ارتعاشات غیرخطی اجباری تیر یکسرگیردار کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با جرم متمرکز انتهایی

حمیدرضا اسماعیلی [۱]
دانشجوی دکترا

هادی آروین بروجنی [۲]
دانشیار

با توجه به کارکرد متفاوت مکانیزم تیر و جرم متمرکز و اهمیت مواد نانوکامپوزیتی، در این مقاله به بررسی ارتعاشات غیر خطی تیرهای کامپوزیتی یکسرگیردار با جرم متمرکز در انتها، تحت تحریک نیروی هارمونیک پرداخته شده است. معادلات حرکت حاکم با استفاده از روش فرمول بندی دقیق هندسی استخراج گردیده است. به منظور مدل سازی خواص مکانیکی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از مدل موری- تاناکا استفاده گردیده است. پاسخ فرکانسی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه استخراج گردیده است. در نهایت به بررسی تأثیر میزان جرم متمرکز، درصد نانولوله کربنی و نیروی هارمونیک بر پاسخ فرکانسی پرداخته شده است.

واژه‌های راهنما: ارتعاشات غیرخطی اجباری، نانوکامپوزیت، نانولوله‌های کربنی، جرم متمرکز.

۱- مقدمه

پژوهش برروی تیرهای یکسرگیردار با جرم متصل شده به آن، با توجه به عملکردهای گوناگون این مکانیزم مانند سازه‌های نگهدارنده مخازن و تابلوها و. . . سابقه طولانی دارد. ارتعاشات و پاسخ دینامیکی تیر یک سر درگیربا جرم متصل شده به انتهای تیر، دستمایه تحقیق پژوهشگران متعددی بوده است. از نخستین گام‌های این نوع پژوهش می‌توان به‌این موارد اشاره نمود. لـورا و همکـاران [۱] فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیـر یکسر درگیـر همگن با یک جرم متمرکز در انتها را مورد مطالعه قـرار دادنـد. آن‌ها جواب‌های دقیقی برای نسبت‌های مختلف جرم متمرکز و با استفاده از مدل تیر اویلر- برنولی به دست آوردنـد.
گـول [۲]بـه مطالعه ارتعاشات تیر با یک جرم متمرکز در مکان دلخـواه و بـا تکیه‌گاه مقاوم در برابر چرخش با استفاده از مدل اویلر- برنولی و تبدیل لاپلاس پرداخته است. وی به تأثیر نسبت جرم متمرکز به جرم تیر، سختی فنرهای دو سر تیر بـه سـختی تیـر و مکـان جرم متمرکز برروی تیر در تحلیل فرکانس‌های طبیعی تیر توجه نموده است. پارنل و همکارانش [۳] با بررسی ارتعاشـات یـک تیر اویلر- برنولی یک سر درگیر-یک سر آزاد با یک جرم متمرکز در انتهـای دیگر آن پرداخته اند.

---

[۱] دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد esmaeili@stu.sku.ac.ir
[۲] نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد hadi.arvin@sku.sc.ir
تاریخ دریافت: ۹۷/۰۲/۰۸، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۳/۱۹

تحلیل آن‌ها برای یک تیـر بـا سـطح مقطـع ثابت اما بار گسترده شرایط مرزی و شـرایط اولیـه متغیـر بـوده است. در سال‌های اخیر یامـان [۴] بـا اسـتفاده از روش المـان محدود به تحلیل تیر یک سردرگیر به همراه یک جرم متمرکز در انتهای آزاد تیر پرداختـه اسـت. ویشـار و فویسـت [۵] معادله حاکم بر حرکت تیر را با فرض وابسـته بـودن خمـش و پیچش ارائه نمودند. گوتا و همکاران [۶] در ارتعاشـات عرضـی محورهای کامپوزیتی دو تکه با شرایط مرزی مختلف را مطالعـه نمودند. افتخاری و همکاران [۷] به بررسی تأثیر اضافه کردن یک جرم متمرکز برروی تیرهای کامپوزیت لایه ای یک سر درگیر در حرکات ارتعاشی عرضی تیر پرداختند. از سوی دیگر پژوهش‌های مرتبط با کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی سابقه طولانی ندارد. اکثر رهیافت‌های کانتینیومی، برای تعیین خواص مکانیکی نانو کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله-های کربنی بر نتایج تئوری اشلبی [۸، ۹] و تلاش‌های متعدد سایر پژوهشگران بر تکمیل این تئوری برای عمومیت سازی و کلیت افزایی فرمولاسیون برای اجسام غیر همگن، تکیه دارند [۱۰، ۱۱].

گام اساسی برای مدل سازی ماده‌هایی که فاز دوم (فاز تقویت کننده) در آن‌ها کاملا بصورت ناهمگن پخش شده است توسط موری و تاناکا [۱۲] برداشته شد. با پژوهش‌های انجام شده توسط چنگ و چنگ [۱۳] به منظور تعیین مدول موثر کامپوزیت‌های الیاف کوتاه و همچنین پژوهش ادگارد و همکاران [۱۴] به منظور مدل سازی پلیمرهای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی و همچنین پژوهش بنونیست درمورد تئوری موری تاناکا [۱۵] و پژوهش فرمیکا و لاکاربونارا [۱۶] درمورد معادلات اشلبی برای مدل سازی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌کربنی، اعتبار و صحت مدل اشلبی- موری- تاناکا برای این نوع کامپوزیت‌ها بیش از پیش مورد تایید قرار گرفت. تیر مدل شده در این مقاله از جنس نانو کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی می‌باشد که این نوع کامپوزیت‌ها بر حسب درصد حجمی‌های متفاوت تقویت کننده، خواص منحصر به فرد و ویژه ای را از خود بروز می‌دهند. دلیل استفاده از نانولوله‌های کربنی به عنوان فاز تقویت کننده، ویژگی‌های منحصر به فرد مواد کربنی می‌باشد. ماده تشکیل دهنده ماتریس نانوکامپوزیت مورد استفاده اپوکسی می‌باشد که در گروه پلاستیک‌ها قرار می‌گیرد. دلیل استفاده از اپوکسی به عنوان ماتریس، چگالی بسیار کم آن می‌باشد که باعث کاهش چشمگیر جرم سازه نهایی می‌گردد. از سویی دیگر در این مقاله فرمول بندی بر اساس رهیافت دقیق هندسی صورت می‌گیرد که این روش که ابداع آن برای اولین بار توسط برادران کوزرات در اوایل قرن ۲۰ میلادی صورت گرفته [۱۸]، و در سال (۲۰۱۳) والتر لاکاربونارا آن را تکمیل نموده [۱۹]، امکان بررسی ارتعاشات در دامنه‌های بزرگتر را به ارمغان می‌آورد. در این مقاله برای نخستین بار با استفاده از فرمول بندی دقیق هندسی، معادلات حرکت تیر نانوکامپوزیتی با جرم متمرکز انتهایی استخراج می‌شود. استفاده از این روش امکان بررسی ارتعاشات در دامنه‌های بسیار بزرگ را فراهم می‌آورد و همچنین این رهیافت بدون هیچ ساده سازی، اثر تمامی غیرخطی‌های هندسی و اینرسی را در معادلات حرکت و پاسخ سیستم، ظاهر می‌سازد. سپس با فرض شرایط برش ناپذیری و گسترش ناپذیری معادلات حرکت به یک معادله کاهش می‌یابد. روش گلرکین بر معادله بدست آمده اعمال می‌گردد تا معادله پاره‌ای حاکم جداسازی گردد. سپس با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بر معادله جداسازی شده به بررسی پاسخ فرکانسی در حالت تشدید اولیه پرداخته می‌شود. در نهایت در قسمت نتایج و بحث اثرات درصد کسرحجمی نانولوله، نیروی اعمالی و جرم متمرکز به تفصیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- استخراج معادلات حرکت

به منظور استخراج معادلات حرکت تیر از تئوری غیر خطی تیر مبتنی بر فرمولاسیون دقیق هندسی استفاده می‌شود[۱۹]. شماتیک تیر مورد بررسی در این مقاله در شکل (۱) نشان داده شده است.

گام اول در فرمول بندی دقیق هندسی، تعیین پیکربندی اولیه و نهایی می‌باشد. همانطور که در شکل دیده می‌شود دستگاه مختصات اولیه و ثابت $\mathbf{e}_k\ (k=1,2,3)$ می‌باشد و دستگاه مختصات نهایی بصورت $\mathbf{b}_k\ (k=1,2,3)$ تعریف می‌شود. رابطه بین این دو دستگاه بصورت $\mathbf{b}_k=\mathbf{R}\mathbf{e}_k$ می‌باشدکه در آن $\mathbf{R}$ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات اولیه به دستگاه مختصات نهایی می‌باشد.

با استفاده از تئوری کوزرات معادله تعادل نرخ اندازه حرکت خطی تیر بدین صورت بیان می‌گردد [۱۹].

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{n}(s,t)+\mathbf{f}=\dot{\mathbf{i}} \qquad (۱)$$

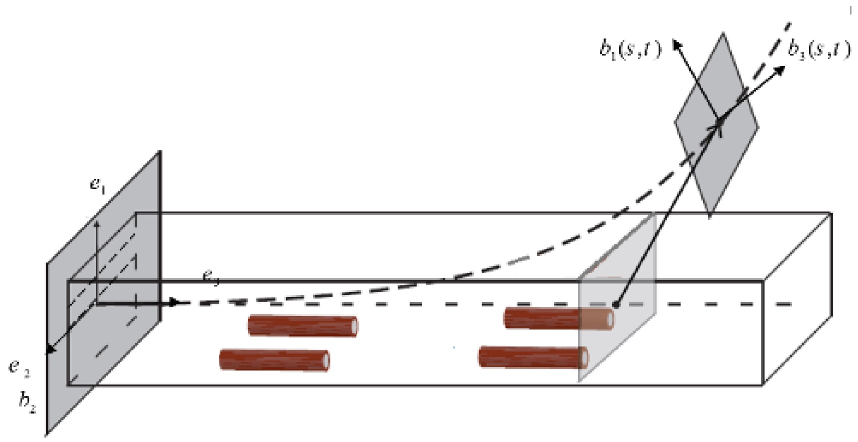
که در این رابطه، $\mathbf{n}(s,t)$ منتجه نیرو، $\mathbf{f}$ نیروی خارجی و $\dot{\mathbf{i}}$ نرخ اندازه حرکت خطی می‌باشد که پس از محاسبه آن، معادلات نهایی تعادل نرخ اندازه حرکت خطی، بدین صورت استخراج خواهد گردید [۱۹].

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{n}(s,t)+\mathbf{f}=\varrho\mathrm{A}(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(s,t))+\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}(s,t)\right)\times\varrho\mathbf{i}+\boldsymbol{\omega}(s,t)\times(\boldsymbol{\omega}(s,t)\times\varrho\mathbf{i}) \qquad (۲)$$

در رابطه (۲)، $\boldsymbol{\omega}(s,t)$ بردارسرعت زاویه ای دوران سطح مقطع تیر بوده، $\varrho\mathrm{A}$ جرم بر واحد طول و $\varrho\mathbf{i}$ بردار گشتاور اول اینرسی می‌باشد. $\mathbf{r}(s,t)=s+\mathbf{u}(s,t)$ معرف بردار مکان مرکز سطح سطح مقطع پس از تغییر شکل است که در این رابطه s مکان اولیه هر سطح مقطع پیش از تغییر شکل نسبت به مبدا دستگاه مختصات اولیه و $\mathbf{u}(s,t)$ بردار تغییرشکل می‌باشد.

از سویی دیگر با استفاده از تئوری کوزرات، معادلات تعادل نرخ اندازه حرکت زاویه‌ای تیر، مطابق رابطه زیر خواهد بود [۱۹].

$$\frac{\partial\mathbf{m}(s,t)}{\partial s}+\mathbf{v}(s,t)\times\mathbf{n}(s,t)+\mathbf{c}=\dot{\mathbf{h}} \qquad (۳)$$



شکل۱- شماتیک تیر مورد مطالعه

که در این رابطه، $\mathbf{m}(s,t)$منتجه گشتاور، $\mathbf{v}(s,t)=\dfrac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s}$ بردار کشیدگی کلی، $\mathbf{c}$ بردار گشتاور خارجی و $\dot{\mathbf{h}}$ نرخ اندازه حرکت زاویه‌ای می‌باشد. پس از محاسبه پارامترهای نرخ اندازه حرکت زاویه ای، معادله برداری تعادل اندازه حرکت زاویه ای بدین صورت استخراج می گردد [۱۹].

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{m}(s,t)+\mathbf{v}(s,t)\times\mathbf{n}(s,t)+\mathbf{c}=\varrho\mathbf{i}\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(s,t)+\varrho\mathbf{J}\bullet\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}(s,t)+\boldsymbol{\omega}(s,t)\times\left(\boldsymbol{\omega}(s,t)\times\varrho\mathbf{J}\right) \quad (۴)$$

که در رابطه بالا $\varrho\mathbf{J}$ معرف تانسور گشتاور دوم اینرسی می‌باشد.

با فرض حرکت صفحه ای برای تیر، مولفه‌های غیر صفر بردارها و تانسورهای اینرسی به ترتیب $\varrho\mathbf{i}=\varrho I_2\mathbf{b}_2$ و $\varrho\mathbf{J}=\varrho J_{22}\mathbf{b}_2$ خواهد بود که نحوه محاسبه آن در **پیوست الف** ارائه گردیده است. از سویی دیگر بردار تغییرشکل $\mathbf{u}(s,t)$ شامل دو مولفه زیر خواهد بود [۱۹].

$$\mathbf{u}(s,t)=u(s,t)\mathbf{e}_3+v(s,t)\mathbf{e}_1 \quad (۵)$$

منتجه نیرو، منتجه گشتاور و بردار کشیدگی کلی نیز به ترتیب به‌صورت $\mathbf{n}(s,t)=N\mathbf{b}_3+Q\mathbf{b}_1$، $\mathbf{m}(s,t)=M\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{v}(s,t)=\nu(s,t)\mathbf{b}_3+\eta(s,t)\mathbf{b}_1$ خواهند بود که در این روابط، N نیروی کششی در راستای $\mathbf{b}_3$ و Q منتجه نیرو برشی در راستای $\mathbf{b}_1$، M منتجه گشتاور در راستای $\mathbf{b}_2$، و در نهایت $\nu(s,t)$ کشیدگی کلی در راستای $\mathbf{b}_3$ و $\eta(s,t)$ مولفه برشی بردار کشیدگی کلی در راستای $\mathbf{b}_1$ می‌باشند و به‌ترتیب به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند [۱۹].

$$\eta(s,t)=v(s,t)\cos(\theta(s,t))-(1+u(s,t))\sin(\theta(s,t)) \quad (۶)$$

$$\nu(s,t)=v(s,t)\sin(\theta(s,t))+(1+u(s,t))\cos(\theta(s,t)) \quad (۷)$$

باتوجه به اینکه بردارهای یکه دستگاه مختصات جاری نسبت به زمان و مکان تغییر می‌کند مشتق‌های زمانی و مکانی آن را مطابق زیر تعریف می‌نماییم[۱۹].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{b_k}}{\partial s}&=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{b_k} \qquad k=1,2,3\\ \frac{\partial \mathbf{b_k}}{\partial t}&=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b_k} \qquad k=1,2,3\end{aligned} \quad (۸)$$

که در رابطه‌های بالا $\boldsymbol{\mu}$ بردار انحنا می‌باشد که در حرکت صفحه‌ای به صورت $\boldsymbol{\mu}=\mu\mathbf{b}_2=\dfrac{\partial\theta(s,t)}{\partial s}\mathbf{b}_2$ تعریف می‌شود که در آن $\theta(s,t)$ زاویه دوران سطح مقطع، حول محور $\mathbf{b}_2$ است. از سویی دیگر $\boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت زاویه ای می‌باشد که در حرکت صفحه ای مطابق $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{b}_2=\dfrac{\partial\theta(s,t)}{\partial t}\mathbf{b}_2$ تعریف می‌گردد.

بدین ترتیب فرم مولفه ای معادله حرکت نیرویی تیر در راستای $\mathbf{b}_3$ با استفاده از روابط (۲)، (۴) و (۸) با شرط حرکت صفحه‌ای برای آن، بصورت زیر ساده می‌گردد.

$$\frac{\partial}{\partial s}N\left(s,t\right)-\mu\left(s,t\right)Q\left(s,t\right)+f_3=\varrho A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\left(s,t\right)\right)\cos\left(\theta\left(s,t\right)\right)+\varrho A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v\left(s,t\right)\right)\sin\left(\theta\left(s,t\right)\right) \tag{۹}$$

همچنین معادله حرکت نیرویی در راستای b_2 نیز بصورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial}{\partial s}Q_2\left(s,t\right)+\mu\left(s,t\right)N\left(s,t\right)+f_2=-\varrho A\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\left(s,t\right)\sin\left(\theta\left(s,t\right)\right)+\varrho A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v\left(s,t\right)\right)\cos\left(\theta\left(s,t\right)\right) \tag{۱۰}$$

در نهایت معادله تعادل گشتاور خمشی در راستای $\mathbf{b}_1$ بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial s}M\left(s,t\right)+Q\left(s,t\right)v\left(s,t\right)+N\left(s,t\right)\eta(s,t)+c_1=\varrho J_{22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta\left(s,t\right) \tag{۱۱}$$

منتجه نیروی کششی و گشتاور خمشی مطابق زیر قابل محاسبه خواهند بود.

$$M=\int\sigma_{33}x_1dA=EI_2\varepsilon(s,t)+EJ_{22}\mu(s,t) \tag{۱۲}$$

$$N=\int\sigma_{33}dA=EA\varepsilon(s,t)+EI_2\mu(s,t) \tag{۱۳}$$

در روابط (۱۲) و (۱۳) پارامترهای σ_{33}، تنش در راستای طول تیر و $\varepsilon_{33}=v(s,t)-1$ کرنش طولی تیر می‌باشد. نحوه محاسبه EI_2، EJ_{22} و EA در **پیوست الف** ارائه گردیده است.

با فرض تحلیل تیر نازک در مقاله حاضر شرط برش ناپذیری در این بررسی اعمال می‌شود. در این راستا، کرنش برشی کلی مساوی صفر در نظر گرفته می‌شود یعنی $\eta(s,t)=0$ و در نتیجه درجه آزادی دورانی تیر حذف می‌شود و بدین ترتیب رابطه (۶) منجر به رابطه زیر خواهد شد.

$$\theta\left(s,t\right)=-\arctan\left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}v\left(s,t\right)}{1+\frac{\partial}{\partial s}u\left(s,t\right)}\right) \tag{۱۴}$$

پس از حذف $\eta(s,t)$ به منظر لحاظ تأثیر نیروی برشی در پاسخ، از رابطه (۱۱) منتجه نیروی برشی بر حسب نیروهای اینرسی و منتجه گشتاور خمشی مطابق زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q\left(s,t\right)=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}M\left(s,t\right)-c_1+\varrho J_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta\left(s,t\right)}{v\left(s,t\right)} \tag{۱۵}$$

از معادله حرکت طولی تیر یعنی رابطه (۹) مقدار منتجه نیرو در راستای $\mathbf{b}_3$، مطابق زیر استخراج می‌شود

$$N\left(s,t\right)=\int_s^1\left[-\mu Q\left(s,t\right)-f_3-\varrho A\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\left(s,t\right)\right)\cos\left(\theta\left(s,t\right)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v\left(s,t\right)\right)\sin\left(\theta\left(s,t\right)\right)\right)\right]\mathrm{ds} \tag{۱۶}$$

از طرف دیگر با اعمال شرط گسترش ناپذیری در معادلات حرکت، کشش طولی کلی مساوی صفر در نظر گرفته می‌شود و بدین ترتیب $v(s,t)=1$ خواهد شد و بنابراین تغییرشکل طولی بر حسب تغییرشکل عرضی تیر استخراج می‌شود.

$$u(s,t) = -\int_0^s \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2 \mathrm{d}s \tag{۱۷}$$

در نهایت معادلات حرکت، به تک معادله حرکت عرضی تیر کاسته می‌شود که با استفاده از روابط (۹) تا (۱۷) و بسط تیلور مرتبه سوم معادله نهایی بدون اثر جرم متمرکز بصورت زیر استخراج می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&-EJ_{22}\Big(\frac{\partial^3}{\partial s^3}v(s,t)+\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)\right)^2+2\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial t\partial s^2}v(s,t)\\
&+\varrho J_{22}\Big(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial s^2}v(s,t)+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial s^2}v(s,t)\Big)\Big)\\
&-EJ_{22}\Big(\frac{\partial^4}{\partial s^4}v(s,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2+3\left(\frac{\partial^3}{\partial s^3}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)^3\Big)-\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\right)\int_s^1\varrho A\Big(-\int_0^s\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}v(s,t)\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial s\partial t^2}v(s,t)\mathrm{ds}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(s,t)\right)\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\Big)\\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\right)\Big(\varrho J_{22}\Big(\frac{\partial^3}{\partial s\partial t^2}v(s,t)+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}v(s,t)\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\frac{\partial^3}{\partial s\partial t^2}v(s,t)\Big)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial s^3}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)^2\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\Big)\Big)\mathrm{ds}\\
&=\varrho A\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(s,t)\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\right)+\int_0^s\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}v(s,t)\mathrm{ds}\,\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

۳- بی بعدسازی و گسترش معادله حرکت

رابطه (۱۸) را می‌توان با تعریف پارامترهای زیر بصورت بی بعد بازنویسی نمود.

$$s^* = \frac{s}{L},\quad t^* = t\,\omega_c,\quad \omega_c = \sqrt{\frac{EJ_c}{\varrho A_C L_c{}^4}},\quad v^* = \frac{v}{L},\quad \mu^* = L\,\mu \tag{۱۹}$$

$$\sigma = \frac{EJ_{22}}{EJ_c},\ \beta = \frac{\varrho J_{22}}{\varrho A_C\,L^2},\ \delta^0 = \frac{\varrho A}{\varrho A_C}$$

که در این روابط، L، ϱA_C، EJ_c به ترتیب معرف طول تیر، جرم بر واحد طول مشخصه و صلابت خمشی مشخصه که دو پارامتر اخیر برای تیری که تنها از جنس پلیمر می‌باشد محاسبه می‌گردند.

لازم به ذکر است که اثر اینرسی انتقالی جرم متمرکز انتهای تیر با پارامتر $\delta(s) = \delta^0\left(1+\delta^*(s)\right)$ در معادلات حرکت وارد می‌گردد که $\delta^*(s) = \Delta\cdot\mathrm{Dirac}(s-1)$ اثر جرم متمرکز انتهایی، بر اینرسی انتقالی تیر می‌باشد که به وسیله تابع دلتا دیراک اعمال می‌گردد و Δ درصد جرم انتهایی به جرم کل تیر δ^0 است.

پس از بی بعد سازی رابطه (۱۸) و افزودن ترم مرتبط با میرایی به‌صورت $2\zeta\omega_{01}\frac{\partial}{\partial t}v(s,t)$ که در آن ζ ضریب بی‌بعد این میرایی و ω_{01} فرکانس اول تیر معادل از جنس اپوکسی می‌باشد [۱۹] معادله غیرخطی ارتعاشات تیر مطابق رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\beta\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial s^2}v(s,t)-\sigma\frac{\partial^4}{\partial s^4}v(s,t)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\int_s^1-4\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)c_2\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\\
&\quad+2\beta\left(\frac{\partial^3}{\partial t\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)+\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)\right)^2\\
&\quad+\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}v(s,t)-\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2\\
&\quad-3\sigma\left(\frac{\partial^3}{\partial s^3}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)-\sigma\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)^3+4\delta(s)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(s,t)\right)\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\int_s^1-4\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}v(s,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial s\partial t^2}v(s,t)\mathrm{d}s\\
&\quad+4\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\beta\frac{\partial^3}{\partial s\partial t^2}v(s,t)-4\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}v(s,t)\right)\sigma\frac{\partial^3}{\partial s^3}v(s,t)\mathrm{d}s=\delta(s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(s,t)+2\zeta\omega_{01}\frac{\partial}{\partial t}v(s,t)\\
&\quad-\frac{1}{2}\delta(s)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(s,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)^2+\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}v(s,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)\right)\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}v(s,t)\mathrm{d}s\,\frac{\partial}{\partial s}v(s,t)
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

۴- مدول یانگ معادل نانو کامپوزیت

مدول الاستیسیته معادل لایه نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی، بر اساس تئوری همگن‌سازی موری و تاناکا و پژوهش‌های لاکاربونارا از رابطه زیر استخراج می‌گردد [۱۶].

$$E^{Eq}=\frac{1}{\Delta}(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) \qquad (۲۱)$$

که در رابطه ارائه شده برای مدول یانگ معادل، پارامترهای استفاده شده بصورت زیر بدست آمده‌اند.

$$\begin{aligned}\Delta=&E_c\left(2\nu_m{}^2+\nu_m-1\right)\left(V_m-2(\nu_m-1)V_c\right)\\ &-E_m\left(2\nu_c{}^2+\nu_c-1\right)\left(-2\nu_m(V_c-1)+V_m+2V_c-2\right)\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

$$\Delta_1=-E_m{}^2\left(2\nu_c{}^2+\nu_c-1\right)(V_c-1)\left(-2\nu_m(V_c-1)+V_m+2V_c-2\right) \qquad (۲۳)$$

$$\Delta_2=E_mE_cV_m\left(-2\nu_m{}^2+\nu_m(4\nu_cV_c+V_c-1)+(\nu_c-2)V_c+1\right) \qquad (۲۴)$$

$$\begin{aligned}\Delta_3=&2E_mE_c(\nu_m-1)(V_c-1)V_c\left(4\nu_m\nu_c+\nu_c+\nu_m-2\right)\\ &-E_c{}^2\left(2\nu_m{}^2+\nu_m-1\right)V_c\left(V_m-2(\nu_m-1)V_c\right)\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

در روابط بالا E_C، ν_C، V_C، E_M، ν_M و V_M به ترتیب معرف مدول یانگ، ضریب پواسون و درصد حجمی نانولوله‌های کربنی و ماتریس می‌باشد.

۵- روش مقیاس‌های چندگانه

این روش براساس مقیاس بندی زمانی معادله غیر خطی انجام می‌پذیرد. در این روش عموماً معادلات در سه مقیاس کند، تند و تندتر تفکیک می‌شوند و جواب نهایی بصورت حاصل جمع پاسخ‌های مقیاس‌های سه‌گانه حاصل می‌گردد. به منظور ایجاد امکان اعمال این روش بصورت غیر مستقیم، خیز تیر، $v(s,t)$، به دو قسمت تابع زمان و تابع مکان تفکیک می‌گردد.

$$v(s,t)=q(t)\cdot\psi(s) \quad (۲۶)$$

که در این رابطه $\psi(s)$ شکل مود مورد مطالعه و $q(t)$ مختصات عمومی متناظر آن است. در تعیین $\psi(s)$، روش گلرکین می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا ماتریس‌های جرم و سفتی، M و K برای معادله ارتعاش عرضی تیر، با استفاده از شکل مودهای تیر اویلر- برنولی، $\phi(s)$، بدست آورده می‌شود (برای مطالعه بیشتر می‌توان به مرجع [۲۰] مراجعه نمود). سپس با بدست آوردن بردارها و مقادیر ویژه از ماتریس‌های جرم و سفتی، وزن هر شکل مود از تیر اویلر- برنولی در تشکیل شکل مود نهایی منطبق بر معادله ارتعاشی تیر حاضر، بدست آورده می‌شود. با مشخص شدن ضریب وزنی هر شکل مود از تیر اویلر- برنولی، طبق رابطه زیر، شکل مود نهایی مورد استفاده در مقاله حاضر برای جداسازی معین می‌گردد.

$$\psi(s)=\sum_{i=1}^{N}W_i\phi_i(s) \quad (۲۷)$$

که در این رابطه W_i و $\phi_i(s)$ به ترتیب، وزن شکل مود و شکل مود iاُم در تشکیل شکل مود نهایی و N تعداد شکل مود اویلر-برنولی مورد استفاده می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۰) و اعمال فرآیند جداسازی گلرکین، معادله جداسازی شده مورد نظر در حوزه زمان بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &i_{12,3}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q(t)\right)\left(q(t)\right)^2+M_{11}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q(t)+i_{13,3}q(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\right)^2-2\zeta_{11}\omega_{10}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\\ &+n_{11,3}\left(q(t)\right)^3-K_{11}q(t)=F\cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

در معادله حاضر نیروی هارمونیک اعمالی به‌صورت $F\cos(\Omega t)$ در معادله اعمال شده است که Ω فرکانس تحریک می‌باشد. پارامترهای $i_{12,3}$، M_{11}، $i_{13,3}$، $n_{11,3}$، K_{11}، ζ_{11} و F در **پیوست ب** ارائه شده‌اند.

جهت اعمال روش مقیاس‌های چندگانه برمعادله (۲۸) ابتدا زمان با در نظر گرفتن $T_0=t$، $T_1=\varepsilon t$ و $T_2=\varepsilon^2 t$ که به ترتیب مقیاس‌های زمانی سریع به کند می‌باشند مقیاس بندی می‌گردد [۲۱].

بدین ترتیب مشتقات اول و دوم زمانی بصورت زیر ظاهر می‌گردد [۲۱].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}&=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\\ \frac{d^2}{dt^2}&=\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2}{\partial T_1{}^2}\right) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

سپس پاسخ سیستم بصورت توان‌های ε فرض می‌گردد [۲۱].

$$q(T_0,T_1,T_2)=\varepsilon q_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^2 q_1(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^3 q_2(T_0,T_1,T_2) \quad (۳۰)$$

با فرض $F=\varepsilon^2 F$، $\zeta_{11}=\varepsilon^2\zeta_{11}$ تاثیر نیروی تحریک و میرایی در مرتبه سوم وارد می‌گردد. با جایگذاری روابط بالا در معادلات غیرخطی حرکت یعنی رابطه (۲۸) و درنظر گرفتن توان‌های مشابه ε معادلات مرتبه ε^1، ε^2، ε^3 به ترتیب استخراج می‌شود. بدین ترتیب معادله ارتعاشات عرضی تیر مقیاس بندی شده در مرتبه اول، دوم و سوم به‌ترتیب بصورت زیر خواهند بود.

$$M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)-K_{11}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)=0 \tag{۳۱}$$

$$M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)-K_{11}q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)=-2M_{11}\frac{\partial^2}{\partial T_1\partial T_0}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right) \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned}M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)-K_{11}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)=-i_{12,3}\left(\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)\right)\left(q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)\right)^2\\-i_{13,3}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_0}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)\right)^2+2\zeta_{11}\omega_{10}\frac{\partial}{\partial T_0}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)-2M_{11}\frac{\partial^2}{\partial T_1\partial T_0}q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)\\-2M_{11}\frac{\partial^2}{\partial T_2\partial T_0}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)-M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_1}^2}q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)-n_{11,3}\left(q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)\right)^3+F\cos\left(\Omega T_0\right)\end{aligned} \tag{۳۳}$$

معادله مرتبه اول با معادله ارتعاشات خطی مساله مورد بررسی یکسان است و بدین ترتیب حل این معادله همان پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم است و برای مود kاُم بصورت زیر خواهد بود.

$$q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)=A_k\left(T_1,T_2\right)\mathrm{e}^{i\omega_k T_0}+CC \tag{۳۴}$$

که در این رابطه CC مزدوج مختلط ترم‌های سمت راست تساوی خواهد بود. ω_k و $A_k\left(T_1,T_2\right)$ به ترتیب فرکانس طبیعی خطی و دامنه نوسان در مود kاُم می‌باشند.

پس از جایگذاری پاسخ معادله مرتبه اول، یعنی رابطه (۳۴) در رابطه (۳۲) معادله مرتبه دوم به رابطه زیر ساده می‌شود.

$$M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)-K_{11}q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)=-2iM_{11}\left(\frac{\partial}{\partial T_1}A_k\left(T_1,T_2\right)\right)\omega_k\mathrm{e}^{i\omega_k T_0}+CC \tag{۳۵}$$

جهت حذف ترم سکولار در رابطه (۳۵) ضریب $e^{i\omega_k T_0}$ باید صفر باشد که بدین ترتیب $\frac{\partial}{\partial T_1}A_k\left(T_1,T_2\right)=0$ خواهد شد و یا به عبارتی دیگر

$$A_k\left(T_1,T_2\right)\equiv A_k\left(T_2\right) \tag{۳۶}$$

خواهد شد. بنابراین سمت راست رابطه (۳۵) صفر خواهد شد و نتیجتاً

$$q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)\equiv 0 \tag{۳۷}$$

خواهد بود.

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۴) و در نظر گرفتن رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) معادل مرتبه سوم یعنی رابطه (۳۳) بصورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)-K_{11}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)=&[3i_{12,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2{\omega_k}^2\bar{A}_k\left(T_2\right)\\ &+2i\zeta_{11}\omega_{10}A_k\left(T_2\right)\omega_k-i_{13,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2{\omega_k}^2\bar{A}_k\left(T_2\right)-3n_{11,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2\bar{A}_k\left(T_2\right)\\ &-2iM_{11}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_2}A_k\left(T_2\right)\right)\omega_k]\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}+[i_{12,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3{\omega_k}^2+i_{13,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3{\omega_k}^2\\ &-n_{11,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3]\mathrm{e}^{3i\omega_kT_0}+\frac{1}{2}F\mathrm{e}^{i\Omega T_0}+CC \end{aligned} \tag{۳۸}$$

با در نظر گرفتن تشدید اولیه رابطه $\Omega=\varepsilon^2\sigma+\omega_k$ برای فرکانس تحریک برقرار خواهد بود که در این رابطه σ پارامتر نزدیکی فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی kاُم می‌باشند. بدین ترتیب حذف ترم سکولار در این مرحله منجر به رابطه

$$-2i\,\omega_k\Gamma_{1,k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_2}A_k\left(T_2\right)-2i\,\omega_k\Gamma_{2,k}A_k\left(T_2\right)-3\Gamma_{3,k}\bar{A}_k\left(T_2\right)\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2+1/2\Gamma_{4,k}\mathrm{e}^{i\sigma T_2}=0 \tag{۳۹}$$

خواهد گردید که $\Gamma_{i,k}$ ها در **پیوست پ** ارائه شده است.

با حل رابطه (۳۹) برحسب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_2}A_k\left(T_2\right)$ و جایگذاری آن در رابطه (۳۸) جهت حذف ترم سکولار، این رابطه به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} -K_{11}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)+M_{11}\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)=&[F\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\Omega T_0}\right)\Gamma_{1,k}-\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\Omega T_0}\right)\Gamma_{4,k}M_{11}\\ &+3\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}i_{12,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2{\omega_k}^2\bar{A}_k\left(T_2\right)\Gamma_{1,k}-\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}i_{13,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2{\omega_k}^2\bar{A}_k\left(T_2\right)\Gamma_{1,k}\\ &+2i\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}\zeta_{11}\omega_{10}A_k\left(T_2\right)\omega_k\Gamma_{1,k}-3\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}n_{11,3}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2\bar{A}_k\left(T_2\right)\Gamma_{1,k}\\ &+3\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}\bar{A}_k\left(T_2\right)\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2\Gamma_{3,k}M_{11}+\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3\mathrm{e}^{3i\omega_kT_0}\Gamma_{1,k}i_{12,3}{\omega_k}^2\\ &+\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3\mathrm{e}^{3i\omega_kT_0}\Gamma_{1,k}i_{13,3}{\omega_k}^2-\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3\mathrm{e}^{3i\omega_kT_0}\Gamma_{1,k}n_{11,3}\\ &+2i\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}A_k\left(T_2\right)\Gamma_{2,k}M_{11}\omega_k]/\Gamma_{1,k} \end{aligned} \tag{۴۰}$$

جواب خصوصی رابطه (۴۰) را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} q_2(T_0,T_1,T_2)=&i\beta_1\left(\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}A_k\left(T_2\right)\right)+\beta_2\left(\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}\bar{A}_k\left(T_2\right)\left(A_k\left(T_2\right)\right)^2\right)\\ &+\beta_3\left(\mathrm{e}^{3i\omega_kT_0}\left(A_k\left(T_2\right)\right)^3\right)+1/2\beta_4\left(\mathrm{e}^{i\Omega T_0}\right)+CC \end{aligned} \tag{۴۱}$$

که β_iها با جایگذاری رابطه (۴۱) در رابطه (۴۰) و مساوی قرار دادن ضرایب هم ارز دو طرف رابطه بدست آمده مطابق **پیوست ت** بدست می‌آیند.

در نهایت $q(t)$ با جایگذاری رابطه‌های (۳۴)، (۳۷) و (۴۱) در رابطه (۳۰) و با مساوی یک قرار دادن ε بصورت زیر بدست می‌آید:

$$q(t)=a_k(t)\cos\left(\beta_k(t)+\omega_k t\right)-\beta_1 a_k(t)\sin\left(\beta_k(t)+\omega_k t\right)+\frac{1}{4}\beta_2\left(a_k(t)\right)^3\cos\left(\beta_k(t)+\omega_k t\right) \\ +\frac{1}{4}\beta_3\left(a_k(t)\right)^3\cos\left(3\omega_k t+3\beta_k(t)\right)+\beta_4\cos(\Omega t) \tag{۴۲}$$

۶- بررسی پایداری سیستم

به منظور بررسی پایداری سیستم فرم قطبی دامنه نوسان بصورت $A_k(T_2)=1/2a_k(T_2)e^{i\beta_k(T_2)}$ در نظر گرفته می‌شود و در رابطه قابلیت حل پذیری، رابطه (۳۹)، قرار داده می‌شود. سپس قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله بدست آمده از یکدیگر تفکیک شده و روابط مدولاسیون برای دامنه و فاز مطابق زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{d}{dT_2}a_k(T_2)=-\frac{\Gamma_{2,k}a_k(T_2)}{\Gamma_{1,k}}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{4,k}\sin\left(\theta_k(T_2)\right)}{\omega_k\Gamma_{1,k}} \tag{۴۳}$$

$$\frac{d}{dT_2}\theta_k(T_2)=-\frac{3}{8}\frac{\Gamma_{3,k}\left(a_k(T_2)\right)^2}{\omega_k\Gamma_{1,k}}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{4,k}\cos\left(\theta_k(T_2)\right)}{\omega_k\Gamma_{1,k}a_k(T_2)}+\sigma \tag{۴۴}$$

که در این رابطه $\theta_k(T_2)=-\beta_k(T_2)+\sigma T_2$ است.

جهت داشتن حل پایای نهایی پس از پاسخ گذار مشتقات دامنه و فاز در رابطه بالا صفر قرار داده می‌شود و با استفاده از رابطه بدیهی $\cos^2\left(\theta_k(T_2)\right)+\sin^2\left(\theta_k(T_2)\right)=1$ مقدار پارامتر نزدیکی مطابق زیر بدست می‌آید:

$$\sigma=\frac{1}{8}\frac{3\left(a_k(T_2)\right)^3\Gamma_{3,k}\pm4\sqrt{-4\left(a_k(T_2)\right)^2\Gamma_{2,k}{}^2\omega_k{}^2+\Gamma_{4,k}{}^2}}{\omega_k\Gamma_{1,k}a_k(T_2)} \tag{۴۵}$$

برای بررسی پایداری پاسخ پایای نهایی از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین معادلات (۴۳) و (۴۴) استفاده می‌شود. پس از محاسبه ماتریس ژاکوبین مذکور، رابطه‌های (۴۳) و (۴۴)، با در نظر گرفتن حالت پایا برای پاسخ نهایی، برای محاسبه $\cos\left(\theta_k(T_2)\right)$ و $\sin\left(\theta_k(T_2)\right)$ حل شده و در دترمینان ماتریس ژاکوبین قرار داده می‌شود و رابطه مشخصه زیر بدست می‌آید:

$$\lambda^2+2\frac{\Gamma_{2,k}}{\Gamma_{1,k}}\lambda+\left(\sigma^2-\frac{3}{2}\frac{\Gamma_{3,k}a_k{}^2}{\omega_k\Gamma_{1,k}}\sigma+\frac{27\Gamma_{3,k}{}^2a_k{}^4}{64\omega_k{}^2\Gamma_{1,k}{}^2}+\frac{\Gamma_{2,k}{}^2}{\Gamma_{1,k}{}^2}\right)=0 \tag{۴۶}$$

طبق قاعده روث-هورویتز شرط پایداری معادله مرتبه دوم از این قرار است که ضرایب همه توان‌های λ در آن بزرگتر از صفر باشد. بدین ترتیب باید روابط زیر برقرار باشد.

$$0<2\frac{\Gamma_{2,k}}{\Gamma_{1,k}} \tag{۴۷}$$

$$0<\sigma^2-\frac{3}{2}\frac{\Gamma_{3,k}a_k{}^2}{\omega_k\Gamma_{1,k}}\sigma+\frac{27\Gamma_{3,k}{}^2a_k{}^4}{64\omega_k{}^2\Gamma_{1,k}{}^2}+\frac{\Gamma_{2,k}{}^2}{\Gamma_{1,k}{}^2} \tag{۴۸}$$

۷- نتیجه گیری و بحث

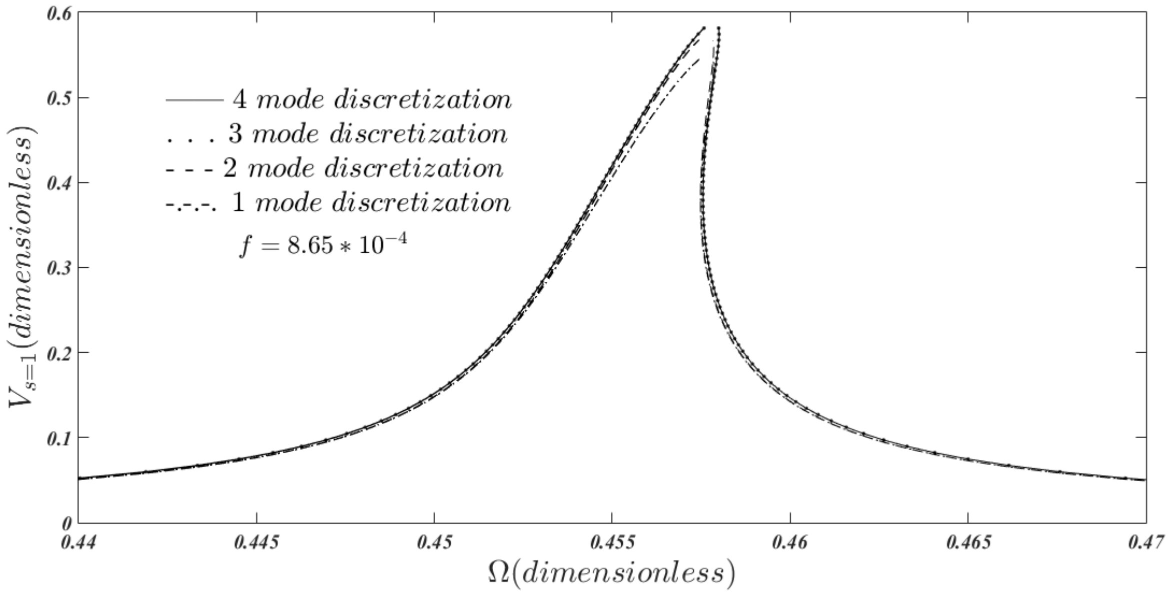
به منظور اعتبار سنجی مقاله حاضر، نتایج مقاله با صرف نظر کردن از اثر جرم متمرکز با نتایج پژوهش ارتعاشات اجباری غیرخطی برای تیر کامپوزیتی با تکیه‌گاه‌های ساده، که توسط انصاری و همکاران [۲۳] صورت گرفته مقایسه می‌شود. در پژوهش انصاری و همکاران [۲۳]، معادلات حرکت با استفاده ازاصل همیلتون برای تیر تیموشنکو استخراج گردیده و با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی مورد حل قرار گرفته است. مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی نانولوله‌های کربنی به‌ترتیب $E_c = 5.6466TPa$، $\nu_c = 0.175$ و $\rho_c = 1400 kg/m^3$ در نظر گرفته شده است. همچنین مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی ماتریس نیز به‌ترتیب $E_m = 2.5GPa$، $\upsilon_m = 0.34$ و $\rho_m = 1150 kg/m^3$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که نسبت طول به ضخامت 12 و نوع چینش نانولوله‌ها در سطح مقطع بصورت یکنواخت (UD) درنظر گرفته شده است.

باتوجه به نتایج ارائه شده در جدول (۱)، مشاهده می‌گردد که مقاله حاضر از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشد و تفاوت جزئی در فرکانس‌ها به علت مدل تیموشنکوی مورد استفاده در مرجع [۲۳] می‌باشد که در نسبت طول به ضخامت پایین مورد استفاده در آن مرجع این خطا نمایان شده است.

تیر مورد بررسی در این مقاله تیری یکسرگیردار کامپوزیتی است که ابعاد فیزیکی آن شامل طول $l = 2m$، عرض $b = 0.1m$ و ضخامت $h = 0.05m$ می‌باشد. فاز زمینه (ماتریس) از جنس اپوکسی با خواص فیزیکی، مدول یانگ $E_m = 2.8GPa$، چگالی $\rho_m = 1236 Kg/m^3$ و ضریب پواسون $\nu_m = 0.3$ در نظر گرفته شده و از سویی دیگر فاز تقویت کننده که از نانولوله‌های کربنی تشکیل شده دارای خواص فیزیکی مدول یانگ $E_c = 980GPa$، چگالی $\rho_c = 1600 kg/m^3$ و ضریب پواسون $\upsilon_c = 0.28$ می‌باشد. ضریب میرایی نیز $\zeta = 0.011$ در نظر گرفته شده است.

جدول۱- مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد مقاله حاضر با پژوهش انصاری و همکاران[۲۳]

پژوهش انصاری و همکاران	مقاله حاضر		خواص مکانیکی
15. 8569	16. 11	مود اول	$E^{eq} = 94.9 GPa$
51. 8191	53. 60	مود دوم	
93. 5513	95. 06	مود سوم	$\rho^{eq} = 1180 kg/m^3$
19. 2565	19. 63	مود اول	$E^{eq} = 138 GPa$
64. 1797	67. 35	مود دوم	
117. 5724	120. 92	مود سوم	$\rho^{eq} = 1192.5 kg/m^3$
23. 4954	23. 87	مود او ل	$E^{eq} = 244.67 GPa$
74. 3903	78.42	مود دوم	
131. 4391	136. 2	مود سوم	$\rho^{eq} = 1220 kg/m^3$

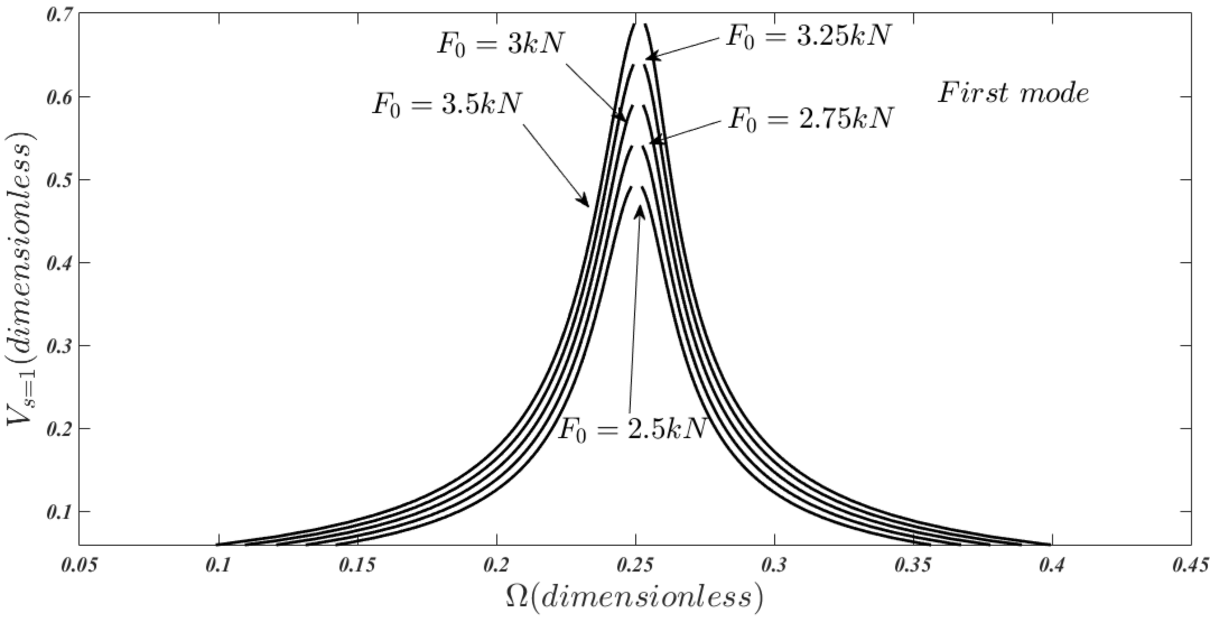


شکل۲- تأثیر تعداد شکل مود مورد استفاده در جداسازی متغیر بر پاسخ فرکانسی غیرخطی تیر

درگام نخست به منظور بررسی تعداد شکل مود مورد نیاز در فرآیند تفکیک متغیر برای ایجاد دقت مطلوب همگرایی، پاسخ فرکانسی انتهای تیر کامپوزیتی در مود اول ارتعاشی آن در اثر نیروی تحریک بدون بعد ۰/۰۰۰۸۶۵ برای ۱ درصد حجمی نانولوله کربنی، درحالت بدون جرم متمرکز برای تعداد مودهای متفاوت در شکل (۲) رسم شده است.

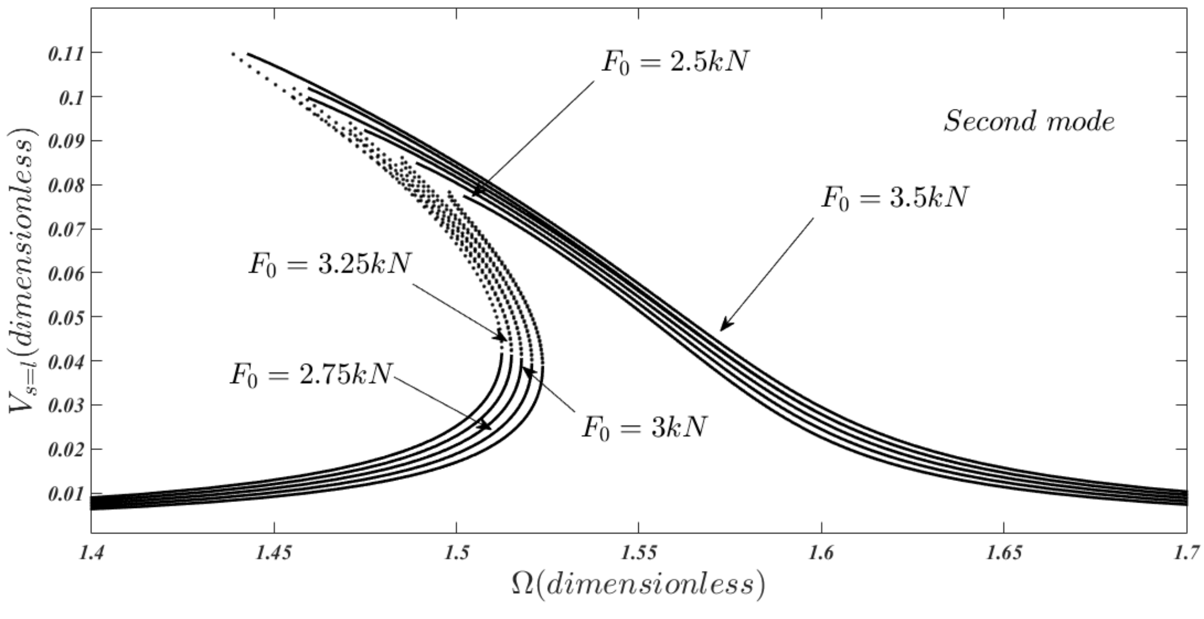
همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، پاسخ فرکانسی با افزایش تعداد شکل مودهای مورد استفاده از ۳ به ۴ دیگر تفاوت محسوسی نداشته و به همین دلیل به منظور ایجاد سرعت بیشتر در محاسبات از سه شکل مود در تفکیک متغیر استفاده می‌شود. درگام بعد به بررسی تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی سیستم پرداخته می‌شود. در این راستا، پاسخ فرکانسی انتهای تیر تقویت شده با ۰/۱ درصد نانولوله‌ی تقویت کننده در مودهای اول، دوم و سوم در حالت بدون جرم متمرکز با مقادیر مختلف نیروی تحریک به‌ترتیب در شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) ارائه شده است.

همانگونه که در شکل‌های (۳) و (۴) و (۵) قابل مشاهده می‌باشد خیز بیشینه انتهای تیر برای نیروی تحریک یکسان با افزایش شماره مورد کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که مقدار نیروی تحریک رابطه مستقیمی با مقدار خیز بیشینه تیر در هر سه مود دارد به نحوی که با افزایش نیرو خیز بیشینه نیز افزایش می‌یابد. نکته دیگر قابل بیان در شکل‌های (۳) و (۴) و (۵) این می‌باشد که، تیر در مود اول خود رفتار سخت شوندگی و در مودهای دوم و سوم خود رفتار نرم شوندگی از خود نمایش می‌دهد. جهت تایید این نوع رفتار و صحه گذاری بر آن می‌توان به مرجع [۲۴] مراجعه نمود که رفتار مشابهی برای تیرهای گسترش ناپذیر بدست آورده است.



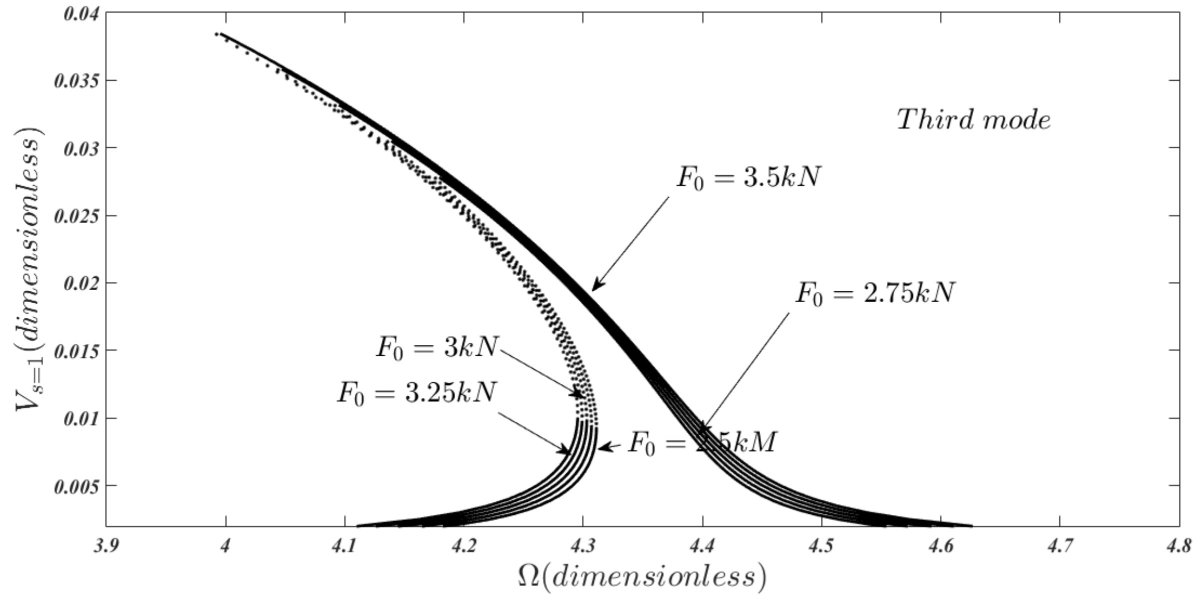
شکل۳- تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود اول

(خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



شکل۴- تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود دوم

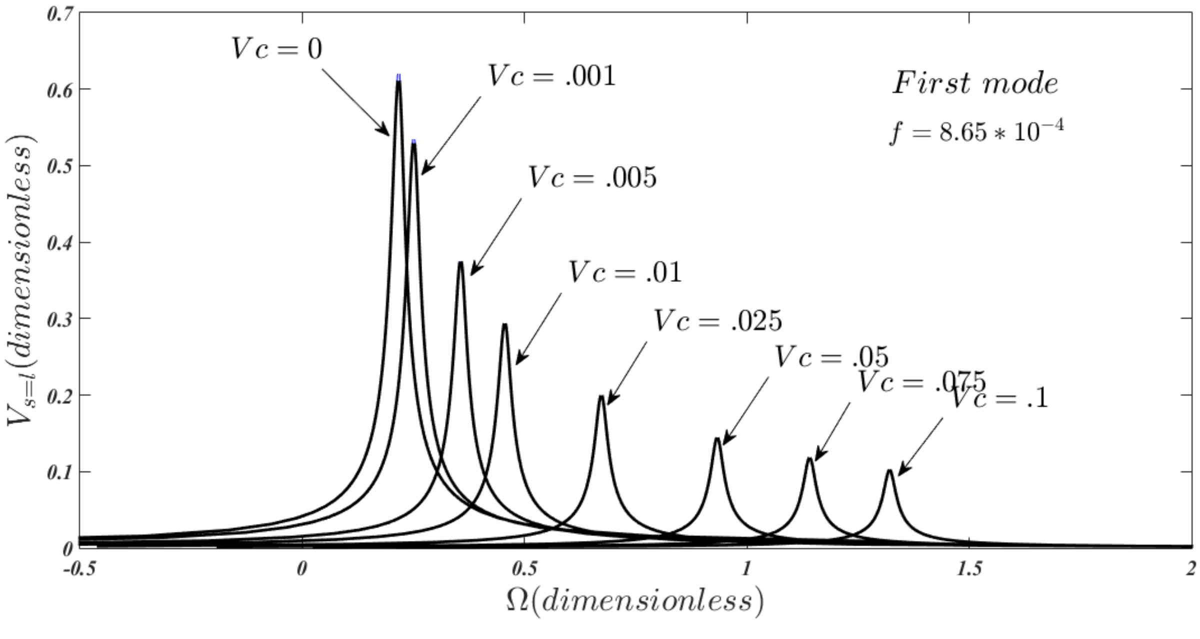
(خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



شکل۵- تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود سوم

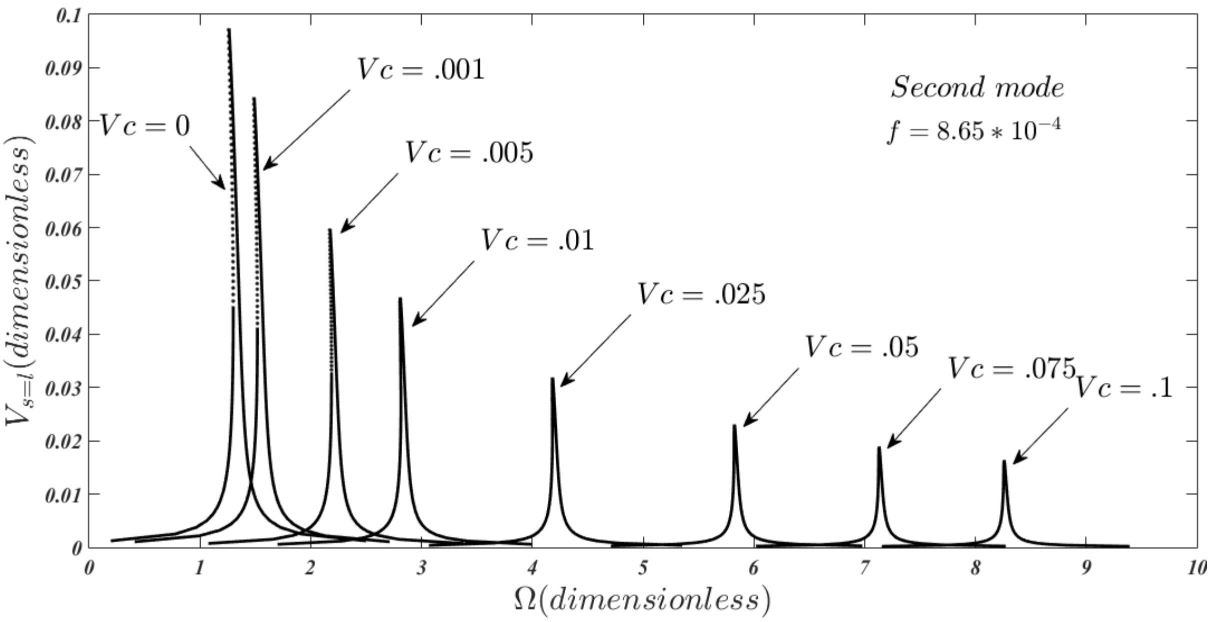
(خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)

در مرحله بعد به بررسی تأثیر درصد حجمی فاز تقویت کننده (نانولوله‌های کربنی)، بر پاسخ فرکانسی سیستم پرداخته می‌شود. در این راستا پاسخ فرکانسی انتهای تیر در اثر نیروی تحریک بدون بعد ۰/۰۰۰۸۶۵ برای ۰/۱، ۰/۵، ۱، ۲/۵، ۵، ۷/۵ و ۱۰ درصد حجمی فاز تقویت کننده با تحریک در مودهای اول، دوم و سوم ارتعاشی به‌ترتیب در شکل‌های (۶)، (۷) و (۸) ارائه شده است.

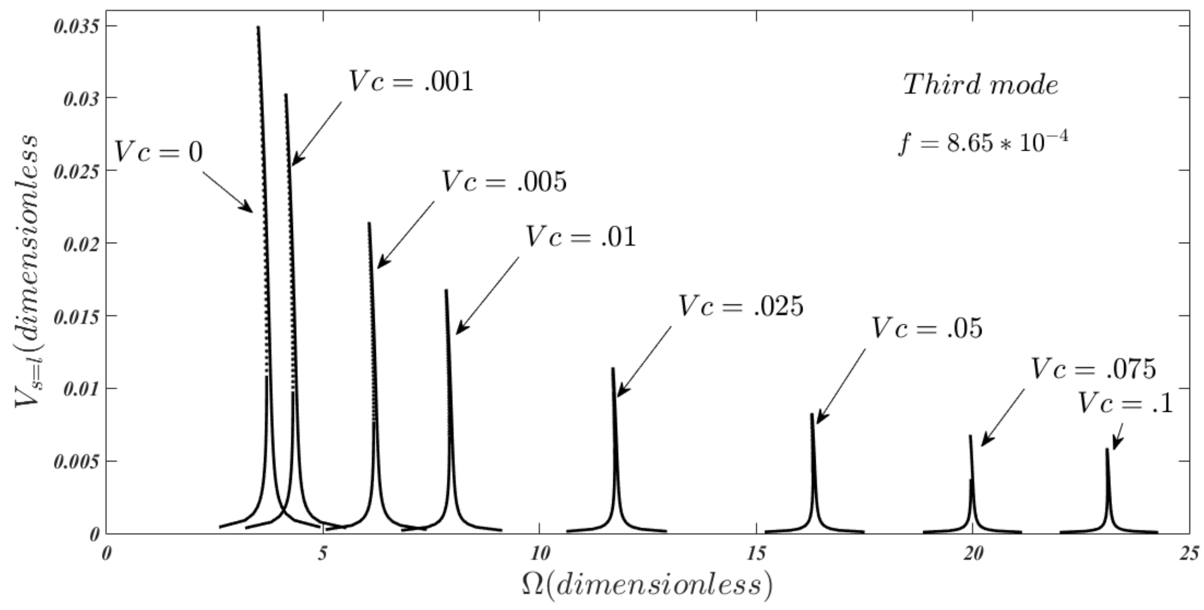


شکل۶- تأثیر درصد حجمی نانولوله‌های کربنی بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود اول ارتعاشی تیر

(خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



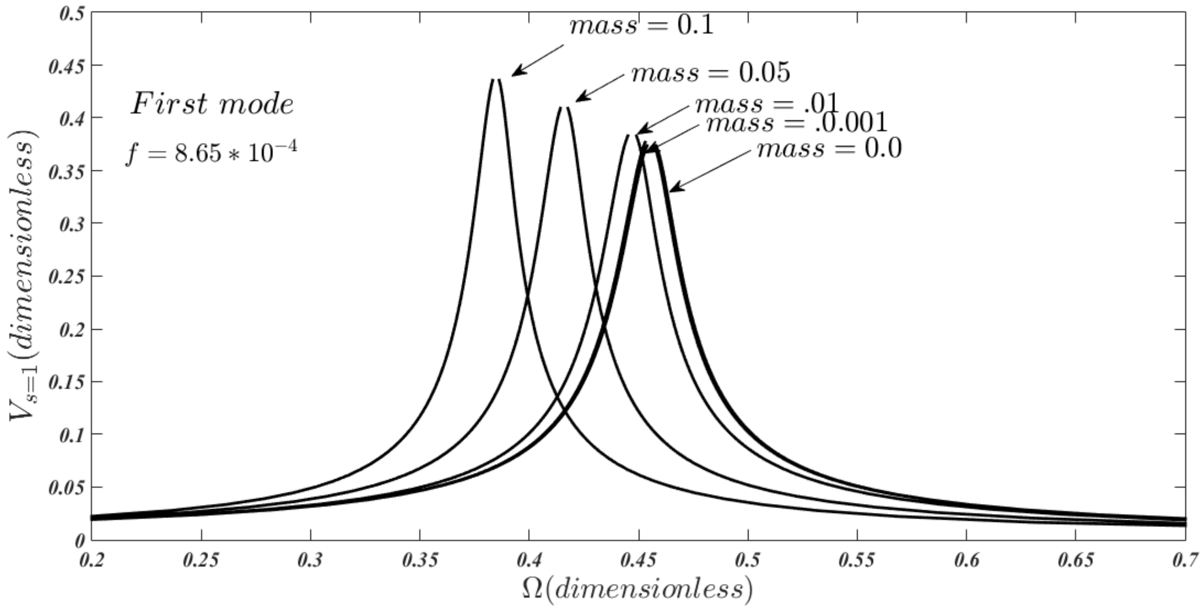
شکل۷– تأثیر درصد حجمی نانولوله‌های کربنی بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تی با تحریک در مود دوم ارتعاشی تیر (خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



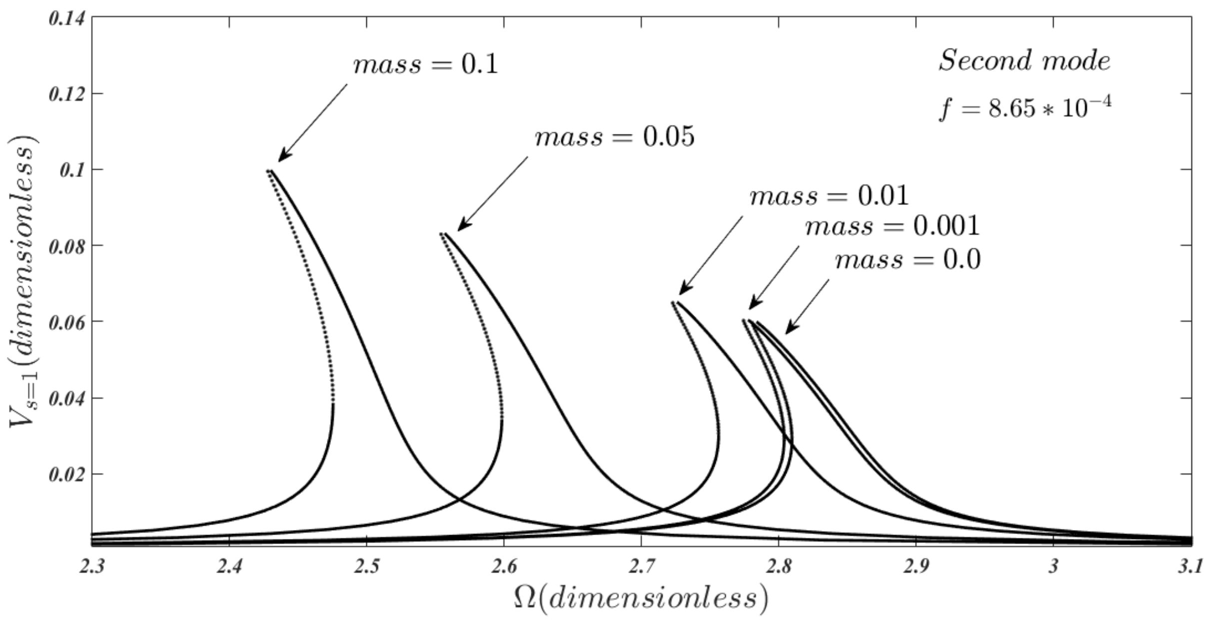
شکل۸– تأثیر درصد حجمی نانولوله‌های کربنی بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود سوم ارتعاشی تیر (خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)

همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌گردد، با افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی، با توجه به افزایش سفتی تیر در هر سه مود خیز بیشینه کاهش می‌یابد و از سوی دیگر فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی تیر افزایش می‌یابد. از دیگر موارد می‌توان به عدم تغییرپذیری نوع غیرخطی با تغییر درصد حجمی اشاره نمود.

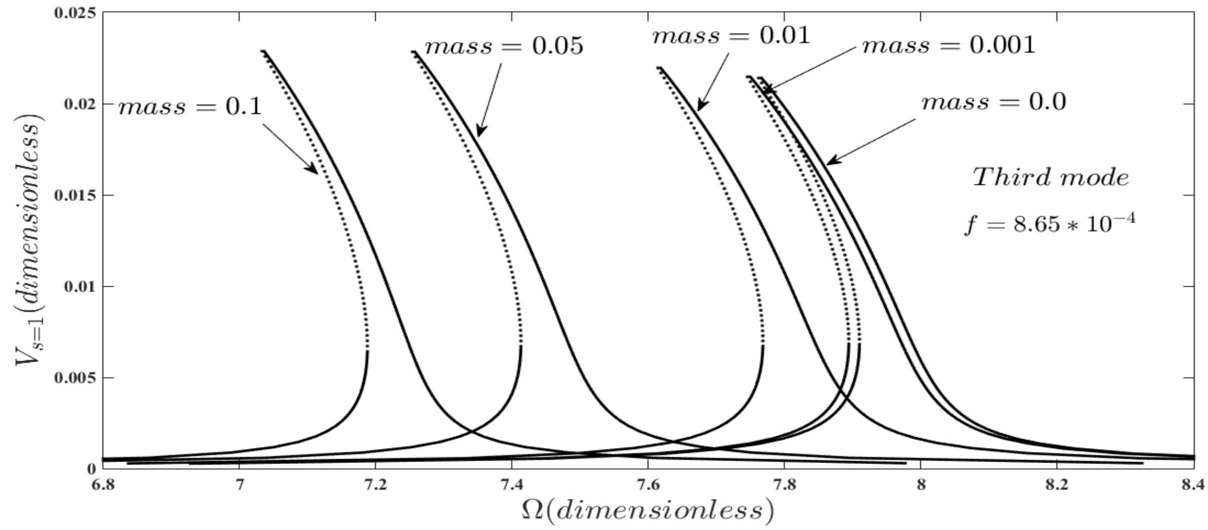
نکته قابل ذکر دیگر که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، این است که با افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی روند کاهش خیز بیشینه و همچنین روند افزایش فرکانس طبیعی سیستم کم می‌گردد و این موضوع بخاطر کم شدن درصد تغییر سفتی تیر، در مقادیر بالای افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی می‌باشد. حال به بررسی تأثیر میزان درصد جرم متمرکز بر پاسخ فرکانسی غیرخطی در تحریک مودهای اول، دوم و سوم در اثر نیروی تحریک بدون بعد ۰/۰۰۰۸۶۵ به‌ترتیب در شکل‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) پرداخته می‌شود.



شکل۹- تأثیر میزان درصد جرم متمرکز نسبت به جرم کل تیر بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود اول (خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



شکل۱۰- تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود دوم (خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)



شکل۱۱- تأثیر مقدار نیروی تحریک بر پاسخ فرکانسی غیرخطی انتهای تیر با تحریک در مود سوم
(خط پر: پاسخ پایدار؛ نقطه‌چین: پاسخ ناپایدار)

همانگونه که مشاهده می‌شود افزایش جرم تأثیری در نوع غیرخطی نخواهد داشت ولی با افزایش جرم متمرکز ضمن کاهش فرکانس‌های خطی و غیرخطی بیشنه دامنه نوسان افزایش می‌یابد که مورد آخر در تحریک مود اول و دوم مشهودتر می‌باشد.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی ارتعاشات غیرخطی تحت تحریک اجباری تیر یکسرگیردار کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با جرم متمرکز انتهایی پرداخته شد. معادلات حرکت با استفاده از فرمولاسیون دقیق هندسی بر اساس تئوری کوزرات برای میله‌ها بدست آمد و جهت محاسبه خواص مکانیکی تیر مورد بررسی از مدل موری- تاناکا استفاده شد. شکل مودهای سازه مورد بررسی با استفاده از روش گلرکین استخراج و جهت جداسازی معادلات حرکت مورد استفاده قرار گرفت. سپس روش مقیاس‌های چندگانه بر معادله جداسازی شده اعمال شد تا به بررسی پاسخ فرکانسی در حالت تشدید اولیه پرداخته شود.

مهمترین نتایج به شرح زیر قابل بیان است:

۱- تیر مورد بررسی به دلیل در نظر گرفتن شرط گسترش ناپذیری در مود اول خود دارای رفتار سخت شوندگی و در مودهای دوم و سوم خود دارای رفتار نرم شوندگی می‌باشد.

۲- درصد حجمی نانولوله‌های کربنی تأثیری در نوع رفتار غیرخطی ندارد.

۳- با افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی، خیز بیشینه کاهش و فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد.

۴- جرم متمرکز تأثیری در نوع رفتار غیرخطی نمی‌گذارد.

۵- با افزایش جرم متمرکز ضمن کاهش فرکانس‌های خطی وغیرخطی بیشنه دامنه نوسان افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] Laura, P.A.A., Pombo, J.L., and Susemihl, E.A., "A Note on the Vibrations of a Clamped-free Beam with a Mass at the Free End", Journal of Sound and Vibration, Vol. 37, No. 2, pp. 161-168, (1974).

[2] Goel, R.P., "Free Vibrations of a Beam-mass System with Elastically Restrained Ends", Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, No. 1, pp. 9-14, (1976).

[3] Parnell, A., and Cobble, M.H., "Lateral Displacements of a Vibrating Cantilever Beam with a Concentrated Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 44, No. 4, pp. 499-511, (1976).

[4] Yaman, M., "Finite Element Vibration Analysis of a Partially Covered Cantilever Beam with Concentrated Tip Mass", Materials and Design, Vol. 27, No. 3, pp. 243-250, (2006).

[5] Weisshaar, T.A., and Foist, B.L., "Vibration Tailoring of Advanced Composite Lifting Surfaces", Journal of Aircraft, Vol. 22, No. 2, pp. 141-147, (1985).

[6] Qatu, M.S., and Iqbal, J., "Transverse Vibration of a Two-segment Cross-ply Composite Shaft with a Lumped Mass", Composite Structures, Vol. 92, No. 5, pp. 1126-1131, (2010).

[7] Eftekhari, M., Mahzoon, M., and Ziaei-Rad, S., "Effect of Added Tip Mass on the Nonlinear Flapwise and Chordwise Vibration of Cantilever Composite Beam under Base Excitation", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 12, No. 2, pp. 285-310, (2012).

[8] Eshelby, J.D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences, Vol. 241, No. 1226, pp. 376–396, (1957).

[9] Eshelby, J.D., "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences, Vol. 252, No. 1271, pp. 561–569, (1959).

[10] Mura, T., "*Micromechanics of Defects in Solids*", Second Ed., Springer, Netherlands, (2013).

[11] Gurtin, M.E., "*Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*", Springer, New York, Vol. 137, (1999).

[12] Mori, T., and Tanaka, K., "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta Metallurgica, Vol. 21, No. 5, pp. 571–574, (1973).

[13] Chen, C.H., and Cheng, C.H., "Effective Elastic Moduli of Misoriented Short-fiber Composites", International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No. 17, pp. 2519–2539, (1996).

[14] Odegard, G.M., Gates, T.S., Wise, K.E., Park, C., and Siochi, E.J., "Constitutive Modeling of Nanotube-reinforced Polymer Composites", Composites Science and Technology, Vol. 63, No. 11, pp. 1671–1687, (2003).

[15] Benveniste, Y., "A New Approach to the Application of Mori–Tanaka's Theory in Composite Materials", Mechanics of Materials, Vol. 6, No. 2, pp. 147–157, (1987) .

[16] Formica, G., and Lacarbonara, W., "Eshelby-like Equivalent Continuum Modeling of Carbon Nanotube-based Composite", In Proceedings of 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Lisbon, (2009).

[17] Bokobza, L., "Multiwall Carbon Nanotube Elastomeric Composites: A Review", Polymer, Vol. 48, No. 17, pp. 4907–4920, (2007).

[18] Cosserat, E., and Cosserat, F., "Théorie des Corps Déformables", Hermann et Fils, Paris, (1909).

[19] Lacarbonara, W., "*Nonlinear Structural Mechanics Theory, Dynamical Phenomena and Modeling*", Springer, New York, (2013).

[20] Arvin, H., and Bakhtiari-Nejad, F., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Rotating Composite Timoshenko Beams", Composite Structures, Vol. 96, pp. 29–43, (2013).

[21] Nayfeh, A.H., "*Introduction to Perturbation Techniques*", John Wiley & Sons, New York, (1993).

[22] Chen, L.Q., and Zhang, Y.L., "Multi-scale Analysis on Nonlinear Gyroscopic Systems with Multi-degree-of-freedoms", Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, No. 19, pp. 4711–4723, (2014).

[23] Ansari, R., Shojaei, M.F., Mohammadi, V., Gholami, R., and Sadeghi F., "Nonlinear Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Timoshenko Beams", Composite Structures, Vol. 113, pp. 316–327, (2014).

[24] McHugh, K., and Dowell, E., "Nonlinear Responses of Inextensible Cantilever and Free–free Beams Undergoing Large Deflections", Journal of Applied Mechanics, Vol. 85, No. 5, pp. 051008, (2018).

فهرست نمادهای انگلیسی

$\mathbf{e}_k \; k=1,2,3$: دستگاه مختصات فیکس شده

$\mathbf{b}_k \; k=1,2,3$: دستگاه مختصات فیکس شده به سطح مقطع

$\mathbf{R}$: ماتریس دوران

$\mathbf{f}, \mathbf{c}$: بردار نیرو و گشتاور خارجی

$\mathbf{l}, \mathbf{h}$: اندازه حرکت خطی و زاویه ای

$\mathbf{n}(s,t), \mathbf{m}(s,t)$: بردار منتجه نیرو و بردار منتجه گشتاور

$\mathbf{r}(s,t)$: بردار مکان مرکز سطح مقطع در دستگاه مختصات ساکن

$\boldsymbol{\omega}(s,t), \boldsymbol{\mu}(s,t)$: بردار سرعت زاویه ای و بردار انحنا

$\varrho\mathbf{A}, \varrho\mathbf{i}, \varrho\mathbf{J}$: جرم و ممان اینرسی بر واحد طول

$\mathbf{u}(s,t)$: بردار جابجایی

$u(s,t), v(s,t)$: مولفه طولی و عرضی بردار جابجایی

$\boldsymbol{\upsilon}(s,t)$: بردار کشیدگی کلی

$\upsilon(s,t), \eta(s,t)$: مولفه‌های طولی و عرضی بردار کشش کلی

$N(s,t), Q(s,t)$:منتجه نیروی کششی و برشی

$M(s,t)$: منتجه گشتاور

$\theta(s,t)$: زاویه دوران سطح مقطع

E_c, υ_c, ρ_c: مدول یانگ، ضریب پواسون، چگالی نانولوله‌های کربنی

E_m, υ_m, ρ_m: مدول یانگ، ضریب پواسون، چگالی اپوکسی

V_c, V_m: کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و اپوکسی

$\sigma_{33}, \varepsilon_{33}$: تنش و کرنش طولی

$\varrho A_C, EJ_C, L, \omega_C$: جرم بر واحد طول، صلبیت خمشی، طول و فرکانس مشخصه

ζ: ضریب دمپینگ آئرو دینامیکی

F, Ω: بزرگی و فرکانس نیروی تحریک

a_k, β_k: دامنه و فاز ارتعاشات

σ: پارامتر نزدیکی

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$: ثابت‌های پاسخ معادلات مرتبه سوم

پیوست‌ها

پیوست الف- ثابت‌های معادلات حرکت

$$\begin{aligned} &\varrho J_{22} = \frac{1}{12}\rho^{eq}bh^3, \ \ \varrho A = \rho^{eq}bh, \varrho I_2 = 0 \\ &EJ_{22} = \frac{1}{12}E^{eq}bh^3, EA = E^{eq}bh, EI_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{(الف-۱)}$$

در رابطه‌های بالا b و h عرض و ضخامت تیر و ρ^{eq} چگالی معادل ماده نانوکامپوزیتی می‌باشد که از بصورت $\rho^{eq} = V_m\rho_m + V_c\rho_c$ بدست می‌آید.

پیوست ب- ثابت‌های فرآیند تفکیک متغیر

$$i_{12,3}=\frac{3}{2}\beta\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s-\beta\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\int_s^1\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\int_s^1-\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^1(\psi(s))^2\delta(s)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\int_s^1\delta(s)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)\psi(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s-\int_0^1\psi(s)\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\mathrm{d}s$$
$$M_{11}=\beta\left(\int_0^1\psi(s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\mathrm{d}s\right)-\int_0^1(\psi(s))^2\delta(s)\mathrm{d}s$$
$$i_{13,3}=3\beta\left(\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s\right)-\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\int_s^1-\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^1\psi(s)\delta(s)\int_0^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\mathrm{d}s \qquad (\text{ب}-۱)$$
$$\zeta_{11}=\int_0^1(\psi(s))^2\mathrm{d}s\,(\zeta)$$
$$n_{11,3}=-\frac{1}{2}\sigma\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}s^4}\psi(s)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)^2\mathrm{d}s-3\sigma\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\psi(s)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(s)\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\int_s^1-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}\psi(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s-\sigma\int_0^1\psi(s)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\psi(s)\right)^3\mathrm{d}s$$
$$K_{11}=\sigma\int_0^1\psi(s)\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}s^4}\psi(s)\mathrm{d}s$$
$$F=\int_0^1 f\,\psi(s)\mathrm{d}s$$

پیوست پ- ضرایب غیرخطی مؤثر در ترم سکولار

$$\Gamma_{1,k}=M_{11}$$
$$\Gamma_{2,k}=-\zeta_{11}\omega_{10}$$
$$\Gamma_{3,k}=-i_{12,3}\omega_k^{\,2}+1/3i_{13,3}\omega_k^{\,2}+n_{11,3} \qquad (\text{پ}-۱)$$
$$\Gamma_{4,k}=F$$

پیوست ت- ضرایب حل مرتبه سوم مختصات عمومی

$$\beta_1=-2\frac{\omega_k\left(\Gamma_{1,k}\,\omega_{10}\zeta_{11}+\Gamma_{2,k}M_{11}\right)}{\Gamma_{1,k}\left(M_{11}\omega_k^{\,2}+K_{11}\right)}$$
$$\beta_2=-\frac{3\Gamma_{1,k}i_{12,3}\omega_k^{\,2}-\Gamma_{1,k}i_{13,3}\omega_k^{\,2}-3\Gamma_{1,k}n_{11,3}+3\Gamma_{3,k}M_{11}}{\Gamma_{1,k}\left(M_{11}\omega_k^{\,2}+K_{11}\right)}$$
$$\beta_3=-\frac{i_{12,3}\omega_k^{\,2}+i_{13,3}\omega_k^{\,2}-n_{11,3}}{9M_{11}\omega_k^{\,2}+K_{11}} \qquad (\text{ت}-۱)$$
$$\beta_4=-\frac{F\Gamma_{1,k}-\Gamma_{4,k}M_{11}}{\Gamma_{1,k}\left(\Omega^2M_{11}+K_{11}\right)}$$

Abstract

Due to the different applications of beams with attached mass and also the increment of the importance of nanocomposite materials, in this paper, a study on the nonlinear vibrations of composite cantilever beams with tip mass under the harmonic excitation is presented. The equations of motion are derived using the exact geometrical formulation based on the Cosserat theory for rods. The Mori-Tanaka's model is implemented to formulate the mechanical properties of carbon nanotube reinforced beam. The Galerkin approach is implemented to derive the linear natural frequencies and the corresponding mode shapes of the beam with tip mass. The extracted mode shapes are employed to discretize the equation of motion. The discretized equations of motion which contain geometrical and inertial nonlinearities are solved using the method of multiple scales to extract the frequency response. The effects of the attached mass, the carbon nanotube volume fraction and the excitation force amplitude on the frequency response of the structure are investigated.