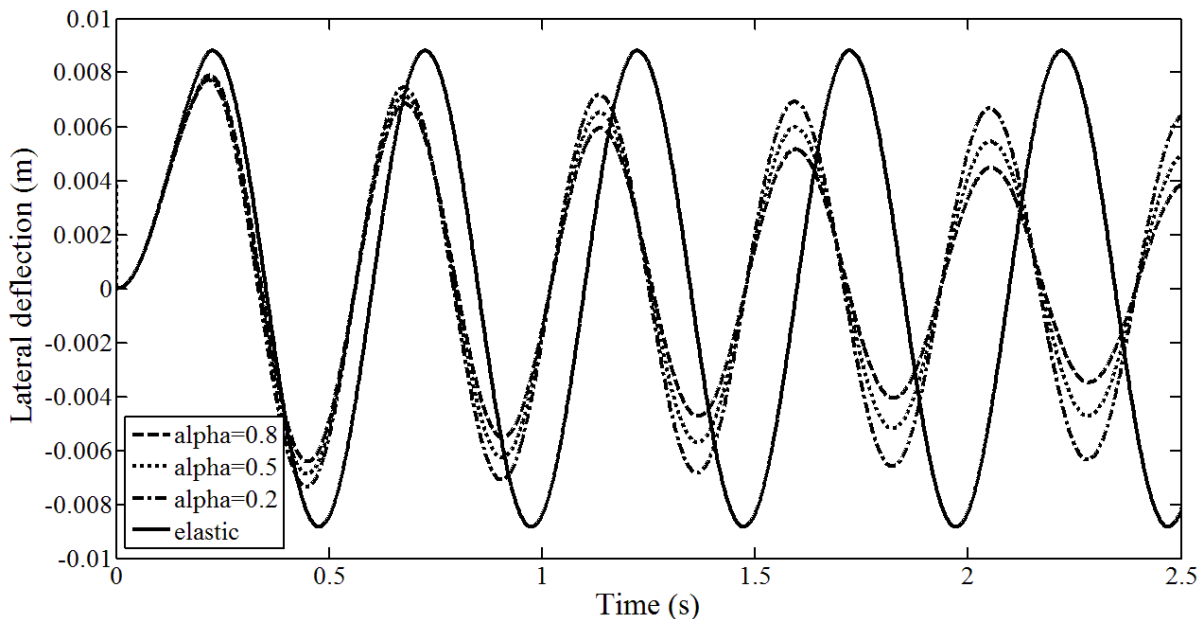
شکل ۴- مقایسه تاریخچه زمانی جابه‌جایی ورق‌های الاستیک و ویسکوالاستیک با مرجع [۱۹].

۴-۲- اثر ویژگی‌های ویسکوالاستیک بر رفتار ارتعاشی ورق همسانگرد

یک ورق مستطیلی ویسکوالاستیک همسانگرد با مشخصات هندسی و مواد داده شده در مثال قبل، تحت بار ضربه‌ای مشخص شده در رابطه (۲۷) قرار داده شده و اثر پارامترهای ویسکوالاستیک بر میزان کاهش دامنه ارتعاش گذرا بررسی شده است.

$$\begin{cases} p = 1 \text{ kN} / \text{m}^2, & t_0 \leq 0.2 \text{ s} \\ p = 0 & , \quad t_0 \geq 0.2 \text{ s} \end{cases} \quad (27)$$

همانگونه که پیشتر بیان گردید، از روش شتاب متوسط ثابت (رانگ-کوتا) برای حل زمانی معادله حاکم نهایی، با به‌هنگام نمودن متوالی عبارات معادله حاکم، استفاده شده است. ضرایب پواسون الاستیک و ویسکوالاستیک، به ترتیب، $0/3$ و $0/48$ اختیار شده‌اند. برخلاف مثال قبل، از مدل نشان داده شده در شکل (۱) استفاده شده و اثر پارامتر α از رابطه (۱) (عکس زمان وارهیدگی) بر تاریخچه تغییرات خیز نقطه میانی ورق در شکل (۵) و میزان تاثیر این پارامتر در ازای $\alpha=0/7$ بر کاهش دامنه ارتعاش و فرکانس طبیعی اصلی ورق، در جدول (۱) نشان داده شده است.



شکل ۵- بررسی اثر پارامتر میرایی بر تاریخچه تغییرات خیز نقطه میانی ورق ویسکوالاستیک

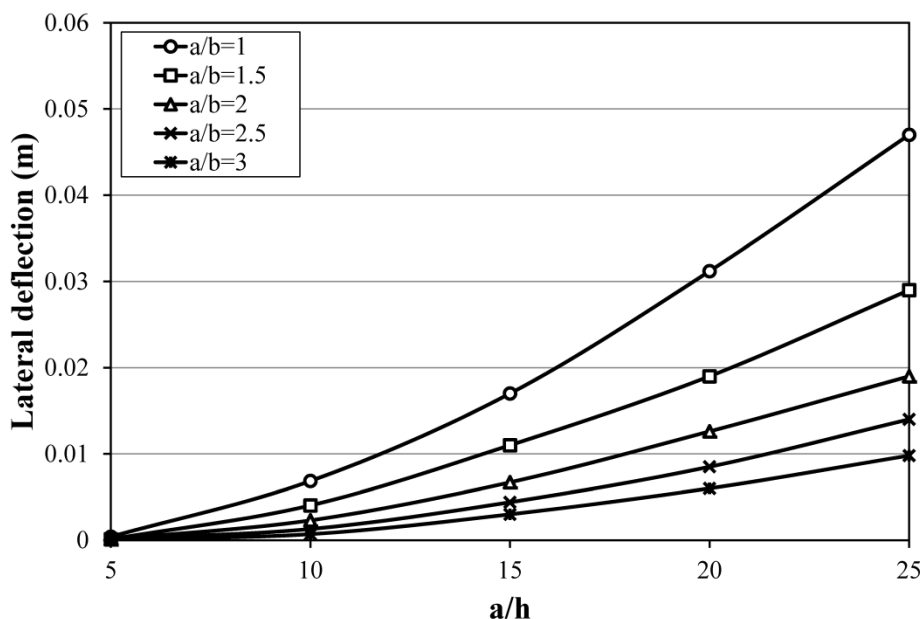
جدول ۱- میزان تاثیر پارامتر میرایی ($\alpha=0/7$) بر کاهش دامنه ارتعاش و فرکانس طبیعی اصلی.

$w_{\max}(t=25s) m$		درصد کاهش خیز	$\omega_1 (Hz)$		درصد افزایش فرکانس
الاستیک	ویسکوالاستیک		الاستیک	ویسکوالاستیک	
$5/4 e-3$	$4/78 e-3$	٪۱۱	۱۲/۵۲	۱۳/۶	٪۹

با توجه به نتایج شکل (۵) و جدول (۱) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر میرایی، ورق سفت‌تر شده و نرخ میرایی دامنه ارتعاش نیز کاهش می‌یابد. با توجه به افزایش سختی حاصله در زمانهای اولیه پاسخ، فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک بزرگتر و دامنه ارتعاش آن کمتر است. پس از گذشت زمانی مشخص، دامنه به صورت مجانبی کاهش می‌یابد.

اثر ضخامت بر خیز بیشینه نقطه میانی ورق، تحت بار ضربه، برای نسبت‌های مختلف منظری (a/b) در شکل (۶) نشان داده شده است. از شکل (۶) می‌توان نتیجه گرفت که افزایش خیز ورق در اثر کاهش ضخامت آن، با افزایش نسبت منظری ورق (افزایش طول ورق) بیشتر می‌شود. لذا، با افزایش نسبت منظری،

فرکانس ارتعاشی اصلی بزرگتر می‌شود. نکته آخر تا حدی بدیهی به نظر می‌رسد. زیرا شکل‌گیری مودهای ارتعاشی در ورق مربعی، به دلیل تقارن، ساده‌تر صورت می‌پذیرد.



شکل ۶- بررسی اثر نسبت ضخامت ورق ویسکوالاستیک بر خیز نقطه میانی ورق ($\alpha=0/7$)
به ازای نسبت‌های منظری مختلف

۳-۴- رفتار گذرای ورق ویسکوالاستیک هدفمند

۳-۴-۱- بررسی اثر نسبت ضرایب سفتی بر خیز و فرکانس طبیعی اصلی

برای استخراج نتایج و انجام مطالعات پارامتری، از یک ورق ویسکوالاستیک هدفمند Aluminum/Alumina (Al/Al_2O_3) مربعی با نسبت ضخامت به طول ضلع $a/h=10$ استفاده شده است که ویژگیهای مواد آن به گونه زیرند [۲۰]:

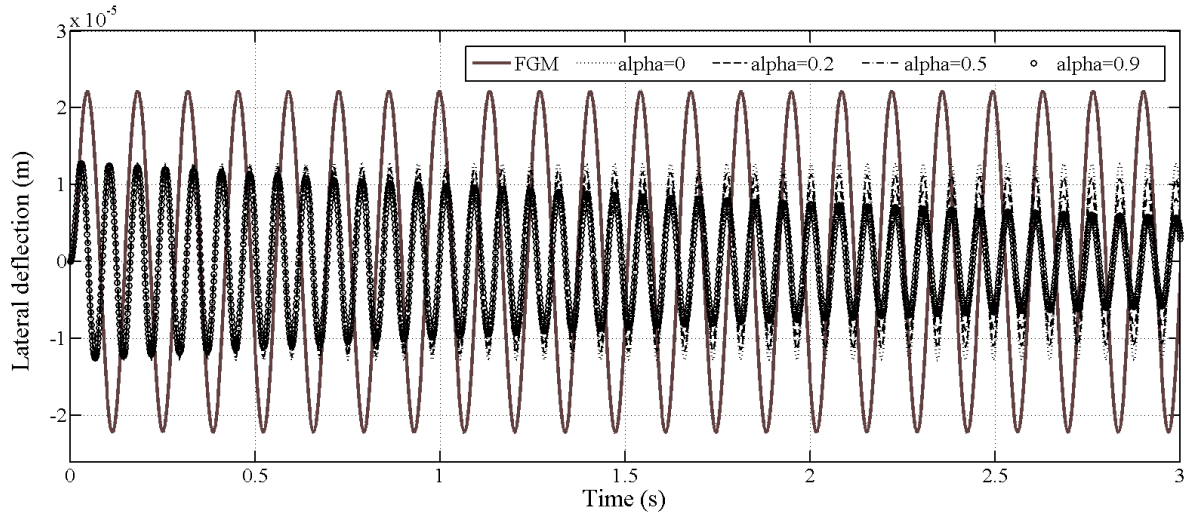
$$\text{Aluminium: } E = 70GPa, \quad \rho = 2070kg / m^3$$

$$\text{Alumina: } E = 380GPa, \quad \rho = 3800kg / m^3$$

ضریب پواسون مواد الاستیک $0/3$ ، ضریب پواسون مواد ویسکوالاستیک، $0/48$ و توان کسر حجمی، $n=2$ در نظر گرفته شده است. از آنجا که طی فرایندهای ویژه‌ای، می‌توان تمامی پارامترهای مدل نشان داده شده در شکل (۷) را تغییر داد، برای بررسی اثر پارامترهای یاد شده، پاسخ ورق ویسکوالاستیک آلومینیوم تحت بار ضربه زیر بررسی شد:

$$\begin{cases} p = 1kN / m^2, & t_0 \leq 0.02s \\ p = 0 & , \quad t_0 \geq 0.02s \end{cases} \quad (28)$$

اثر ضریب میرایی α بر پاسخ گذرای ارتعاشی ورق هدفمند، برای مقادیر مختلف پارامتر یاد شده بررسی گردید. نمونه‌ای از نتایج در شکل (۷) نشان داده شده است.



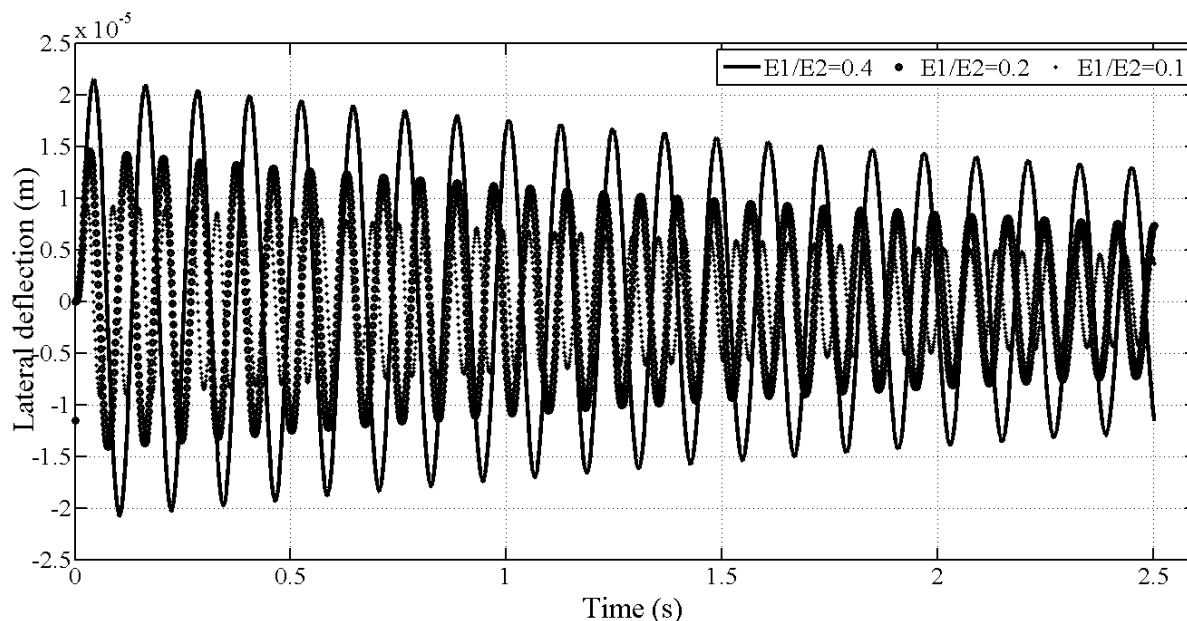
شکل ۷- بررسی اثر ضریب میرایی α بر خیز ورق ویسکوالاستیک هدفمند

همانگونه که انتظار می‌رفت، با افزایش α زمان وارهدگی کاهش می‌یابد (شکل ۷). در نتیجه، با توجه به تعریف α ، هر چه E_1 کوچکتر باشد، خیز ورق بزرگتر و از سوی دیگر، چون مدل استفاده شده مدل جامد ویسکوالاستیک خطی است، برای حذف نوسانات ورق می‌توان از میراکننده‌هایی با ثابت میرایی کوچکتر نمود. در گام بعدی، برای تعیین تابع وارهدگی از بررسی پاسخهای متناظر با نسبت‌های مختلف E_1/E_2 برای ورقهای ویسکوالاستیک آلومینیوم و آلومینا استفاده شد. تاریخچه زمانی تغییرات خیز برای نسبت‌های مختلف E_2 (توابع وارهدگی مختلف) در شکل (۸) رسم شده است.

روند مشابهی نیز برای ورق آلومینا حاصل گردید.

از آنجا که ایجاد نسبت $E_1/E_2=0/4$ عملی‌تر است [۱۹]، فرم توابع وارهدگی مورد استفاده، در ابتدا به فرم زیر در نظر گرفته شده و سپس در مسیر تحلیل پارامتری مسئله، با تغییر دادن پارامترهای مختلف آن، تاثیرات حاصله بررسی شده‌اند:

$$E(z,t) = \left[(380 \times 10^9 - 70 \times 10^9) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + 70 \times 10^9 \right] + \left[(570 \times 10^9 - 105 \times 10^9) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + 105 \times 10^9 \right] e^{-0.7t} \quad (28)$$

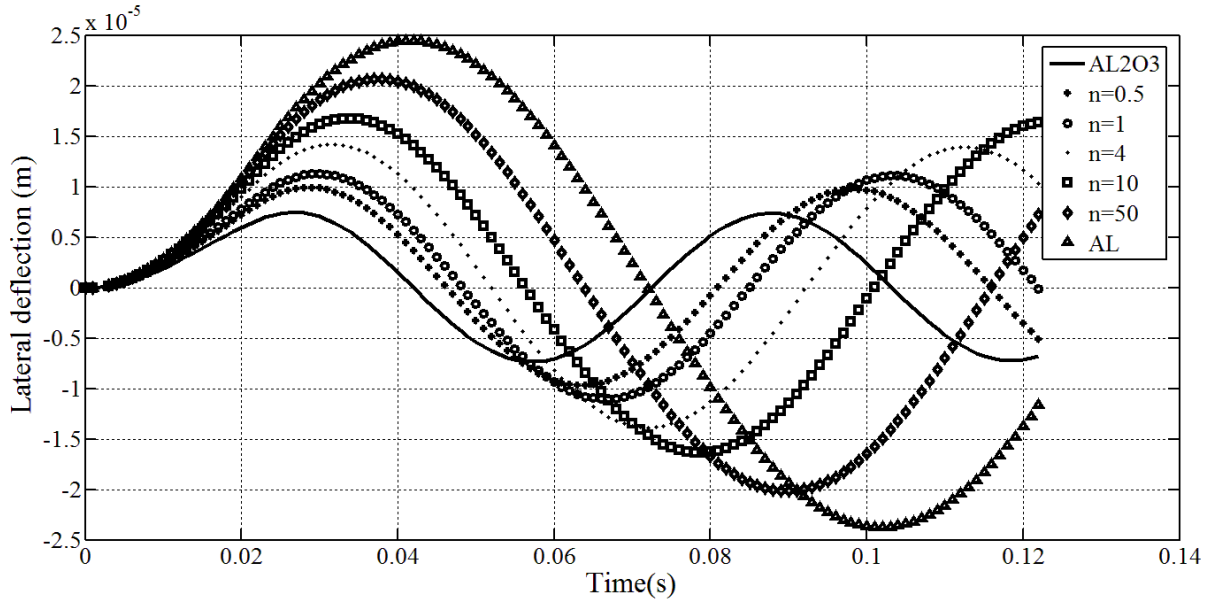


شکل ۸- بررسی اثر نسبت‌های مختلف E_1/E_2 بر پاسخ ورق AL ویسکوالاستیک

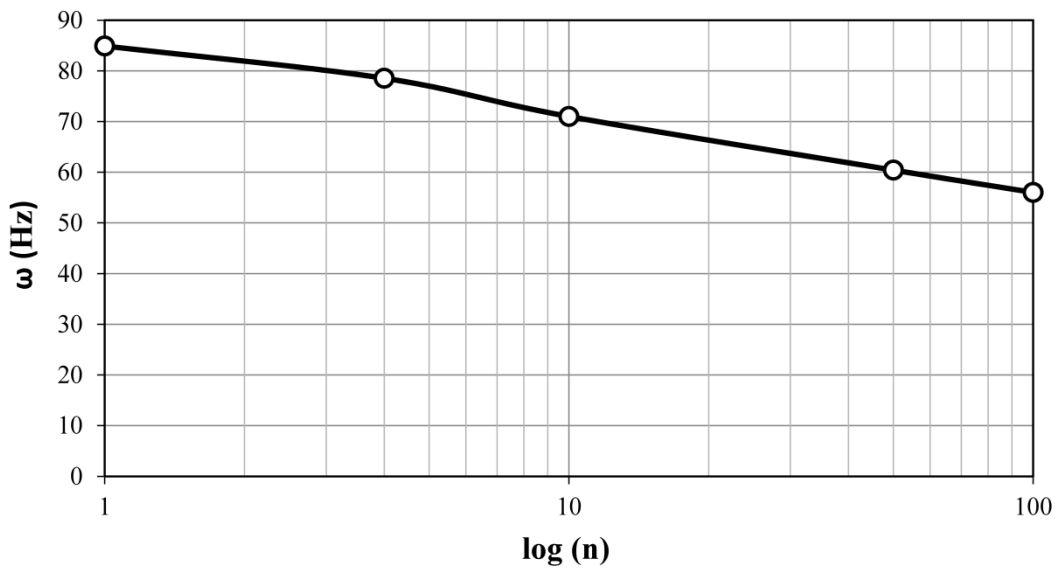
۴-۳-۲- بررسی میزان تاثیر توان تغییرات کسر حجمی مواد

ورق مربعی با مشخصات تعریف شده در بخش گذشته، تحت بار ضربه مطابق رابطه (۲۸) قرار داده شده و اثر توان نسبت حجمی بر تاریخچه تغییرات خیز نقطه میانی ورق و فرکانس طبیعی اصلی، به ترتیب در شکل-های (۹) و (۱۰) نشان داده شده است.

از شکل‌های (۹) و (۱۰) آشکار می‌گردد که نمودار تغییرات خیز و فرکانسهای طبیعی ورقهای هدفمند ویسکوالاستیک، بین موارد مشابه از ورقهای سرامیکی و آلومینیومی هدفمند قرار دارند. همانگونه که رابطه (۳) نشان می‌دهد، با افزایش توان کسر حجمی، مقدار میانگین مواد فلزی مقطع افزایش یافته و ورق نرمتر می‌شود. از سوی دیگر، چون با کاهش توان n ، ضریب الاستیسیته بزرگتر می‌شود اثر میرایی ویسکوالاستیسیته در زمان کوتاهتری آشکار می‌شود. همچنین، با افزایش توان n ، تعداد نوسانات لازم برای میرایی کامل بیشتر می‌شود و این به معنای افزایش زمان وارهدگی ورق است. بر پایه شکل (۱۰)، کاهش فرکانس طبیعی اصلی تقریباً با لگاریتم n متناسب است.



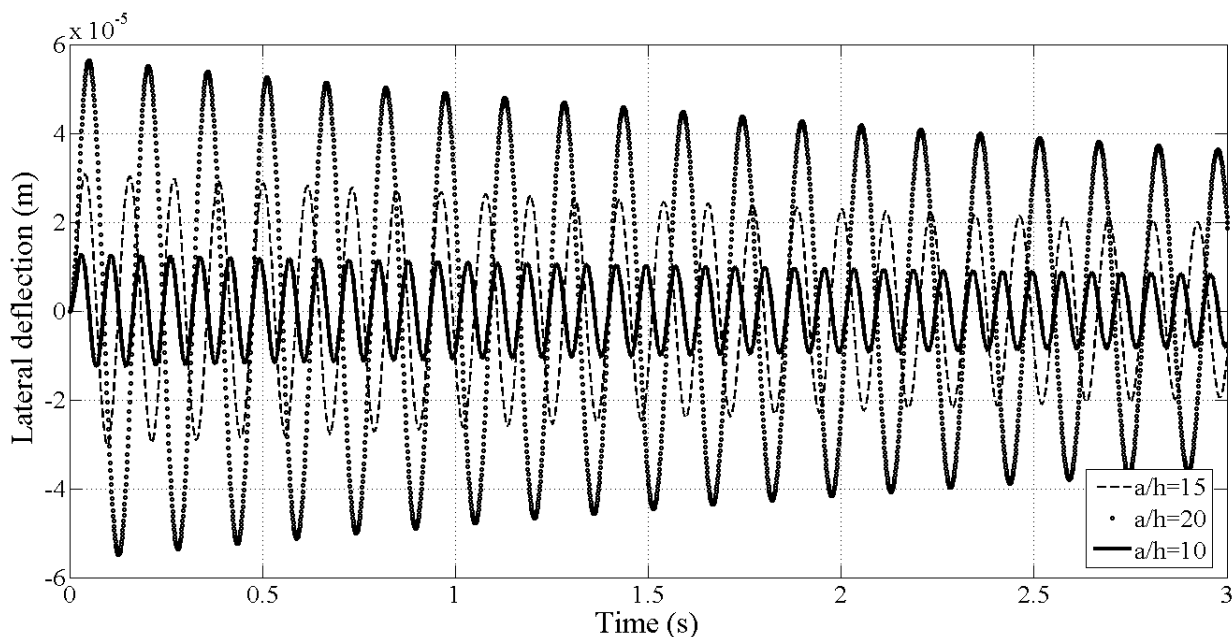
شکل ۹- بررسی تأثیر توان کسر حجمی (n) بر خیز نقطه میانی ورق ویسکوالاستیک هدفمند تحت ضربه



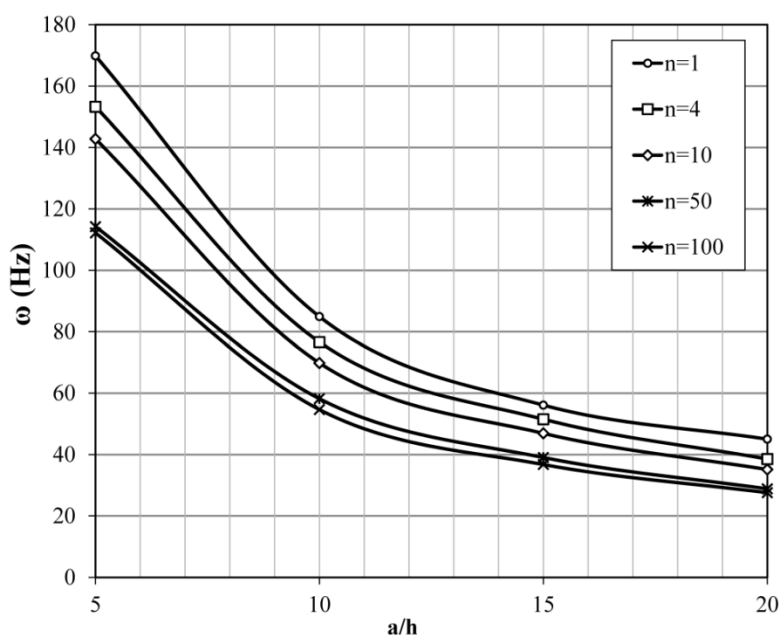
شکل ۱۰- بررسی تأثیر توان کسر حجمی (n) بر فرکانس ارتعاشی ورق اصلی ویسکوالاستیک هدفمند

۴-۳-۳- اثر ضخامت

شرایط مسئله مانند مثال قبلی است. اثر تغییر ضخامت بر تاریخچه تغییرات خیز نقطه میانی ورق و فرکانس طبیعی اصلی آن، به ترتیب، در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است ($n=2$, $\alpha=0.7$).



شکل ۱۱- بررسی اثر ضخامت بر خیز ورق ویسکوالاستیک هدفمند تحت بار ضربه

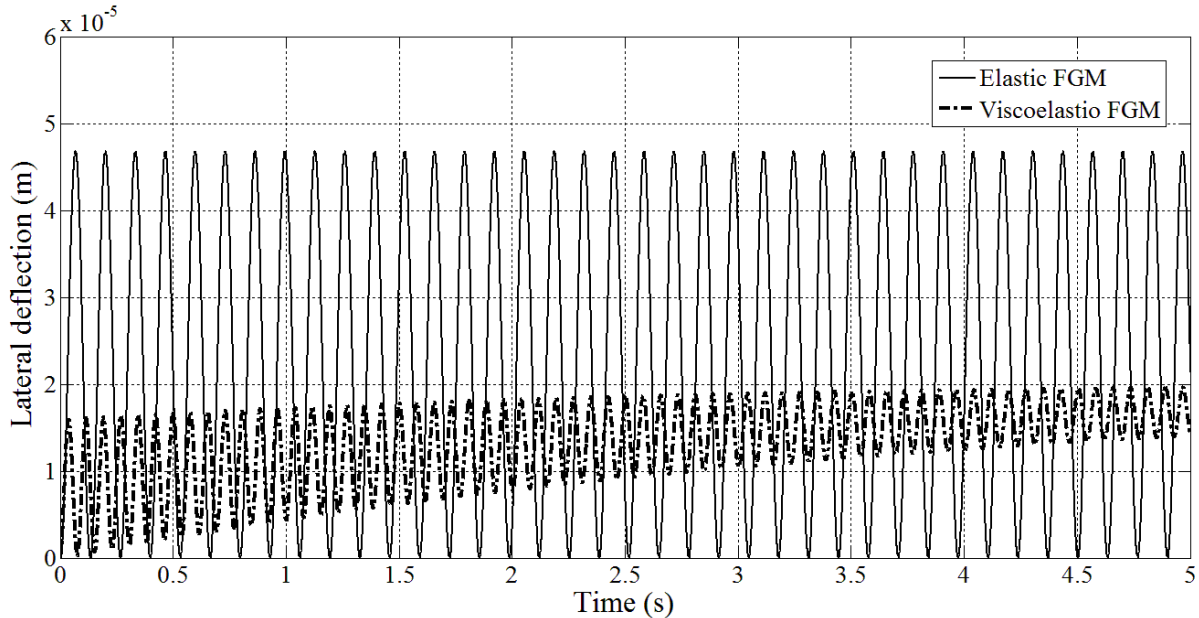


شکل ۱۲- بررسی اثر ضخامت بر فرکانس اصلی ارتعاش خیز ورق مربعی ویسکوالاستیک هدفمند

از نتایج منعکس شده در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضخامت، میرایی ارتعاشات ورق با نرخ کمتری انجام می‌شود. زیرا افزایش ضخامت ورق، باعث افزایش انرژی کرنشی ذخیره شده در ورق که با توان سوم ضخامت مرتبط است، می‌شود.

۵-۴- پاسخ ورق ویسکوالاستیک هدفمند به بار پله

بار پله از آن جهت که در برگیرنده هارمونیک‌های مختلف و نیز شامل پاسخهای گذرا است، یک ورودی استاندارد شمرده می‌شود. برای بررسی پارامتری ورق ویسکوالاستیک هدفمند، ورق مربعی ($n=2$, $\alpha=0.7$)، $a/h=10$ ، تحت بار دینامیکی یاد شده قرار داده شده است. اثر ویسکوالاستیسیته بر تاریخچه زمانی تغییرات خیز نقطه میانی ورق، در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

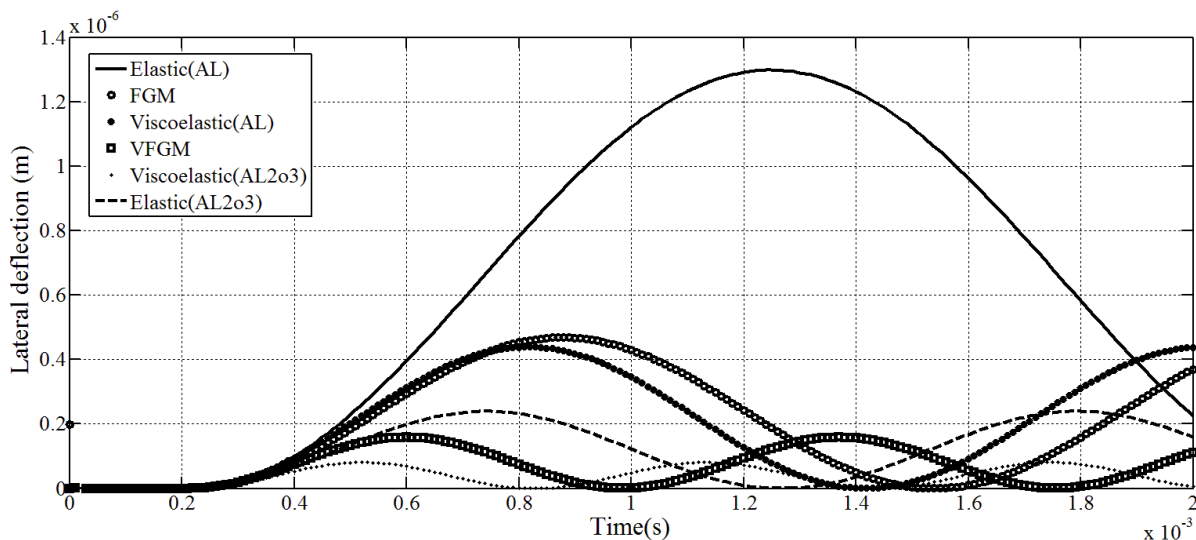


شکل ۱۳- اثر ویسکوالاستیسیته بر تاریخچه زمانی خیز نقطه میانی ورق هدفمند ویسکوالاستیک ($\alpha=0.7$) تحت بار پله (Al/Al_2O_3)

از تاریخچه تغییرات خیز نشان داده شده در شکل (۱۳) آشکار است که با توجه به اینکه تحریک اجباری است، در اثر میرایی ناشی از رفتار ویسکوالاستیک، بخش گذرای پاسخ به مرور زمان میرا می‌شود تا اینکه پاسخ سرانجام به طور مجانبی به پاسخ استاتیکی میل نماید. بدیهی است که در این حالت، به دلیل وجود تحریک اجباری و وجود مستهلک کننده، انرژی اختصاص داده شده به دامنه نوسان با گذشت کاهش یافته ولی انرژی پتانسیل ذخیره شده (استاتیکی) افزایش می‌یابد. لذا با گذشت زمان تنش میانگین نوسانات افزایش یافته و خیز بزرگتری با دامنه نوسانات کوچکتر اتفاق می‌افتد. افزایش دامنه حاصله، عمدتاً بدلیل کم شدن اثر E_2 (طبق رابطه ۱) با گذشت زمان و در نتیجه، کاهش سفتی ورق می‌باشد.

برای بررسی اثر پارامترها در فرکانسهای طبیعی بزرگتر، در در گام بعدی، طول و ضخامت ورق مربعی، به ترتیب، ۱ و ۰/۱ متر در نظر گرفته شدند. ورق تحت بار با تغییرات زمانی پله‌ای قرار داده شده و تاریخچه خیز آن در شکل (۱۴) نشان داده شده است. اثر تغییرات هدفمند ویژگیهای مواد و ویسکوالاستیسیته بر فرکانس طبیعی اول ورق، در جدول (۲) بررسی شده است. از نتایج حاصله آشکار می‌شود که خیز بیشینه در ورق ویسکوالاستیک هدفمند کمتر از خیز ورقهای الاستیک و هدفمند است. همچنین، فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک هدفمند کمتر از ورقهای دیگر (بجز ورق سرامیکی ویسکوالاستیک) است (نمودار آن،

فشرده تر است). برای داده‌های کنونی، منحنی ارتعاش ورقهای هدفمند و ویسکوالاستیک هدفمند بین منحنی‌های مربوط به ورقهای سرامیکی و فلزی قرار دارد.



شکل ۱۴- بررسی خیز نقطه میانی ورق الاستیک، هدفمند و هدفمند ویسکوالاستیک

جدول ۱- مقادیر خیز نقطه میانی ورقهای الاستیک، هدفمند و هدفمند ویسکوالاستیک

$\omega (Hz)$	$w_{max} (m) \times 10^{-6}$	نوع ورق
۳۰۵۰	۱/۲۷	الاستیک (Al)
۶۱۶۰	۰/۲۴۰	الاستیک (Al_2O_3)
۳۱۸۹	۱/۱۲	FGM
۵۱۰۸	۰/۴۴۸	ویسکوالاستیک (Al)
۱۰۱۳۴	۰/۰۹	ویسکوالاستیک (Al_2O_3)
۵۴۶۳	۰/۳۹۲	ورق ویسکوالاستیک هدفمند

اثر توان کسر حجمی مواد (n)، بر فرکانس طبیعی و خیز بیشینه ورقهای هدفمند و ویسکو الاستیک هدفمند، جهت ارزیابی میزان تاثیر رفتار ویسکو الاستیک مواد، در جدول (۳) آورده شده است. بر پایه نتایج ارائه شده در جدول (۳) می‌توان نتیجه گرفت که چون با افزایش n ، درصد حجمی میانگین مواد فلزی مقطع افزایش می‌یابد، خیز هر دو ورق هدفمند و هدفمند ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد ولی خیز بیشینه در ورق هدفمند ویسکوالاستیک به دلیل داشتن میرایی و سفتی بزرگتر، کمتر است. همچنین، با افزایش n ، پیوند نوسان در هر دو حالت ویسکوالاستیک هدفمند و هدفمند افزایش می‌یابد. با این وجود، پیوند نوسان در ازای یک n مشخص، برای ورق ویسکوالاستیک هدفمند کوچکتر است در نتیجه فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک هدفمند از فرکانس طبیعی ورق هدفمند بزرگتر است.

جدول ۳- اثر توان کسر حجمی مواد (n)، بر فرکانس طبیعی و خیز بیشینه ورقهای هدفمند (Al/Al_2O_3) و ویسکوالاستیک هدفمند ($\alpha=0.7$ و $a/h=10$).

n	w_{max} (m)		ω (Hz)	
	ورق هدفمند	ورق هدفمند ویسکوالاستیک	ورق هدفمند	ورق هدفمند ویسکوالاستیک
۰	$2/3416e-7$	$2/0.220e-7$	۶۲۸۳/۱۸	۶۴۷۷/۵۱
۱	$3/9464e-7$	$3/415e-7$	۴۸۳۳/۲۲	۵۴۱۶/۵۴
۴	$5/3003e-7$	$4/589e-7$	۴۴۸۷/۹۹	۴۹۲۴/۷۸
۱۰	$6/7900e-7$	$5/879e-7$	۴۱۸۸/۷۹	۴۴۲۴/۷۸
۵۰	$1/0.214e-6$	$8/846e-7$	۳۳۰۶/۹۴	۳۸۵۴/۷۱
۱۰۰	$1/1255e-6$	$9/746e-7$	۳۱۴۱/۵۹	۳۵۱۰/۱۶
∞	$1/2678e-6$	$1/0.98e-6$	۲۹۹۱/۹۹	۳۲۷۲/۴۹

۳- نتیجه گیری

در مقاله کنونی، رفتار ارتعاشی ورق هدفمند ویسکوالاستیک به روشی نیمه تحلیلی بررسی گردید. بر خلاف مدل‌های بکارگرفته شده در تحلیل ارتعاشی ورق که بر استفاده از مدول الاستیسیته مختلط مبتنی بوده و تنها برای ورودی‌های هارمونیک مناسب می‌باشند، در مقاله کنونی، از معادلات ساختاری انتگرالی برای توصیف ماهیت ویسکوالاستیک مواد بهره گرفته شده است. نوآوری دیگر در ارتباط با حل عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل حاصله می‌باشد. در بخش نتایج، تحلیل‌های عددی متنوعی انجام شده و نکاتی کاربردی استخراج شده‌اند. برخی از نکات یاد شده عبارتند از:

۱. افزایش ضخامت، نرخ میرایی ارتعاش را کاهش می‌دهد.
۲. با افزایش نسبت منظری ورق، فرکانس ارتعاشی بزرگتر می‌شود.
۳. در بارگذاری ناگهانی، سختی ورق ویسکوالاستیک هدفمند در لحظات ابتدایی ارتعاش اجباری بزرگتر است و با مرور زمان، این سختی کاهش یافته و خیزهای بزرگتری پدید می‌آیند.
۴. برای داده‌های کنونی، با افزایش توان کسر حجمی مواد (n)، ورق نرم‌تر شده، خیز آن افزایش و فرکانس ارتعاشی آن کاهش می‌یابد.
۵. با افزایش میرایی، سختی سیستم و در نتیجه فرکانس طبیعی اصلی افزایش می‌یابد. لذا به وسیله مدل ارائه شده می‌توان از میراکننده‌هایی با ثابت میرایی کمتر برای حذف نوسانات ورق استفاده نمود.
۶. استفاده از ماده هدفمند، ضمن افزایش سفتی و استحکام ورق به دلیل امکان استفاده از مواد سخت‌تر (مانند سرامیک)، موجب میراشدن ارتعاش و سفتی آن به ویژه در بارهای ناگهانی می‌گردد.

مراجع

- [1] Praveen, G., and Reddy, J. N., "Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-metal Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, (1998).
- [2] Cederbaum, G., and Aboudi, J., "Dynamic Response of Viscoelastic Laminated Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 133, No. 2, pp. 225-238, (1989).
- [3] Chen, T.M., "The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to the Quasi-static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 3, pp. 509-522, (1995).
- [4] Ilyasov, M., and Aköz, A., "The Vibration and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 38, No. 6, pp. 695-714, (2000).
- [5] Paulino, G.H., and Jin, Z.H., "Correspondence Principle in Viscoelastic Functionally Graded Materials", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, pp. 129-132, (2001).
- [6] Paulino, G., and Jin, Z.H., "Viscoelastic Functionally Graded Materials Subjected to Antiplane Shear Fracture", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 2, pp. 284-293, (2001).
- [7] Paulino, G. H., and Jin, Z. H., "A Crack in a Viscoelastic Functionally Graded Material Layer Embedded Between Two Dissimilar Homogeneous Viscoelastic Layers—antiplane Shear Analysis", *International Journal of Fracture*, Vol. 111, No. 3, pp. 283-303, (2001).
- [8] Jin, Z.H., and Paulino, G. H., "A Viscoelastic Functionally Graded Strip Containing a Crack Subjected to In-plane Loading", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 1769-1790, (2002).
- [9] Abdoun, F., Azrar, L., Daya, E.M., and Potier-Ferry, M., "Forced Harmonic Response of Viscoelastic Structures by an Asymptotic Numerical Method", *Computers & Structures*, Vol. 87, No. 1, pp. 91-100, (2009).
- [10] Assie, A.E., Eltaher, M.A., and Mahmoud, F.F., "The Response of Viscoelastic-frictionless Bodies under Normal Impact", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 3, pp. 446-454, (2010).
- [11] Assie, A.E., Eltaher, M.A., and Mahmoud, F.F., "Modeling of Viscoelastic Contact-impact Problems", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, pp. 2336-2352, (2010).
- [12] Assie, A.E., Eltaher, M.A., and Mahmoud, F.F., "Behavior of a Viscoelastic Composite Plates under Transient Load", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 25, No. 5, pp. 1129-1140, (2011).

- [13] Altenbach, H., and Eremeyev, V.A., "On the Bending of Viscoelastic Plates Made of Polymer Foams", *Acta Mechanica*, Vol. 204, No. 3- 4, pp. 137-154, (2009).
- [14] Altenbach, H., and Eremeyev, V.A., "Analysis of the Viscoelastic Behavior of Plates Made of Functionally Graded Materials", *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 88, No. 5, pp. 332-341, (2008).
- [15] Lakes, R.S., "*Viscoelastic Materials*", Cambridge University Press, New York, (2009).
- [16] Badalov, F.B., Eshmatov, K., and Akbarov, U.I., "Stability of a Viscoelastic Plate under Dynamic Loading", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, No. 9, pp. 892-899, (1991).
- [17] Ugural, A.C., "*Stress in Plates and Shells*," McGraw- Hill, New York, (1999).
- [18] Gerald, C.F., and Wheatley, P.O., "*Applied Numerical Analysis*," 7th Edition, Pearson, California, (2003).
- [19] Wang, Y., and Tsai, T., "Static and Dynamic Analysis of a Viscoelastic Plate by the Finite Element Method", *Applied Acoustics*, Vol. 25, No. 2, pp. 77-94, (1988).
- [20] Shariyat, M., and Azadmanesh, M., "Thermal Buckling Analysis of Rectangular Composite Plates Subjected to Large Deflections, Based on a Layerwise Theory and Budiansky's Criterion Modification", *ISME Journal* Vol. 9, No. 1, pp. 25-40, (2007).

Abstract

In the present paper, dynamic behavior of a simply supported FGM viscoelastic plate subjected to a transverse load with an arbitrary time variations is investigated analytically. The hierarchical integral model is employed for description of the viscoelastic nature of the materials and a power law is used for description of the transverse variations of the material properties of the viscoelastic FGM plate. Solution of the governing equations of the viscoelastic FGM plate is accomplished through employing a Navier-type spatial solution and a Runge-Kutta solution for the time-dependency using a numerical trapezoidal discretization for the time integrals. Influences of various material properties and geometric parameters on time history of the responses of the plate are investigated comprehensively. Results reveal that due to the damping nature of the viscoelastic material, stiffness of the plate increases at the early time instants and consequently, the maximum dynamic transverse deflection of the plate decreases whereas the natural frequencies increase.