تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی به کمک تئوریهای پلاستیسیته تغییرشکل و نموی

مهران کدخدایان[1]
استاد

مهدی معارفدوست[2]
دانشجوی دکترا

در این مقاله رفتار کمانشی الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی تحت بارها و شرایط مرزی متنوع مورد بررسی قرار می‌گیرد. تحلیل بر اساس معادلات کمانش خطی و رفتار مواد بر اساس دو تئوری پلاستیسیته تغییرشکل و نموی انجام می‌شود. روش عددی مورد استفاده روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته است. چون در صفحات ضخیم اثر تغییر شکل برشی عرضی اهمیت زیادی دارد، ازتئوری صفحات رایسنر استفاده شده است. اگرچه در صفحات نازک همخوانی خوبی بین ضریب کمانشی بدست آمده از هر دو روش پلاستیسیته وجود دارد، با افزایش ضخامت صفحه اختلاف قابل ملاحظه‌ای میان ضریب کمانشی بدست آمده از دو روش وجود دارد. اثرات ضریب ابعادی، ضریب بار، ضخامت صفحه، نوع ماده، شرایط مرزی مختلف و رفتار ماده بر تعیین بار کمانشی در دو حالت بارگذاری تک محوری و دو محوری فشاری مساوی بررسی شده و نتایج حاصل ارائه گردیده است. نتایج حاصله نشان می‌دهند که با افزایش سطح پلاستیسیته، تئوری تغییرشکل بار کمانشی کمتری را پیشگویی می‌کند. همچنین با افزایش ضخامت صفحه و ثوابت رامبرگ- ازگود ($\frac{E}{\sigma_0}$ و c) اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری تغییرشکل و نموی افزایش می‌یابد.

واژه‌های راهنما : نسبت ابعادی، نسبت ضخامت، تئوری تغییرشکل، تئوری نموی، روش یک چهارم تفاضلی، کمانش الاستوپلاستیک

۱- مقدمه

مساله کمانش صفحات در دو حالت کمانش الاستیک و کمانش پلاستیک به صورت عددی و تحلیلی مورد توجه پژوهشگران بوده است. آنها مساله محاسبه بار کمانشی پلاستیک صفحات را معمولا به کمک تئوریهای تغییرشکل و نموی در پلاستیسیته مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. هنگامیکه نسبت ضخامت به طول صفحه $\frac{h}{a} \succ \frac{1}{20}$ باشد، تئوری صفحات تغییرشکل برشی مانند تئوری رایسنر(تئوری برشی مرتبه اول) به کار گرفته می‌شوند تا اثر تغییرشکل برشی عرضی منظور گردد. تاکنون، اکثر مطالعات انجام گرفته بر اساس تئوری کلاسیک بوده است. این تئوری از اثر تغییرشکل برشی عرضی غافل است که با توجه به افزایش ضخامت صفحه، نادیده گرفتن این اثر باعث ایجاد اختلاف در نتایج می‌شود. با توجه به اینکه در صفحات ضخیم بیشتر کمانش پلاستیک اتفاق می‌افتد، اثر تغییرشکل برشی عرضی لازم است تا در تحلیل کمانش در نظر گرفته شود.

---

[1] نویسنده مسئول، استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد kadkhoda@um.ac.ir

[2] دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد m_maarefdoost@yahoo.com

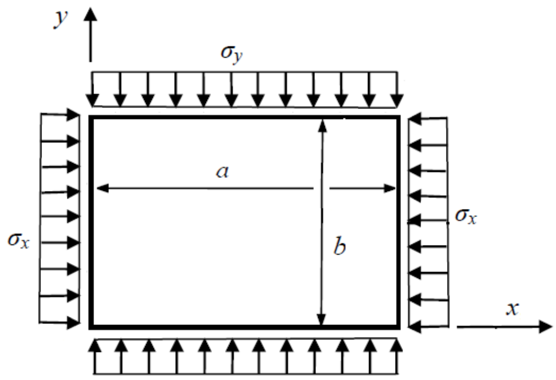
اولین تحلیل کمانش صفحات توسط برایان، با استفاده از معیار پایداری انرژی برای صفحات مستطیلی تحت بار عرضی انجام شدکه او با توجه به معادلات مشکل ریاضی نتوانست در این راه موفق باشد[۱]. شریواستاوا برای اولین بار مطالعه بر روی کمانش صفحات ضخیم را آغاز کرد[۲]. نتایج حاصل نشان داد که کاهش ناشی از اثر تغییرشکل برشی عرضی در پارامترهای تنش کمانشی پلاستیک برای تئوری نموی نسبت به تئوری تغییرشکل بیشتر بوده است، اما این اختلاف آنقدر نبود تا بتواند اختلاف بین دو تئوری را جبران کند. دوربان در تحقیقاتش دریافت که تئوری نموی نسبت به تئوری تغییرشکل بار کمانشی بیشتری را پیش‌گویی می‌کند و نتایج آزمایشگاهی با تئوری تغییرشکل همخوانی بیشتری دارد[۳]. همچنین دوربان و همکارش دریافتند که در مورد پوسته های سیلندری شکل تحت بار فشاری محوری، بار بحرانی بدست آمده از هر دو تئوری کاملا مشابه هم هستند[۴]. دوربان و زاکرمن تحلیل الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی تحت بار کششی (فشاری) محوری را برای چندین حالت مختلف تکیه‌گاهی به روش جداسازی متغیرها انجام دادند. اما شرایط مرزی محدود در این مقاله شامل (تکیه‌گاه گیردار و ساده) داده‌های بدست آمده در آن را محدود کرده است. همچنین آنها با استفاده از تئوری تغییرشکل، یک مسیر بارگذاری بهینه برای هر شرط مرزی را گزارش کردند[۵]. وانگ و همکارانش کمانش الاستیک-پلاستیک صفحات ضخیم و نازک را بر اساس تئوری تغییرشکل و تئوری نموی و بر اساس روش ریلی - ریتز مطالعه کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که نه تنها تئوری تغییرشکل مقدار فاکتور تنش کمانشی کمتری را محاسبه می‌کند، بلکه با افزایش ضخامت و ثابت رامبرگ-ازگود اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری پلاستیسیته افزایش می‌یابد[۶ و۷]. وانگ و همکارانش کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک و ضخیم را مورد بررسی قرار دادند و نظرات وانگ و همکارانش را مورد تایید قرار دادند[۸ و۹]. همچنین معادلات و نتایج حاصل از تحلیلهای انجام شده در این زمینه توسط محققان در مرجع [۱۰] آمده است. این مساله که اختلاف بین نتایج بدست آمده از دو تئوری تغییرشکل پلاستیک و تئوری نموی در مطالعات قابل مشاهده است، هنوز به صورت یک معما می‌باشد. به هرحال برای حل مسایل کمانش پلاستیک صفحات، روشهای عددی مختلفی مثل اجزاء محدود، اختلاف محدود، نوار محدود و ریتز می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

در این مقاله سعی شده است تا به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته مساله کمانش پلاستیک صفحات مستطیلی برای حالات مختلف شرایط مرزی که در گذشته انجام نشده است، مورد بررسی قرارگیرد. ماده مورد استفاده نوعی آلومینیوم است که در صنعت هوافضا کاربردزیادی دارد. تاثیر شرایط مرزی مختلف، ضریب ضخامت، ضریب بار، نسبت ابعادی (a/b)، تئوری تغییرشکل و تئوری نموی و ثوابت رامبرگ-ازگود($\frac{E}{\sigma_0}$ و c) بر روی ضریب کمانشی سنجیده شده که این مقاله را از سایر مقالات مشابه، متمایز می‌سازد.

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

شکل (۱) هندسه حاکم بر صفحه مستطیلی تحت بارهای لبه محوری و بارهای عرضی را نشان می‌دهد. a طول، b عرض و h ضخامت صفحه می‌باشند. تنش به صورت یکنواخت $\sigma_x = p$ و $\sigma_y = \xi p$ (ξ ضریب بار است) وارد می‌شود. $\xi = 0$ برای حالت فشاری محوری و $\xi = 1$ برای حالت فشاری دو محوری مساوی یکنواخت در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی در

مرجع [۶] آمده است.



شکل۱- هندسه مساله

معادلات سرعت طبق تئوری صفحات رایسنر بصورت ذیل می‌باشند:

$$\upsilon_x = z\varphi_x, \qquad \upsilon_y = z\varphi_y, \qquad \upsilon_z = w \tag{۱}$$

رابطه بین نرخ تنش و نرخ کرنش در صفحات عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_x &= E(\alpha\dot{\varepsilon}_x + \beta\dot{\varepsilon}_y + \chi\dot{\gamma}_{xy}) \\
\dot{\sigma}_y &= E(\beta\dot{\varepsilon}_x + \gamma\dot{\varepsilon}_y + \mu\dot{\gamma}_{xy}) \\
\dot{\tau}_{xy} &= E(\chi\dot{\varepsilon}_x + \mu\dot{\varepsilon}_y + \delta\dot{\gamma}_{xy}),\ \ \dot{\tau}_{xz} = \kappa^2 G\dot{\gamma}_{xz},\ \ \dot{\tau}_{yz} = \kappa^2 G\dot{\gamma}_{yz}
\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن E و G مدول الاستیک و مدول برشی موثر می‌باشند. α، β، γ، δ، μ، χ و مدول برشی موثر به تئوری پلاستیسیته بکار رفته در تحلیل وابسته هستند. دو تئوری بکار رفته در این مقاله شامل تئوری نموی(Incremental Theory) با معادلات پایه پرانتل-رس و تئوری تغییرشکل(Deformation Theory) با معادلات پایه هنکی می‌باشند.

۲-۱- تئوری نموی(IT) با معادلات پایه پرانتل- رس

معادله اساسی این تئوری عبارتست از،[۶]:

$$E\dot{\varepsilon}_{ij} = (1+\upsilon)\dot{s}_{ij} + \frac{1-2\upsilon}{3}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e}\left(\frac{E}{T}-1\right)s_{ij} \tag{۳}$$

که در آن S_{ij} تانسور تنش انحرافی، T مدول مماسی که با استفاده از منحنی تنش-کرنش بدست می‌آید و σ_e تنش موثر می‌باشند. T و σ_e بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
T &= d\sigma_e / d\varepsilon_e \\
\sigma_e^2 &= \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2
\end{aligned} \tag{۴}$$

که ε_e کرنش موثر کل می‌باشد. ضرایب α، β، γ، δ، μ، χ و مدول برشی در این روش به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\alpha=\frac{1}{\rho}\left[c_{22}c_{33}-c_{23}^{2}\right],\beta=\frac{1}{\rho}\left[c_{13}c_{23}-c_{12}c_{33}\right]\\
&\gamma=\frac{1}{\rho}\left[c_{11}c_{33}-c_{13}^{2}\right],\mu=\frac{1}{\rho}\left[c_{12}c_{13}-c_{11}c_{23}\right]\\
&\chi=\frac{1}{\rho}\left[c_{12}c_{23}-c_{13}c_{22}\right],\delta=\frac{1}{\rho}\left[c_{11}c_{22}-c_{12}^{2}\right]\\
&\rho=\frac{E}{T}\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix},\frac{E}{G}=2(1+\upsilon).
\end{aligned}\tag{۵}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
&c_{11}=1-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\left(\frac{\sigma_y{}^2}{4\sigma_e^2}\right)\\
&c_{12}=-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\upsilon)\frac{T}{E}-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\left(\frac{\sigma_x\sigma_y}{2\sigma_e^2}\right)\right]\\
&c_{13}=0,\quad c_{23}=0\\
&c_{22}=1-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\left(\frac{\sigma_x{}^2}{4\sigma_e^2}\right)\\
&c_{33}=2(1+\upsilon)\left(\frac{T}{E}\right)
\end{aligned}\tag{۶}$$

۲-۲- تئوری تغییرشکل (DT) با معادلات پایه هنکی

معادله اساسی این تئوری عبارتست از،[۶]:

$$E\dot{\varepsilon}ij=\left(\frac{3E}{2S}-\frac{1-2\upsilon}{2}\right)\dot{S}ij+\frac{1-2\upsilon}{3}\dot{\sigma}kk\,\delta ij+\frac{3\dot{\sigma}e}{2\sigma e}\left(\frac{E}{T}-\frac{E}{S}\right)Sij\tag{۷}$$

که در آن S مدول سکانتی است که با استفاده از منحنی تنش-کرنش بدست می‌آید. ضرایب α، β، γ، δ، μ، χ و مدول برشی در این روش به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\alpha=\frac{1}{\rho}\left[c_{22}c_{33}-c_{23}^{2}\right],\beta=\frac{1}{\rho}\left[c_{13}c_{23}-c_{12}c_{33}\right]\\
&\gamma=\frac{1}{\rho}\left[c_{11}c_{33}-c_{13}^{2}\right],\mu=\frac{1}{\rho}\left[c_{12}c_{13}-c_{11}c_{23}\right]\\
&\chi=\frac{1}{\rho}\left[c_{12}c_{23}-c_{13}c_{22}\right],\delta=\frac{1}{\rho}\left[c_{11}c_{22}-c_{12}^{2}\right]\\
&\rho=\frac{E}{T}\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix},\frac{E}{G_s}=2+2\upsilon+3\left(\frac{E}{S}-1\right).
\end{aligned}\tag{۸}$$

که در آنها

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= 1-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\left(\frac{\sigma_y{}^2}{4\sigma_e^2}\right)\\
c_{12} &= -\frac{1}{2}\left[1-(1-2\upsilon)\frac{T}{E}-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\left(\frac{\sigma_x\sigma_y}{2\sigma_e^2}\right)\right]\\
c_{13} &= 0, \quad c_{23}=0\\
c_{22} &= 1-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\left(\frac{\sigma_x{}^2}{4\sigma_e^2}\right)\\
c_{33} &= 3\frac{T}{S}-(1-2\upsilon)\left(\frac{T}{E}\right)
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

و بالاخره معادلات دیفرانسیل حاکم بر کمانش ورق به صورت ذیل می‌باشند[۶]:

$$\kappa^2 Gh\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial\phi_y}{\partial y}+\nabla^2 w\right)=\sigma_x h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma_y h\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{۱۰}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha Eh^3}{12}\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\beta Eh^3}{12}\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\delta Eh^3}{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)\right]-\kappa^2 Gh\left(\phi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma Eh^3}{12}\frac{\partial\phi_y}{\partial y}+\frac{\beta Eh^3}{12}\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta Eh^3}{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)\right]-\kappa^2 Gh\left(\phi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \tag{۱۲}$$

۳- شرایط مرزی حاکم

حال به بررسی مساله با شرایط تکیه‌گاهی مختلف پرداخته می‌شود:

- تکیه‌گاه ساده در $X=0$ و $X=a$

$$W=0,\ \phi_y=0,\ M_{xx}=0 \tag{۱۳}$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0,\ \phi_x=0,\ M_{yy}=0 \tag{۱۴}$$

- تکیه‌گاه یکسرگیردار در $X=0$ و $X=a$

$$W=0,\ \phi_x=0,\ \phi_y=0 \tag{۱۵}$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0,\ \phi_x=0,\ \phi_y=0 \tag{۱۶}$$

- تکیه‌گاه آزاد در $X=0$ و $X=a$

$$M_{xx}=0,\;\; M_{yx}=0,\;\; Q_x=0 \tag{۱۷}$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$M_{yy}=0,\;\; M_{xy}=0,\;\; Q_y=0 \tag{۱۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
M_{xx}&=\frac{Eh^3}{12}\left(\alpha\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\beta\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right)\\
M_{yy}&=\frac{Eh^3}{12}\left(\beta\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right)\\
M_{xy}=M_{yx}&=\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)\\
Q_x&=\kappa^2Gh\left(\phi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\sigma_x h\frac{\partial w}{\partial x}\\
Q_y&=\kappa^2Gh\left(\phi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\sigma_y h\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

وانگ و همکارانش[۶ و ۷] اثر ضخامت، نسبت ابعادی (a/b)، ثوابت رامبرگ ازگـود ($\frac{E}{\sigma_0}$ و c) را در تئوریهـای نموی و تغییرشکل برای شرایط مرزی SSSS به کمک روش ریتز و جداسـازی متغیرهـا مـورد بررسـی قـرار دادند[۶ و ۷]. در مطالعهٔ فعلی ضمن تحلیل حالت فوق، حالات دیگـری نیـز شـامل CCCC, SSSC, SCSC FCCC, FCFC, FCSC به کمک روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند.

۴- روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته (GDQ)

روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته روش ساده و کارایی در حل مسائل مهندسی می‌باشـد. اولـین بـار در سال (۱۹۷۱) بلمن و کاستی [۱۱] آن را به عنوان یک تکنیک جدید برای حل عددی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره‌ای، مطرح کردند. هدف آنها ارائه یک راه حل جدید برای فـائق شـدن بـر مشکلات پایداری و حجم محاسبات مسائل عددی بود. اولـین کـاربرد وسـیع ایـن روش در زمینـهٔ مسـایل مهندسی توسط برت و مالیک[۱۲] صورت گرفت هنگامیکه مسائل مقدار مرزی در حالت دو بعدی خطـی و یک بعدی غیرخطی مورد بررسی قرار گرفتند. دستیابی به یک حل دقیق با کمترین محاسـبات انجـام شـده نسبت به روش‌های حل عددی دیگر نظیر المان محدود و یا جابجایی محدود باعث شده است که مزایای ایـن روش تدریجا آشکار شود و گسترش یابد. این روش توانـایی حـل معـادلات دیفرانسـیل از درجـات بـالا را بـا انتخاب نقاط کم دارد. از ویژگی‌های دیگر آن می‌توان به سادگی در کاربرد و برنامه‌نویسی و همچنین سـرعت همگرایی بالا اشاره کرد.

در این روش شبکه بندی به صورت تبدیل ناحیهٔ حل به مجموعه‌ای از نقاط به نام گره انجام می‌پذیرد. در اینجا مقدار مشتق تابع f در هرگره نسبت به یک راستای مشخص (بطور مثـال x) را بـه صـورت مجمـوع

خطی وزن‌دار از مقادیر تابع در تعدادی نقاط در آن راستا، بیان می‌کند. بیان ریاضی تعریف فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial^r f(x_i, y_j)}{\partial x^r} = \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(r)} . f(x_k, y_j) \qquad (۲۰)$$

برای مشتق‌گیری در راستای y و مشتق مرکب، قوانین روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته بدین شکل بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^s f(x_i, y_j)}{\partial y^s} = \sum_{\ell=l}^{n_y} C_{jk}^{(s)} . f(x_i, y_k) \\ &i = 1,2,...., n_x, \quad j = 1,2,...., n_y \\ &\frac{\partial^{(r+s)} f(x_i, y_j)}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(r)} . \sum_{\ell=1}^{n_y} C_{j\ell}^{(s)} f(x_k, y_\ell) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

وزن‌ها در روابط فوق، در قالب ماتریس C به نام ماتریس ضرایب وزنی بیان شده‌اند و اندیس‌های r و s نشانگر مرتبهٔ مشتق‌گیری و ماتریس ضرایب مربوط می‌باشند.

به منظور استخراج ماتریس ضرایب وزنی، توابع مطلوب در هر راستا توسط توابعی تقریب زده می‌شوند که این توابع تقریب به نام توابع تست شناخته می‌شوند و شرط انتخاب این توابع، کامل بودن آنهاست. به این معنی که توابع تست باید حالت یکنواختی از متغیرهای میدانی را بیان کنند و تا بالاترین مرتبه‌ای که در معادلهٔ حاکم بر مساله ظاهر شده، قابلیت مشتق‌گیری داشته باشند. توابع میانیاب لاگرانژ به عنوان توابع تست، فرمول‌های صریحی را برای بدست آوردن ماتریس ضرایب ارائه کرده‌اند. در این فرمول‌ها ضرایب وزنی بطور مستقیم و دقیق، مستقل از تعداد و موقعیت گره‌ها، حاصل می‌شوند. فرمول‌های ارائه شده توسط شو و ریچارد[۱۲]، بواسطهٔ بیان یک رابطهٔ بازگشتی برای محاسبه ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر، مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. در این فرمول‌ها مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس ضرایب برای مشتق مرتبهٔ اول بدین صورت بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} &C_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k)\prod(x_k)} \\ &i,k = 1,2,...., n_x, \quad i \neq k \\ &\prod(x_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_x} (x_i - x_k) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس در مشتق‌های مراتب بالاتر، توسط رابطهٔ بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} &C_{ik}^{(r)} = r\left(C_{ii}^{(r-1)} . C_{ik}^{(1)} - \frac{C_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right) \quad i,k = 1,2,...., n_x \\ &i \neq k \ , \ 2 \leq r \leq (n_x - 1) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

و اعضای قطر اصلی نیز به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$C_{ii}^{(r)} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n_x} C_{ik}^{(r)} \qquad (۲۴)$$
$$i = 1,2,\ldots,n_x \ , \ 1 \le r \le (n_x - 1)$$

به منظور تعیین ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبه بالاتر، می‌توان از رابطهٔ بازگشتی زیر استفاده کرد:

$$\left[C^{(r)}\right] = \left[C^{(1)}\right]\left[C^{(r-1)}\right], \ 2 \le r \le (n_x - 1) \qquad (۲۵)$$

وزن‌ها بر اساس تعداد و موقعیت گره‌ها حاصل می‌شوند. بنابراین به راحتی می‌توان به این نکته پی برد که موقعیت و تعداد گره‌ها،که به آنها نقاط نمونه نیز گفته می‌شود، نقش مهمی در دقت نتایج نهایی ایفا می‌کنند. تاکنون قواعد زیادی جهت محاسبه نقاط نمونه ارائه شده است که تعدادی از آنها در ذیل نشان داده شده‌اند.

$$x_i = 1 + 2\frac{i-1}{n-1} \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۲۶)$$

$$x_i = -Cos\,\frac{i-1}{n-1}\pi \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۲۷)$$

$$x_i = \frac{i-1}{n-3} \ , \ i = 3,\ldots\ldots,n-2 \qquad (۲۸)$$

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - Cos\,\frac{i-1}{n-3}\pi) \ , \ i = 3,\ldots\ldots,n-2 \qquad (۲۹)$$

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - Cos\,\frac{i-2}{n-3}\pi) \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۳۰)$$

اما معروفترین آنها نقاط واقع بر صفرهای چند جمله‌ای چبیشف است. این نقاط توسط رابطهٔ زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - Cos\,\frac{2i-1}{2n}\pi) \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۳۱)$$

توزیع نقاط نمونه چبشیف-گوس- لوباتو دارای بیشترین سرعت همگرایی و بالاترین دقت می‌باشد که در این تحقیق نیز از این رابطه استفاده می‌شود[۱۲]:

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - Cos\,\frac{i-1}{n-1}\pi) \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۳۲)$$

به کمک اعمال روش یک چهارم تفاضلی معادلات حاکم بر سیستم (۱۰ الی ۱۲) و شرایط مرزی (۱۳ الی ۱۸) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\kappa^2 Gh\left(\sum_{m=1}^{N_x} A_{im}^x \phi_{mj}^x + \sum_{n=1}^{N_y} A_{jn}^y \phi_{in}^y + \sum_{m=1}^{N_x} B_{im}^x W_{mj} + \sum_{n=1}^{N_y} B_{jn}^y W_{in}\right) = \sigma_x h \sum_{m=1}^{N_x} B_{im}^x W_{mj} + \sigma_y h \sum_{n=1}^{N_y} B_{jn}^y W_{in} \qquad (۳۳)$$

$$\frac{\alpha Eh^3}{12}\sum_{m=1}^{N_x}B_{im}^x\phi_{mj}^x+\frac{\beta Eh^3}{12}\sum_{m=1}^{N_x}\sum_{n=1}^{N_y}A_{im}^xA_{jn}^y\phi_{mn}^y+\frac{\delta Eh^3}{12}\left(\sum_{n=1}^{N_y}B_{jn}^y\phi_{in}^x+\sum_{m=1}^{N_x}\sum_{n=1}^{N_y}A_{im}^xA_{jn}^y\phi_{mn}^x\right)$$
$$-\kappa^2Gh\left(\phi_{ij}^x+\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^xW_{mj}\right)=0 \qquad (۳۴)$$

$$\frac{\gamma Eh^3}{12}\sum_{m=1}^{N_x}B_{jn}^y\phi_{in}^y+\frac{\beta Eh^3}{12}\sum_{m=1}^{N_x}\sum_{n=1}^{N_y}A_{im}^xA_{jn}^y\phi_{mn}^x+\frac{\delta Eh^3}{12}\left(\sum_{m=1}^{N_x}\sum_{n=1}^{N_y}A_{im}^xA_{jn}^y\phi_{mn}^x+\sum_{m=1}^{N_x}B_{im}^x\phi_{mj}^y\right)$$
$$-\kappa^2Gh\left(\phi_{ij}^y+\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^yW_{in}\right)=0 \qquad (۳۵)$$

شرایط مرزی:

- تکیه گاه یکسرگیردار در $X=0$ و $X=a$

$$W_{1i}=W_{ni}=0\,,\ \phi_{1i}^x=\phi_{ni}^x=0\,,\phi_{1i}^y=\phi_{ni}^y=0 \qquad (۳۶)$$

در $Y=0$ و $Y=b$

$$W_{1j}=W_{nj}=0\,,\ \phi_{1j}^x=\phi_{nj}^x=0\,,\phi_{1j}^y=\phi_{nj}^y=0 \qquad (۳۷)$$

- تکیه گاه ساده در $X=0$ و $X=a$

$$W_{1i}=W_{ni}=0\,,\phi_{1i}^y=\phi_{ni}^y=0\,,\alpha\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^x+\beta\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^y=0\,,\quad i,j=1,\dots,N \qquad (۳۸)$$

در $Y=0$ و $Y=b$

$$W_{1j}=W_{nj}=0\,,\phi_{1j}^x=\phi_{nj}^x=0\,,\beta\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^x+\gamma\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^y=0\,,\quad i,j=1,\dots,N \qquad (۳۹)$$

- تکیه‌گاه آزاد در $X=0$ و $X=a$

$$\begin{gathered}\alpha\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^x+\beta\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^y=0\\ \sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^y+\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^x=0\\ \kappa^2Gh\left(\phi_{ij}^x+\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^xW_{mj}\right)=\sigma_xh\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^xW_{mj}\end{gathered} \qquad (۴۰)$$

در $Y=0$ و $Y=b$

$$\begin{gathered}\beta\sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^x+\gamma\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^y=0\\ \sum_{m=1}^{N_x}A_{im}^x\phi_{mj}^y+\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^y\phi_{in}^x=0\\ \kappa^2Gh\left(\phi_{ij}^y+\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^yW_{in}\right)=\sigma_yh\sum_{n=1}^{N_y}A_{jn}^yW_{in}\end{gathered} \qquad (۴۱)$$

که در آنها A مشتق مرتبه اول و B مشتق مرتبه دوم می‌باشند. اکنون ضریب کمانش K بدین صورت تعریف می‌شود:

$$K=\frac{\sigma_c hb^2}{\pi^2D} \qquad (۴۲)$$

و D صلبیت خمشی صفحه مطابق ذیل است:

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۴۳)$$

۵- نتایج و بحث

ماده مورد استفاده در این تحقیق آلومینیوم 7075-T6 می‌باشد و از مدل رامبرگ- ازگود استفاده شده است.

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\frac{k\sigma_0}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^c \qquad (۴۴)$$

که در آن ε کرنش پلاستیک کل و (c,k) ثابتهای رامبرگ- ازگود هستند که بستگی به خواص ماده مورد نظر دارند. مدول تانژانتی و سکانتی مورد استفاده در معادلات بدین صورت محاسبه می‌شوند:

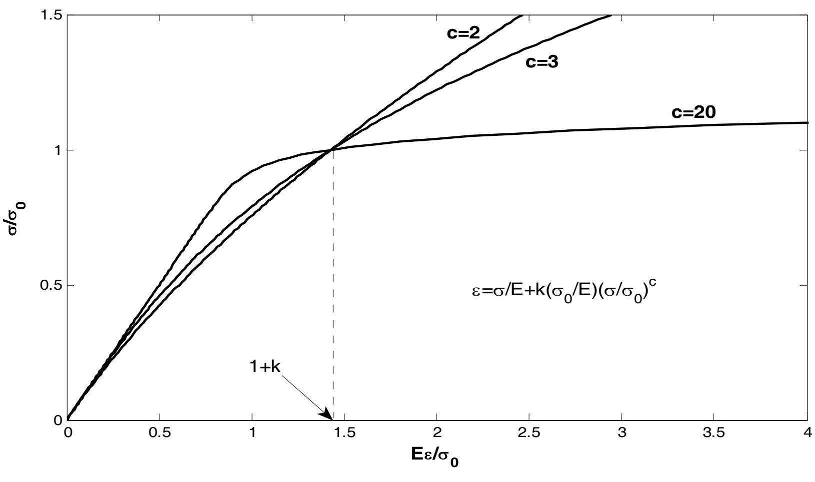
$$\begin{aligned}\frac{E}{T}&=1+ck\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{c-1},(c\succ 1)\\ \frac{E}{S}&=1+k\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{c-1},(c\succ 1)\end{aligned} \qquad (۴۵)$$

خصوصیات این فلز با استفاده از معادله (۴۴) در جدول(۱) آمده است.

جدول ۱- خواص AL7075-T6 برای رابطه رامبرگ- ازگود[۶]

$\frac{E}{\sigma_0}$	750
c	9.2
κ^2	5/6
k	0.25
υ	0.3

منحنی رابطه تنش-کرنش مدل رامبرگ- ازگود، معادله (۴۴)، این فلز برای ضرایب مختلف (c)در شکل(۲) آمده است.

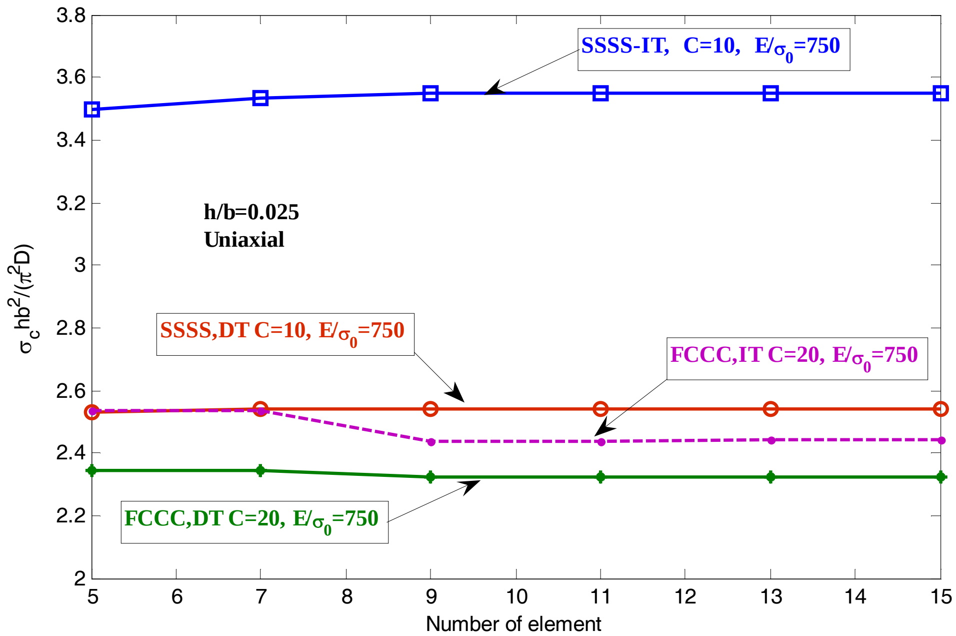


شکل۲- رابطه تنش-کرنش رامبرگ- ازگود

به منظور تحلیل دقیق مساله ابتدا نقاط نمونه و حساسیت مش بررسی می‌گردند و تعداد سیزده مش بهینه در این مساله در نظرگرفته شده است، شکل(۳). با توجه به جدول (۲) مشخص است که توزیع نقاط نمونه معادله (۳۲) دارای بالاترین دقت می‌باشد. با توجه به اینکه وانگ و همکارانش قبلا به کمک جداسازی متغیرها به تحلیل این مساله پرداخته‌اند، ابتدا نتایج بدست آمده با مرجع[۶] مقایسه و سپس نتایج جدید ارائه گردیده است. منحنی نسبت ابعادی (a/b) بر حسب ضریب کمانش($K=\sigma_c hb^2/(\pi^2 D)$) به ازاء مقادیر مختلف ثابت رامبرگ- ازگود(c) برای دو تئوری تغییرشکل و نموی و شرط مرزی SSSS در دو حالت، (الف) بارگذاری تک محوری و (ب) بارگذاری دو محوری مساوی بدست آمده است و نتایج حاصل با نتایج مرجع[۶] همخوانی دارد، اشکال (۴ و ۵ و ۶). نتایج بدست آمده با نتایج قبلی در جدول(۳) مقایسه گردیده است.

جدول۲- دقت توزیع نقاط نمونه برای محاسبه ضریب کمانش

شرایط مرزی		$K(\frac{h}{b}=0.011,\xi=1)$	تعداد مش	تئوری پلاستیسیته	معادله (۳۲)	معادله (۳۱)	معادله (۳۰)	معادله (۲۹)	معادله (۲۸)
SSSS	حل حاضر		13	IT, DT	**2.0000**	2.0005	1.9997	1.9997	2.0010
	Durban[5]	2.0000							



شکل۳– حساسیت مش برای شرایط مرزی مختلف

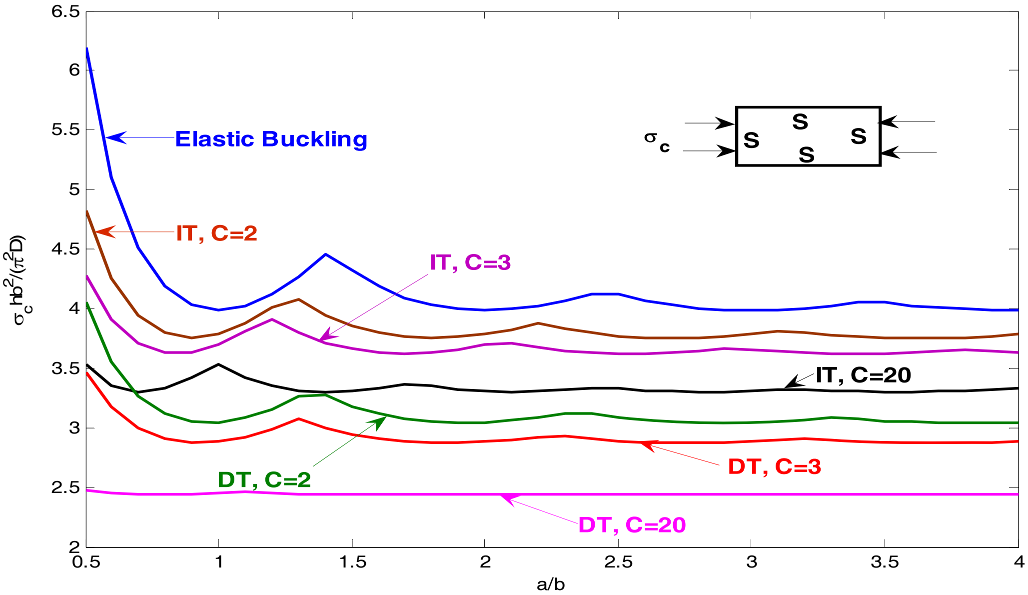
جدول۳- مقایسه ضریب کمانش برای صفحات مربعی تحت بارتک محوری و دو محوری با شرایط تکیه گاهی SSSS

شرایط مرزی		$\frac{a}{h}=20$		$\frac{a}{h}=10$	
		IT	DT	IT	DT
SSSS (تک محوری)	Handleman [13]	3.5740	-----	3.5193	---
	Shrivastava [2]	3.5278	2.8058	3.4636	0.9205
	Wang [14]	3.4955	2.7954	3.1908	0.9144
	Aung [7]	3.4955	2.7954	3.1908	0.9144
	حل حاضر	**3.4955**	**2.7954**	**3.1908**	**0.9144**
SSSS (دومحوری مساوی)	Durban [5]	1.8713	1.8649	0.6661	0.7346
	Wang [6]	1.8713	1.8649	0.8084	0.7300
	Aung [7]	1.8713	1.8649	0.8084	0.7300
	حل حاضر	**1.8713**	**1.8649**	**1.8084**	**0.7300**

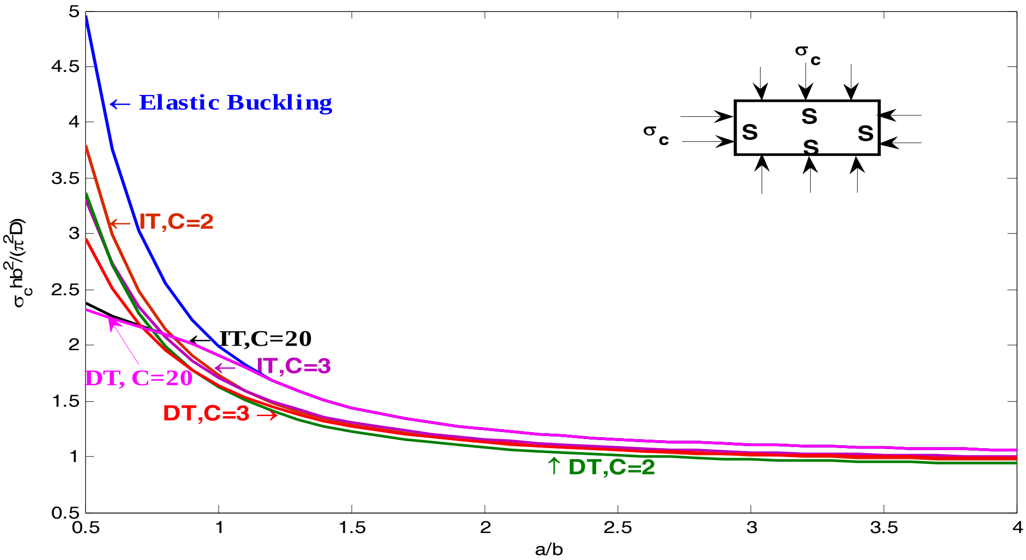
شکل(۴) منحنی نسبت ابعادی- ضریب کمانش در حالت SSSS را برای دو حالت بارگذاری تک محوری و دو محوری مساوی، با استفاده از دو تئوری نموی(IT) و تغییرشکل(DT) و با ضرایب مختلف ثابت رامبرگ-ازگود (c) نشان می‌دهد. در هر دو حالت بارگذاری با بکارگیری تئوری‌های نموی یا تغییرشکل، با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود (c)، ضریب کمانش کاهش می‌یابد. به علاوه، در شرایط مشابه، بار کمانشی حاصل از تئوری تغییرشکل از تئوری نموی کمتر است. در حالت فشاری تک‌محوری، در تحلیل به کمک تئوری تغییرشکل با افزایش مقدار ثابت رامبرگ- ازگود (c) مشخص است که نسبت ابعادی تاثیر چندانی در ضریب کمانش ندارد، شکل(۴- الف). با افزایش نسبت ابعادی در بارگذاری دومحوری مساوی، ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل در ضرایب مختلف رامبرگ- ازگود به هم نزدیک می‌شوند. در اینجا، با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود جوابهای حاصل از دو تئوری به یکدیگر نزدیک و در $a/b \geq 1.15,\ c=20$ کاملا به یکدیگر نزدیک و نیز بر حل الاستیک منطبق می‌شوند، شکل(۴-ب).

نکته دیگر آنکه در حالت بارگذاری دو محوری فشاری با افزایش نسبت ابعادی ضریب کمانش بطور یکنواخت کاهش می‌یابد و هیچ تغییرشکل مود کمانشی در آن دیده نمی‌شود، شکل(۴-ب). درصورتیکه در حالت بارگذاری تک محوری فشاری با تغییر نسبت ابعادی تغییرشکل مودها، کاملا مشهود است ، شکل (۴- الف). بنابراین در حالت بارگذاری فشاری محوری هرچه رفتار فلز از حالت الاستیک به حالت الاستیک-کاملا پلاستیک ($c \to \infty$) میل پیدا کند، تغییرشکل مودها کمتر قابل مشاهده می‌باشد، شکل (۴- الف). در صفحات نازک ($0.01 \leq h/b \prec 0.05$) با افزایش c در حالت دو محوری فشاری مساوی، تغییرات ضریب کمانش در مقایسه بین دو حل نموی و تغییرشکل ناچیز است، شکل(۵-ب). با این حال، در حالت تک محوری فشاری این اختلاف کاملا مشهود است، شکل(۵- الف). با افزایش ثابت $\frac{E}{\sigma_0}$ در هر دو حالت تک محوری و دو محوری مساوی، ضریب کمانش کاهش می‌یابد، شکل(۵). در صفحات ضخیم ($0.05 \leq h/b \leq 0.1$) با افزایش c و $\frac{E}{\sigma_0}$ و در حالت فشاری محوری اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری در شرایط مشابه بیشتر شده که این اختلاف در حالت فشاری دومحوری کمتر است، شکل(۶-الف و ب). با افزایش ضخامت صفحه و ثابت رامبرگ- ازگود c اختلاف میان بار کمانشی الاستیک و بار کمانشی پلاستیک

صفحه و همچنین اختلاف میان جوابهای حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل در هر دو حالت بارگذاری زیاد می‌گردد، شکل(۶). در شرایط مختلف بارگذاری، ضریب کمانش با افزایش ضریب ضخامت (h/b) در هر دو تحلیل نموی یا تغییرشکل، کاهش می‌یابد، شکل(۶). چنانچه که مشاهده می‌شود تئوری تغییرشکل نسبت به تئوری نموی بار کمانشی کمتری را پیش‌گویی می‌کند و با افزایش ضخامت و ثوابت رامبرگ ازگود ($\frac{E}{\sigma_0}$ و c) اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری افزایش می‌یابد که بخشی از این نتایج قبلا توسط وانگ و همکارانش [۶] گزارش شده است.



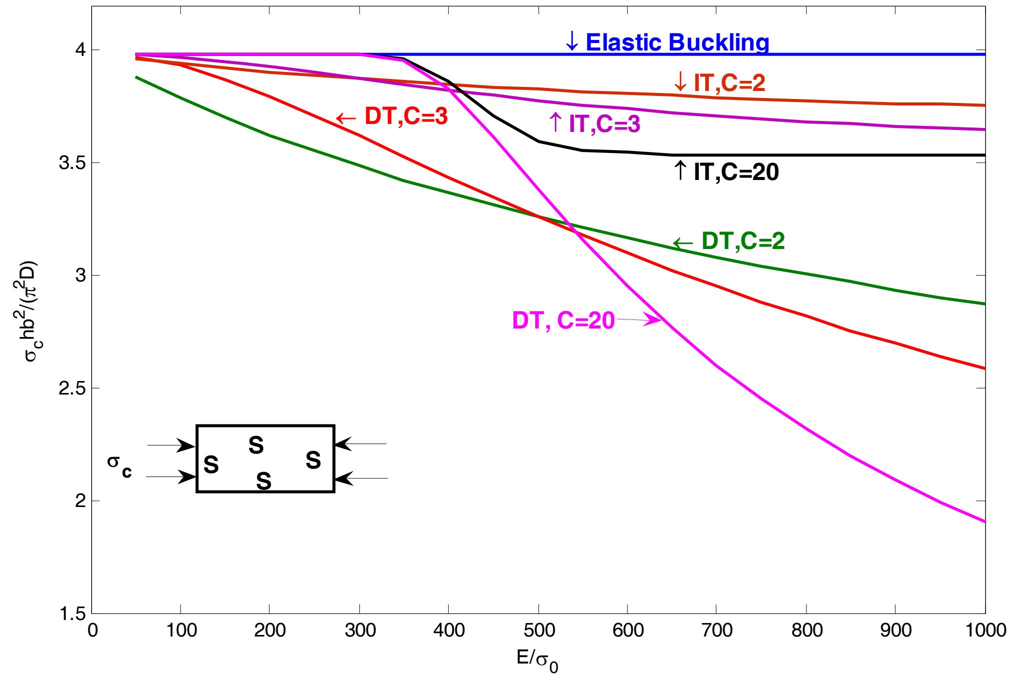
(الف)



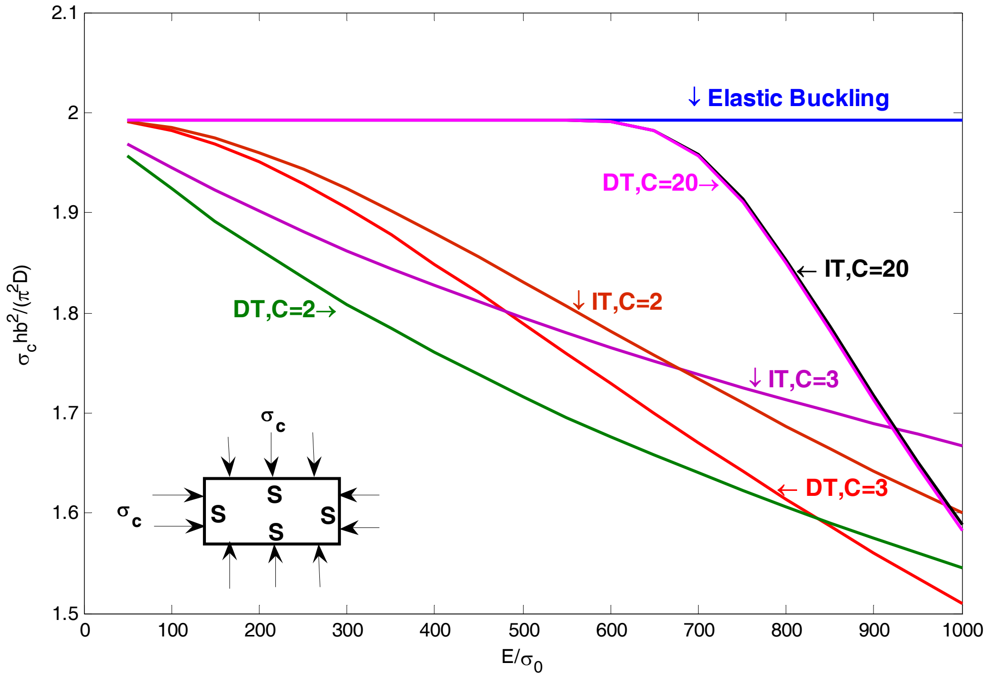
(ب)

شکل۴– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در شرایط SSSS در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$(\frac{E}{\sigma_0} = 750, \frac{h}{b} = 0.025, \nu = 0.3, \kappa^2 = \frac{5}{6}, k = 0.25)$$



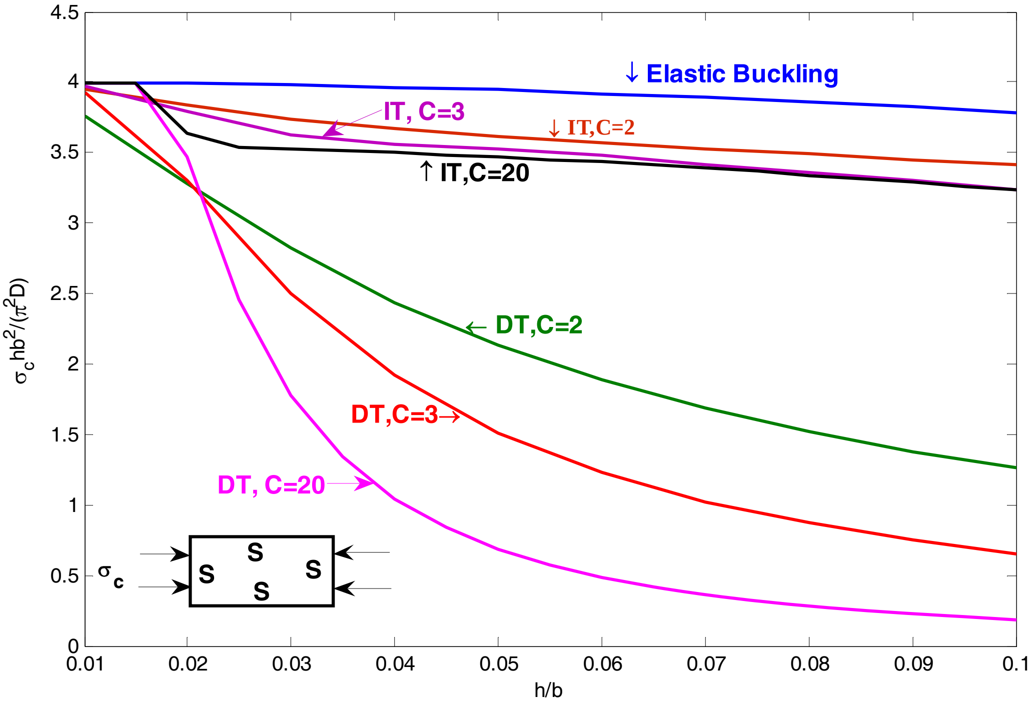
(الف)



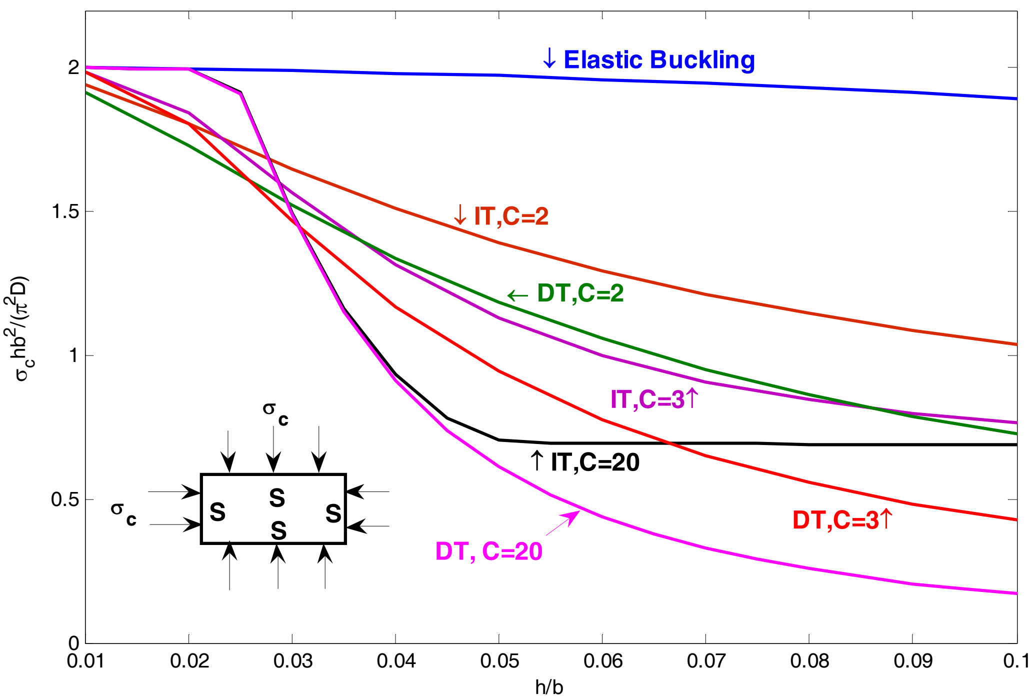
(ب)

شکل۵- تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت SSSS در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25\right)$$



(الف)



(ب)

شکل ۶- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت SSSS در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

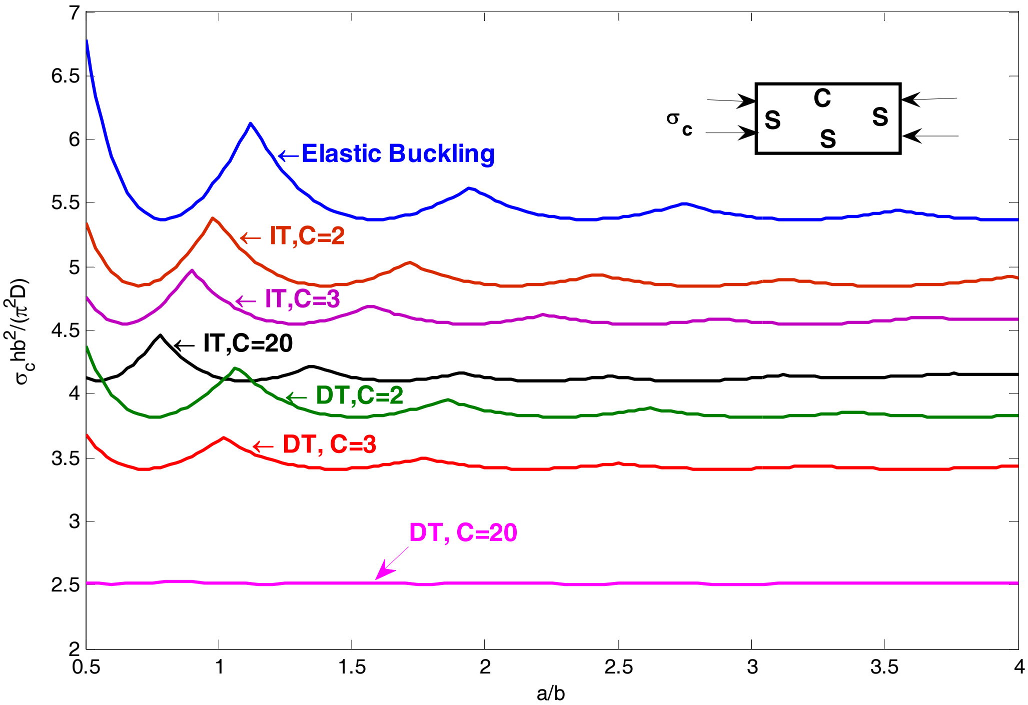
$$(\frac{E}{\sigma_0} = 750, \frac{a}{b} = 1, \nu = 0.3, \kappa^2 = \frac{5}{6}, k = 0.25)$$

جدول(۴)، محدوه ضریب ضخامت صفحات (در تحلیل تغییرشکل و شرایط تکیه‌گاهی مختلف) که با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود (c) ضریب کمانش افزایش می‌یابد، را نشان می‌دهد. در حالت بارگذاری دو محوری فشاری مساوی با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود $(c = 20)$ تطابق خوبی بین ضریب کمانش حاصل از حل دو تئوری نموی و تغییرشکل وجود دارد. اما این تطابق برای حالت بارگذاری تک محوری کمتر است و در هر دو حالت با افزایش ضخامت صفحه و افزایش ثابت رامبرگ ازگود c اختلاف بین ضریب کمانش حاصل از دو حل نموی و تغییرشکل بیشتر می‌شود که این اختلاف در حالت بارگذاری تک محوری بیشتر است. در تحلیل به کمک تئوری تغییرشکل برای این صفحات، هر چه به طرف حالت الاستیک- کاملا پلاستیک ماده نزدیک می‌شویم $(c \to 20)$، ضریب کمانش افزایش می‌یابد. اما با افزایش ضخامت صفحه و افزایش ثابت رامبرگ- ازگود $(c \to \infty)$ ضریب کمانش کاهش می‌یابد، شکل(۶).

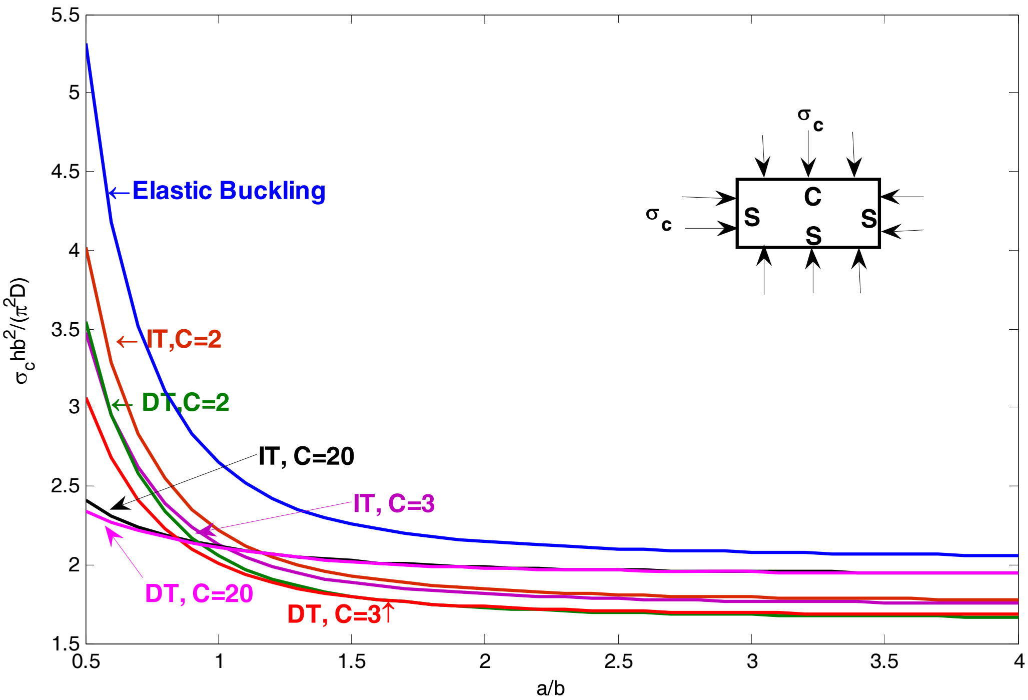
جدول۴- محدوه ضریب ضخامت صفحات(در تحلیل تغییرشکل و شرایط تکیه‌گاهی مختلف) که با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود (c) ضریب کمانش افزایش می‌یابد.

شرایط مرزی	نوع بارگذاری: تک محوری فشاری	نوع بارگذاری: دو محوری فشاری
SSSS	$h/b \le 0.021$	$h/b \le 0.026$
SCSC	$h/b \le 0.015$	$h/b \le 0.02$
SSCC	$h/b \le 0.015$	$h/b \le 0.02$
SCCC	$h/b \le 0.013$	$h/b \le 0.018$
SSSC	$h/b \le 0.018$	$h/b \le 0.025$
CCCC	$h/b \le 0.013$	$h/b \le 0.015$
FCCC	$h/b \le 0.021$	$h/b \le 0.023$
FCFC	$h/b \le 0.022$	$h/b \le 0.024$
FCSC	$h/b \le 0.021$	$h/b \le 0.025$

در صفحات ضخیم $(h/b \ge 0.05)$ با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود c، در تحلیل تئوری نموی ضریب کمانش تغییرات زیادی ندارد و تقریبا ثابت می‌ماند و در مقابل برای تحلیل تئوری تغییرشکل ضریب کمانش کاهش قابل توجهی دارد، شکل(۶). ضریب کمانش حاصل در مقایسه با ضریب کمانش صفحات نازک کمتر می‌باشد و با افزایش c کاهش شدیدتری می‌یابد، شکل(۶). با افزایش شرط مرزی گیردار در لبه $Y = b$ ضریب کمانش در هر دو حالت نسبت به حالت قبل افزایش می‌یابد، شکل(۷). در تمام حالات شرایط مرزی، در حالت بارگذاری دو محوری مساوی با افزایش ثابت c ضرایب کمانش حاصل از تحلیل دو تئوری نموی و تغییرشکل به هم نزدیک می‌شوند و با افزایش سطح پلاستیک، تئوری تغییرشکل مدول برشی کمتری و بنابراین بار کمانشی کمتری را نسبت به تئوری نموی پیشگویی می‌کند. علاوه بر آن، افزایش شرط مرزی گیردار باعث می‌شود که در شرایط یکسان اختلاف بین نتایج ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل افزایش یابد، مقایسه اشکال(۴ تا ۶ با ۷ تا ۹). اشکال(۱۰ تا ۱۲) به بررسی اثر نسبت ابعادی، ضخامت صفحه و ثوابت رامبرگ- ازگود $\frac{E}{\sigma_0}, c$ بر ضریب کمانش در دو حالت بارگذاری تک محوری و دو محوری مساوی به کمک استفاده از تئوری‌های نموی و تغییرشکل در حالتSCSC می‌پردازند.



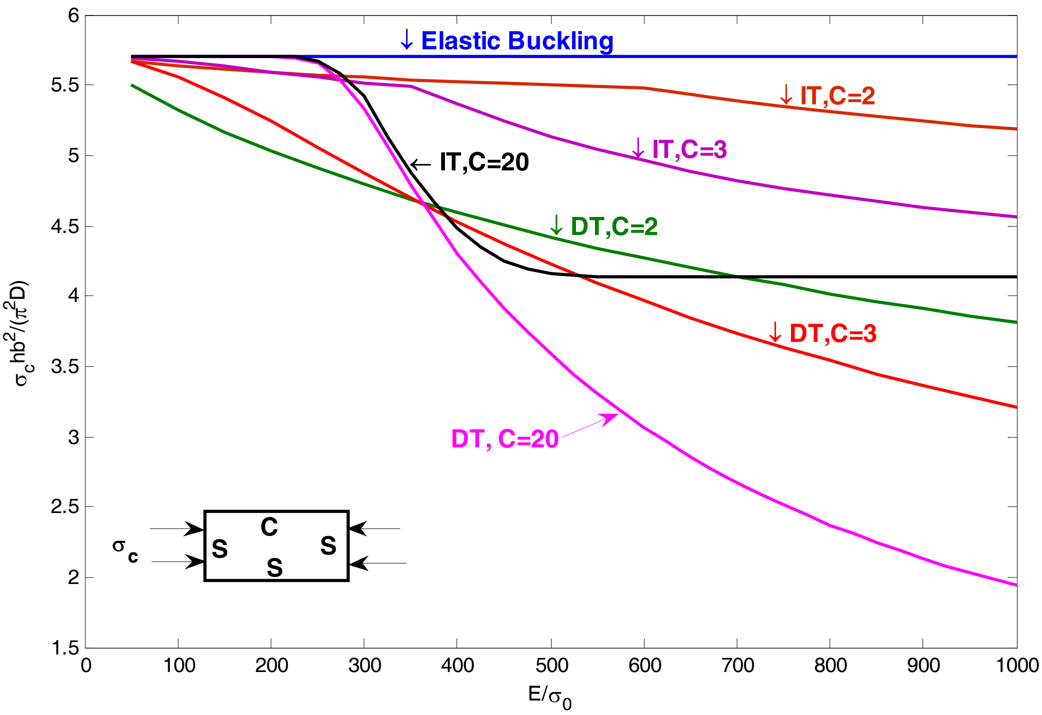
(الف)



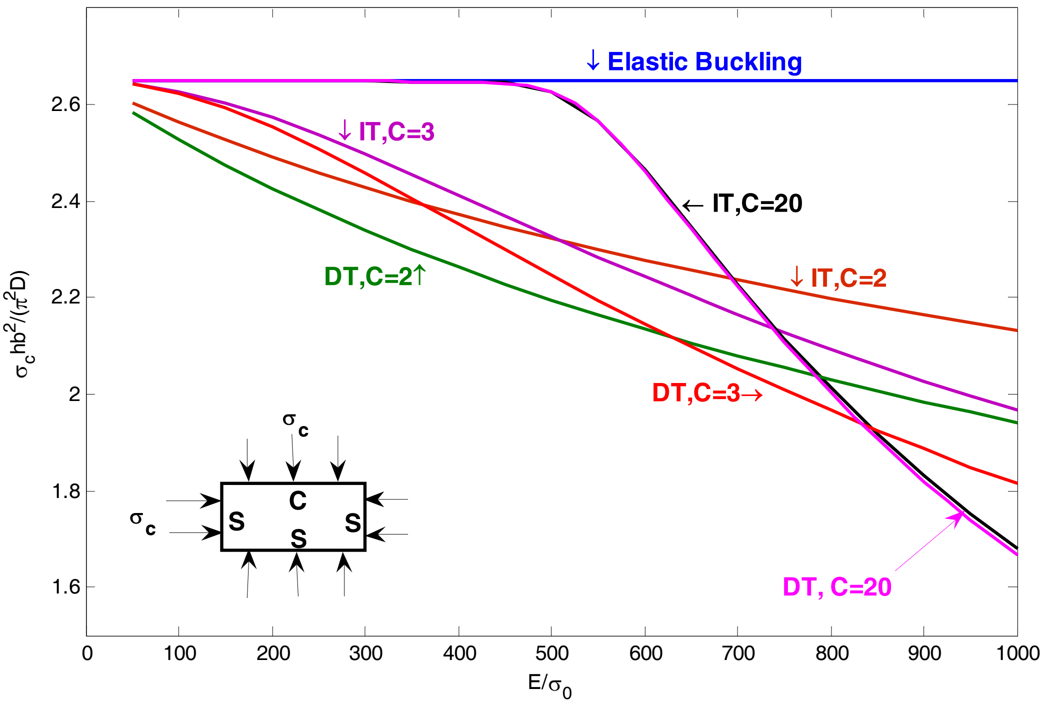
(ب)

شکل ۷– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت SSSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$$



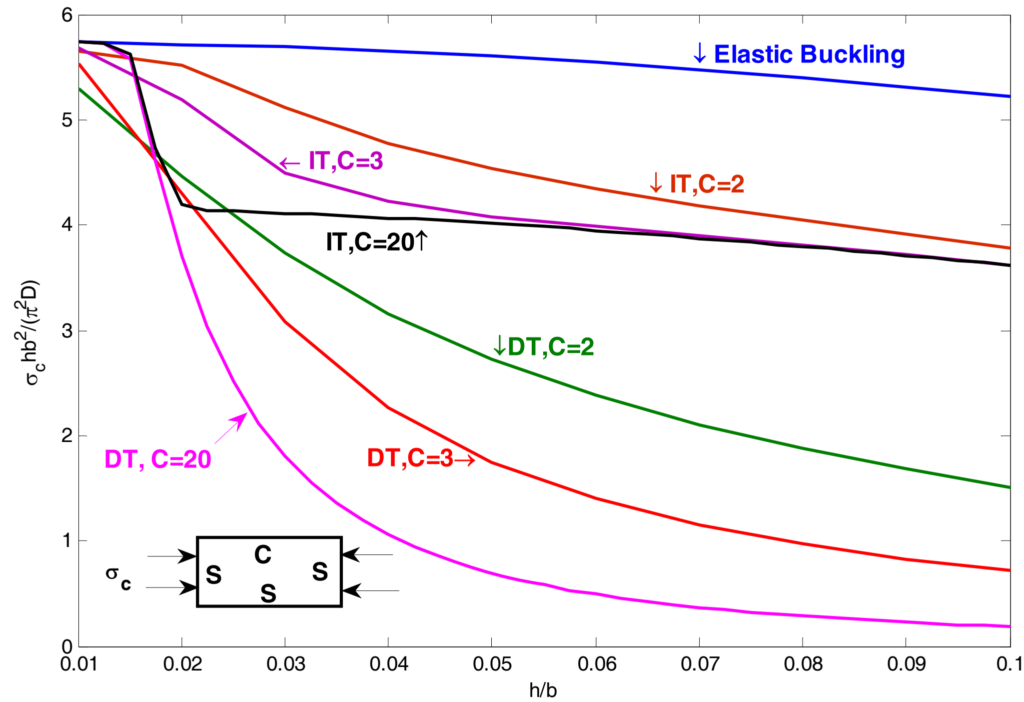
(الف)



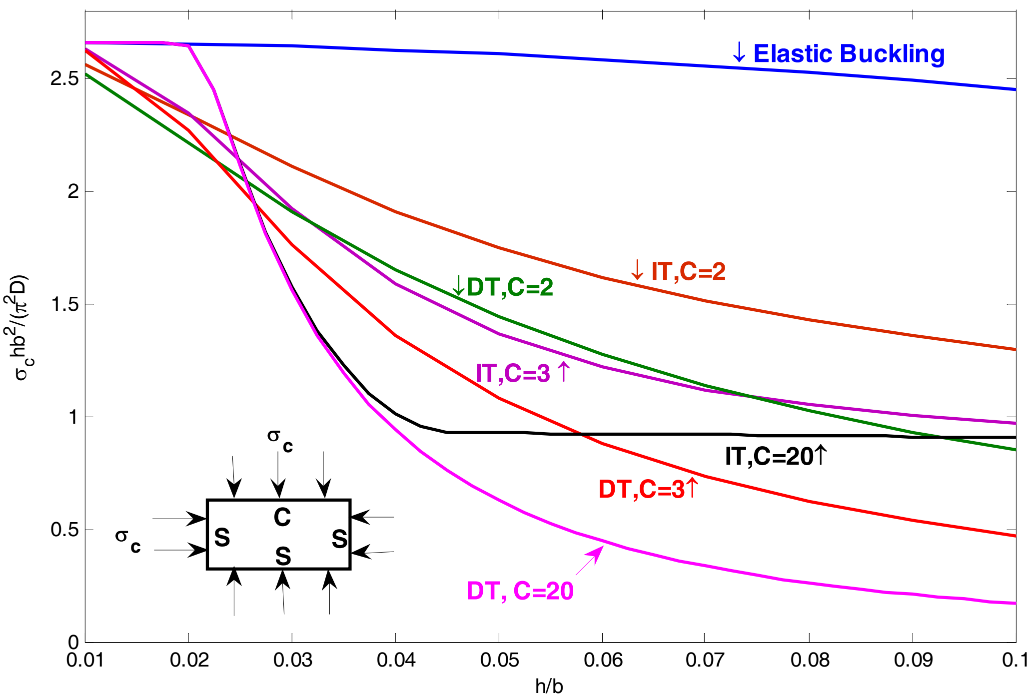
(ب)

شکل ۸– تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت SSSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$$



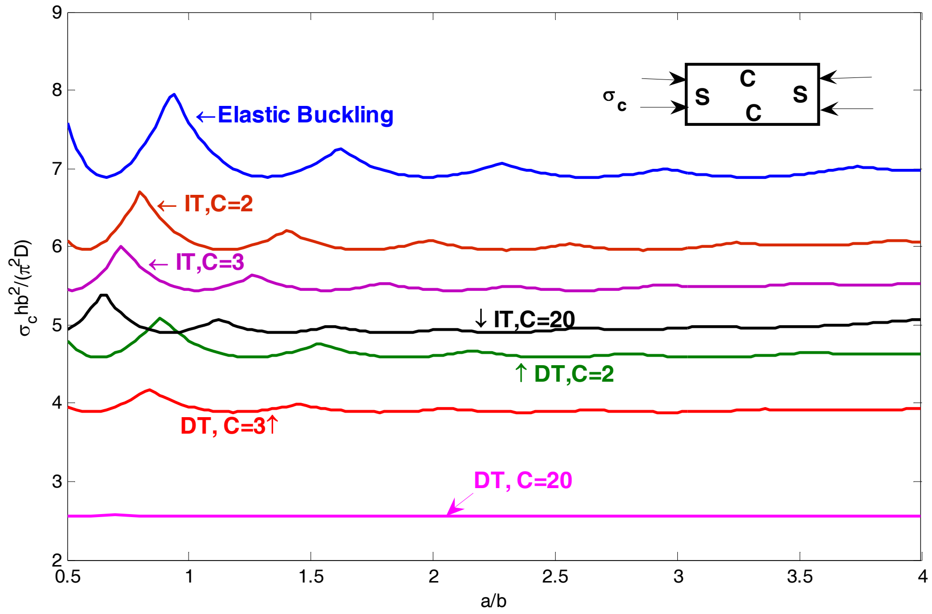
(الف)



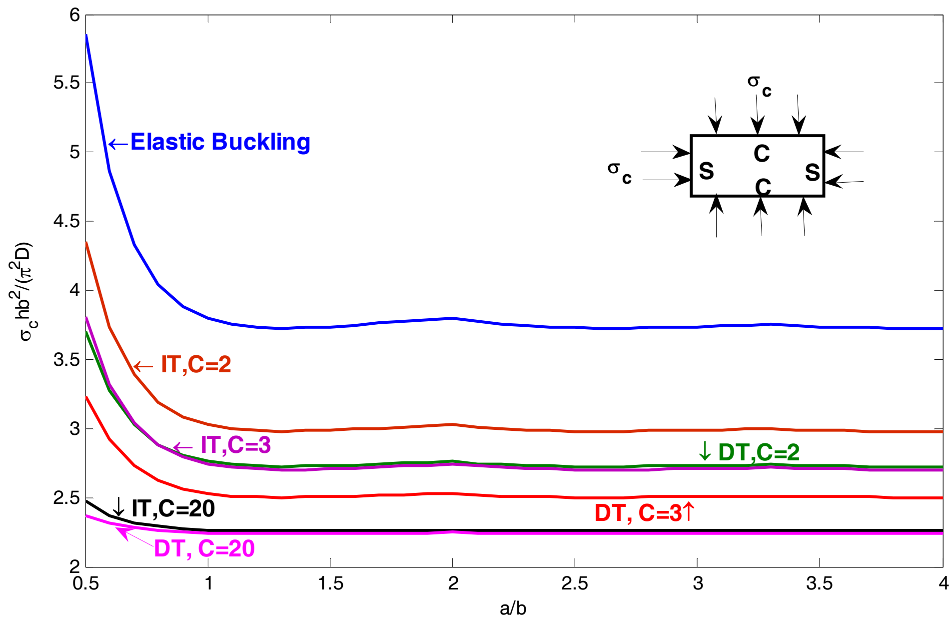
(ب)

شکل۹- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالتSSSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{a}{b}=1, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$$



(الف)



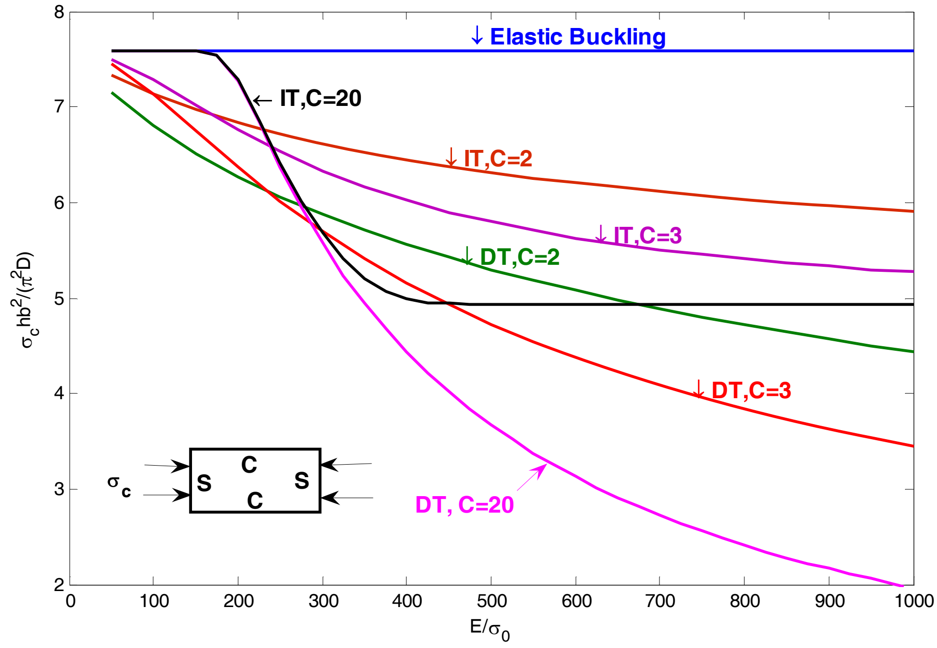
(ب)

شکل۱۰– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت SCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

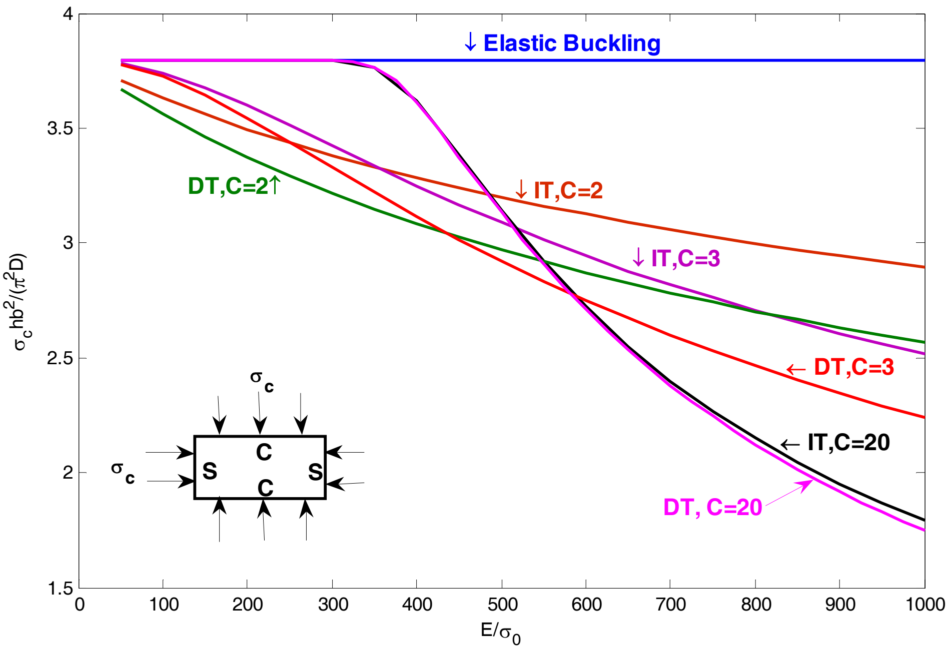
$$(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$$

مقایسه اشکال(۴- الف و ۱۰- الف) نشان می‌دهد که با افزایش شرط مرزی گیردار، در حالت بارگذاری تک محوری فشاری ضریب کمانش افزایش می‌یابد. همچنین در حالت بارگذاری دومحوری فشاری با اضافه شدن شرط مرزی گیردار در لبه $(Y=0,\ Y=b)$ در نسبتهای ابعادی $(a/b\succ 1)$، ضریب کمانش تقریبا ثابت می‌ماند. به عبارت دیگر، با اضافه شدن شرط مرزی گیردار در حالت بارگذاری دومحوری فشاری، افزایش

نسبت ابعادی تاثیری در ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نخواهد داشت، اشکال(۴- ب و ۱۰- ب). با افزودن شرط مرزی گیردار تطابق بین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل در حالت الاستیک-کاملا پلاستیک ($c \to 20$) با ضریب کمانش حاصل از حل الاستیک در هر دو حالت بارگذاری تک محوری و دومحوری کاهش می‌یابد، مقایسه اشکال(۵ و ۱۱).



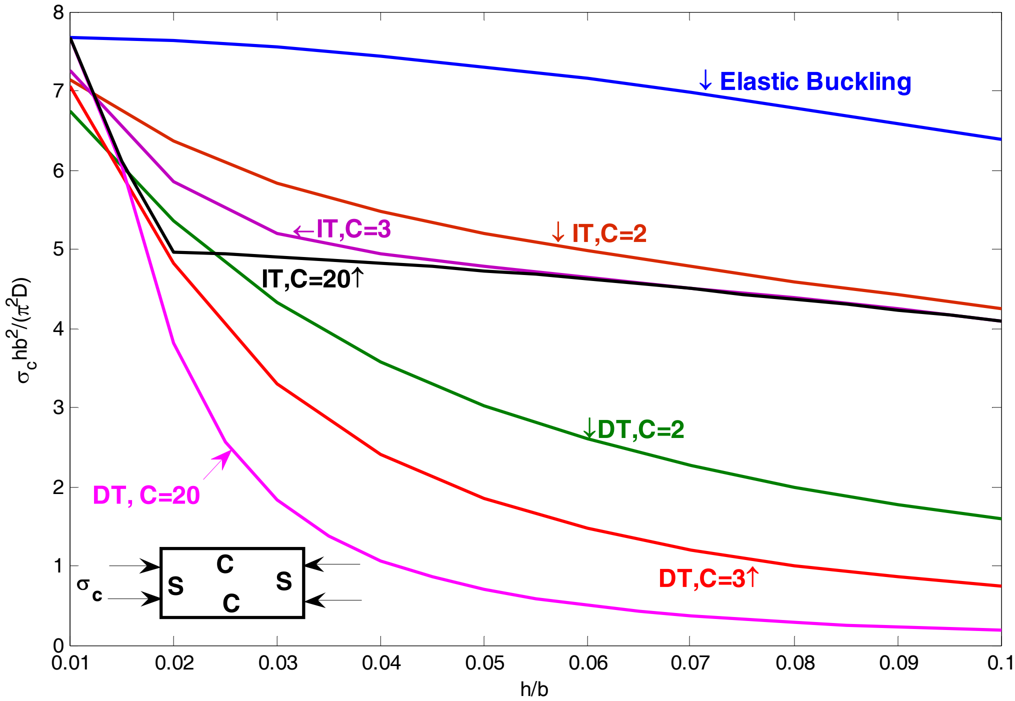
(الف)



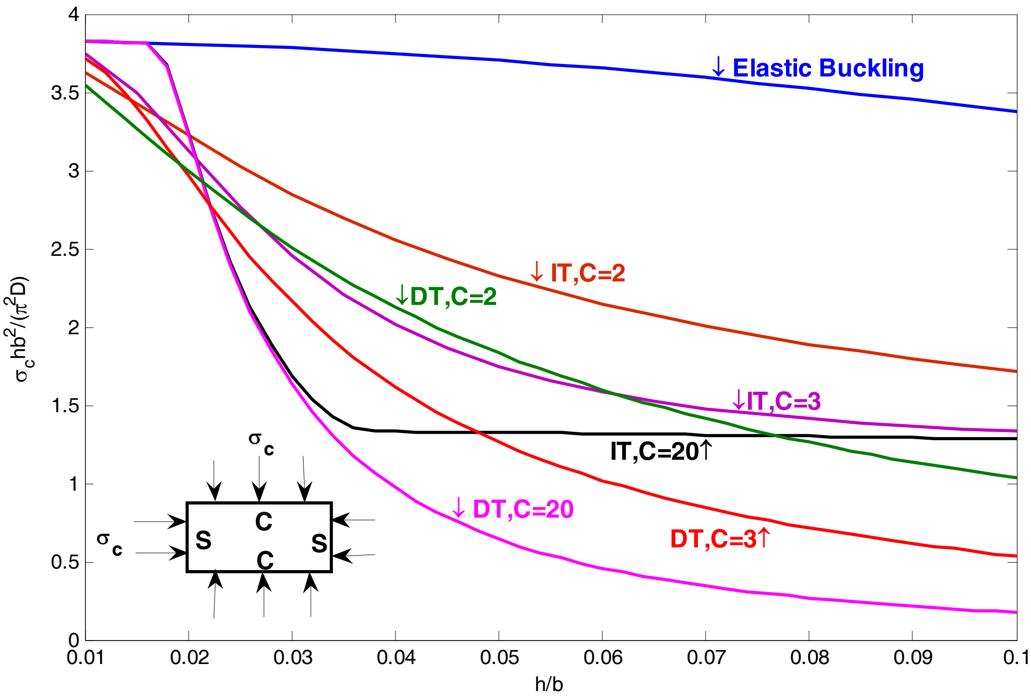
(ب)

شکل۱۱- تغییرات ضریب کمانش بر حسب (E/σ_0) در حالت SCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری

$$\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25\right)$$



(الف)



(ب)

شکل۱۲– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت SCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0} = 750, \frac{a}{b} = 1, \nu = 0.3, \kappa^2 = \frac{5}{6}, k = 0.25)$

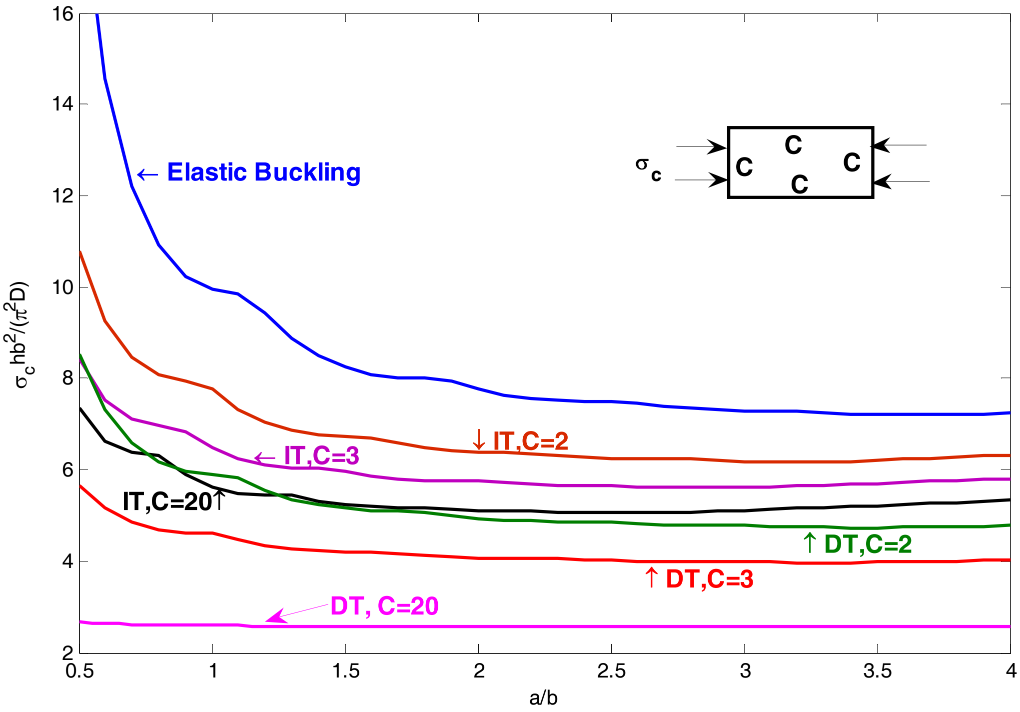
در حالت CCCC با افزایش نسبت ابعادی در شرایط تک محوری و دو محوری فشاری و ضریب ابعادی ($a/b \succ 2$) ضریب کمانش در شرایط یکسان برای هر حالت تقریبا ثابت می‌شود، شکل(۱۳). در هر دو حالت فوق چنانچه ($a/b \leq 2$)، با افزایش نسبت ابعادی ضریب کمانش کاهش می‌یابد. شکل مودهای کمانشی نیز در این حالت به آرامی تغییر می‌کند. همچنین در حالت گیردار، شکل مودهای کمانشی در ضرایب مختلف نسبت ابعادی، کمتر دچار تغییر می‌شوند. با افزایش شرایط مرزی گیردار در صفحه، علاوه بر آنکه ضریب کمانش در شرایط مشابه افزایش می‌یابد، در حالت الاستیک-کاملا پلاستیک تطابق نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل با کمانش الاستیک کاهش می‌یابد، مقایسه اشکال(۵ و ۱۴). با افزایش ضخامت صفحه و همچنین ثابت رامبرگ- ازگود ($c = 20$) در هر حالت ضریب کمانش کاهش می‌یابد. با این حال، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود در حالت بار محوری مشهودتر است، شکل(۱۵- الف). با افزایش گیردار بودن صفحه و افزایش ضخامت در شرایط یکسان، محدوده اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل افزایش می‌یابد، مقایسه اشکال(۶ و ۱۵).

اثر افزوده شدن تکیه‌گاه آزاد، ضریب کمانش حاصل از دو تئوری در مقایسه اشکال(۱۳) و (۱۶) قابل مشاهده می‌باشد. با اضافه شدن تکیه‌گاه آزاد، کاهش زیادی در ضریب کمانش الاستیک پدید می‌آید. همچنین با افزایش ثابت c اختلاف ضریب کمانش حاصل از دو تئوری کمتر می‌شود. به علاوه، افزایش تعداد تغییرات شکل مودها در حالت بارگذاری دو محوری در حالت FCCC نسبت به حالت CCCC کاملا مشهود است، اشکال(۱۳-ب و ۱۶-ب).

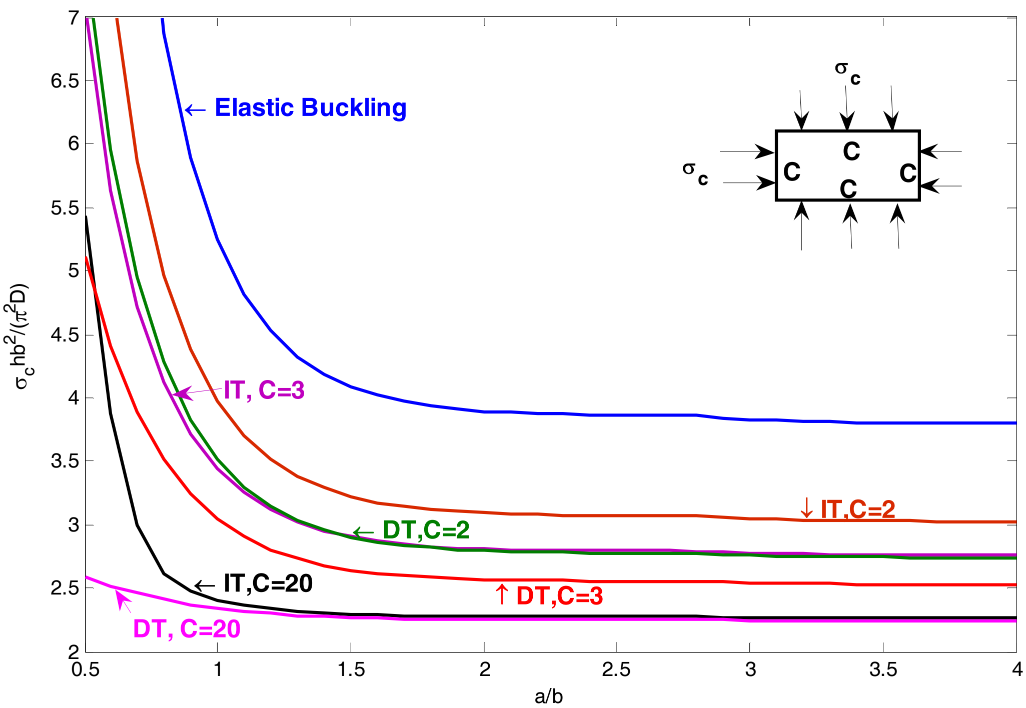
مقایسه سه حالت FCCC و FCFC و FCSC نشان می‌دهدکه در حالت اول و سوم و شرایط بارگذاری تک محوری، با افزایش نسبت ابعادی ضریب کمانش کاهش می‌یابد، اشکال(۱۶- الف و ۲۲- الف). اما در حالت FCFC با افزایش نسبت ابعادی ابتدا ضریب کمانش افزایش و سپس کاهش می‌یابد که با افزایش ثابت c(حالت لاستیک-کاملا پلاستیک) این تغییرات بسیار کم می‌گردد، شکل(۱۹- الف). با مقایسه دو حالت FCCC و FCSC مشاهده می‌شود که در حالت بارگذاری تک محوری در نسبتهای ابعادی مختلف تفاوت زیادی بین منحنی‌های دو شکل یافت نمی‌شود، اشکال(۱۶- الف و ۲۲- الف).

در بارگذاری دو محوری مساوی در حالت FCCC با افزایش نسبت ابعادی، ضریب کمانش کاهش می‌یابد، شکل(۱۶-ب). در حالیکه در حالت FCFC با افزایش نسبت ابعادی، ضریب کمانش ابتدا افزایش، سپس کاهش و بعد تقریبا ثابت می‌شود، شکل(۱۹-ب). در حالت FCSC با افزایش نسبت ابعادی، ضریب کمانش ابتدا افزایش و سپس به صورت یکنواختی کاهش می‌یابد، شکل(۲۲-ب).

در ضرایب مختلف $\dfrac{E}{\sigma_0}$ با افزودن شرط مرزی آزاد در هر دو حالت فشاری محوری و فشاری دومحوری مساوی با افزایش ثابت c محدوده تطابق ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل و همچنین انطباق آنها با ضریب کمانش الاستیک افزایش می‌یابد، مقایسه اشکال(۱۴،۱۷ و ۲۰). همچنین با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری با افزودن شرط مرزی آزاد کمتر می‌شود، مقایسه اشکال(۱۵، ۱۸ و ۲۱).

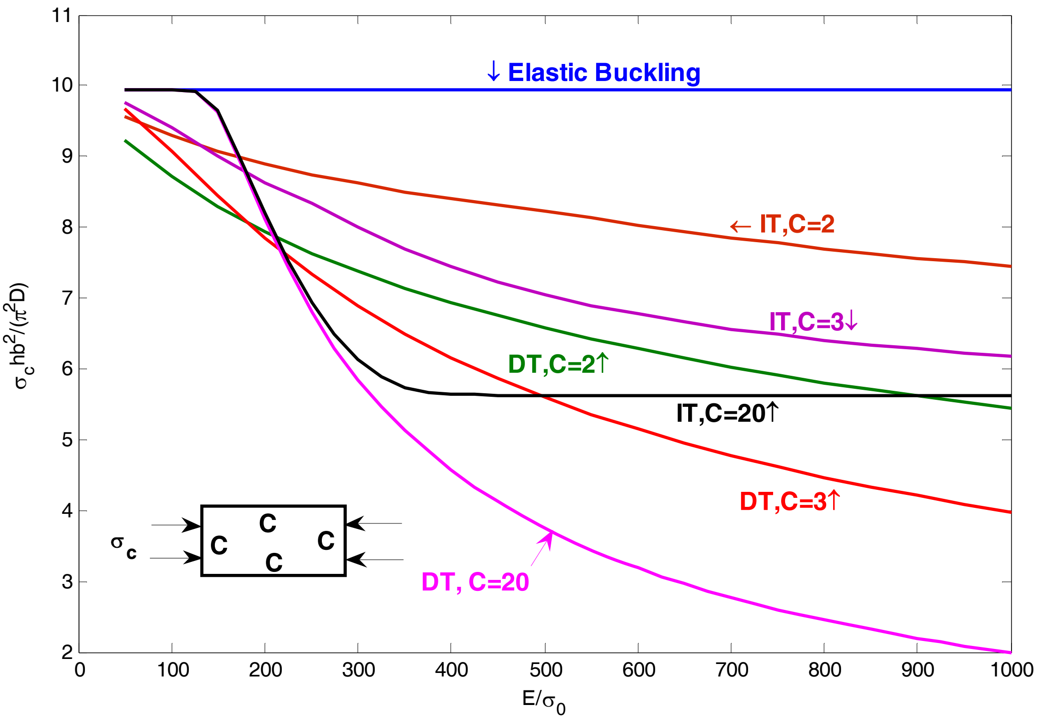


(الف)

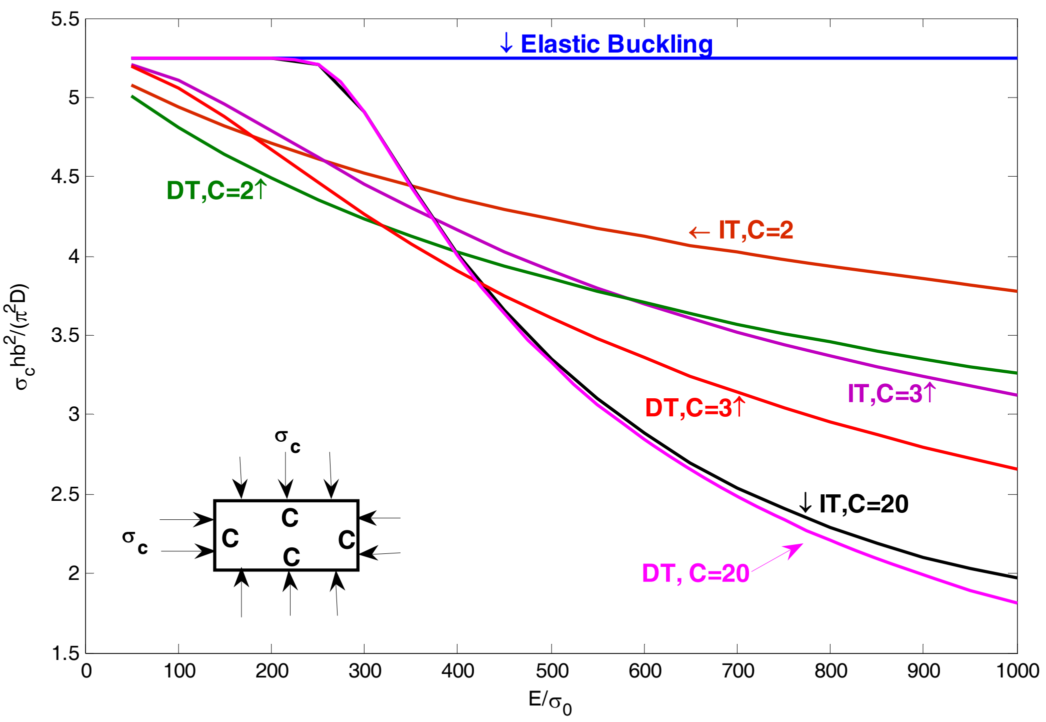


(ب)

شکل ۱۳– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت CCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

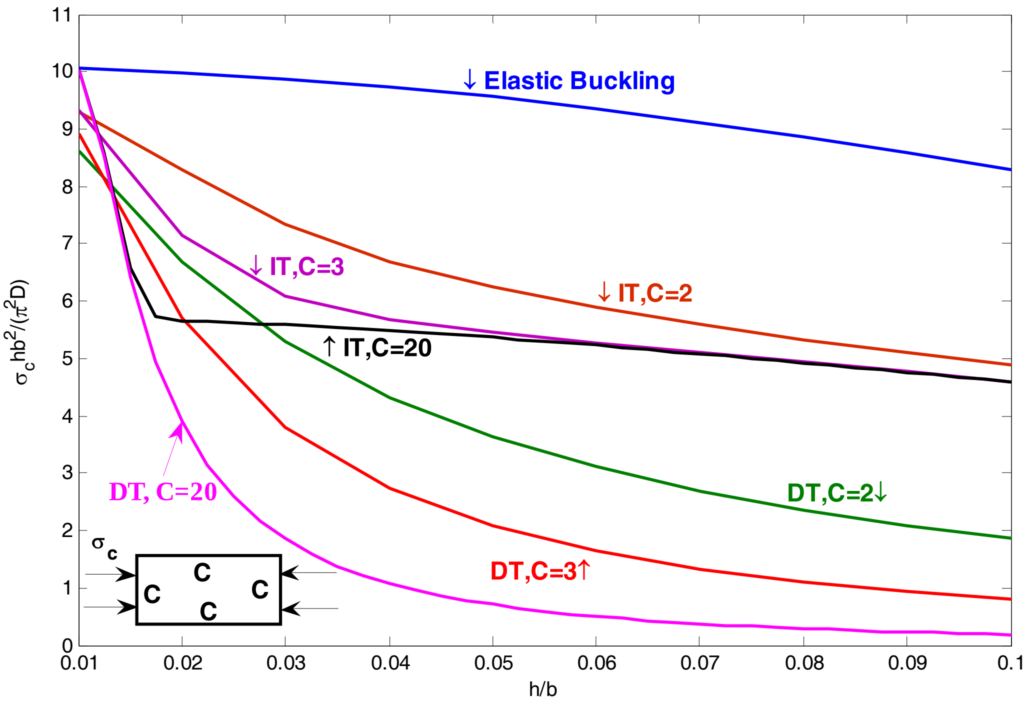


(الف)

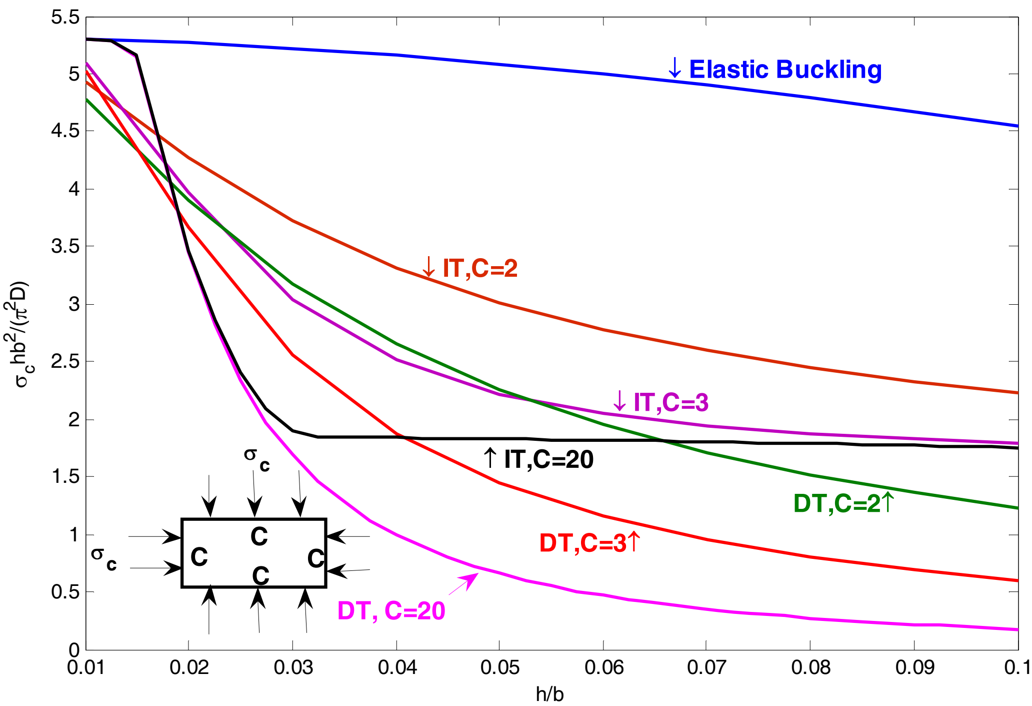


(ب)

شکل ۱۴– تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت CCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

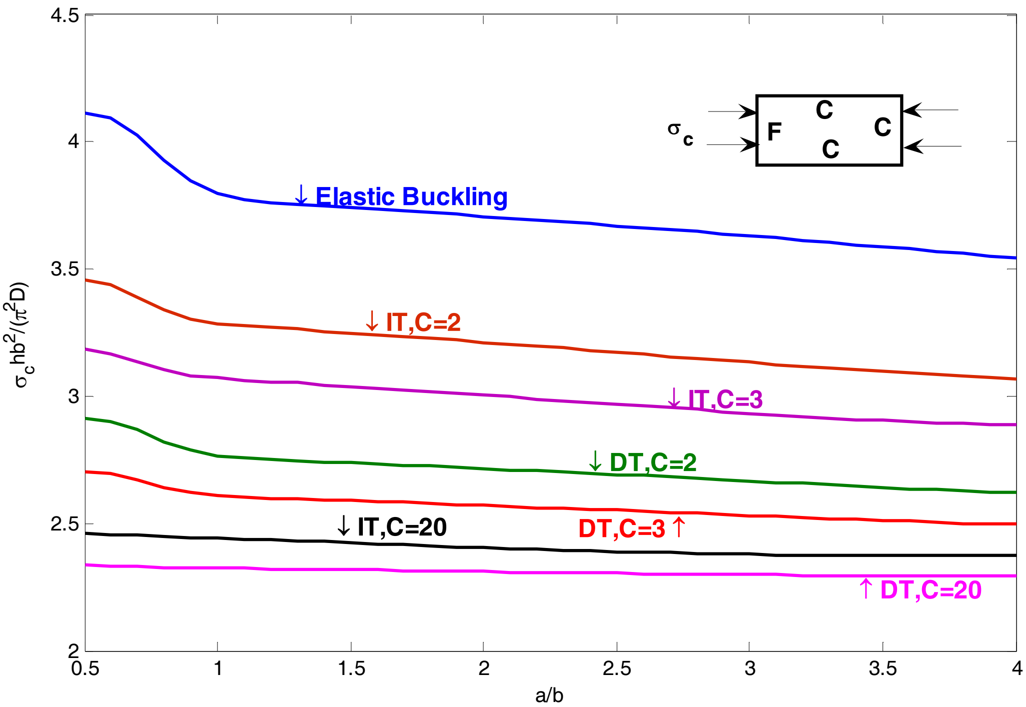


(الف)

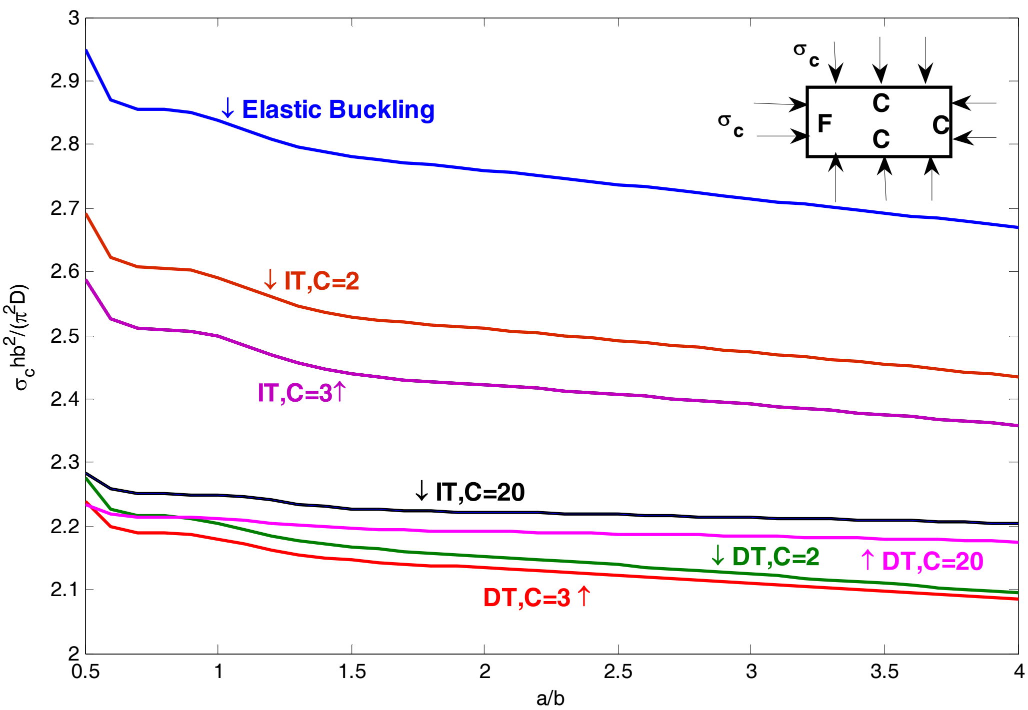


(ب)

شکل ۱۵- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت CCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0} = 750, \frac{a}{b} = 1, \nu = 0.3, \kappa^2 = \frac{5}{6}, k = 0.25)$

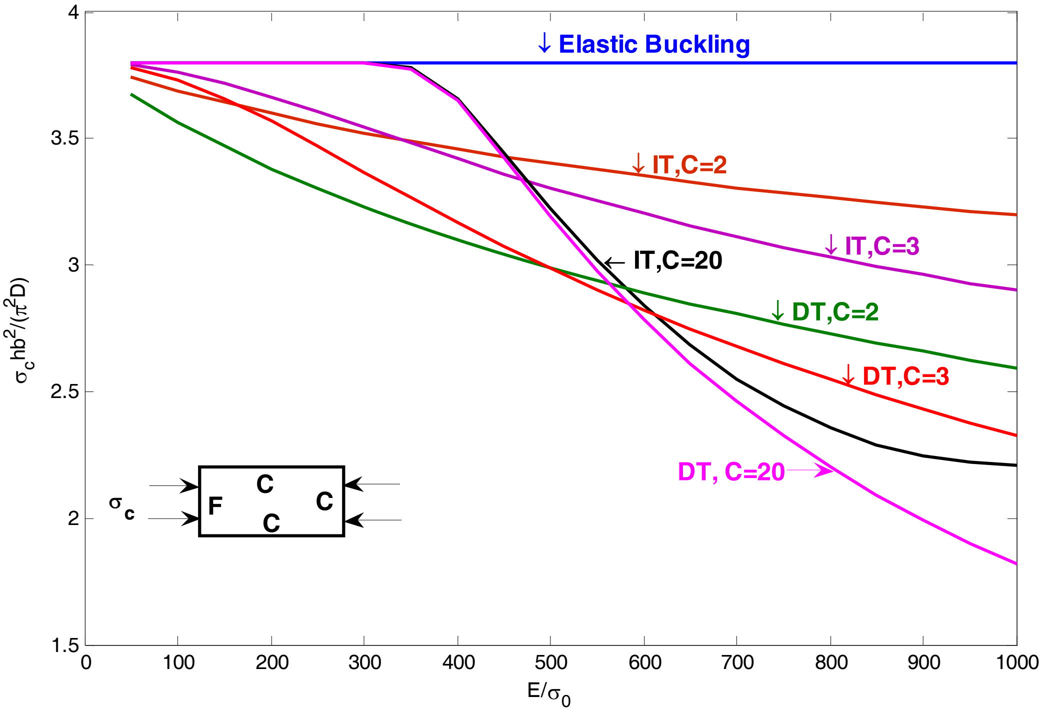


(الف)

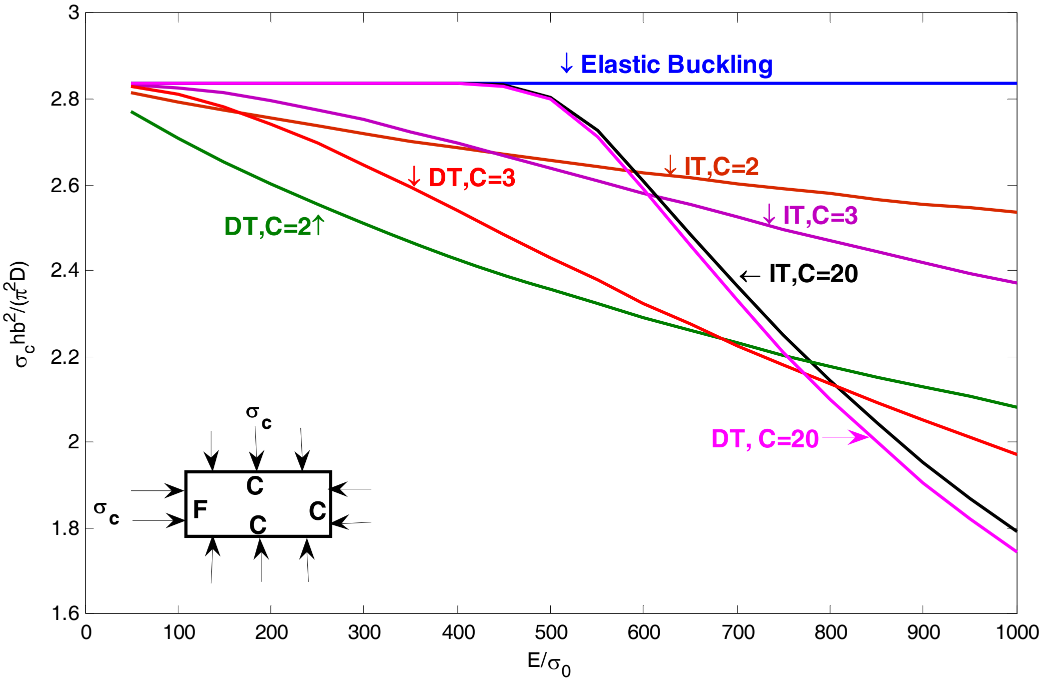


(ب)

شکل۱۶- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت FCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

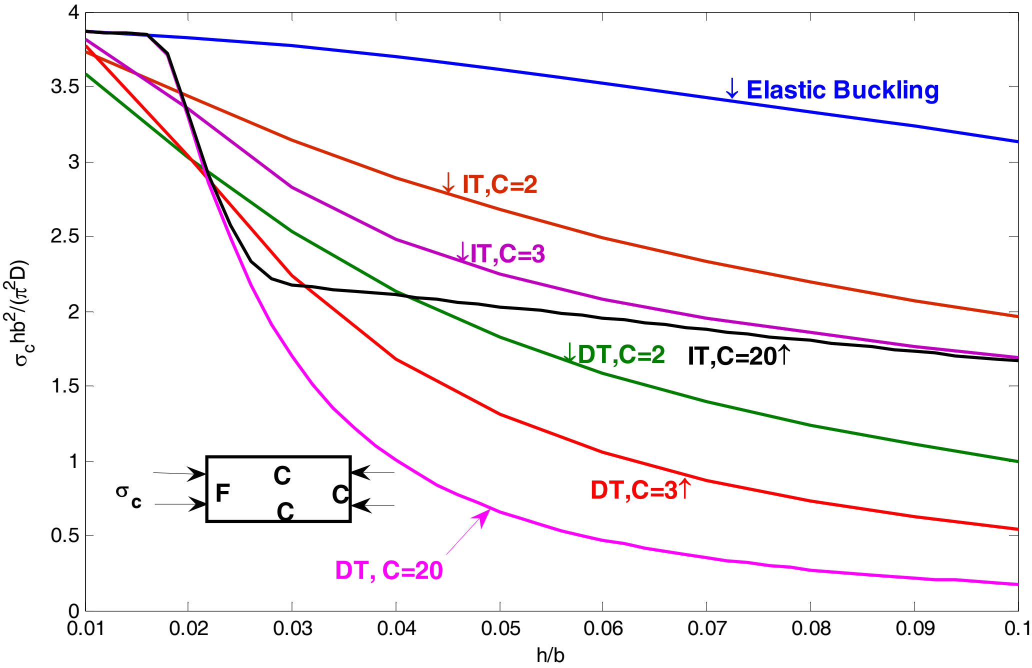


(الف)

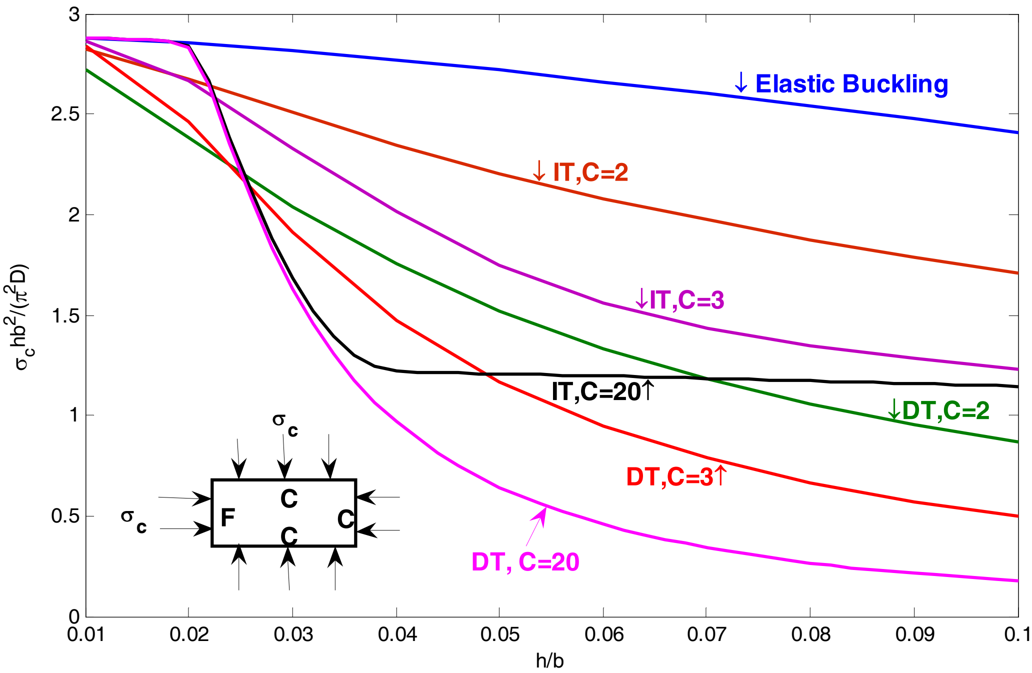


(ب)

شکل ۱۷- تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت FCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

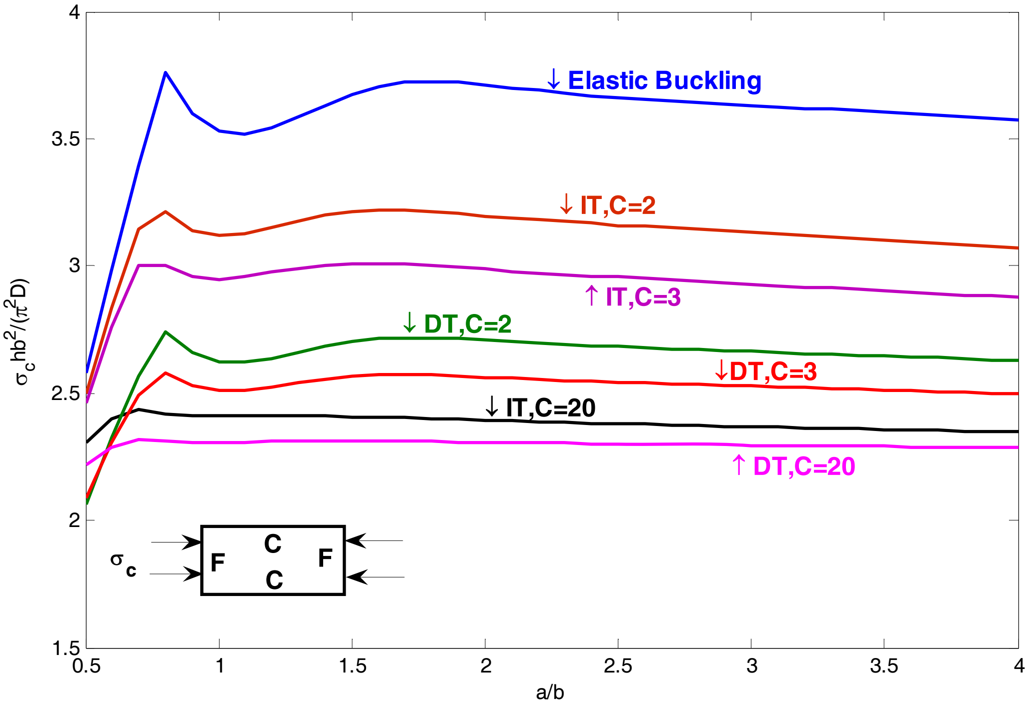


(الف)

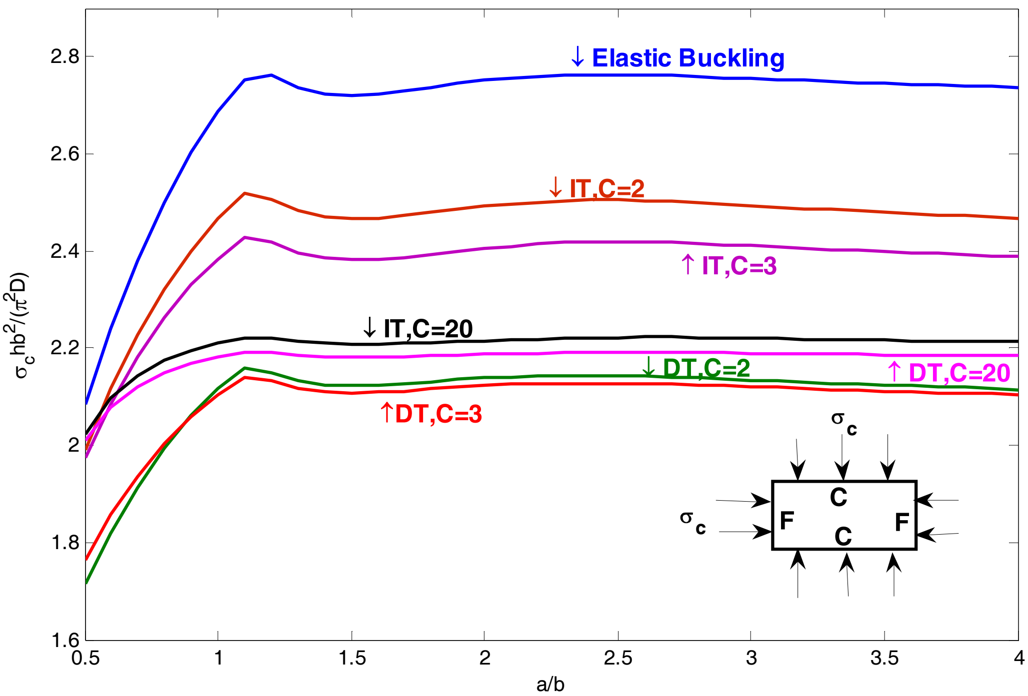


(ب)

شکل۱۸– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت FCCC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{a}{b}=1, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

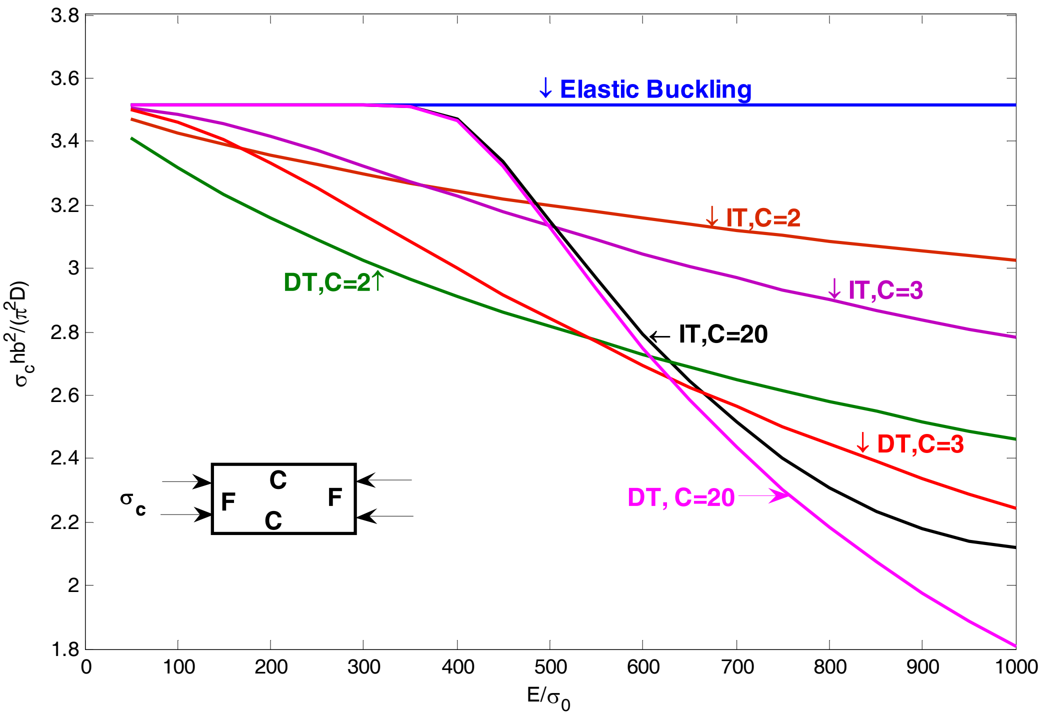


(الف)

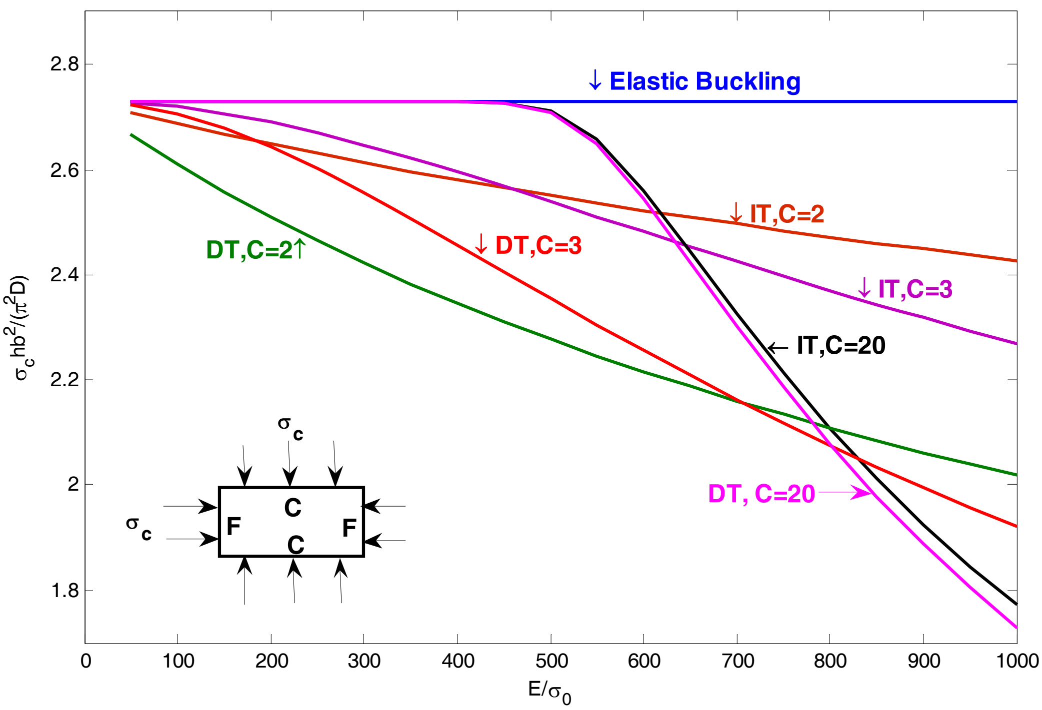


(ب)

شکل۱۹- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت FCFC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0} = 750, \frac{h}{b} = 0.025, \nu = 0.3, \kappa^2 = \frac{5}{6}, k = 0.25)$

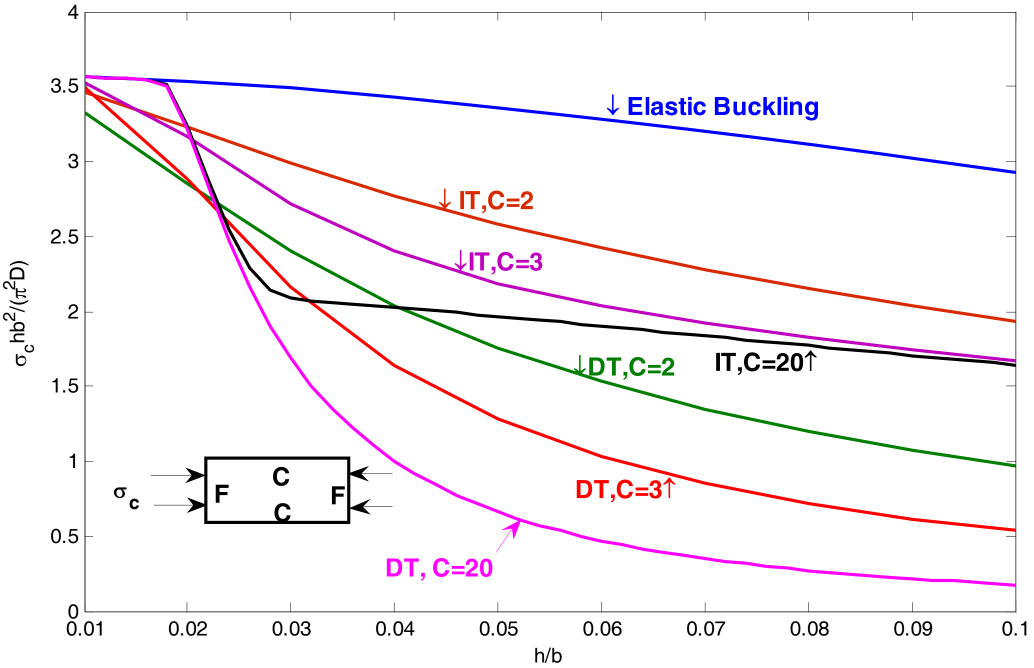


(الف)

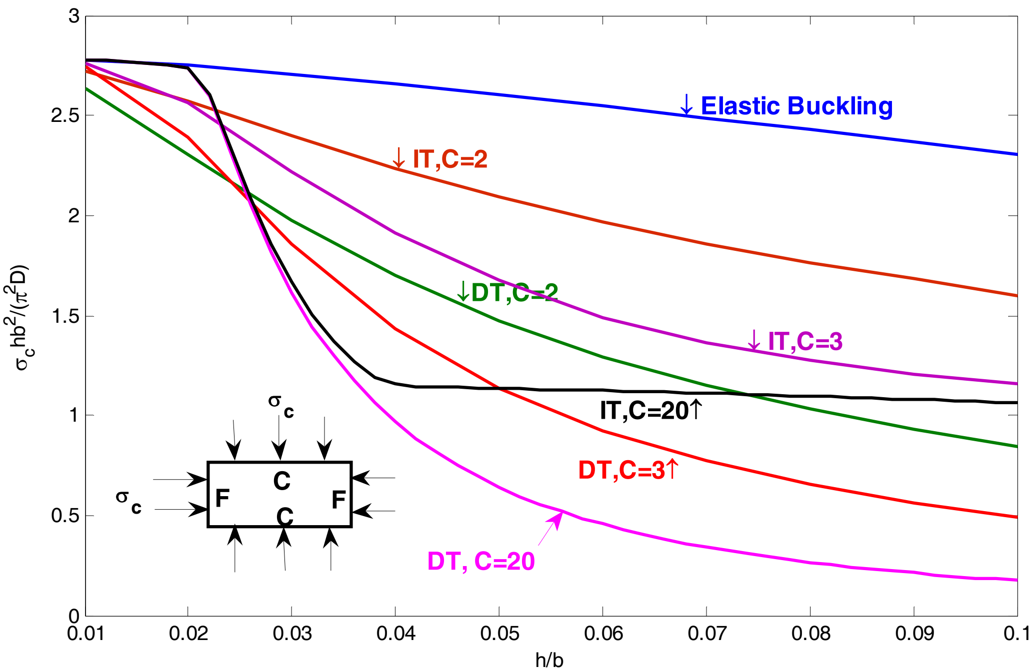


(ب)

شکل۲۰- تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت FCFC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

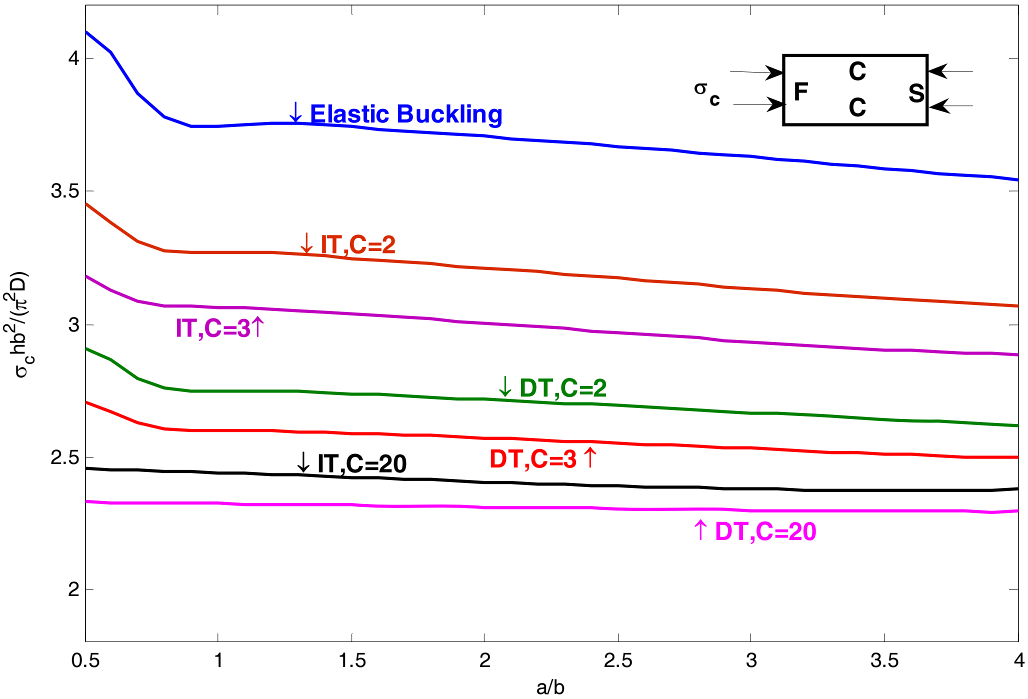


(الف)

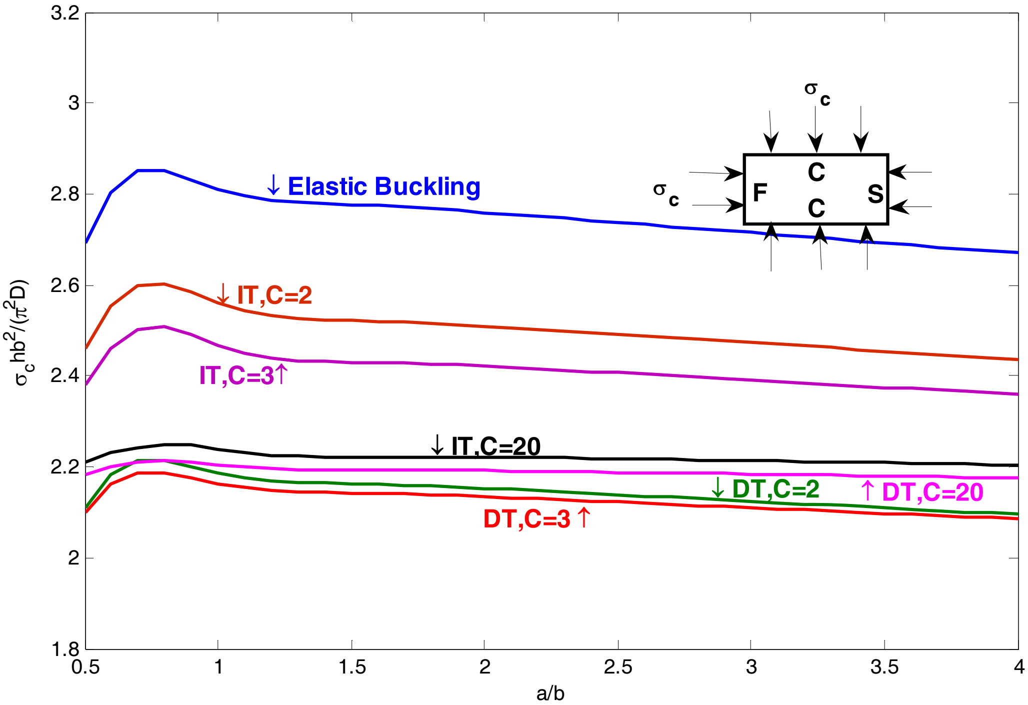


(ب)

شکل۲۱– تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت FCFC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{a}{b}=1, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

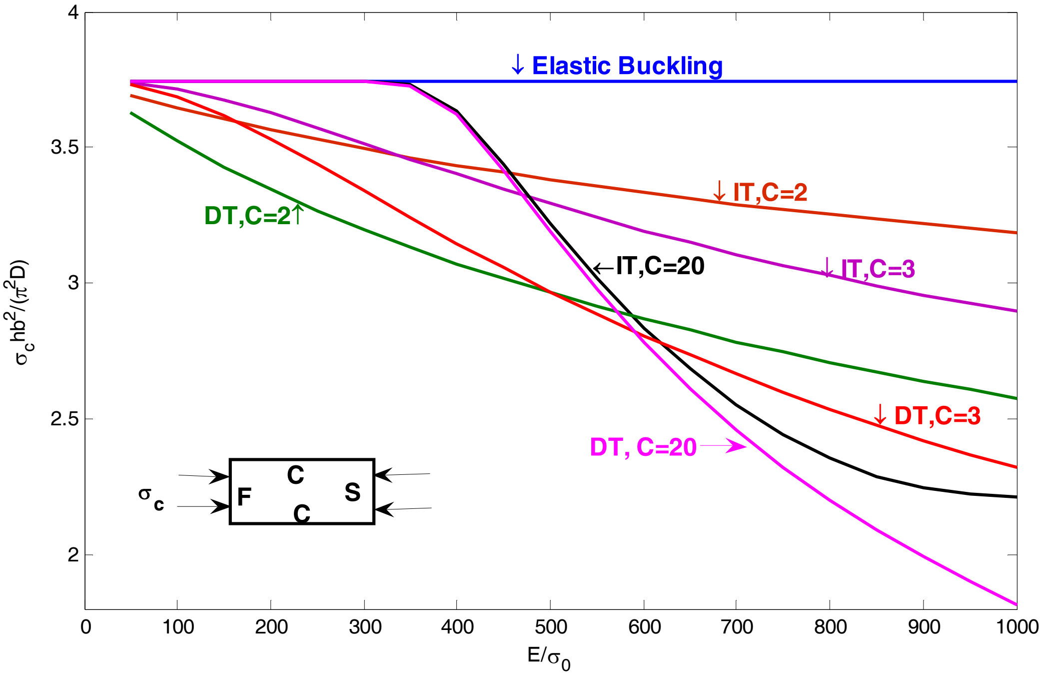


(الف)

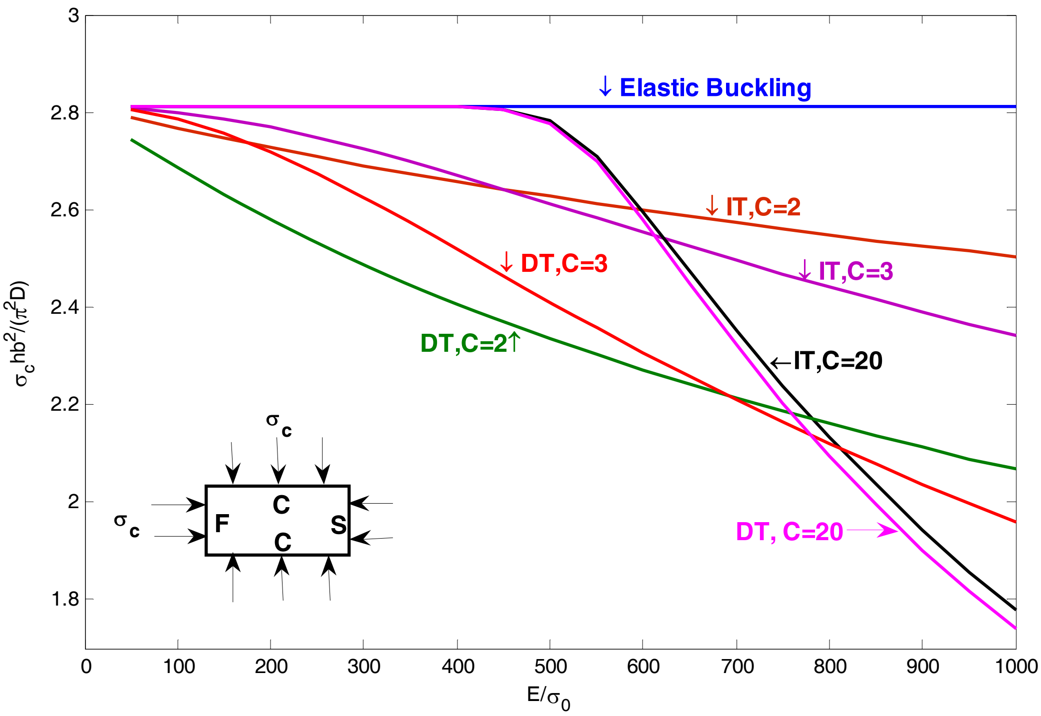


(ب)

شکل ۲۲- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ابعادی در حالت FCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

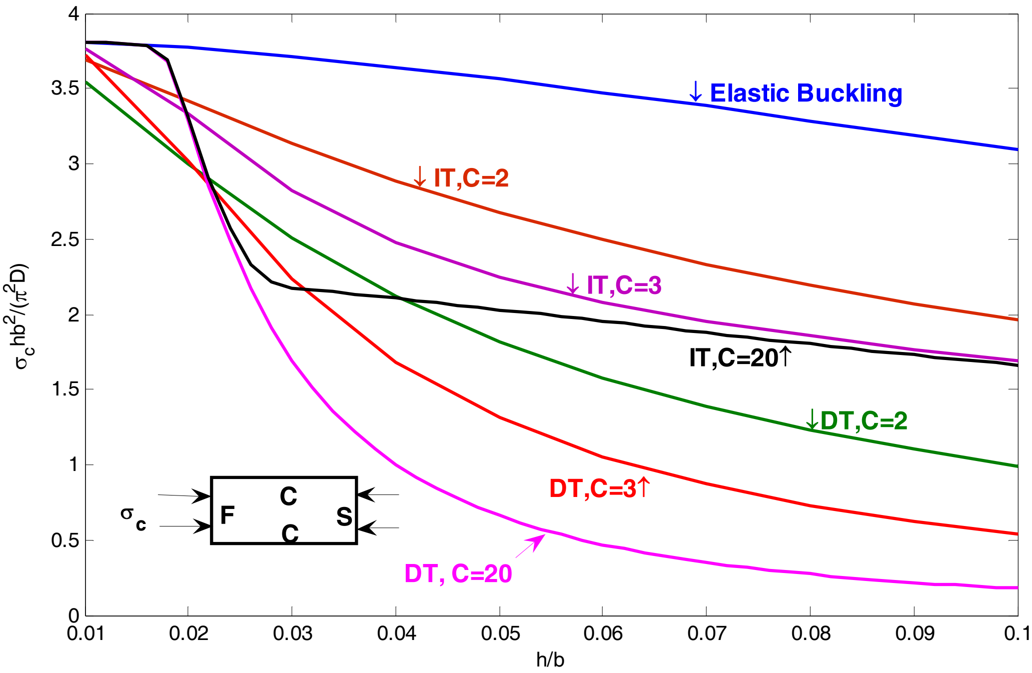


(الف)

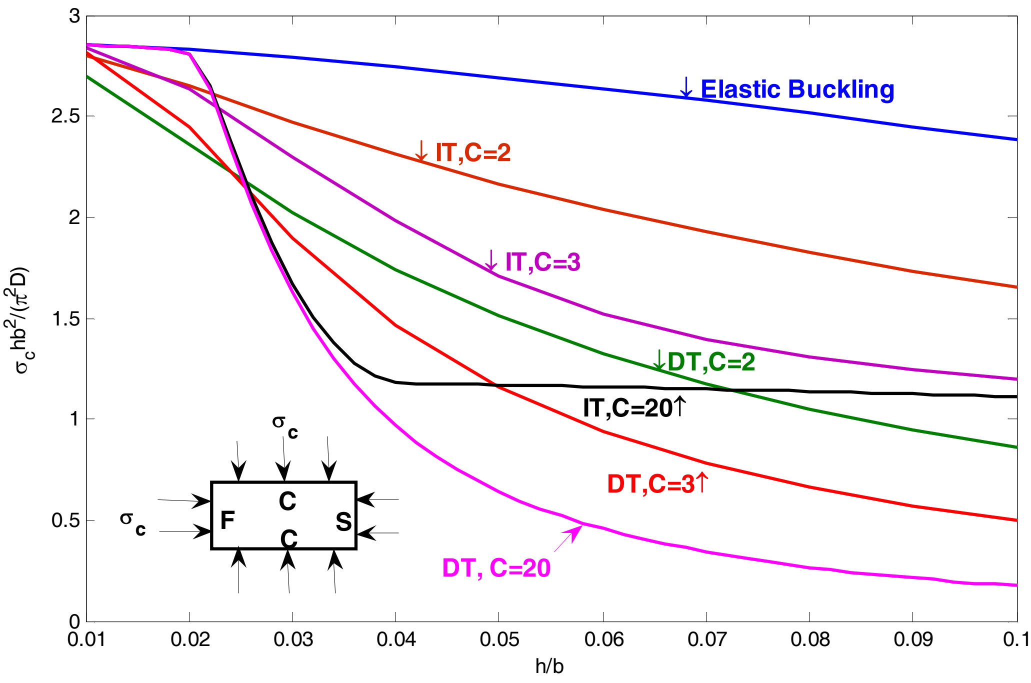


(ب)

شکل ۲۳- تغییرات ضریب کمانش برحسب (E/σ_0) در حالت FCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{a}{b}=1, \frac{h}{b}=0.025, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$



(الف)



(ب)

شکل۲۴- تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت در حالت FCSC در بارگذاری (الف) تک محوری، (ب) دو محوری $(\frac{E}{\sigma_0}=750, \frac{a}{b}=1, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

۵-۱- اثر ضریب تصحیح برشی (κ^2) بر ضریب کمانش

چنانکه مورد انتظار است، در صفحات نازک ضریب کمانش حاصل از بکارگیری تئوری صفحات نازک و تئوری صفحات ضخیم بر هم منطبق می‌باشند و ضریب تصحیح برش تاثیری بر نتایج حاصل ندارد. با این حال، با افزایش ضخامت صفحه تاثیر این ضریب زیاد می‌شود. رایسنر(۱۹۴۵) و میندلین(۱۹۵۱) به ترتیب مقادیر $\kappa^2 = 5/6$ و $\kappa^2 = \pi^2/12$ را برای ضریب تصحیح برشی پیشنهاد نمودند[۱۵ و۱۶]. ویتریک(۱۹۸۷) در تحقیقی برای حل دقیق معادلات الاستیسیته و تئوری میندلین برای صفحات تحت شرایط مرزی ساده دریافت که مقدار ضریب تصحیح برشی $\kappa^2 = 5/(6-\upsilon)$ به واقعیت نزدیکتر است[۱۷]. برت و مالیک(۱۹۹۸) در تحقیقات خود نظر ویتریک را تایید کردند[۱۸]. با افزایش مقدار ضریب تصحیح برشی ($\kappa^2 = 1000$) نتایج حاصل از تئوری رایسنر به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود، جدول(۵). به منظور نشان دادن اثر ضریب تصحیح برشی بر ضریب کمانش صفحات، منحنی ضریب بار- ضریب کمانش برای صفحات نازک ($h/b \le 0.05$) و ضخیم ($h/b \succ 0.05$) رسم شده است، اشکال(۲۵ تا ۲۹). تئوری کلاسیک صفحات در حالت فشاری دومحوری ($0 \le \xi \le -1$)، بار کمانشی بیشتری را نسبت به تئوری صفحات ضخیم پیش‌بینی می‌نماید، زیرا این تئوری اثر تغییر شکل برشی عرضی را نادیده گرفته و صفحه را سخت‌تر فرض می‌کند، اشکال(۲۵ تا ۲۹). با این حال، در حالت کششی محوری-فشاری عمودی ($1.5 \le \xi \prec 0$) اینگونه نیست و بیشترین اختلاف بین تئوریهای نموی و تغییرشکل و همچنین نتایج حاصل از بکارگیری معادلات صفحات نازک و ضخیم در این ناحیه وجود دارد.

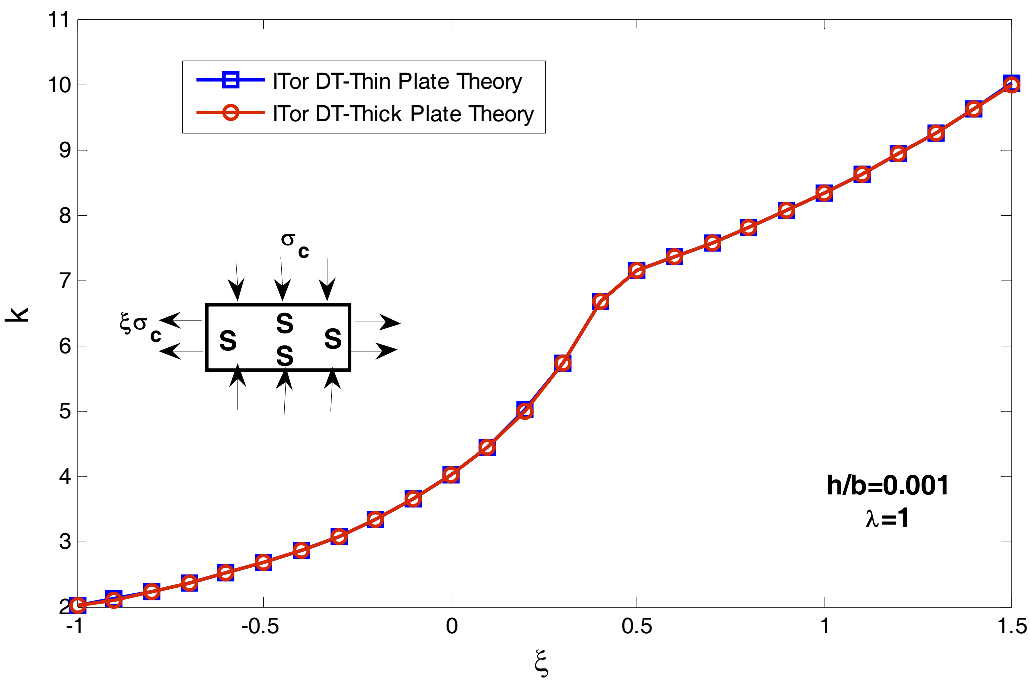
در صفحات خیلی نازک ($h/b = 0.001$) ضریب کمانش حاصل از دو تئوری صفحات نازک و ضخیم در هر دو حالت فشاری دو محوری و کششی محوری-فشاری عمودی بر هم منطبق هستند، شکل(۲۵). اما با افزایش ضخامت صفحه ($h/b = 0.02$) در حالت کششی محوری-فشاری عمودی ضریب کمانش حاصل از تئوری صفحات ضخیم که در آن اثر ضریب تصحیح برشی در نظر گرفته شده، بیشتر از ضریب کمانش پیش‌بینی شده توسط تئوری صفحات نازک در هر دو تحلیل تئوری تغییرشکل و نموی می‌باشد، شکل(۲۶). در این حالت نتایج حاصل از تئوری صفحات ضخیم برای دو تئوری نموی و تغییرشکل برهم منطبق هستند. با این وجود، نتایج حاصل از تئوری صفحات نازک برای تئوری تغییرشکل، کمتر از حالت نموی می‌باشد. نکته جالب آنکه در شرایط $h/b = 0.05$، ضریب کمانش بدست آمده از تئوری صفحات نازک در حالت فشاری دو محوری و برای هر دو تئوری نموی و تغییرشکل نسبت به تئوری صفحات ضخیم بیشتر است. اما در حالت کششی محوری-فشاری عمودی ($1.5 \le \xi \prec 0$) و با استفاده از تئوری نموی ضریب کمانش حاصل از تئوری صفحات نازک نسبت به صفحات ضخیم بیشتر است که این نتیجه برای حالت تئوری تغییرشکل کاملا معکوس می‌باشد. با افزایش ضخامت صفحه ($h/b \succ 0.1$) برای هر دو حالت فشاری دو محوری و کششی محوری- فشاری عمودی ضریب کمانش حاصل از تئوری صفحات نازک بیشتر از تئوری صفحات ضخیم، برای هر دو تئوری نموی و تغییرشکل، می‌باشد، اشکال(۲۸ و ۲۹). همچنین در حالت $h/b = 0.2$ هیچ توافقی بین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل و همچنین نتایج حاصل از حل معادلات صفحات نازک و ضخیم وجود ندارد.

اثر ضریب تصحیح برشی بر ضریب کمانش در صفحات ضخیم $(h/b \succ 0.05)$ در جدول(۵) کاملا مشهود است. به علاوه، تاثیر ضریب تصحیح برشی بر تئوری نموی بیشتر از تئوری تغییرشکل می‌باشد، اشکال(۲۸ و ۲۹).

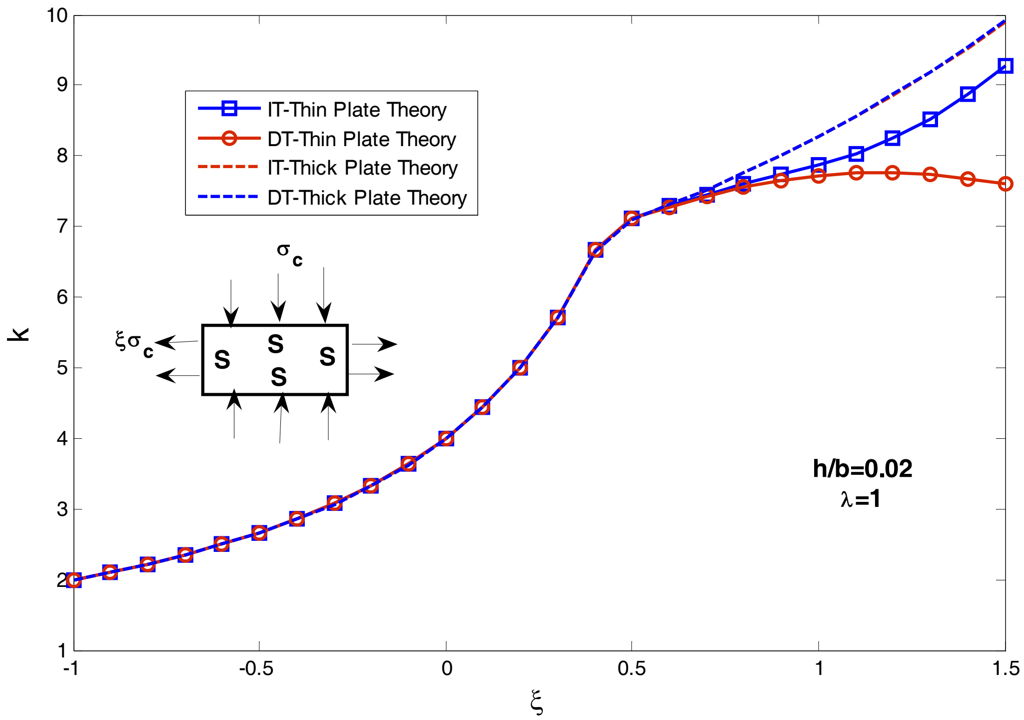
جدول۵- اثر ضریب تصحیح برشی بر ضریب کمانش صفحات مربعی تحت بار فشاری دو محوری مساوی در ضخامتهای مختلف با شرایط تکیه گاهی SSSS

	h/b	Reissner Theory $\kappa^2=5/6$		Reissner Theory $\kappa^2=1000$		Classical Theory	
		IT	DT	IT	DT	IT	DT
K	0.001	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	0.05	1.8713	1.8649	1.8896	1.8830	1.8896	1.8830
	0.075	0.9127	1.1476	0.9257	1.1542	0.9257	1.1542
	0.1	0.8083	0.7300	0.8167	0.7345	0.8168	0.7346

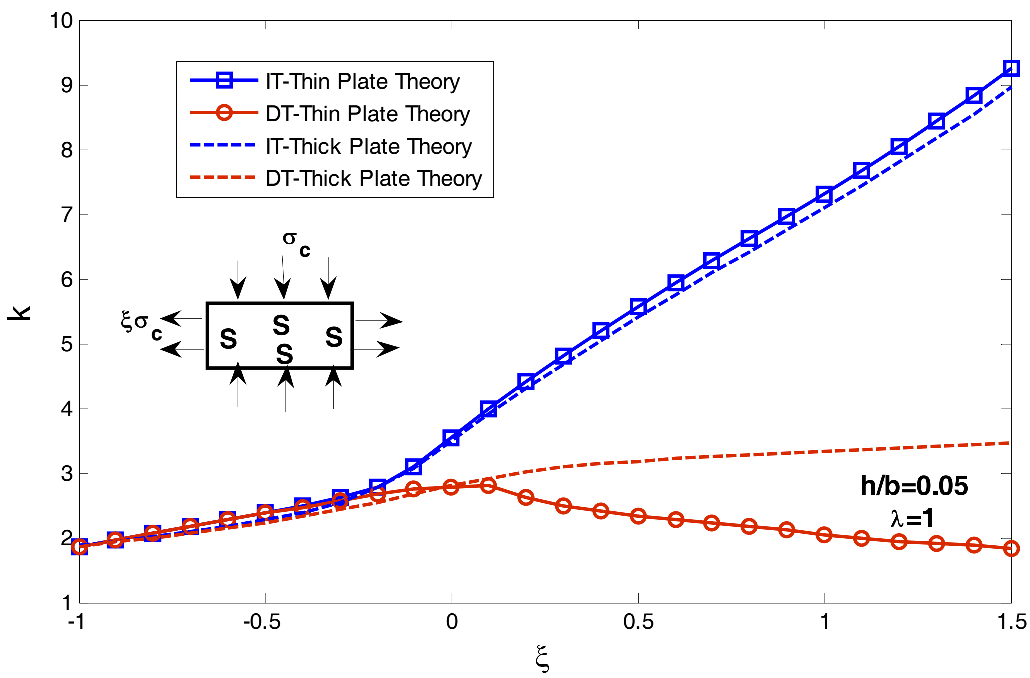
بطور کلی می‌توان بیان کرد که با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری و همچنین نتایج حاصل از استفاده از معادلات صفحات نازک و ضخیم بیشتر می‌شود. همچنین تاثیر ضریب تصحیح برشی در تئوری نموی بیشتر است، بطوریکه با افزایش ضخامت صفحه تفاوت نتایج حاصل از تئوری‌های صفحات نازک و ضخیم در حالت نموی بیشتر می‌گردد، شکل(۲۹).



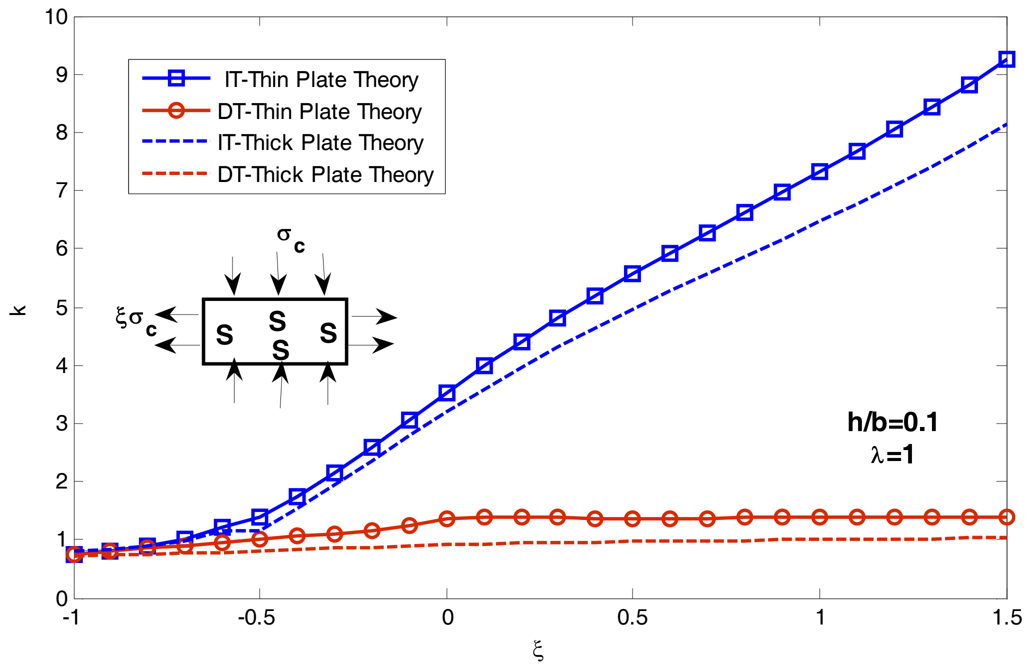
شکل۲۵– مقایسه تغییرات ضریب بار برحسب ضریب کمانش برای صفحات نازک $h/b=0.001$ در حالت SSSS با استفاده از دو تئوری (الف) صفحات نازک، (ب) صفحات ضخیم



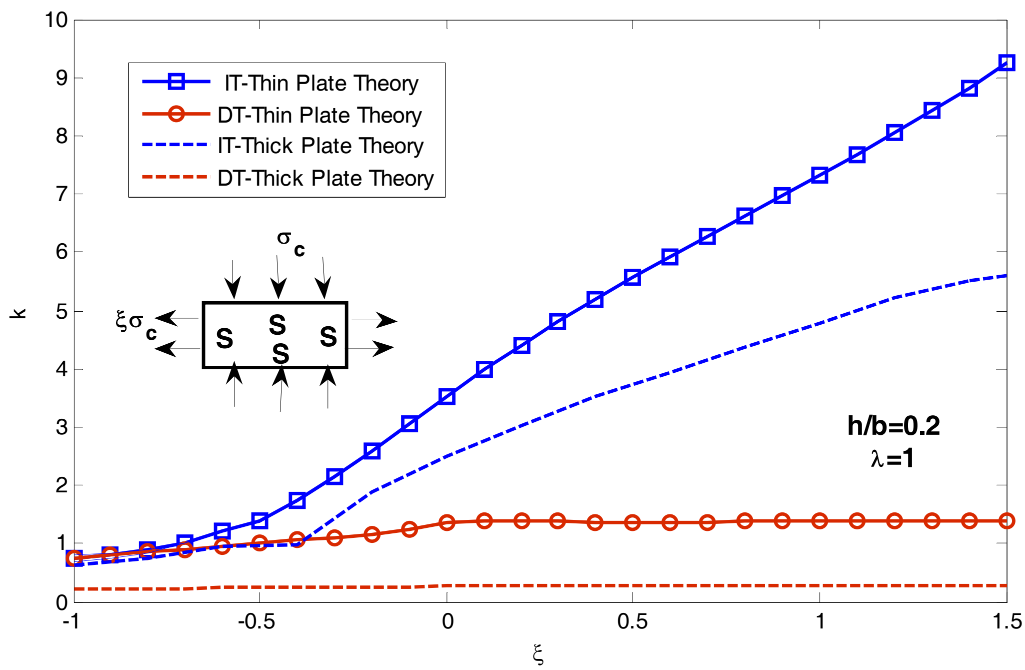
شکل ۲۶– مقایسه تغییرات ضریب بار برحسب ضریب کمانش برای صفحات نازک $h/b = 0.02$ در حالت SSSS با استفاده از دو تئوری (الف) صفحات نازک، (ب) صفحات ضخیم



شکل ۲۷– مقایسه تغییرات ضریب بار برحسب ضریب کمانش برای صفحات نازک $h/b = 0.05$ در حالت SSSS با استفاده از دو تئوری (الف) صفحات نازک، (ب) صفحات ضخیم



شکل ۲۸– مقایسه منحنی ضریب بار-ضریب کمانش برای صفحات ضخیم $h/b=0.1$ در حالت SSSS با استفاده از دو تئوری(الف) صفحات نازک، (ب) صفحات ضخیم



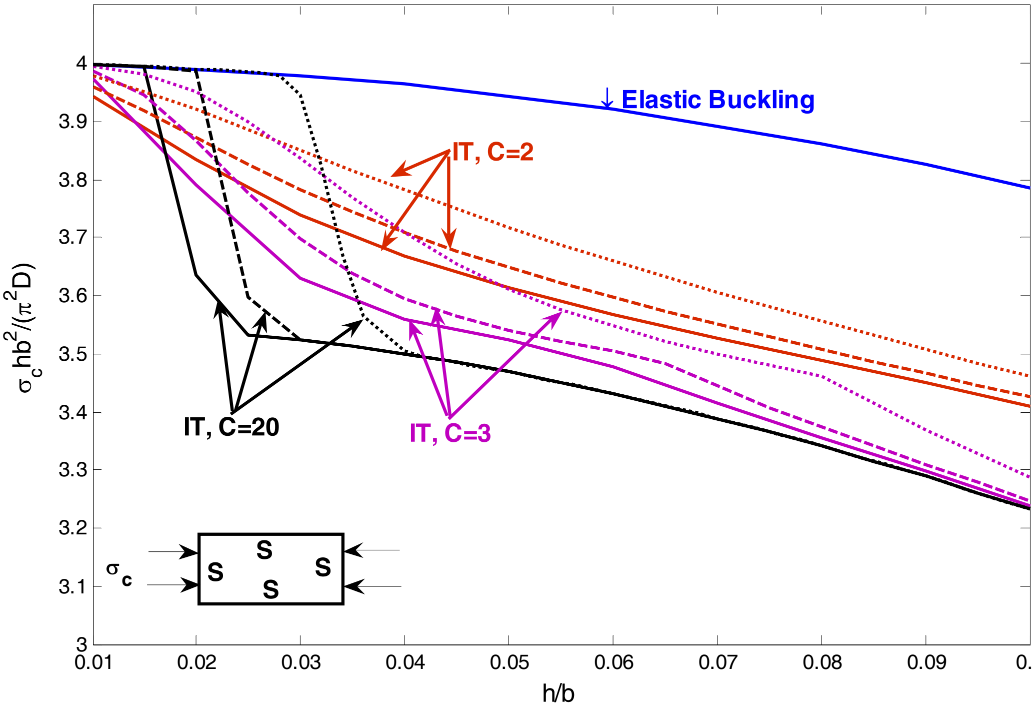
شکل ۲۹– مقایسه تغییرات ضریب بار برحسب ضریب کمانش برای صفحات ضخیم $h/b=0.2$ در حالت SSSS با استفاده از دو تئوری (الف) صفحات نازک، (ب) صفحات ضخیم

۵-۲- اثر ضریب بار

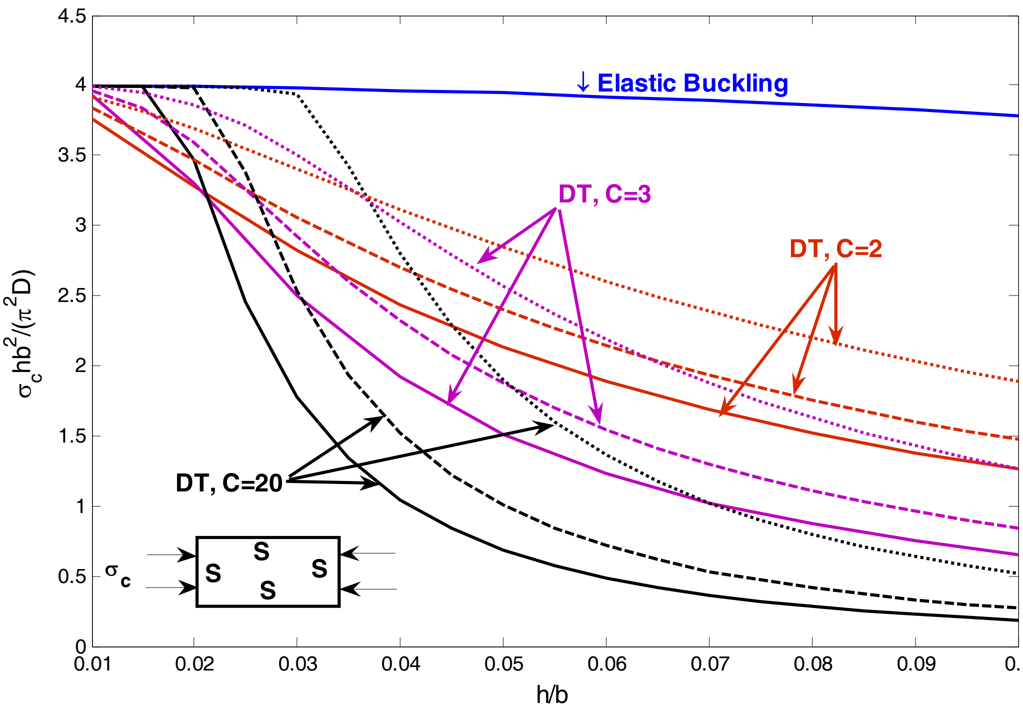
همانطور که در اشکال(۲۵ تا ۲۹) مشاهده مـی‌گـردد بـا افـزایش ضـریب بـار در تحلیـل بـه کمـک تئـوری تغییرشکل و در حالت فشاری دو محوری، ضریب کمانش کاهش می‌یابد. در صفحات نازک توافق خوبی بـین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل وجود دارد. اما با افزایش ضخامت صفحه $(h/b \succ 0.05)$ نتـایج حاصل از دو تئوری از یکدیگر دور می‌شوند و با افزایش ضریب بار در حالت کششی محوری- فشاری عمودی این اختلاف بیشتر می‌شود. به علاوه، مشاهده می‌شود که در هنگام بکارگیری تئوری تغییرشکل، بـا افـزایش ضخامت صفحه ضریب کمانش در ضرایب بار مختلف (کششی یا فشاری) تغییرات چندانی ندارد، اشـکال(۲۸ و ۲۹).

۵-۳- اثر خواص مواد

به منظور بررسی اثر خواص مواد، تغییرات ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت برای حالـت SSSS تحـت بارگذاری تک محوری و دومحوری مساوی با استفاده از تئوریهای نموی و تغییرشکل مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل بر اساس ثوابت رامبرگ- ازگود $\frac{E}{\sigma_0}=250$ با علامـت نقطـه چـین، $\frac{E}{\sigma_0}=500$ بـا علامـت خط چین و $\frac{E}{\sigma_0}=750$ با علامت خط پر در هر حالـت $c=2, 3, 20$ در اشـکال(۳۰ و۳۱) نشـان داده شـده است. در صفحات ضخیم با افزایش مقدار c ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نمـوی و تغییرشـکل و در هـر دو حالت بارگذاری تک محوری و دومحوری مساوی کاهش می‌یابد، اشکال(۳۰ و۳۱). بطـور کلـی مـی‌تـوان بیان کرد که در صفحات نازک و ضخیم تحت بارگذاری تک محـوری و دو محـوری مسـاوی و بـا اسـتفاده از تحلیل نموی و یا تغییرشکل، ضریب کمانش در شرایط یکسان ثابت c، با افزایش $\frac{E}{\sigma_0}$ کاهش می‌یابد.

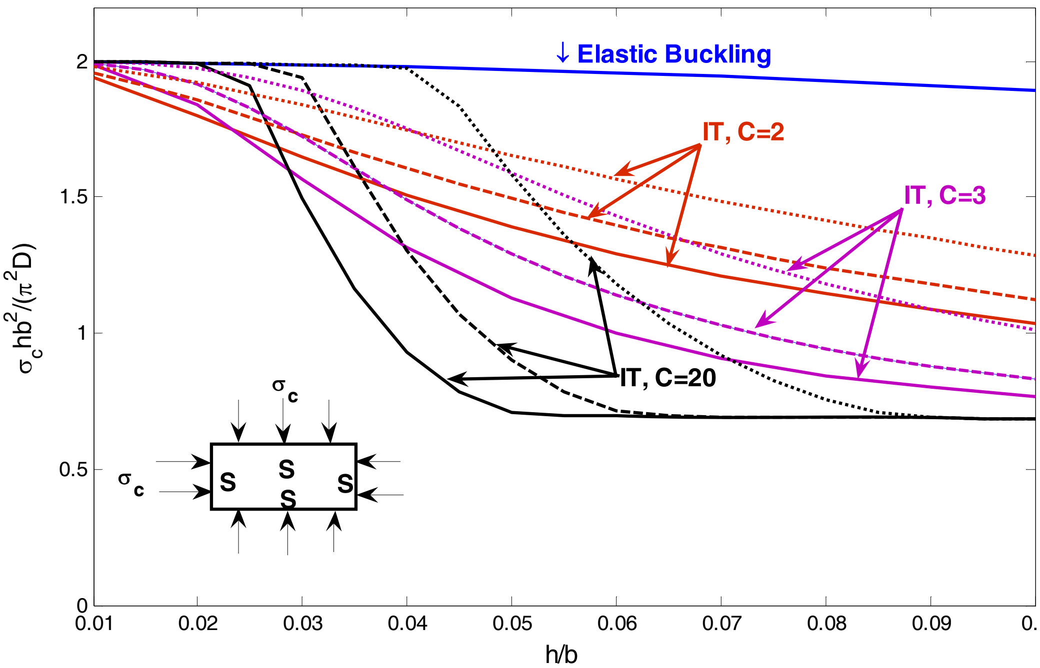


(الف)

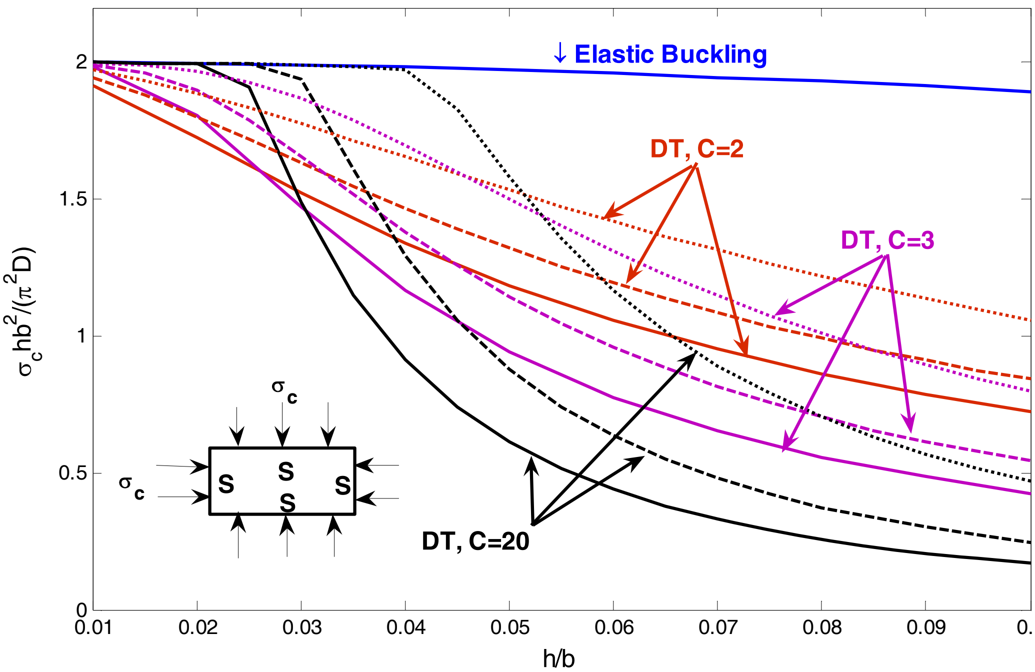


(ب)

شکل۳۰- تاثیر خواص مواد بر ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت برای حالت SSSS تحت بارگذاری تک محوری با استفاده از تئوریهای (الف) نموی، (ب) تغییرشکل $(\frac{a}{b}=1, \frac{E}{\sigma_0}=250, 500, 750, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$



(الف)



(ب)

شکل۳۱- تاثیر خواص مواد بر ضریب کمانش برحسب نسبت ضخامت برای حالت SSSS تحت بارگذاری دو محوری با استفاده از تئوریهای (الف)نموی، (ب) تغییرشکل $(\frac{a}{b}=1, \frac{E}{\sigma_0}=250, 500, 750, \nu=0.3, \kappa^2=\frac{5}{6}, k=0.25)$

نتیجه گیری

مساله الاستوپلاستیک صفحات ضخیم به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته تئوری‌های پلاستیسیته تغییرشکل و نموی مورد تحلیل قرار گرفت و برخی از نتایج حاصل با نتایج قبلی مقایسه شد و علاوه بر آن نتایج جدیدی نیز ارائه گردید. اثرات ضریب ابعادی، ضخامت صفحه، نوع ماده، ضریب بار و رفتار ماده بر تعیین بار کمانشی در دو حالت بارگذاری تک محوری و دو محوری مساوی بررسی شد و نتایج حاصل ارائه گردید. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش سطح پلاستیسیته، تئوری تغییرشکل بار کمانشی کمتری را پیشگویی می‌کند. به علاوه، با افزایش ضخامت صفحه و ثوابت رامبرگ- ازگود($\frac{E}{\sigma_0}$ و c) اختلاف بین ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل افزایش می‌یابد. در صفحات نازک توافق خوبی بین نتایج حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل وجود دارد. اما با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری افزایش می‌یابد و با افزایش ضریب بار در حالت کششی محوری و فشاری عمودی این اختلاف بیشتر می‌شود. همچنین مشخص گردید که تاثیر ضریب تصحیح برشی بر تئوری نموی بیشتر است، بطوریکه با افزایش ضخامت صفحه تفاوت نتایج حاصل از حل صفحات نازک و ضخیم در حالت نموی بیشتر می‌شود. در صفحات نازک با افزایش ثابت رامبرگ- ازگود c ضریب کمانش ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. درصورتیکه در صفحات ضخیم با افزایش c ضریب کمانش همیشه کاهش می‌یابد.

مراجع

[1] Bryan, G.H., "On the Stability of a Plane Plate with Thrusts in its Own Plane with Applications to the Buckling of the Sides of a Ship", Proceedings of London Mathematical Society, Vol. 22, pp. 54-56, (1891).

[2] Shrivastava, S.C., "Inelastic Buckling of Plates Including Shear Effects", International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, pp. 567-575, (1979).

[3] Durban, D., "Plastic Buckling of Plates and Shells", AIAA Paper 97-1245, NACA/CP 206280, pp. 293–310, (1998).

[4] Ore, E., and Durban, D., "Elastoplastic Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 34, pp. 727–742, (1992).

[5] Durban, D., and Zuckerman, Z., "Elastoplastic Buckling of Rectangular Plates in Biaxial Compression/Tension", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 41, pp. 751–765, (1999).

[6] Wang, C.M., Xiang, Y., and Chakrabarty, J., "Elastic/Plastic Buckling of Thick Plates", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 8617-8640, (2001a).

[7] Wang, C.M., and Aung, T.M., "Plastic Buckling Analysis of Thick Plates using P-Ritz Method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, pp. 6239–6255, (2007).

[8] Wang, X.W., and Huang, J.C., "Elastoplastic Buckling Analyses of Rectangular Plates under Biaxial Loadings by the Differential Quadrature Method", Thin-walled Structures, Vol. 47, pp. 14–20, (2009).

[9] Zhang, W., and Wang, X., "Elastoplastic Buckling Analysis of Thick Rectangular Plates by using the Differential Quadrature Method", Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61, pp. 44–61, (2011).

[10] Chakrabarty, J., "*Applied Plasticity*", Second Edition, Springer, The Netherland, (2010).

[11] Bellman, R.E., and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-term Integration", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 34, pp. 235–238, (1971).

[12] Bert, C.W., and Malik, M., "Differential Quadrature in Computational Mechanics: a Review", Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, pp. 1–27, (1996).

[13] Handelman, G.H., and Prager, W., "Plastic Buckling of Rectangular Plates under Edge Thrusts", NACA Technical Note, No. 1530, Washington, D.C, (1948).

[14] Wang, C.M., Xiang, Y., and Wang, C.Y., "Buckling and Vibration of Plates with an Internal Line-hinge via Ritz Method", Proceedings of the First Asian-pacific Congress on Computational Mechanics, Sydney, pp. 1663-1672, (2001b).

[15] Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plate", Trans. ASME Journal of Applied .Mechanics, Vol. 12, pp. 69-77, (1945).

[16] Mindlin, R.D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates", Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31-38, (1951).

[17] Wittrick, W.H., "Analytical Three-dimensional Elasticity Solutions to some Plate Problems and some Observations on Mindlins Plate Theory", International Journal of Solids and Structures, Vol. 23, pp. 441-464, (1987).

[18] Malik, M., and Bert, C.W., "Three-dimensional Elasticity Solutions for Free Vibrations of Rectangular Plates by the Differential Quadrature Method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, pp. 299-381, (1998).

فهرست نمادهای انگلیسی

a: طول صفحه

b: عرض صفحه

a/b: نسبت ابعادی

$c, k, \frac{E}{\sigma_0}$: پارامترهای رامبرگ- ازگود

D: صلبیت خمشی صفحه

DT: تئوری تغییرشکل پلاستیک

E: ضریب الاستیک
G: مدول برشی موثر
h: ضخامت صفحه
h/b: نسبت ضخامت
IT: تئوری نموی پلاستیک
S_{ij}: تانسور تنش انحرافی
u,v,w: جابجاییها
K: ضریب کمانش
$T(E_t)$: مدول تانژانتی
$S(E_s)$: مدول سکانتی

نمادهای یونانی

$\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,\delta,\rho$: پارامترهای مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$: کرنشهای نرمال
ξ: ضریب بار
κ^2: فاکتور تصحیح برشی
λ: نسبت ابعادی
$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$: تنشهای نرمال
σ_e: تنش موثر
σ_c: تنش کمانش
υ: ضریب پواسون
ϕ_x,ϕ_y: چرخشها در جهت x و y

Abstract

In this paper the elastoplastic buckling of rectangular plates are investigated under different loads and boundary conditions. Load is applied in plane and in uniaxial and equibiaxial directions. Both incremental and deformation theories of plasticity are employed to analyze the problem. The Generalize Differential Quadrature method is employed as numerical method. For thick plates, the significant effect of transverse shear deformation on the critical buckling load may be accounted for by adopting the Reissner plate theory. The results obtained from both plasticity theories are close to each other in thin plates, however, with increasing the thickness of plates a considerable difference between the buckling loads obtained from two theories is observed. The influences of aspect ratio, loading ratio, plate thickness, material properties and various boundary conditions on buckling factor are investigated in the analysis under uniaxial and equibiaxial loads. The results show that with increasing the amount of plasticity, the deformation theory generally gives consistently lower buckling load than those of incremental theory. A large discrepancy between two theories occurs with increasing of plate thickness, E/σ_0 and c in the Ramberg-Osgood relations.