

## مدل سازی جریان سیال تراکم ناپذیر بین دو استوانه غیر هم مرکز با طرح MCB

در مقاله حاضر استوانه های غیر هم مرکز مشابه با یک یاتاقان ژورنال بررسی می شود. معادلات ناویر-استوکس همراه با تراکم پذیری مصنوعی به کار رفته و روش حجم محدود همراه با یک طرح عددی جدید استفاده می شود. نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از سایر روش ها از جمله روش میان گیری برای محاسبه شارها، مقایسه خواهد شد. برنامه ای توسط مولفان به زبان فرترن ۹۰ نوشته شده و برای گسسته زمانی از رانگ - کوتا مرتبه ۴ به منظور بهبود حدود پایداری استفاده می شود. حل معادلات صریح بوده و تراکم پذیری مصنوعی برای محاسبه فشار به کار رفته است. هندسه مساله دو استوانه غیر هم مرکز خواهد بود، همچنین تاثیر شیارهای محوری بر روی استوانه خارجی در موقعیت های مختلف بررسی شده و با حالت ساده مقایسه می شود.

سید اسماعیل رضوی<sup>۱</sup>  
دانشیار

ارسلان آقازاده<sup>۲</sup>  
کارشناس ارشد

واژه های راهنما : استوانه های غیر هم مرکز، روش حجم محدود، معادلات ناویر- استوکس، تراکم پذیری مصنوعی، طرح چند بعدی بر مبنای مشخصه ها، سیال تراکم ناپذیر، شیار محوری

### ۱- مقدمه

استوانه های غیر هم مرکز دارای کاربرد های زیادی بوده و در حالتی که لقی و خروج از مرکز بسیار کم است کاربردی از یاتاقان های ژورنال هستند. یاتاقان و روانکاری جز جدایی ناپذیری سیستم های مکانیکی بوده و در واقع یکی از محورهای صنعت به شمار می رود. اهمیت این موضوع از آنجا بیشتر می شود که بر اساس برآورد محققان از یک سوم تا نصف انرژی تولیدی در دنیا به علت اصطکاک تلف می شود. در بررسی عملکرد یاتاقان های ژورنال تعیین توزیع سرعت و فشار لایه روغن مطلوب بوده و یکی از معادلات حاکم در این زمینه معادله رینولدز است که از ساده سازی معادلات ناویر- استوکس به دست می آید. فرض اساسی در این معادله در نظر نگرفتن نیروی اینرسی است چرا که این جمله در شرایط کاری، در مقابل نیروهای ناشی از تنش برشی (نیروهای لزج) کوچک بوده و قابل صرف نظر است. معادله رینولدز اولین بار در ۱۹۸۶ توسط رینولدز در بررسی آزمایش تاور، مهندس آمریکایی که اولین بار فشار در لایه روغن در یاتاقان را بررسی کرد،

<sup>۱</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [razavi@tabrizu.ac.ir](mailto:razavi@tabrizu.ac.ir)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [arsalan.aghazadeh87@ms.tabrizu.ac.ir](mailto:arsalan.aghazadeh87@ms.tabrizu.ac.ir)

ارائه داده شد. بعدها در (۱۹۲۳) نیز تیلور وقوع گردابه در استوانه های غیر هم مرکز را بررسی کرده و عدد تیلور را به شکل زیر معرفی کرد:

$$Ta = \frac{r_i (r_o - r_i)^3 \omega^2}{\nu^2} \quad (1)$$

وی نشان داد که در اعداد تیلور کمتر از ۱۷۰۰، گردابه در جریان ایجاد نمی شود و فقط در اعداد تیلور بزرگتر از ۱۷۰۰ گردابه ها قابل مشاهده اند. ونیر [۱] حل دقیق معادلات استوکس را برای جریان بین استوانه های دوار غیر هم مرکز ارائه داد. کمال [۲] اثر جملات اینرسی را در جریان بین استوانه های دوار غیر هم مرکز مورد بررسی قرار داد. معادلات حاکم بر جریان روغن در یاتاقان های ژورنال از طریق نظریه گردابه و نظریه جریان آرام سامرفیلد توسط پن و وهر [۳] حل گردید و توزیع فشار در ناحیه بین محور و بوش به دست آمد. به علاوه در این تحقیق نتایج آزمایشی نیز موجود می باشد که در ادامه از آنها استفاده خواهد شد. سود و همکارش [۴] با استفاده از روش های عددی معادلات کامل ناویر- استوکس را برای این مساله حل کردند. دیپیرما و استوارت [۵] جریان هیدرودینامیکی بین استوانه های دوار غیر هم مرکز را از طریق سیستم مختصات دو قطبی اصلاح شده مورد مطالعه قرار داده و از طریق حل عددی معادلات ناپایداری با روش اغتشاشات<sup>۱</sup> مقدار رینولدز بحرانی در یاتاقان ژورنال را مانند معادله ۲ به دست آوردند:

$$Re_c = 71.17 \sqrt{(r_i/c + 1.162)(1 + 2.62\varepsilon^2)} \quad (2)$$

که در آن  $\varepsilon$  نسبت خروج از مرکز،  $r_i$  شعاع شفت و  $c$  اختلاف شعاع شفت و استوانه خارجی را نشان می دهند. بدین ترتیب که در محدوده عدد رینولدز کمتر از  $Re_c$  جریان آرام و در بالاتر از این مقدار جریان آشفته می شود. عدد رینولدز برای یک یاتاقان به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$Re = \frac{\rho r_i \omega c}{\mu} \quad (3)$$

اکثر کارهای انجام شده با دینامیک سیالات محاسباتی از اواخر دهه ۱۹۷۰ شروع شده اند. پال و همکاران [۶] مکان هندسی مرکز یاتاقان را در چشم بزرگ شاتون یک موتور درون سوز بررسی کردند. توزیع فشار لایه روغن با حل معادلات ناویر- استوکس به روش المان محدود گالرکین ارزیابی شده و مسیر مرکز یاتاقان با انتگرال گیری عددی معادلات حرکت به دست آمد. مقادیر کمینه ضخامت لایه روغن با مقادیر موجود مقایسه شد. کوهنو و همکاران [۷] روش المان مرزی را برای بررسی مشخصات روغنکاری الاستو هیدرو دینامیک در یک یاتاقان به صورت ترکیبی از المان مرزی و المان محدود به کار بردند. روش المان مرزی برای محاسبه تغییر شکل الاستیک یاتاقان و محور، و روش المان محدود برای حل معادله رینولدز به کار برده شدند. گنجعلیخان و معیری [۸] از طریق حل عددی و با الگوریتم SIMPLE اثرات اینرسی در جریان آرام بین دو استوانه ای غیر هم مرکز را مورد مطالعه قرار دادند و توزیع فشار بر روی محور و توزیع سرعت در ناحیه کمترین ضخامت را بدست آوردند. نتایج این تحقیق برای ارزیابی به کار می رود. ما و همکاران [۹] لغزش بر روی دیواره و هیدرودینامیک دو بعدی یاتاقان را بررسی کردند. از معادله رینولدز اصلاح شده و روش المان محدود استفاده کردند. روی و لاه [۱۰] مشخصه های پایا و دینامیکی شامل ناپایداری گردابی

<sup>1</sup> Perturbation Method

روغن در یاتاقان همراه با شیار محوری در موقعیت های مختلف و در حالی که در آن روغن با فشار ثابت تغذیه می شود، به صورت نظری به دست آورده اند. معادله رینولدز با روش اختلاف محدود و با ارضا شرایط مرزی مناسب حل شده است.

هدف این تحقیق مطالعه و بررسی اعمال طرح MCB برای استوانه های دوار غیر هم مرکز با شیار و بدون شیار است. جزئیات جریان به طور مناسب گرفته می شود. ظرفیت تحمل بار و تلفات تحت شرایط پایدار بررسی می شوند.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات جریان تراکم ناپذیر بین استوانه ها با کاربرد تراکم پذیری مصنوعی در معادلات ناویر- استوکس دوبعدی به شکل حجم محدود عبارتند از :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \mathbf{U} ds + \phi(\mathbf{F}dy - \mathbf{G}dx) = \phi(\mathbf{R}dy - \mathbf{S}dx) \quad (۴)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix} ; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix} ; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix} ; \mathbf{R} = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} ; \mathbf{S} = \frac{1}{Re_\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

در معادلات بالا  $\mathbf{U}$  بردار مقادیر جریان،  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{G}$  بردارهای شار جابجایی و  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{S}$  بردارهای شار لزج می باشند و ضریب  $\beta$  تراکم پذیری مصنوعی و  $Re$  نشانگر عدد رینولدز می باشند. برای بی بعد سازی معادلات، از پارامترهای زیر استفاده می شود :

$$(x, y) = (x^*/l^*, y^*/l^*), \quad t = \frac{t^*}{l^*/U_{ref}}, \quad (u, v) = (u^*/U_{ref}, v^*/U_{ref}), \quad p = \frac{p^* - p_{ref}}{\rho_{ref} U_{ref}^2}$$

پس از انتگرال گیری و استفاده از قضیه گرین و با در نظر گرفتن یک شبکه با سلول های چهار وجهی، معادلات ناویر- استوکس به شکل زیر گسسته می شوند :

$$\frac{\Delta U_{ij}}{\Delta t} \cdot A_{ij} = - \sum_{k=1}^4 (F_k \cdot \Delta y_k - G_k \cdot \Delta x_k) + \sum_{k=1}^4 (R_k \cdot \Delta y_k - S_k \cdot \Delta x_k) \quad (۵)$$

## ۳- محاسبه جملات جابجایی

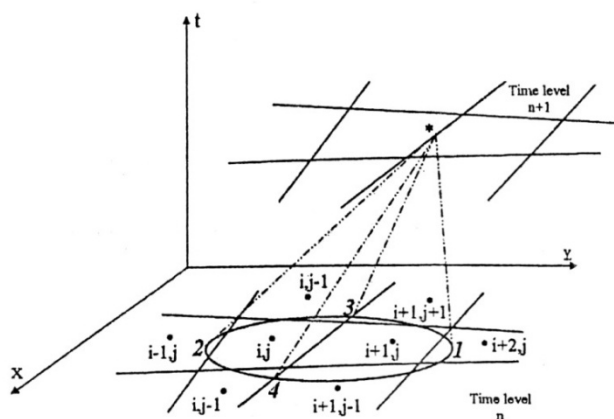
### ۳-۱- طرح میانگیری جیمسون

برای اولین بار در این مساله یک طرح چند بعدی برپایه مشخصه ها به کار می رود. برای ارزیابی، نتایج حاصل با نتایج طرح میان گیری جیمسون مقایسه می شود. در طرح جیمسون برای محاسبه شار بر روی مرز با میان گیری مقادیر مربوطه از سلول های مجاور داریم :

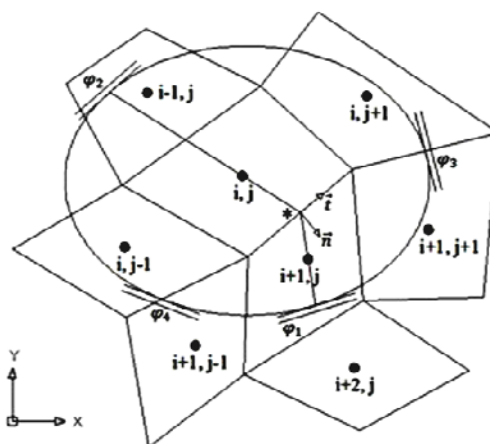
$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ij-1}) ; F_2 = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{i+1,j}) & G_1 &= \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ij-1}) ; G_2 = \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{i+1,j}) \\ F_3 &= \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ij+1}) ; F_4 = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{i-1,j}) & G_3 &= \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ij+1}) ; G_4 = \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (۶)$$

### ۳-۲- طرح چند بعدی بر پایه مشخصه ها<sup>۱</sup>

در این روش از یک طرح چند بعدی بر مبنای مشخصه ها (MCB) که توسط زمزمیان و رضوی [۱۱] توسعه یافته، استفاده شده است. در طرح مذکور به منظور محاسبه بردارهای شار جابجایی در روی مرز مشترک دو سلول از مقادیر زمان قبل، چهار موج اکوستیک یا مسیرهای تصویر شده موازی و عمود بر مرز مشترک دو سلول انتخاب شده اند. همان گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، سطح مقطع کنج ماخ متناظر با نقطه مورد نظر روی مرز مشترک دو سلول با صفحه  $xy$ ، نشان دهنده محدوده فیزیکی انتشار اطلاعات از زمان قبل می باشد که نقطه مذکور را در زمان حال حاضر تحت تاثیر قرار می دهد. همان طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، به منظور در نظر گرفتن فیزیک واقعی چند بعدی جریان، چهار موج اکوستیک مجازی متناظر با شبکه انتخاب شده و معادلات ۸ (روابط سازگاری) در روی آنها گسسته سازی شده اند. انتخاب تعداد و زوایای موج های اکوستیک مجازی اختیاری بوده و در هر حالت منجر به طرح های محاسباتی مختلفی می شود مساله انتخاب تعداد و زوایای موج ها، مشابه با مدل های موجود در زمینه معادلات اویلر تراکم پذیر می باشد که در گذشته توسط Roe و دیگران گسترش داده شده است.



شکل ۱- سطح مقطع کنج ماخ با صفحه  $xy$  در زمان قبل و طرح محاسباتی برای تخمین جملات جابجایی



شکل ۲- طرح محاسباتی MCB برای محاسبه جملات جابجایی

<sup>1</sup> Multi-dimensional Characteristic Based Scheme

جهت موج های ۱ و ۲ متناظر به راستای  $n$  (راستای عمود بر وجه)، از وصل کردن وسط وجه مورد نظر به مرکز سلول های کناری به دست می آیند. راستای موج های ۳ و ۴ نیز که متناظر به راستای  $t$  (راستای مماس بر وجه) می باشند از وصل کردن وسط وجه مذکور به نقطه تقاطع بیضی ماخ با وجه های مشترک سلول های کناری به دست می آیند، به توصیه مولفین و برای ساده سازی، راستای موج های ۳ و ۴ از وصل کردن مرکز وجه به مرکز وجه های مشترک سلول های کناری به دست می آیند. با توجه به مشخص بودن مکان هندسی این نقاط تمامی زوایا در برنامه توسعه داده شده، محاسبه می شوند. برای محاسبه مقادیر جریان در نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ از درونیابی مرتبه ۲ استفاده می شود که در معادله ۷ آمده است :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i+2,j}) \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{i-1,j}) \\ U_3 &= \frac{1}{2}(U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}) \quad ; \quad U_4 = \frac{1}{2}(U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

برای محاسبه مقادیر جریان روی وجه در راستای  $n$  چهار رابطه سازگاری متناظر موج های ۱ و ۲ در معادلات ۸ آمده است :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{n_{t1}} du + \cos\varphi_1 \cdot dp &= 0 \quad ; \quad \frac{\beta}{n_{t1}} dv + \sin\varphi_1 \cdot dp = 0 \\ \frac{\beta}{n_{t2}} du + \cos\varphi_2 \cdot dp &= 0 \quad ; \quad \frac{\beta}{n_{t2}} dv + \sin\varphi_2 \cdot dp = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

در معادلات فوق، معادله اول رابطه سازگاری موج  $\varphi_1$  در راستای  $x$ ، معادله دوم رابطه سازگاری موج  $\varphi_1$  در راستای  $y$ ، معادله سوم رابطه سازگاری موج  $\varphi_2$  در راستای  $x$  و معادله چهارم رابطه سازگاری موج  $\varphi_2$  در راستای  $y$  می باشند. با گسسته سازی معادلات ۸ در طول خطوط مشخصه، داریم :

$$\begin{aligned} p^* - p_1 + A(u^* - u_1) &= 0 \\ p^* - p_1 + B(v^* - v_1) &= 0 \\ p^* - p_2 + C(u^* - u_2) &= 0 \\ p^* - p_2 + D(v^* - v_2) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

در آن ضرایب  $A, B, C, D$  از معادله ۸ مانند زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\beta}{\cos\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1 - v_1\sin\varphi_1 + \sqrt{(u_1\cos\varphi_1 + v_1\sin\varphi_1)^2 + 4\beta^2}] \\ B &= \frac{2\beta}{\sin\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1 - v_1\sin\varphi_1 + \sqrt{(u_1\cos\varphi_1 + v_1\sin\varphi_1)^2 + 4\beta^2}] \\ C &= \frac{2\beta}{\cos\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2 - v_2\sin\varphi_2 + \sqrt{(u_2\cos\varphi_2 + v_2\sin\varphi_2)^2 + 4\beta^2}] \\ D &= \frac{2\beta}{\sin\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2 - v_2\sin\varphi_2 + \sqrt{(u_2\cos\varphi_2 + v_2\sin\varphi_2)^2 + 4\beta^2}] \end{aligned} \quad (10)$$

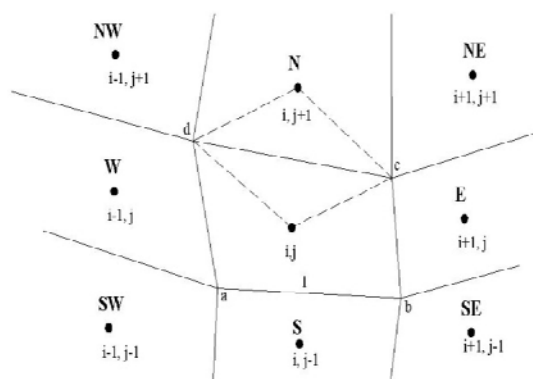
ابتدا مقادیر  $u^*$  و  $p^*$  از روابط اول و سوم و  $v^*$  و  $p^*$  از روابط دوم و چهارم معادلات ۹ به دست می آیند. مقدار  $p^*$  برابر با میانگین دو مقدار به دست آمده در نظر گرفته می شود. با توجه به استفاده از معادلات سازگاری موج های  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$ ، مقادیر  $u^*$  و  $v^*$  به دست آمده به عنوان مولفه های سرعت در جهت  $n$  در نظر گرفته می شوند. با انجام عملیات مشابه برای روابط سازگاری متناظر به  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$ ، مولفه های سرعت در جهت  $t$  به دست می آید. در نهایت بردار سرعت روی مرز مشترک دو سلول از برآیند دو بردار به دست آمده مشخص

شده و فشار از میان گیری دو مقدار به دست آمده برای  $p^*$  تعیین می شود. با مشخص شدن مقادیر  $u^*$ ،  $v^*$  و  $p^*$  برای هر چهار وجه سلول، مقدار شار جابجایی برای هر وجه محاسبه می شود.

$$F^* = \begin{bmatrix} \beta u^* \\ u^{*2} + p^* \\ u^* v^* \end{bmatrix} ; G^* = \begin{bmatrix} \beta v^* \\ u^* v^* \\ v^{*2} + p^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

#### ۴- محاسبه جملات لزج

محاسبه بردار شارهای لزج با تشکیل سلول های ثانویه بر روی مرزها و محاسبه مشتقات مرتبه اول مقادیر جریان در مرز مشترک بین دو سلول انجام می گیرد. برای این منظور از گسسته سازی معمولی مرکزی استفاده می شود. به عنوان نمونه مقدار  $(\frac{\partial u}{\partial x})_{cd}$  بر روی وجه  $cd$  با توجه به شکل (۳) محاسبه شده است (معادلات ۱۲). برای بقیه مشتقات مرتبه اول این روند تکرار می شود. [۱۲]



شکل ۳- سلول ثانویه

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{cd} = u_{ij-c} \Delta y_{ij-c} + u_{cN} \Delta y_{cN} + u_{Nd} \Delta y_{Nd} + u_{d-ij} \Delta y_{d-ij} \quad (12)$$

مقادیر جریان بر روی گره ها با توجه به شکل (۳) از میان گیری به دست می آیند.

#### ۵- انتگرال گیری زمانی

معادلات حاکم که به صورت مکانی گسسته شده اند، تشکیل یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی را می دهند. معادلات مذکور به شکل زیر هستند:

$$\frac{\Delta U_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{A_{ij}} [-\sum_{k=1}^4 (F_k \cdot \Delta y_k - G_k \cdot \Delta x_k) + \sum_{k=1}^4 (R_k \cdot \Delta y_k - S_k \cdot \Delta x_k)] = Q \quad (13)$$

$U$  بردار مقادیر جریان و  $Q$  یک عملگر غیر خطی شامل جملات جابجایی و لزج است. به منظور افزایش پایداری، این معادلات در زمان توسط یک روش صریح رانگ - کوتای مرتبه چهار انتگرال گیری می شوند. طرح رانگ - کوتای مرتبه ۴ مانند زیر است:

$$U^{(0)} = U^{(n)} ; U^{(1)} = U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Q^{(0)}$$

$$U^{(2)} = U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} Q^{(1)} ; U^{(3)} = U^{(0)} - \Delta t Q^{(2)} \quad (14)$$

$$U^{(4)} = U^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} (Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(2)} + Q^{(3)})$$

این روش دارای دقت مرتبه چهار بوده و سرعت همگرایی را بیشتر می کند. بیشینه مقدار گام زمانی  $\Delta t$  در هر تکرار از شرط پایداری که بر روی عدد کورانت  $CFL$  اعمال می شود، مانند زیر محاسبه می شود:

$$\Delta t = \frac{CFL \times \Delta l_{min}}{C_{max}}$$

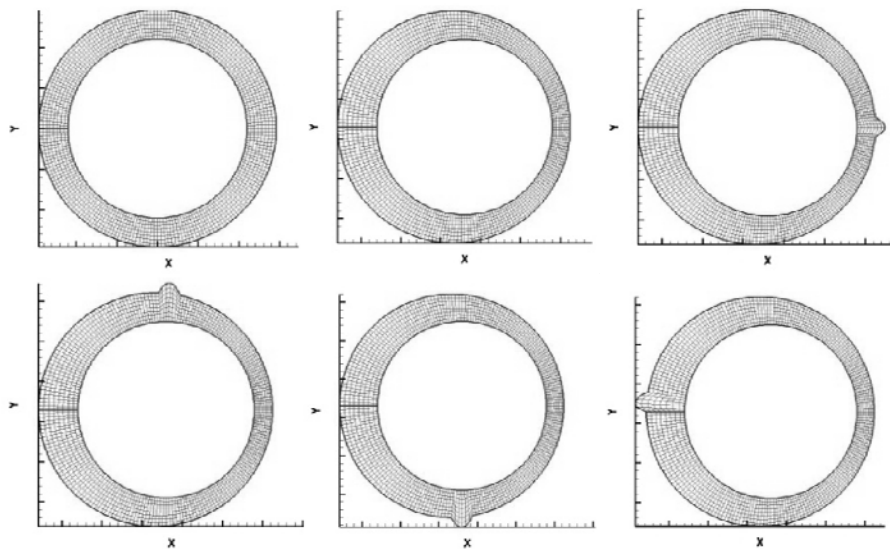
$$C_{i,j} = \sqrt{\beta} + \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} \quad ; \quad C_{max} = \text{Max}(C_{i,j}) \quad (15)$$

$$\Delta l_{min(i,j)} = \sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2} \quad ; \quad \Delta L_{min} = \text{Min}(\Delta L_{i,j})$$

$\Delta l_{min(i,j)}$  کوچکترین ضلع هر سلول در نظر گرفته می شود. [۱۳]

## ۶- هندسه و شبکه بندی

هندسه مساله دو استوانه غیر هم مرکز در نظر گرفته می شود. برای بررسی یک مدل واقعی تر شیار محوری در موقعیت های مختلف یاتاقان در نظر گرفته می شود. شبکه با روش جبری تولید شده و به اندازه کافی ریز در نظر گرفته می شود که استقلال جواب ها از شبکه به دست آید.



شکل ۴- شبکه بندی های مختلف

## ۷- شرایط مرزی

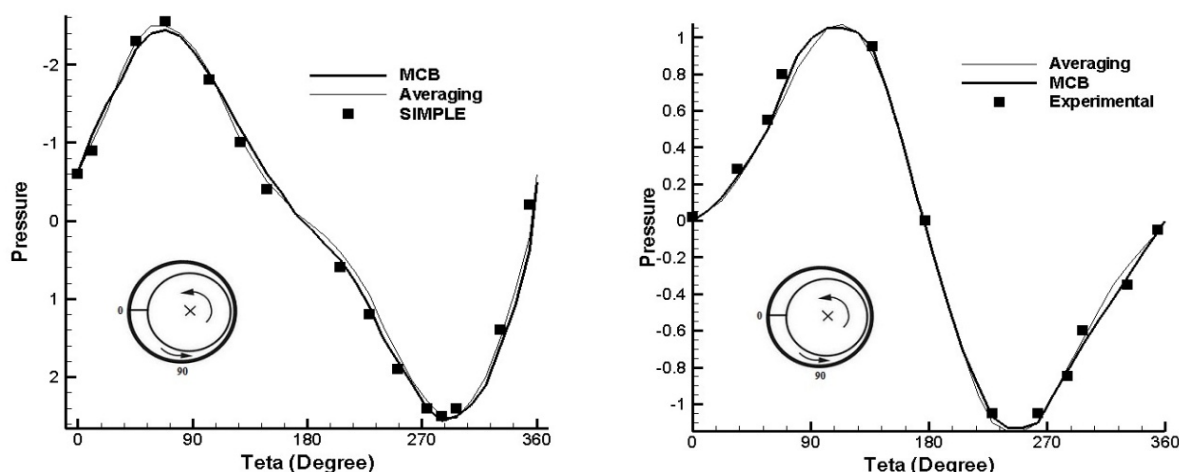
با توجه به کاربردهای استوانه های غیر هم مرکز به ویژه کاربرد آنها در مدل سازی یاتاقان های ژورنال، استوانه خارجی به عنوان تکیه گاه ثابت در نظر گرفته شده و استوانه داخلی با سرعت زاویه ای ثابت حول مرکز خود در حال دوران فرض می شود. با فرضیات مذکور برای محاسبه شار در مرز استوانه خارجی سرعت صفر در نظر گرفته شده و برای استوانه داخلی از مولفه های سرعت دورانی استفاده می شود. فشار برای هر دو دیواره از سلول های مجاور داخلی برون یابی می شود. برای محاسبه شار در مرز استوانه داخلی از معادله ۱۶ و محاسبه شار در مرز استوانه خارجی از معادله ۱۷ استفاده می شود.

$$u = r\omega \cdot \sin\theta_i \quad ; \quad v = r\omega \cdot \cos\theta_i \quad ; \quad p(i, 1) = 1.5p(i, 2) - 0.5p(i, 3) \quad (16)$$

$$u = 0 \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad p(i, M) = 1.5p(i, M - 1) - 0.5p(i, M - 2) \quad (17)$$

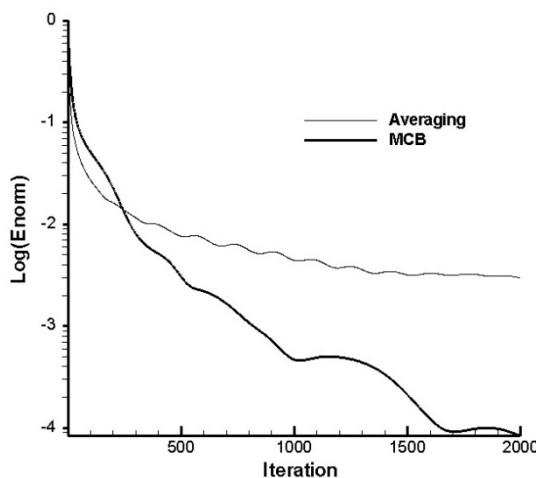
## ۸ - نتایج عددی و بحث

پس از توسعه کد کامپیوتری و اجرای آن به منظور حل معادلات ناویر-استوکس در هندسه بحث شده و با اعمال شرایط مرزی، نتایج بدست آمده با استفاده از یک پس پردازشگر به شرح زیر ارائه شده اند. در شکل (۵) نتایج عددی بدست آمده از دو طرح MCB و میان گیری برای توزیع فشار روی استوانه داخلی با نتایج بدست آمده از روشهای عددی [۸] و تجربی [۳] مقایسه شده و تطبیق مناسبی در این مقایسه قابل مشاهده می باشد. در شکل (۶) نیز تاریخچه همگرایی با شرایط یکسان برای دو طرح مقایسه شده و همگرایی سریعتر طرح MCB به وضوح قابل تشخیص است. کانتور فشار و برخی از خطوط جریان نیز برای نتایج بدست آمده با استفاده از دو طرح مذکور در شکل (۷) نمایش داده شده است، همان طور که در شکل دیده می شود در طرح MCB گردابه های کوچکتر نیز گرفته شده و شناسایی گردابه ها برای این طرح دقیق تر است. برای مقایسه دقیق تر دو طرح، نمودارهای توزیع فشار بر روی استوانه های داخلی و خارجی به دست آمده از دو طرح مذکور در شکل (۸) با یکدیگر مقایسه شده اند.



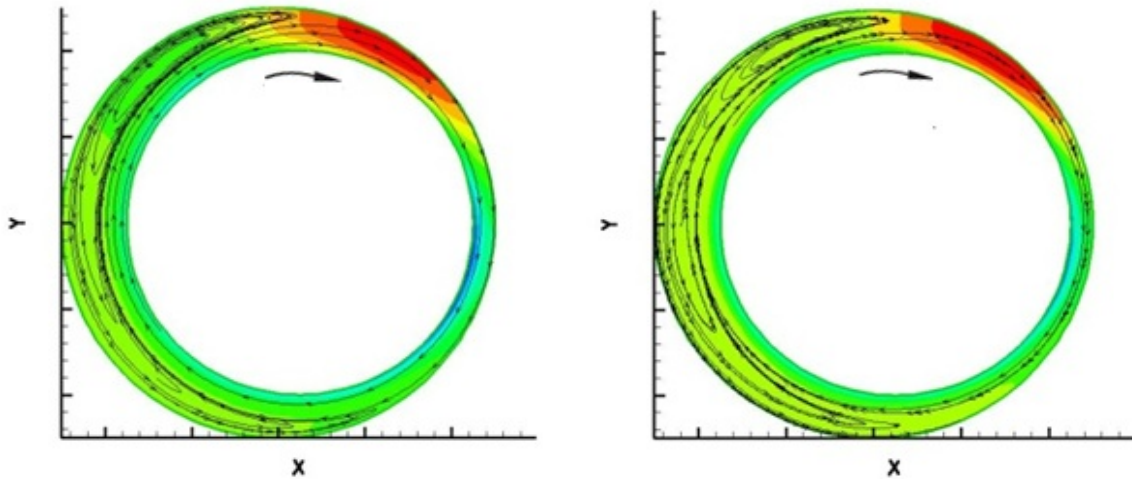
شکل ۵- مقایسه توزیع فشار بر روی استوانه داخلی با نتایج عددی [۸] و تجربی [۳]

سمت راست ( $Re = 815, \varepsilon = 0.68, \frac{c}{r_i} = 0.01$ ) ، سمت چپ ( $Re = 450, \varepsilon = 0.5, \frac{c}{r_i} = 0.01$ )

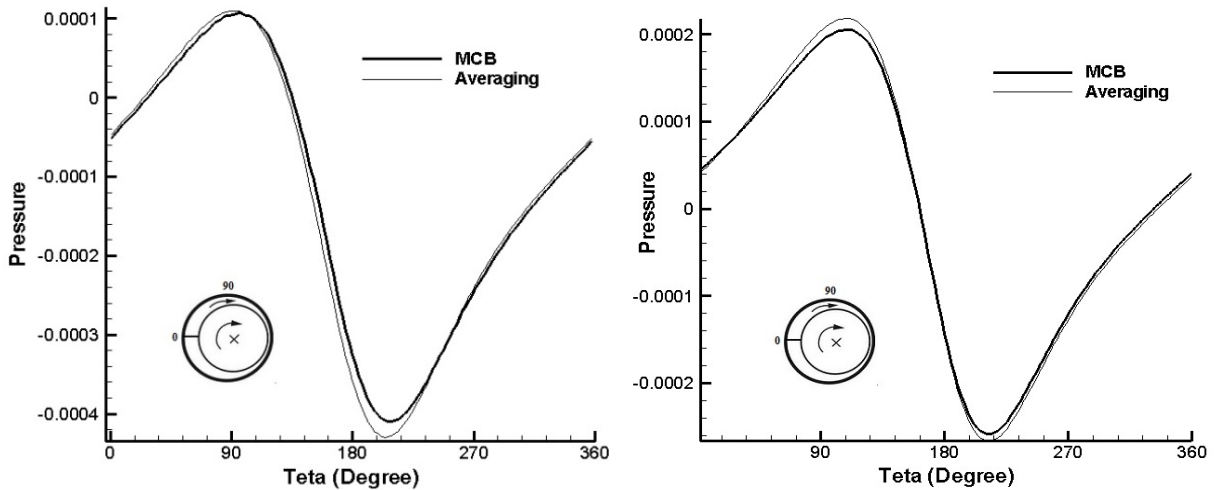


شکل ۶- تاریخچه همگرایی برای دو طرح MCB و میانگیری ( $Re = 200, \varepsilon = 0.5, \frac{c}{r_i} = 0.25, CFL = 1$ )



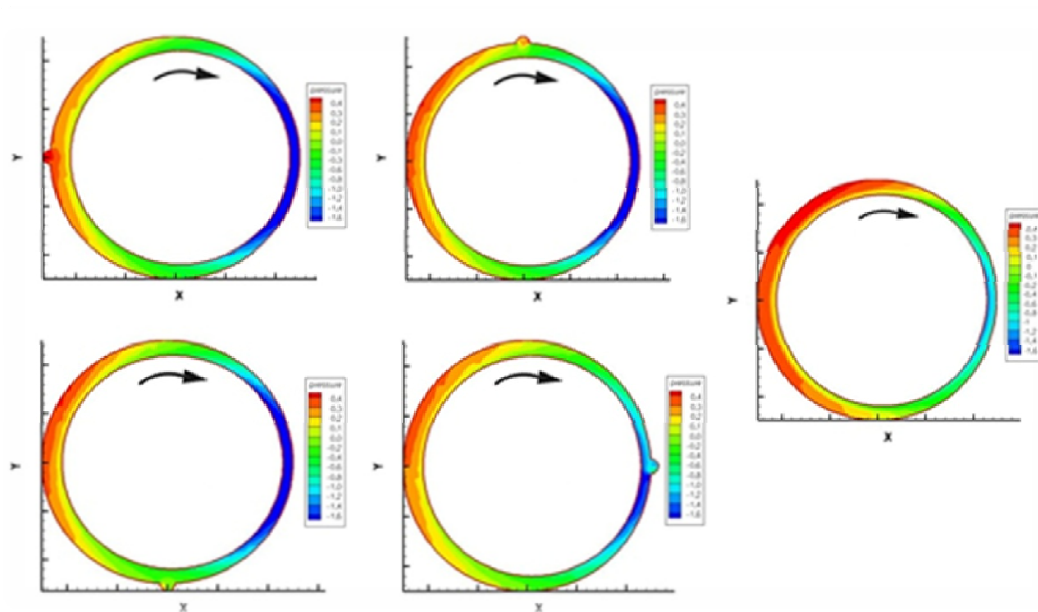


شکل ۷- کانتور فشار و خطوط جریان (  $Re = 200, \varepsilon = 0.5, \frac{c}{r_i} = 0.25, CFL = 1$  )  
(راست: طرح MCB ، چپ : طرح جیمسون)

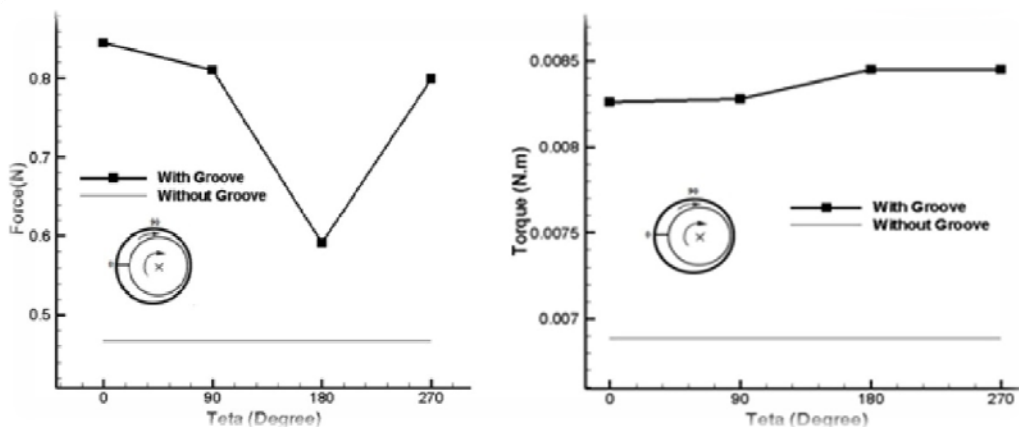


شکل ۸- مقایسه منحنی توزیع فشار (  $Re = 200, \varepsilon = 0.5, \frac{c}{r_i} = 0.25, CFL = 1$  )  
(راست: استوانه خارجی، چپ: استوانه داخلی)

در بررسی هندسه مساله می توان به شکل (۹) اشاره کرد که توزیع فشار بین دو استوانه را برای شیار در موقعیت های مختلف و برای حالت بدون شیار در شرایط یکسان را نشان می دهد. نیرو و گشتاور وارد شده بر روی استوانه داخلی (محور) برای هندسه های مختلف در شکل (۱۰) مقایسه شده و همان طور که مشاهده می شود وجود شیار باعث افزایش نیروی تحمل شده توسط شیار می شود که برای یک یاتاقان نکته مثبت محسوب می شود و این در حالی است که در این شکل وجود شیار افزایش گشتاور وارده به محور را نیز نشان می دهد که مطلوب نیست. در شکل (۱۱) نیز دبی عبوری از سطح مقطع AB برای هندسه های مختلف مقایسه شده و نشان می دهد که به کارگیری شیار محوری جریان عبوری از سطح مقطع مذکور را افزایش می دهد که از نقطه نظر انتقال حرارت ایده آل بوده و باعث می شود تا سیال روانکار در دمای پایین تری کار کند.

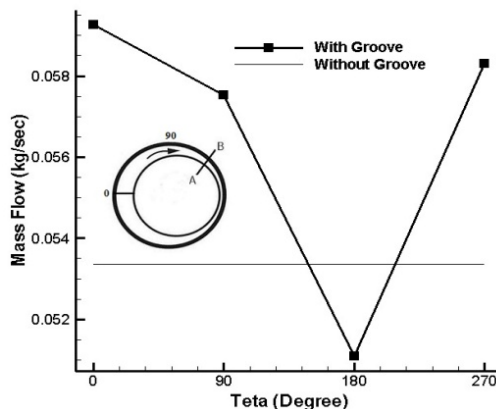


شکل ۹- توزیع فشار برای هندسه های مختلف ( $Re = 200, \epsilon = 0.33, \frac{c}{r_i} = 0.13, CFL = 1$ )



شکل ۱۰- مقایسه نیرو و گشتاور وارده بر استوانه داخلی برای هندسه های مختلف

( $Re = 200, \epsilon = 0.33, \frac{c}{r_i} = 0.13, CFL = 1$ )



شکل ۱۱- مقایسه دبی عبوری از سطح مقطع AB برای هندسه های مختلف

( $Re = 200, \epsilon = 0.33, \frac{c}{r_i} = 0.13, CFL = 1$ )

## نتیجه گیری

در این پژوهش یک طرح جدید چند بعدی بر مبنای مشخصه ها برای اولین بار برای جریان تراکم ناپذیر بین استوانه های دوار غیر هم مرکز به کار رفته است. این طرح به کمک تراکم پذیری مصنوعی، مسیر موج های مشخصه مجازی منتشر شده را در نظر گرفته و در مقایسه با شارهای متداول این نکته قابل مشاهده است که طرح MCB قابلیت گرفتن جزئیات جریان را به صورت دقیق تر و در یک فرآیند همگرایی سریع تر را دارد. همچنین تاثیر شیار بر روی عملکرد یک یاتاقان مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که وجود شیار می تواند فرآیند روانکاری را بهبود بخشد.

## مراجع

- [1] Wannier, G. H., "A Contribution to the Hydrodynamics of Lubrication", Quart. Appl. Math, Vol. 8, pp.1-32, (1950).
- [2] Kamal, M. M., "Separation in the Flow between Eccentric Rotating Cylinders", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 88, pp.717-724, (1966).
- [3] Pan, T., and Vohr, H., "Super-laminar Flow in Bearings and Seals", the Symposium on Lubrication in Nuclear Applications, pp. 216-245, New York, (1967).
- [4] Sood, D. R., and Elrod, H. G., "On the Flow between Two Long Eccentric Cylinders", Tech. Report 17, Lubrication Research Laboratory, Columbia University, (1970).
- [5] Dipirma, R. C., and Stuart, J. T. "The None-linear Calculation of Taylor-vortex Flow between Rotating Cylinders", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 7, pp.171-175, (1972).
- [6] Pal, R., Sinhasan, R., and Singh, D. V., "Analysis of a Big-end Bearing-a Finite Element Approach", Wear, Vol. 114, Issue 3, pp. 275-293, (1987).
- [7] Kohno, K., Takahashi, S., and Saki, K., "Elasto-hydrodynamic Lubrication Analysis of Journal Bearing with Combined use of Boundary Elements and Finite Elements", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 13, Issue 3, pp. 273-281, (1994).
- [8] گنجعلی خان نسب ، سید عبدالرضا ؛ معیری ، محمد صادق ؛ بررسی اثر اینرسی سیال در مشخصات هیدرودینامیکی یاتاقان های ژورنال ، پنجمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک ایران ، دانشگاه تبریز، صفحات ۶۳-۷۰، اردیبهشت، (۱۳۷۶).
- [9] Ma, G. J., Wu, C. W., and Zhou, P., "Wall Slip and Hydrodynamics of Two-dimensional Journal Bearing", Tribology International, Vol. 40, Issue 7, pp. 1056-1066, (2007).
- [10] Roy, L., and Laha, S. K., "Steady State and Dynamic Characteristics of Axial Grooved Journal Bearings", Tribology International, Vol. 42, pp. 754-761, (2009).
- [11] Zamzajian, K., and Razavi, S. E., "Multidimensional Up-winding for Incompressible Flow Based on Characteristics", Journal of Computational Physics, Vol. 227, pp. 8699-8713, (2008).

- [12] Razavi, S. E., Zamzamian, K., and Farzadi, A., "Genuinely Multidimensional Characteristic-based Scheme for Incompressible Flow", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, pp. 929-949, (2008).
- [13] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time-stepping Schemes", AIAA Conf, Vol. 81, pp. 1259, Palo Alto, California, (1981).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$A_{ij}$	: مساحت سلول ij
$c$	: لقی شعاعی
CFL	: عدد کورانت
$F, G$	: بردارهای شار جابجایی
$i, j$	: شماره سلول
$M$	: تعداد سلول ها در راستای شعاعی
$n$	: مولفه عمود بر وجه
$p$	: فشار
$R, S$	: بردارهای شار لزج
$Re$	: عدد رینولدز
$r_0, r_i$	: شعاع استوانه داخلی و خارجی
$t$	: زمان، مولفه مماس بر وجه
$Ta$	: عدد تیلور
$v, u$	: مولفه های سرعت در راستای افقی و عمودی
$U$	: بردار مقادیر جریان

### نمادهای یونانی

$\beta$	: ضریب تراکم پذیری مصنوعی
$\epsilon$	: نسبت خروج از مرکز
$\varphi$	: زاویه موج
$\mu$	: لزجت دینامیکی
$\nu$	: لزجت سینماتیکی
$\omega$	: سرعت دورانی
$\rho$	: چگالی
$\theta$	: زاویه سلول

**Abstract**

This study concerns flow modeling of eccentric cylinders. For this purpose the Navier-Stokes equations are solved by the aid of artificial compressibility in Finite Volume Method. A multidimensional characteristic based scheme (MCB) developed by Zamzamian and Razavi is applied for convective fluxes as well as conventional Jameson scheme. The 4<sup>th</sup> order Runge-Kutta is used for time stepping. Equations are solved explicitly and pressure is calculated directly. Geometry of problem consists of two eccentric cylinders with inner cylinder rotating and outer cylinder fixed. In addition axially grooves on outer cylinder is modeled and analyzed at different locations. The numerical results obtained by two schemes are compared together and validated.