

ارتعاشات واداشته از حرارت در تیرها با در نظر گرفتن اینرسی دورانی

محمدرضا یعقوبی^۱

دانشجوی کارشناسی

یاسر کیانی^۲

استادیار

در تحقیق حاضر به بررسی ارتعاشات واداشته از حرارت در تیرها پرداخته شده است. سازه تیر شکل مورد نظر ساخته شده از ماده همگن و هموزن می‌باشد که در سطح بالایی در معرض شار حرارتی و در سطح پایینی به صورت عایق می‌باشد. معادله انتقال حرارت در راستای ضخامت تیر با فرض ترموالاستیسیته غیر کوپل تشکیل شده و به صورت تحلیلی حل شده است. معادله حاکم بر ارتعاش عرضی تیر با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی و در نظر گرفتن اینرسی دورانی محاسبه شده و به صورت تحلیلی با استفاده از بسط فوریه برای تیرها با تکیه‌گاه دو سر ساده حل شده است. کلیه نتایج به دست آمده به صورت بدون بعد ارائه شده است و نتایج به دست آمده با نتایج موجود که اینرسی دورانی در آنها صرفنظر شده است مقایسه گردیده است. در پایان نتایج عددی در قالب منحنی‌هایی رسم گردیده است که وقوع پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت را به خوبی تایید می‌کند.

واژه‌های راهنما: تیر اوپلر-برنولی، ارتعاشات واداشته از حرارت، ترموالاستیسیته غیر کوپل، اینرسی دورانی

۱- مقدمه

مساله‌ی ارتعاشات واداشته از حرارت در المان‌های سازه‌ای برای اولین بار توسط بولی در سال (۱۹۵۶) مطرح شد [۱]. تا آن زمان برای سازه‌هایی که تحت تحریک حرارتی قرار می‌گیرند، تنها مفهوم پاسخ شبه استاتیکی مطرح بود. به این ترتیب که برای یافتن پاسخ سازه‌ای که با گرادیان دما و یا با شار حرارتی تحریک شده است، ابتدا معادله‌ی انتقال حرارت به صورت دینامیکی حل شده و توزیع دما در سازه بدست می‌آید. سپس با استفاده از توزیع دما، نیروها و ممان‌های حرارتی محاسبه شده و در معادله‌ی حرکت سازه قرار داده می‌شود. اما در این قسمت از وابستگی معادله‌ی حرکت سازه به زمان صرف نظر می‌شود. به بیان بهتر در یافتن پاسخ شبه استاتیکی تاثیر اینرسی در معادله‌ی حرکت ناچیز فرض شده و نادیده گرفته می‌شود.

در یافتن پاسخ شبه استاتیکی برای سازه‌هایی که تحت تحریک حرارتی قرار گرفته‌اند با توجه به صرف نظر از وابستگی معادله‌ی حرکت به زمان و ناچیز فرض شدن تاثیر اینرسی در آن، کمیت زمان که در حل دینامیکی معادله‌ی انتقال حرارت (توزیع دما) وجود دارد، به عنوان کمیتی معلوم و بدون تغییر در پاسخ میدان جابجایی که از حل معادله‌ی حرکت بدست می‌آید، وارد خواهد شد.

^۱دانشجوی کارشناسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد mryaghubi@hotmail.com
^۲نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد y.kiani@eng.sku.ac.ir

بولی در سال (۱۹۵۶) نشان داد که صرف نظر نمودن از تاثیر اینرسی در معادله‌ی حرکت که به عنوان فرض اساسی در یافتن پاسخ شبه استاتیکی مطرح بود، نمی‌تواند به طور کامل صحیح باشد. وی یک تیر ایزوتروپیک نازک را که سطح پایین آن عایق بوده و در سطح فوقانی به طور ناگهانی در معرض شار حرارتی قرار گرفته است را مورد بررسی قرار داد. بولی پس از حل تحلیلی معادله‌ی انتقال حرارت و یافتن توزیع دما، نیروها و ممان‌های حرارتی را در معادله‌ی ارتعاشات عرضی تیر اویلر برنولی قرار داد. او با در نظر گرفتن تاثیر اینرسی، پاسخ ارتعاشات عرضی تیر را در حالتی که دارای شرایط مرزی ساده باشد، بدست آورد.

پاسخ‌های بولی نشان داد که برای تیرهای نازکی که تحت تحریک ناگهانی دما (شوک حرارتی) قرار می‌گیرند، ارتعاشات حرارتی اتفاق می‌افتد. و این بدان معناست که در برخی از حالت‌های خاص، نباید از تاثیر اینرسی در معادله‌ی حرکت صرف نظر نمود. بدین ترتیب نتایج حاصل از مقاله‌ی بولی، سبب به چالش کشیده شدن پاسخ‌های شبه استاتیکی شد که تا آن زمان برای تحریک ناگهانی حرارتی در سازه‌ها مطرح شده بودند.

پس از آن، بولی و باربر در سال (۱۹۵۷) به تحلیل ارتعاشات حرارتی ورق ایزوتروپیک که تمام مرزهای آن ساده باشند، پرداختند [۲]. در این حالت نیز سطح پایینی ورق عایق بوده و سطح فوقانی آن به طور ناگهانی در معرض شار حرارتی قرار گرفته است. در یافتن پاسخ ارتعاشات عرضی ورق از تئوری کلاسیک استفاده شد. نتایج این تحقیق نیز موید پژوهش اولیه‌ی بولی و تصدیق بر وجود ارتعاشات حرارتی در ورق‌های نازک بود.

بولی و همچنین بولی و باربر، به ترتیب، نتیجه‌ی کار خود را این‌گونه ارائه دادند که در نظر گرفتن تاثیر اینرسی در ارتعاشات عرضی تیر و ورق زمانی حائز اهمیت خواهد بود که پریود اساسی ارتعاشات تیر و ورق، هم مرتبه و یا بزرگتر از زمان مشخصه‌ی دمایی باشد. در همین راستا برای اعتبار سنجی پاسخ شبه استاتیکی تیر و ورق نازک و اینکه این پاسخ در چه صورت بر پاسخ دینامیکی منطبق می‌شود، کمیتی بی‌بعد به نام پارامتر اینرسی را معرفی نمودند. لازم به ذکر است این پارامتر با بی‌بعد سازی معادلات حرکت ورق و تیر ظاهر خواهد شد. پارامتر اینرسی در حالت کلی، توسط بولی به صورت جذر نسبت زمان مشخصه‌ی دمایی و پریود اساسی ارتعاشات سازه تعریف شده است.

بولی و بولی و باربر نشان دادند که اهمیت تاثیر اینرسی با کاهش پارامتر اینرسی افزایش می‌یابد. در صورتی که این پارامتر را در حالت حدی مورد بررسی قرار دهیم به این نتیجه دست خواهیم یافت که اگر مقدار این پارامتر برابر با صفر باشد، تاثیر اینرسی به حدی افزایش می‌یابد که مانع هرگونه تغییر شکلی در سازه (ورق و تیر) خواهد شد. از سویی در صورتی که پارامتر اینرسی بسیار بزرگ باشد، تاثیر اینرسی به کلی از بین رفته و پاسخ ارتعاشات عرضی تیر و ورق بر پاسخ شبه استاتیکی آن منطبق خواهد شد.

به این ترتیب و با استفاده از نتایج کارهای بولی و بولی و باربر این‌گونه استنباط می‌شود که وجود ارتعاشات حرارتی یا عدم آن تنها به پارامتر اینرسی بستگی دارد. اگر این پارامتر به اندازه کافی بزرگ باشد (تقریباً نزدیک به عدد یک)، پاسخ شبه استاتیکی و دینامیکی تفاوت قابل ملاحظه‌ای خواهند داشت.

این در حالی است که اگر این پارامتر بیش از حد بزرگ باشد، تاثیر اینرسی ناپدید شده و پاسخ دینامیکی تفاوتی با پاسخ شبه استاتیکی نخواهد داشت. تحقیق حاضر به نوعی ادامه کار ارائه شده توسط بولی می‌باشد.

روش حل به کار رفته در تحقیق فعلی منطبق بر روش حل بولی می‌باشد. با این تفاوت که اینرسی دورانی که در کار بولی صرفنظر شده بود در تحقیق حاضر لحاظ شده است. با حل تحلیل معادله انتقال حرارت و محاسبه گشتاور حرارتی ناشی از آن، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر به صورت تحلیلی حل شده است. پاسخ به دست آمده با صرفنظر از جملات مربوط به اینرسی دورانی به راحتی قابل کاهش به رابطه بولی می‌باشد. نتایج عددی به صورت گرافهایی رسم شده است که به خوبی وجود پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت را تایید میکند.

۲- ارائه فرمولاسیون

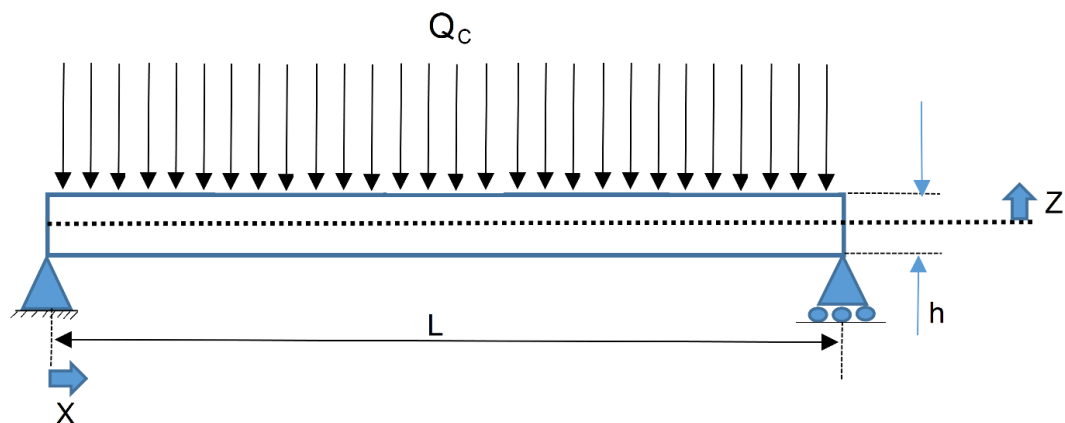
در این بخش معادلات حاکم بر ارتعاشات حرارتی یک تیر در معرض شار حرارتی تحلیل خواهند شد. هندسه حاکم بر مساله در شکل (۱) نشان داده شده است.

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود یک تیر ساده به طول L و ضخامت یکسان h و پهنای b که از یک طرف تحت شار حرارتی Q_c و از طرف دیگر عایق بندی شده است در نظر گرفته شده است. از فرمولاسیون ترموالاستیسیته غیرکوپل استفاده شده است. بدین معنا که پروفیل دما به صورت مستقل از معادله حاکم استخراج شده و وارد معادله حاکم بر ارتعاشات تیر می‌شود. برای به دست آوردن توزیع درجه حرارت و ارتعاشات این تیر نیازمند یک رابطه دیفرانسیلی حاکم بر انتقال حرارت (معادله انتقال حرارت گذرای فوریه) و یک رابطه ارتعاشی (معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی) هستیم.

۲-۱- معادله انتقال حرارت

با فرض انتقال حرارت یک بعدی و عدم تولید حرارت در تیر می‌توان معادله انتقال حرارت را به صورت زیر به دست آورد [۳]

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$



شکل ۱ - شماتیک یک تیر در معرض شار حرارتی در یک سمت و عایق حرارتی در سمت دیگر

که این رابطه را به صورت زیر می‌توان ساده کرد

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۲)$$

در این رابطه $\kappa = K/(\rho c)$ می‌باشد. K ضریب رسانش هدایتی، ρ دانسیته، c ظرفیت گرمایی ویژه و κ ضریب پخش حرارت تیر هستند. معادله (۲) نیازمند دوشروط مرزی و یک شرط اولیه است.

اگر در زمان اولیه دمای تیر را T_0 در نظر بگیریم شرط اولیه به صورت زیر است

$$T(z, 0) = T_0 \quad (۳)$$

و شرایط مرزی بالا و پایین تیر نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\frac{\partial T}{\partial z} \left(-\frac{h}{2}, t\right) = 0 \quad (۴)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial z} \left(+\frac{h}{2}, t\right) = Q_c \quad (۵)$$

حال با انتخاب $\theta = T - T_0$ و اعمال آن بر روی معادلات (۲) - (۵) داریم

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (۶)$$

$$\theta(z, 0) = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \left(-\frac{h}{2}, t\right) = 0 \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \left(+\frac{h}{2}, t\right) = \frac{Q_c}{K} \quad (۹)$$

باتوجه به این که شرایط مرزی ناهمگن است از تغییر متغیر $\theta(z, t) = \theta^*(z, t) + f(z)$ استفاده می‌کنیم. باتوجه به معادله شرط مرزی (۸) داریم

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial z} \left(-\frac{h}{2}, t\right) + \frac{df}{dz} \left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (۱۰)$$

برای دستیابی به شرایط مرزی همگن حاکم بر مجهول $\theta^*(z, t)$ باید داشته باشیم

$$\frac{df}{dz} \left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (۱۱)$$

مشابهها با مراجعه به شرط مرزی (۹) و برای دستیابی به شرایط مرزی همگن برای معادله حاکم بر مجهول $\theta^*(z, t)$ باید داشته باشیم

$$\frac{df}{dz} \left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{Q_c}{K} \quad (۱۲)$$

از انجایی که شرایط مرزی حاکم بر تابع $f(z)$ هر دو به صورت مشتقی هستند، این تابع نمی‌تواند به صورت خطی باشد. با انتخاب یک تابع حداقل از مرتبه دو برای $f(z)$ خواهیم داشت.

$$f(z) = A\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^2 + B\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right) + C \quad (13)$$

که در رابطه بالا ضرایب به کار رفته از شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) تعیین خواهند شد. با اعمال شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) به تابع درجه دوم (۱۳) و در نظر گرفتن ثابت $C = 0$ خواهیم داشت.

$$f(z) = \frac{hQ_c}{K} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^2 \quad (14)$$

با توجه به معادله شرط اولیه (۷) و اعمال تغییر متغیر مورد نظر به رابطه زیر می‌رسیم

$$\theta^*(z, 0) = -f(z) \quad (15)$$

شرایط مرزی مربوط به معادله حاکم بر $\theta^*(z, t)$ به صورت زیر هستند

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial z} \left(-\frac{h}{2}, t\right) = \frac{\partial \theta^*}{\partial z} \left(+\frac{h}{2}, t\right) = 0 \quad (16)$$

از شرایط مرزی بالا می‌توان فهمید که مساله دارای توابع ویژه به صورت $\left\{1, \cos n\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\right\}$ است. با اعمال بسط فوریه می‌توان نوشت

$$\theta^*(z, t) = A_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos n\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right) \quad (17)$$

حال اگر معادله (۱۵) و (۱۷) را در معادله (۶) قرار دهیم، در این صورت پس از ساده سازی به دو معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = \frac{Q_c \kappa}{hK} \quad (18)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dA_n(t)}{dt} + \frac{n^2 \pi^2}{h^2} A_n(t) = 0 \quad (19)$$

که جواب معادله (۱۸) پس از انتگرالگیری مستقیم به صورت زیر به دست آمده است

$$A_0(t) = \frac{Q_c \kappa}{hK} t + A_0(0) \quad (20)$$

و جواب معادله (۱۹) با حل معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست آمده است

$$A_n(t) = A_n(0) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \kappa}{h^2} t} \quad (21)$$

اگر $A_0(t)$ و $A_n(t)$ از روابط (۲۰) و (۲۱) را در رابطه (۱۷) قرار دهیم و تغییر متغیر $\tau = \frac{\kappa}{h^2} t$ را اعمال کنیم رابطه $\theta^*(z, t)$ به صورت زیر در می‌آید

$$\theta^*(z, t) = A_0(0) + \frac{Q_c h}{K} \tau + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) e^{-n^2 \pi^2 \tau} \cos n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \quad (22)$$

با اعمال شرط اولیه یعنی رابطه (۱۵) و قرار دادن تابع $f(z)$ از رابطه (۱۴) در $\theta^*(z, t)$ در رابطه (۲۲) در اینصورت به رابطه (۲۳) خواهیم رسید

$$A_n(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \cos n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) = -\frac{hQ_c}{K} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^2 \quad (23)$$

با توجه به رابطه بالا، بسط فوری تابع سمت راست تساوی مدنظر است. با توجه به این بسط ضرایب سری فوری به راحتی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$A_0(0) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{hQ_c}{2K} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^2 dz = -\frac{Q_c}{6K} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A_n(0) &= \frac{2}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{hQ_c}{2K} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^2 \cos n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) dz \\ &= -\frac{hQ_c}{2K} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (25)$$

بنابراین توابع θ^* و $f(z)$ به طور کامل به دست آمدند و با توجه به تغییر متغیر $\theta = \theta^* + f(z)$ برای $\theta(z, t)$ داریم

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{hQ_c}{K} \left\{ \tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n^2 \pi^2} \cos n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

که به کمک رابطه (۲۶)، $T(z, t) = T_0 + \theta$ توزیع دما را در تیر مورد نظر نشان می‌دهد. این توزیع دما منجر به ایجاد گشتاور حرارتی می‌شود که این گشتاور منجر به ایجاد ارتعاشات می‌شود. پس برای محاسبه ارتعاشات نیازمند میزان گشتاور حرارتی هستیم. بنابراین ابتدا گشتاور حرارتی را محاسبه می‌کنیم:

تنش ناشی از توزیع دما در تیر به صورت زیر است

$$\sigma = E\varepsilon - E\varepsilon_T \quad (27)$$

که در آن کرنش حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_T = \alpha\theta = \alpha(T - T_0) \quad (28)$$

و بنابراین گشتاور حرارتی در تیر با انتگرال گیری از تنش تیر و لحاظ کردن بازوی گشتاورگیری به صورت زیر خواهد بود

$$M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\alpha(T - T_0)zbdz \quad (29)$$

با قرار دادن بسط مربوط به دما از رابطه (۲۶) در عبارت بالا و انجام انتگرال گیری مربوطه و نظر به اینکه جملات با توزیع زوج گشتاور حرارتی در تیر به وجود نمی‌آورند، مقدار گشتاور حرارتی تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$M_T = \frac{Q_c I E \alpha}{K} \left(\frac{1}{2} - \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n^4} \right) \quad (30)$$

که در رابطه بالا $I = \frac{1}{12} b h^3$

حال ممان حرارتی بی بعد را به صورت $m_T = \frac{\pi^4 K M_T}{192 E I \alpha Q_c}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$m_T = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^4}{96} - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n^4} \right) \quad (31)$$

۲-۲- معادله ارتعاشات تیر

معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی با در نظر گرفتن اینرسی دورانی به صورت زیر است [۴]

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 W}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (32)$$

که در این رابطه W میزان جابه‌جایی عرضی تیر است. برای حل معادله (۳۲) نیازمند چهار شرط مرزی و دو شرط اولیه هستیم. برای شرایط مرزی در دو انتهای تیر میزان جابه‌جایی و گشتاور کل صفر است و برای شرایط اولیه فرض می‌کنیم که جابه‌جایی و سرعت اولیه تیر صفر باشد. در اینصورت شرایط مرزی برای دو انتهای تیر یعنی L و $x = 0$ برابر است با

$$W = 0 \quad (33)$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - M_T = 0 \quad (34)$$

برای ساده سازی محاسبات بهتر است که معادلات و شرایط مرزی و شرایط اولیه را بی بعد کنیم. در اینصورت اگر $\xi = \frac{x}{L}$ و جابه‌جایی عمودی بی بعد به صورت $V = \frac{\pi^4 K W}{192 Q_c \alpha L^2}$ تعریف شود می‌توان معادله (۳۲) را به صورت زیر نوشت

$$B^4 \frac{\partial^4 V}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - r^2 \frac{\partial^4 V}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} = 0 \quad (35)$$

که در رابطه بالا پارامتر B معرف پارامتر اینرسی است که اولین بار توسط بولی معرفی شده و به صورت زیر در پروسه بی بعد سازی به دست آمده است. همچنین پارامتر r نیز بیانگر اینرسی دورانی تیر است و در حالت $r = 0$ اثر اینرسی دورانی حذف شده است.

$$B^4 = \frac{E I h^4}{\rho A \kappa^2 L^4}, \quad r^2 = \frac{I}{A L^2} \quad (36)$$

در این رابطه B از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است که بیانگر ویژگی ها و خواص مکانیکی تیر از جمله مدول الاستیسیته، طول، ضخامت، ممان اینرسی و ضریب پخش حرارت تیر است که با تغییر آن جواب معادله هم تغییر می کند.

حال با توجه به عبارت های بی بعد تعریف شده، شرایط مرزی روابط (۳۳) و (۳۴) را نیز بی بعد می کنیم.

کلیه شرایط مرزی و شرایط اولیه در حالت بدون بعد به صورت زیر خواهند بود

$$V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + m_T = 0 \quad \xi = 0, 1 \quad (37)$$

$$V = \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0 \quad \tau = 0 \quad (38)$$

برای حل معادله (۳۵) تغییر متغیر $V = V_s + V_{ad}$ که V_s جواب شبه استاتیکی و V_{ad} جواب اضافی است را در نظر می گیریم و در معادله (۳۵) قرار می دهیم

در نتیجه معادله زیر حاکم بر دو مجهول یعنی جواب شبه استاتیکی و جواب اضافی به دست می آید.

$$B^4 \left(\frac{\partial^4 V_s}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 V_{ad}}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial^2 V_s}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 V_{ad}}{\partial \tau^2} - r^2 \left(\frac{\partial^4 V_s}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^4 V_{ad}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \right) = 0 \quad (39)$$

با توجه به این موضوع که V_s پاسخ شبه استاتیکی تیر است، معادله (۳۹) را می توان به صورت زیر به شکل دو معادله مجزا در نظر گرفت

$$\frac{\partial^4 V_s}{\partial \xi^4} = 0 \quad (40)$$

$$B^4 \frac{\partial^4 V_{ad}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 V_{ad}}{\partial \tau^2} - r^2 \frac{\partial^4 V_{ad}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} = r^2 \frac{\partial^4 V_s}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 V_s}{\partial \tau^2} \quad (41)$$

در شرایط مرزی و اولیه روابط (۳۷) و (۳۸) تغییر متغیر $V = V_s + V_{ad}$ به گونه ای اعمال می کنیم که شرایط مرزی مربوط به جواب اضافی به صورت همگن باشد که برای حل آسان تر باشد. به همین منظور شرایط مرزی را به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$V_s = \frac{\partial^2 V_s}{\partial \xi^2} + m_T = 0, \quad \xi = 0,1 \quad (42)$$

$$V_{ad} = \frac{d^2 V_{ad}}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 0,1 \quad (43)$$

و هم چنین در رابطه با شرایط اولیه (۳۸) هم با تغییر متغیر مورد نظر داریم:

$$V_s + V_{ad} = \frac{\partial V_s}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{ad}}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0 \quad (44)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۴۷) به رابطه زیر خواهیم رسید

$$V_s = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \quad (45)$$

با اعمال چهار شرط مرزی ارائه شده در رابطه (۴۲) به رابطه (۴۵) داریم

$$A = 0$$

$$A + B + C + D = 0 \quad (46)$$

$$2C = -m_T$$

$$2C + 6D = -m_T$$

از حل دستگاه معادلات بالا خواهیم داشت $A = D = 0$ ، $B = 1/2m_T$ و $C = -1/2m_T$ در نهایت V_s به صورت زیر خواهد بود:

$$V_s = -\frac{1}{2}m_T(\xi^2 - \xi) \quad (47)$$

توجه شود که در رابطه V_s تابعیتی از زمان وجود دارد چون m_T تابع زمان است. مقدار V_s در زمان اولیه برابر است با

$$V_s(t = 0) = 0 \quad (48)$$

و در حالت پایا داریم:

$$V_s(t = \infty) = -\frac{\pi^4}{768}(\xi^2 - \xi) \quad (49)$$

حال به سراغ حل قسمت اضافی مسئله می رویم. اگر در رابطه (۴۱) مقدار V_s را قرار دهیم، داریم:

$$B^4 \frac{d^4 V_{ad}}{d\xi^4} + \frac{d^2 V_{ad}}{d\tau^2} - r^2 \frac{d^4 V_{ad}}{d\xi^2 d\tau^2} = -\frac{\pi^4}{8}(\xi^2 - \xi - 2r^2) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-j^2 \pi^2 \tau} \quad (50)$$

شرایط مرزی معادله بالا در روابط (۴۳) ارائه شده‌اند. برای محاسبه جواب معادله (۵۰) با توجه به این که شرایط مرزی به صورت ساده هستند است توابع ویژه شامل $\{\sin n\pi\xi\}$ خواهد بود، پس با بسط فوری جواب به شکل زیر قابل بیان است

$$V_{ad} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \sin n\pi\xi \quad (51)$$

که اگر رابطه (۵۱) را در رابطه (۵۰) قرار دهیم به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر می‌رسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (Bn\pi)^4 B_n + ((rn\pi)^2 + 1) \frac{d^2 B_n}{d\tau^2} \right\} \sin n\pi\xi \quad (52)$$

$$= -\frac{\pi^4}{8} (\xi^2 - \xi - 2r^2) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau}$$

بسط بالا به نوعی بسط فوریه است و ضرایب آن به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$(Bn\pi)^4 B_n + ((rn\pi)^2 + 1) \frac{d^2 B_n}{d\tau^2}$$

$$= -\frac{\pi^4}{8} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \quad (53)$$

$$\times 2 \int_0^1 (\xi^2 - \xi - 2r^2) \sin n\pi\xi d\xi$$

که رابطه (۵۳) خود یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن است. حاصل انتگرال معادله (۵۳) به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\int_0^1 (\xi^2 - \xi - 2r^2) \sin n\pi\xi d\xi \quad (54)$$

$$= \frac{2(-1)^n - 2}{(n\pi)^3} + \frac{2r^2((-1)^n - 1)}{n\pi}$$

در نتیجه رابطه (۵۳) به صورت زیر ساده می‌شود. لازم به ذکر است که رابطه زیر تنها برای مقادیر فرد n برقرار است.

$$(Bn\pi)^4 B_n + ((rn\pi)^2 + 1) \frac{d^2 B_n}{d\tau^2}$$

$$= \frac{\pi^4}{n^3\pi^3} ((rn\pi)^2 + 1) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \quad (55)$$

حال برای محاسبه پاسخ معادله (۵۵)، باید در نظر داشت که به دلیل ناهمگن بودن معادله، جواب خصوصی و عمومی وجود دارد. جواب خصوصی این معادله با توجه به تغییرات نمایی در سمت راست تساوی به شکل زیر است

$$B_n^P = G_n \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \quad (56)$$

که با قرار دادن در معادله (۵۵) مقدار G_n برابر است با:

$$G_n = \frac{(rn\pi)^2 + 1}{n^3\pi^3 \{((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4\}} \quad (57)$$

و جواب عمومی B_n هم با همگن کردن معادله (۵۵) به صورت زیر قابل بیان است

$$B_n^h = E_n \sin \frac{B^2 n^2 \pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} \tau + F_n \cos \frac{B^2 n^2 \pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} \tau \quad (58)$$

بنابراین پاسخ های بخش خصوصی و عمومی معادله به شکل زیر قابل نمایش هستند.

$$V_{ad}^P = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{((rn\pi)^2 + 1)e^{-j^2 \pi^2 \tau}}{n^3 \pi^3 ((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} \right) \right\} \sin n\pi\xi$$

$$V_{ad}^h = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ E_n \sin \frac{B^2 n^2 \pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} \tau + F_n \cos \frac{B^2 n^2 \pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} \tau \right\} \sin n\pi\xi \quad (59)$$

حال با توجه به روابط شرایط اولیه (۴۴) می توانیم مقادیر E_n و F_n را محاسبه کنیم. با توجه به رابطه (۴۴) و شرط اولیه مربوط به جابه جایی می توان گفت که V_{ad} در لحظه $t = 0$ برابر صفر است زیرا V_s در زمان اولیه برابر با صفر است. بنابراین با اعمال شرط اولیه زیر

$$V_{ad} = 0, \quad t = 0 \quad (60)$$

و باتوجه به جوابهای ارائه شده در (۵۹)، داریم:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(rn\pi)^2 + 1}{n^3 \pi^3 ((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} + F_n \right) = 0 \quad (61)$$

که در نتیجه ضرایب F_n برابر هستند با

$$F_n = - \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(rn\pi)^2 + 1}{n^3 \pi^3 ((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} \quad (62)$$

در شرط اولیه دوم در رابطه (۴۴) داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V_s}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{ad}}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0 \quad (63)$$

که می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{ad}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= -\frac{\partial V_s}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \frac{dm_T}{d\tau} (\xi^2 - \xi) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{\pi^2}{8} (\xi^2 - \xi) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-j^2\pi^2\tau}}{j^2} \Big|_{\tau=0} = \frac{\pi^4}{64} (\xi^2 - \xi) \end{aligned} \quad (64)$$

بنابراین با در نظر گرفتن مجموع روابط (۵۹) می توان معادله زیر را برای E_n محاسبه کرد

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-j^2\pi^2((rn\pi)^2 + 1)}{n^3\pi^3((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} \right. \\ \left. + \frac{B^2n^2\pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} E_n \right) \sin n\pi\xi = \frac{\pi^4}{64} (\xi^2 - \xi) \end{aligned} \quad (65)$$

همانطور که در رابطه (۶۵) ملاحظه می شود بسط سری فوریه شکل گرفته است و ضرایب آن عبارتند از

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-j^2\pi^2((rn\pi)^2 + 1)}{n^3\pi^3((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} + \frac{B^2n^2\pi^2}{\sqrt{(rn\pi)^2 + 1}} E_n \\ = -\frac{8\pi^4}{64n^3\pi^3} \end{aligned} \quad (66)$$

که از رابطه (۶۶) می توان مقدار E_n را محاسبه نمود و داریم

$$\begin{aligned} E_n = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(j/nB)^2 [(rn\pi)^2 + 1]^{3/2}}{n^3\pi^3((rn\pi)^2 + 1)j^4 + (Bn)^4} \\ - \frac{\pi^2 [(rn\pi)^2 + 1]^{1/2}}{8(Bn)^2(n\pi)^3} \end{aligned} \quad (67)$$

حال اگر ضرایب E_n و F_n را به ترتیب از روابط (۶۲) و (۶۸) در رابطه (۵۹) قرار دهیم و دو بخش رابطه (۵۹) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} &V_{ad} \\ &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{(n\pi)^3} \left(-\frac{\pi^2\mu}{8(Bn)^2} \sin f_n\tau \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\mu^2 e^{-j^2\pi^2\tau} + (j/nB)^2\mu^3 \sin f_n\tau - \mu^2 \cos f_n\tau}{\mu^2 j^4 + (Bn)^4} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

که در رابطه بالا از تعاریف $\mu = \sqrt{(rn\pi)^2 + 1}$ و $f_n = \mu^{-1} B^2 n^2 \pi^2$ استفاده شده است.

حال اگر روابط (۴۷) و (۶۸) یعنی $V = V_s + V_{ad}$ را باهم جمع کنیم، V جواب کل است که معرف جابجایی دینامیکی هر نقطه از تیر در زمان خواهد بود.

لازم به ذکر است که می‌توان توزیع گشتاور تیر را نیز بر حسب زمان محاسبه نمود. با توجه به تعریف گشتاور تیر، بی‌بعد سازی آن و همچنین تقسیم جواب به دو بخش اضافی و شبه‌استاتیکی می‌توان نوشت

$$m = -\frac{\partial^2 V_{ad}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 V_s}{\partial \xi^2} - m_T \quad (۶۹)$$

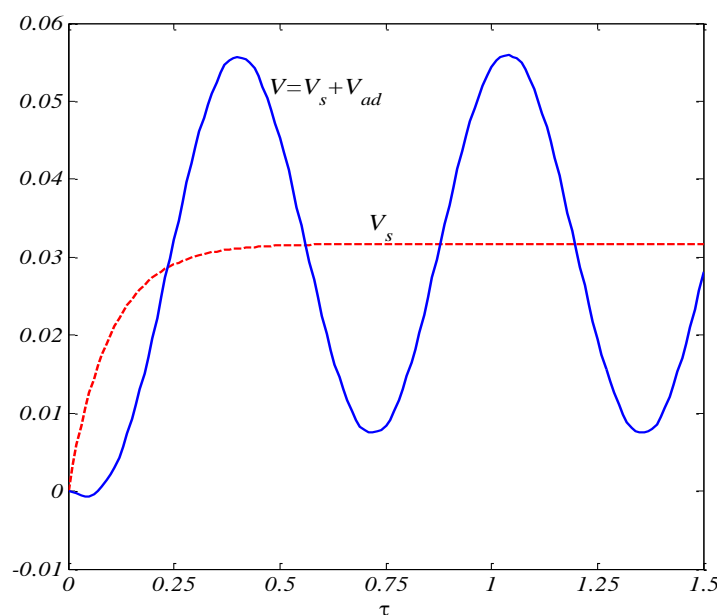
با قرار دادن پاسخ‌های به دست آمده در روابط (۴۷) و (۶۸) در رابطه (۶۹) خواهیم داشت

$$m = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{n\pi} \left(-\frac{\pi^2 \mu}{8(Bn)^2} \sin f_n \tau + \frac{\mu^2 e^{-j^2 \pi^2 \tau} + (j/nB)^2 \mu^3 \sin f_n \tau - \mu^2 \cos f_n \tau}{\mu^2 j^4 + (Bn)^4} \right) \quad (۷۰)$$

لازم به ذکر است که چنانچه در رابطه بالا پارامتر μ برابر با یک انتخاب شود، نتایج به دست آمده در روابط (۶۸) و (۷۰) به نتایج ارائه شده توسط بولی کاهش پیدا می‌کند.

۳- ارائه نتایج و بحث

فرمولاسیون ارائه شده در بخش پیش برای بررسی پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت بر روی یک تیر ساخته شده از ماده ایزوتروپ و هموزن صورت گرفته است. فرض بر آن است که تیر در دو انتها دارای تکیه گاه ساده بوده و در یک سطح به شکل عایق حرارتی عمل کرده و در سطح دیگر در معرض شار حرارتی باشد.



شکل ۲- مقایسه خیز میانه تیر در دو حالت شبه استاتیکی و جواب کلی برای حالت $B = 1$

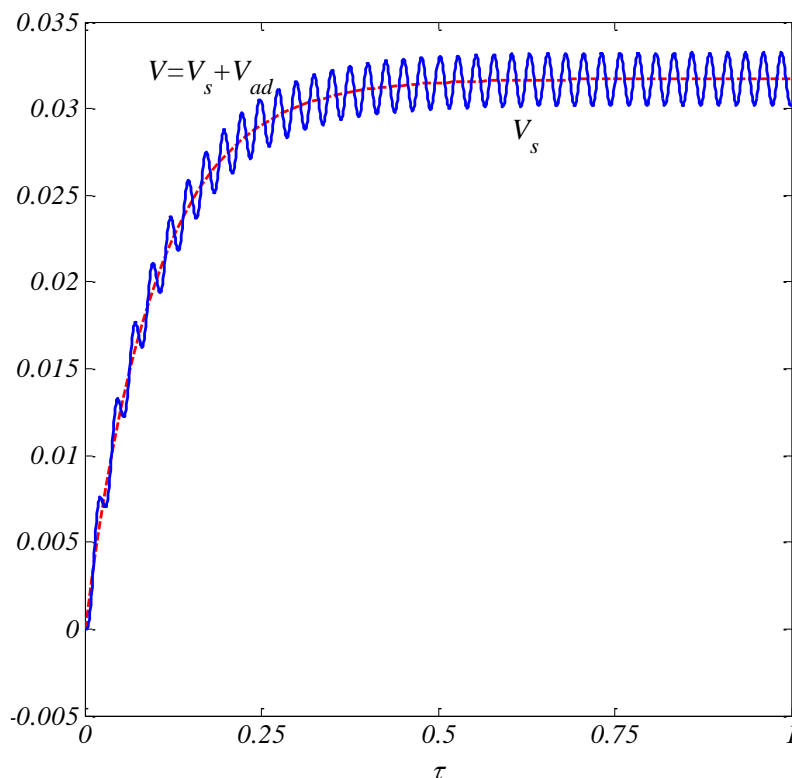
در ارائه فرمولاسیون پیشین، منحنی جابجایی تیر به دو دسته جواب تقسیم شده است که عبارتند از تابع جواب شبه استاتیکی V_s و تابع جواب اضافی V_{ad} . ارتعاشات عرضی تیر در مجموع به صورت جمع این دو جواب خواهد بود.

لازم به ذکر است که قسمت جواب اضافی V_{ad} به شدت تابع پارامتری به نام پارامتر اینرسی است که در طول این تحقیق با B نشان داده شده است و وابسته به خواص هندسی و جنس تیر است. حال در دو حالت حدی اثر B را بررسی میکنیم.

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که پارامتر B برابر با صفر باشد. در این حالت با تیری سر و کار داریم که سفتی خمشی برابر با صفر دارد و به همین خاطر ممان خمشی در تیر تنها برابر با قرینه ممان حرارتی خواهد بود. از سوی دیگر در این حالت جابجایی اضافی تیر برابر است با قرینه جابجایی استاتیکی و مقدار کل جابجایی تیر برابر با صفر است.

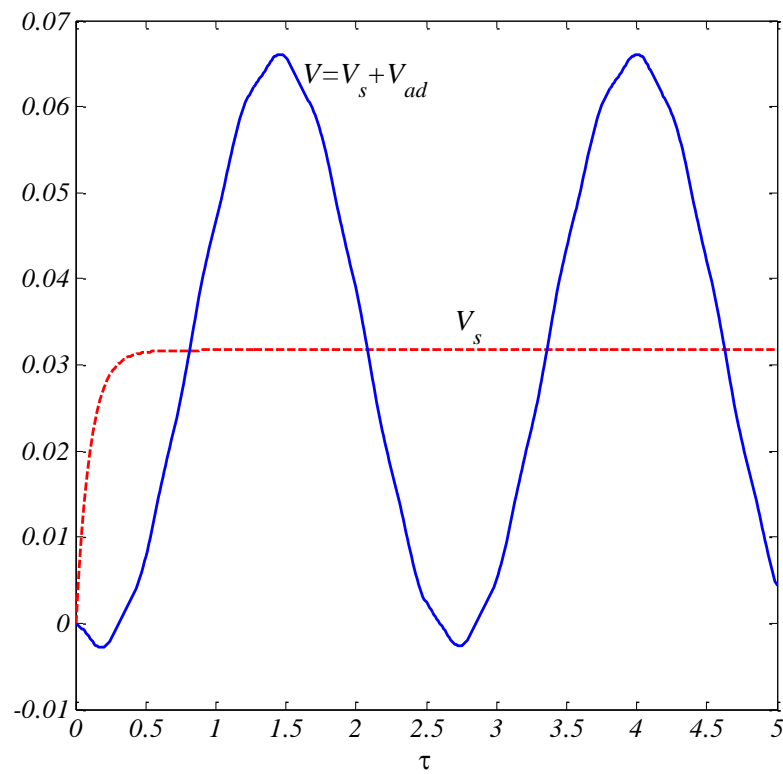
در حالت حدی دیگر که پارامتر B برابر با بینهایت باشد کل گشتاور در تیر برابر با صفر است. ضمناً با بزرگ بودن این پارامتر جابجایی اضافی V_{ad} برابر با صفر است و تنها پاسخ شبه استاتیکی برای یافتن پاسخ تیر کفایت میکند. به عبارت دیگر در حالی که پارامتر اینرسی عدد بزرگی باشد، نیازی به حل اضافی نخواهد بود و پاسخ شبه استاتیکی تیر برای محاسبه جابجایی در تیر کافی است.

لازم به ذکر است که پارامتر τ که مربوط به تاثیر اینرسی دورانی است، بیشتر در موده‌های بالای ارتعاشی قابل بروز است. برای نتایج اتی، این پارامتر برابر با یک هزارم در نظر گرفته شده است.

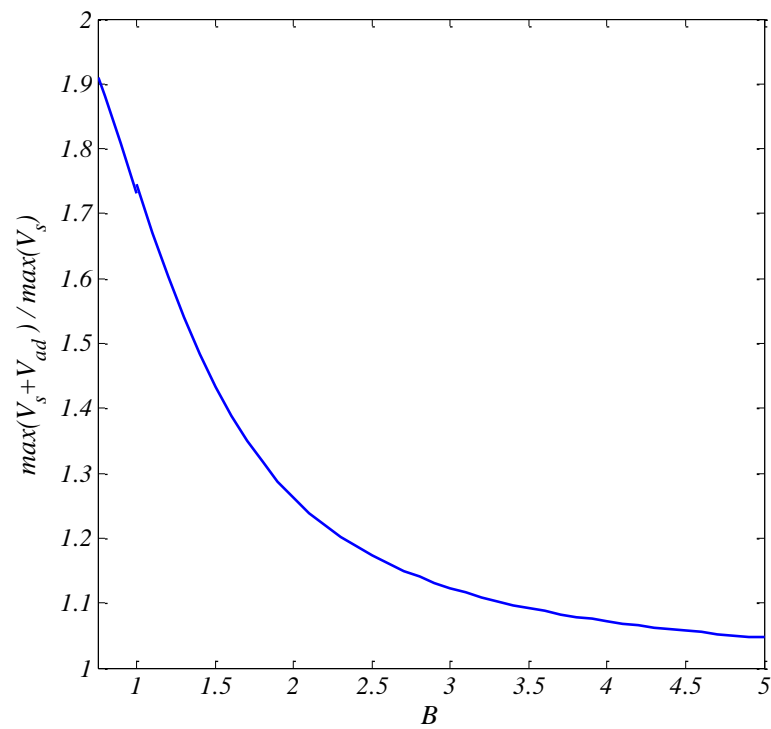


شکل ۳- مقایسه خیز میانه تیر در دو حالت شبه استاتیکی و جواب کلی برای حالت $B = 5$

منحنی ارتعاشی جمع دو جواب و منحنی نفوذ حالت شبه استاتیک است.



شکل ۴- مقایسه خیز میانه تیر در دو حالت شبه استاتیکی و جواب کلی برای حالت $B = 0.5$.



شکل ۵- مقایسه نسبت خیز ماکزیمم کل به شبه استاتیک در میانه تیر.

پیش از بولی همواره برای محاسبه جابجایی در سازه‌هایی که در معرض شوک حرارتی بودند معادله انتقال حرارت برای یافتن توزیع دما حل می‌شد و نتایج آن به صورت مجزا وارد معادلات تعادل تیر می‌شد که نتیجه آن پاسخ شبه استاتیکی تیر است. در ادامه نشان می‌دهیم که بسته به مقدار پارامتر B این حل نمی‌تواند صحیح باشد و منجر به خطاهایی در پاره‌ای از موارد خواهد شد.

شکل (۲) نشان می‌دهد که مقدار دو جواب به دست آمده از حل شبه استاتیکی و حل کلی (مجموع دو جواب شبه استاتیکی و جواب اضافی) به شدت تابع پارامتر B است. در این شکل برای حالت $B = 1$ دو جواب را مقایسه کرده‌ایم. همانگونه که مشاهده می‌شود پاسخ به دست آمده از جواب شبه استاتیکی ماهیت نفوذ دارد زیرا از اینرسی تیر صرف‌نظر می‌کند. حال آنکه پاسخ اضافی تیر دارای جملاتی به شکل هارمونیک است و رفتار ارتعاشی و موجی را برای تیر پیش‌بینی می‌کند. لازم به ذکر است که در حالتی که پاسخ شبه استاتیکی به عنوان جواب در نظر گرفته شود، مقدار جابجایی تیر به شدت با اشتباه بزرگی پیش‌بینی می‌شود.

دو شکل (۳) و (۴) نیز مقایسه‌ای میان دو پاسخ شبه استاتیکی و پاسخ کلی تیر انجام شده است. در هر دو این منحنی‌ها نیز همانگونه که نشان داده شده است، پاسخ شبه استاتیکی و پاسخ کلی از هم مجزا هستند. با بالارفتن پارامتر B همانگونه که انتظار می‌رود این دو پاسخ به هم نزدیک می‌شوند که به نوعی بیانگر آن است که پاسخ شبه استاتیکی برای حل مساله در حالتی که پارامتر B عدد بزرگی باشد کفایت می‌کند.

همانگونه که از مقایسه نتایج این سه شکل بر می‌آید پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت با بالارفتن مقدار پارامتر اینرسی کاهش می‌یابد و به نوعی مختص تیرهای نازک می‌باشد (پارامتر B با ضخامت تیر نسبت مستقیم دارد). ضمناً دوره ارتعاشات تیر با بالارفتن پارامتر B کاهش می‌یابد (فرکانس افزایش می‌یابد) و دامنه ارتعاشات نیز با بالارفتن پارامتر اینرسی کاهش می‌یابد.

شکل (۵) مقایسه‌ای از میزان خطا را دو در حالت شبه استاتیکی و کلی ارائه می‌کند. بدین منظور با بازنگری تاریخچه جابجایی تیر، مقدار جابجایی ماکزیمم برحسب دو حل کلی و شبه استاتیکی محاسبه شده و نسبت آن‌ها در شکل (۵) رسم شده است. همانگونه که گفته شد، با بالارفتن پارامتر B و محو شدن ارتعاشات واداشته از حرارت، جواب شبه استاتیک تقریب بسیار خوبی برای پاسخ تیر خواهد بود.

۴- نتیجه‌گیری

تحقیق حاضر به بررسی پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت در تیرهای اویلر-برنولی پرداخته است. بدین منظور معادله انتقال حرارت در راستای ضخامت تیر برای حالتی که تیر در یک سمت عایق شده و در سمت دیگر در معرض شار حرارتی انی قرار بگیرد، تشکیل و به صورت تحلیلی حل شده است. با استفاده از پروفیل دمای به دست آمده، گشتاور حرارتی در تیر محاسبه شده و معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر با حضور اینرسی دورانی حل شده است. حل به کار رفته بر پایه حل بولی بوده که مناسب برای تیرها با شرایط مرزی ساده است. لازم به ذکر است که تفاوت بنیادی حل حاضر با حل بولی در نظر گرفتن اینرسی دورانی بوده که در حل بولی صرف‌نظر شده است.

جواب‌های به دست آمده از تحلیل حاضر با صرفنظر از اینرسی دورانی به راحتی به حل بولی کاهش می‌یابد. نتایج عددی در قالب منحنی‌هایی رسم شده که به خوبی بروز پدیده ارتعاشات واداشته از حرارت را بسته به مقدار پارامتر اینرسی تایید می‌کند.

مراجع

- [1] Boley, B. A., "Thermally Induced Vibrations of Beams", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, pp. 170-181, (1956).
- [2] Boley, B. A., and Barber, A. D., "Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid Heating", Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 413-425, (1957).
- [3] Hetnarski, R., and Eslami, M.R., "*Thermal Stresses Advanced Theory and Applications*", 1st Editions, Springer, Amsterdam, (2009).
- [4] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*", 1st Editions, CRC Press, Boca Raton, (2003).
- [5] Boley, B. A., and Weiner, J.H., "*Theory of Thermal Stresses*", 1st Editions, Wiley, New York, (1960).

فهرست نمادهای انگلیسی

- A : سطح مقطع تیر
 b : پهناى تیر
 B : پارامتر اینرسی
 c : ظرفیت گرمایی تیر
 E : مدول الاستیسیته تیر
 h : ضخامت تیر
 I : ممان اینرسی سطح مقطع تیر
 K : ضریب انتقال حرارت هدایتی تیر
 L : طول تیر
 M : گشتاور موجود در تیر
 M_T : گشتاور حرارتی موجود در تیر
 m : گشتاور بی‌بعد موجود در تیر
 m_T : گشتاور حرارتی بی‌بعد موجود در تیر
 Q_c : مقدار شار حرارتی بر روی تیر

r : پارامتر بدون بعد اینرسی دورانی

T : پروفیل دما در تیر

T_0 : دمای مرجع

t : زمان

V : جابجایی عرضی بدون بعد تیر

V_s : جابجایی عرضی شبه استاتیکی بدون بعد تیر

V_{ad} : جابجایی عرضی اضافی بدون بعد تیر

W : جابجایی عرضی تیر

x : مختصه طول تیر

Z : مختصه ضخامت تیر

α : ضریب انبساط حرارتی تیر

ε : کرنش تیر

σ : تنش تیر

ρ : چگالی تیر

κ : ثابت نفوذ حرارتی تیر

ξ : مختصه بی بعد طول تیر

τ : مختصه بی بعد زمان

Abstract

Present research deals with the thermally induced vibrations of beams. The structure is made of an isotropic homogeneous material and is subjected to rapid surface heating on the upper surface while the lower one is thermally insulated. Based on the assumption of uncoupled thermo-elasticity, the one-dimensional transient heat conduction equation is solved analytically. The transverse vibration equation of the beam is obtained with the aid of the Euler-Bernoulli assumptions and consideration of the rotary inertia.

This equation is also solved analytically for simply supported beams using the Fourier series expansion. The solution of this equation is divided into two parts, namely the quasi-static response and the complementary response. All of the results are presented in a dimensionless form and the obtained formulae are compared with those provided by neglecting the inertia effects. Finally, graphical presentation of mid-span vibrations of the beam are given which accept the existence of thermally induced vibrations.