

## توزیع دمای گذرا و پایا در پوشش های سد حرارتی تحت بارگذاری شوک حرارتی و هارمونیک حرارتی

این مطالعه به بررسی میدان دما در سیستم های پوشش سد حرارتی تحت بارگذاری حرارتی پایا و گذرا می پردازد. پوشش سرامیکی با ضخامت محدود به بستر با ضخامت ۱/۵ سانتیمتر متصل شده است. بعد طولی لایه ها در مقابل ضخامتشان بسیار بیشتر است. ابتدا توزیع دمای پایا در داخل سیستم پوشش/بستر به واسطه اعمال توزیع دمای غیریکنواخت بر روی مرزهای سیستم بدست آمد. سپس توزیع دمای پایا به عنوان شرط اولیه به مسئله گذرا معرفی شده و میدان دمای گذرا درون پوشش و بستر ارائه شد. سپس بارگذاری های از نوع شوک حرارتی بر روی مرز بالایی پوشش اعمال شد و اثرات هر یک از این بارگذاری ها بر روی رفتار میدان دما در سیستم پوشش/بستر بررسی گردید. به منظور بررسی پاسخ گذرای حرارتی از معادلات انتقال حرارت غیرفوریه ای با تاخیر دو فازی استفاده شد. جهت حل معادلات انتقال حرارت از تبدیلات انتگرالی فوریه و لاپلاس استفاده گردید. معادلات حاکم بر دما به کمک تبدیلات مذکور، به انضمام شرایط مرزی به روش تحلیلی حل شدند. با اعمال بارگذاری شوک حرارتی و متناوب حرارتی بر روی مرز آزاد پوشش و دستیابی به توزیع دما در لایه های پوشش و بستر، ملاحظه شد که بسته به نوع بارگذاری حرارتی، این لایه نقش چشمگیری در کاهش اثرات بار حرارتی در بستر ایفا می کند. طبق نتایج، تاثیر شوک حرارتی پس از ۱۳/۴ ثانیه در فاصله ۱ سانتیمتری از سطح آزاد پوشش سرامیکی احساس گشت. پس از موقعیت عمودی ۲۵۰ میکرون، تغییر در فرکانس بارگذاری هارمونیک حرارتی موجب نوسانات دما نخواهد شد.

امیرحسین فرتاش<sup>۱</sup>  
دانشجوی دکترا

اسماعیل پورسعیدی<sup>۲</sup>  
استاد

واژه های کلیدی: پوشش سد حرارتی، بارگذاری حرارتی گذرا، شوک حرارتی، بارگذاری متناوب حرارتی

### ۱- مقدمه

پوشش های مقاوم حرارتی به منظور محافظت از قطعاتی که در معرض بارگذاری های شدید حرارتی و دمای بالا قرار دارند، مورد استفاده قرار می گیرند. با توجه به کاربرد وسیع پوشش های سد حرارتی، این پوشش ها به طور معمول بر روی قطعات حساسی همچون پرهی توربین گاز اعمال می شوند. این پوشش ها که اغلب از

<sup>۱</sup> دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان amir.hfartash@yahoo.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استاد، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان epsaeidi@znu.ac.ir

جنس سرامیک ساخته می‌شوند، همانند یک لایه‌ی عایق حرارتی عمل کرده و تحت بارگذاری‌های حرارتی متعددی قرار می‌گیرند. لذا آنالیز دقیق حرارتی به منظور دستیابی به توزیع میدان‌های دما در این پوشش‌ها و بستر محافظت شونده‌شان بسیار ضروری به نظر می‌رسد. به منظور دستیابی به توزیع دمای دقیق در سیستم‌های پوشش سد حرارتی لازم است تا از معادله رسانش حرارتی مناسبی استفاده گردد. جهت توصیف بهتر گسترش حرارت در جامدات، کاتانو و ورنوت [۱،۲] معادله انتقال حرارت غیرفوری‌ای را ارائه دادند که تاخیر انتقال شار حرارتی را در بر می‌گرفت. پس از آن تزو [۳] مدلی به نام رسانش با تاخیر دوفازی جهت توصیف هدایت حرارتی ارائه داد. در این مدل، تاخیر زمانی هر دو پارامتر شار حرارتی و گرادیان دما گنجانده شده است. با توجه توسعه روز افزون و اهمیت سیستم‌های پوشش سد حرارتی، طی سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای در زمینه انتقال حرارت در پوشش‌های سد حرارتی از جنبه‌های مختلف صورت گرفته است.

سیاوارلا و همکاران [۴] با در نظر گرفتن پوشش سرامیکی تک لایه بر روی بستر فلزی نیمه بی نهایت، با حل معادله انتقال حرارت فوریه در حالت یک بعدی، میدان دما در لایه پوشش و بستر را بدست آوردند. سپس با اعمال بارگذاری هارمونیک حرارتی در حالت پایا به بررسی نحوه تغییرات دما و تنش‌های حرارتی ایجاد شده در سیستم پرداختند. آگراوال و همکاران [۵] با حل مسئله غیرهمگن انتقال حرارت به توزیع دمای گذرا در سیستم‌های چندلایه مدرج تابعی دست یافتند. ارائه یک حل تحلیلی جهت بررسی انتقال حرارت جابجایی و تشعشی در حالت گذرا در پوشش از جنس زیرکونیا توسط صدوقی [۶] انجام شد. اثرات شرایط مرزی تشعشی و جابجایی و همچنین خواص پوشش مقاوم بر روی نحوه توزیع دما مورد تحقیق قرار گرفت. مسئله انتقال حرارت گذرای یک بعدی با در نظر گرفتن رسانش حرارتی فوری‌ای در ابزار پوشش داده شده توسط شیجان و ژانکیانگ [۷] مورد تحلیل قرار گرفت. مدلسازی توزیع دمای ناشی از تشعشع حرارتی در پوشش‌های سد حرارتی توسط لیم و کار [۸] انجام شد. از نتایج ارائه شده می‌توان به تاثیر ضخامت و ضریب هدایت پوشش بر نحوه توزیع دما اشاره کرد. توزیع دمای ناشی از اعمال شار حرارتی ناگهانی در سیستم پوشش مقاوم حرارتی با استفاده از مدل هدایت حرارتی غیرفوری‌ای با تاخیر یک فازی توسط آکوبا و همکاران [۹] انجام شد. معادله انتقال حرارت گذرا به صورت یک بعدی در نظر گرفته شده و به روش عددی حجم محدود مقدار متوسط حل شد. هان و همکاران [۱۰] به مطالعه پارامتریک پوشش‌های سد حرارتی با دو لایه سرامیکی پرداختند. در این مدل به کمک روش المان محدود هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایت، جابجایی و تشعشع در نظر گرفته شد و توزیع دمای پایا در دو لایه محافظ سرامیکی، لایه رابط و بستر بدست آمد. تحقیق بر روی انتقال حرارت گذرا در سیستم پوشش سد حرارتی با فرض بستر ناهمسانگرد توسط لی و تسای [۱۱] انجام شد. معادله گذرای انتقال حرارت فوریه گسسته سازی شده و جهت حل آن از نرم‌افزار کامسول استفاده شد. بررسی عددی مسئله هدایت حرارتی یک بعدی با تاخیر دوفازی در سیستم‌های پوشش سد حرارتی توسط یانگ و همکاران [۱۲] انجام شد. ارائه یک مدل تحلیلی جهت مطالعه‌ی توزیع دما و تنش در یک دیسک ترمز به همراه پوشش مقاوم حرارتی اعمال شده بر روی آن توسط یفتوشنکو و همکاران [۱۳] انجام شد. پوشش مقاوم به صورت باریکه با ضخامت محدود و دیسک ترمز به صورت محیط نیمه‌بینهایت در نظر گرفته شد. جهت تحلیل، فرمولاسیون مسئله‌ی مقدار مرزی رسانش حرارت فوریه در حالت یک بعدی و گذرا با فرض حساسیت خواص ماده نسبت

به دما به کار گرفته شد. یانگ و همکاران [۱۴] به بررسی هدایت حرارتی یک بعدی در فولاد پوشش داده شده با استفاده از مدل انتقال حرارت یک بعدی پرداختند. تاثیر شرایط مرزی حرارتی و خواص حرارتی پوشش بر روی توزیع تنش در پوشش و بستر فولادی مورد مطالعه قرار گرفت.

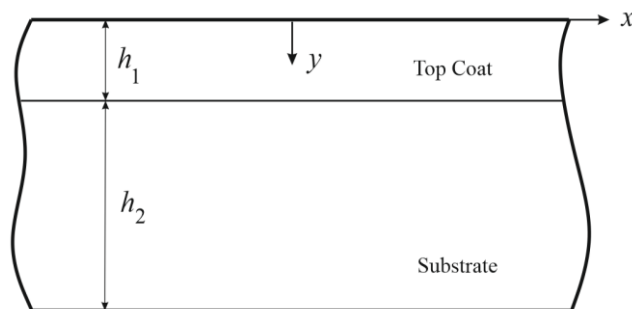
به منظور افزایش بازده توربین ها نیاز به افزایش دمای گازهای حاصل از احتراق ورودی به توربین می باشد. جهت تحمل این دماهای بالا، بر روی پره های توربین گاز، پوشش های سد حرارتی مورد استفاده قرار می گیرد. در اغلب کاربردهای مهندسی، پوشش های سد حرارتی در معرض انواع بارهای حرارتی خصوصاً وابسته به زمان و تناوبی قرار دارند. همانطور که در قسمت مرور مطالعاتی دیده شد، اکثر محققان به منظور تحلیل گذرای حرارتی سیستم های پوشش سد حرارتی از قانون هدایت فوریه و یا معادله رسانش غیرفوریه ای با تاخیر یک فازی برای بارگذاری های حرارتی یک بعدی بهره جسته اند. قانون رسانش حرارتی فوریه قادر به پاسخ دهی صحیح در برابر بارگذاری حرارتی در بازه های زمانی کوتاه نیست [۳، ۱۵]. همچنین، برخی تحقیقات نشان می دهد مدل انتقال حرارت غیرفوریه ای با تاخیر یک فازی نیز در برخی مواقع جواب های درست و دقیقی به بارگذاری شوک حرارتی ارائه نمی دهد [۳، ۱۵]. لذا لازم است جهت بررسی دقیق پاسخ سیستم های پوشش سد حرارتی در برابر شوک حرارتی از معادله مناسب تری استفاده کرد.

هدف این مطالعه، ارائه یک حل تحلیلی به منظور دستیابی به توزیع دمای پایا و گذرا در سیستم پوشش سد حرارتی تحت بارگذاری حرارتی پایا و گذرا در حالت دو بعدی می باشد. در ابتدا تحلیل حرارتی پایا برای مسئله مقدار مرزی حرارتی تحت شرایط مرزی غیرهمگن انجام شده و توزیع دمای پایا در پوشش محافظ و بستر بدست آمده است. تاثیر ضخامت لایه محافظ بر روی نحوه توزیع دما در سیستم پوشش / بستر مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع دمای بدست آمده در پوشش محافظ و بستر به عنوان توزیع دمای اولیه برای مسئله هدایت حرارت گذرا در نظر گرفته شد. سپس با استفاده از معادله انتقال حرارت غیرفوریه ای با تاخیر دوفازی، توزیع دمای گذرا در موقعیت های مختلف درون پوشش محافظ و بستر بدست آمد. با در نظر گرفتن تاخیر شار حرارتی و گرادیان دما برابر با صفر، مدل هدایت حرارتی با تاخیر دو فازی به مدل رسانش فوریه کلاسیک تبدیل شده و تحلیل سیستم پوشش سد حرارتی تحت بارگذاری پایای متناوب حرارتی انجام شده است. در قسمت نتایج عددی، پس از اعتبارسنجی نتایج، میدان دمای گذرا حاصل از مدل انتقال حرارت فوریه و مدل انتقال حرارت با تاخیر دو فازی بدست آمده و با یکدیگر مقایسه شدند. تاثیر زمانهای تاخیر شار حرارتی و گرادیان دما بر روی توزیع دما در موقعیت های مختلف بررسی شده است. سپس میدان دما در سیستم پوشش / بستر تحت بارگذاری های مختلف گذرای حرارتی در داخل لایه محافظ و بستر بدست آمد. در نهایت، اثر فرکانس بارگذاری حرارتی بر روی میدان دمای پایا در سیستم پوشش سد حرارتی مورد بررسی واقع شد.

## ۲- تحلیل مسئله

پوشش سد حرارتی مورد بررسی در این مطالعه، متشکل از یک لایه محافظ بالایی یا به اصطلاح تاپ کوت<sup>۱</sup> بوده که بر روی بستر از جنس سوپر آلیاژ پایه نیکل اعمال شده است. دستگاه مختصات دکارتی  $x-y$  به گونه ای در نظر گرفته شده که محور  $x$  ها منطبق بر مرز آزاد لایه محافظ و محور  $y$  عمود بر مرزهای لایه ها باشد. لایه

<sup>۱</sup>Top Coat layer (TC)



شکل ۱- هندسه مسئله

محافظ بالایی در  $0 \leq y \leq h_1$  و بستر در  $h_1 \leq y \leq h_2$  واقع شده است (شکل (۱)). فرض بر این است که بعد طولی لایه‌ها در جهت محور  $x$  در مقایسه با ضخامت لایه‌ها دارای مقدار بسیار زیادی بوده و لایه محافظ به صورت ایده‌آل به بستر چسبیده باشد. جهت تسهیل در محاسبات،  $h = h_1 + h_2$  در نظر گرفته می‌شود. بارگذاری حرارتی بر روی مرزهای  $y = 0$  و  $y = h$  انجام خواهد شد. به منظور تمییز میان لایه‌ها از بالانویس  $(k)$  استفاده می‌شود.  $(k) = (1)$  نمایانگر لایه محافظ و  $(k) = (2)$  نشانگر بستر می‌باشد. فرض عدم وابستگی خصوصیات حرارتی لایه محافظ و بستر به تغییرات دما مد نظر قرار می‌گیرد. نخست، توزیع دمای دلخواه بر روی سطح آزاد لایه محافظ و مرز پایینی بستر به صورت پیوسته و غیریکنواخت به ترتیب برابر با  $T^{(1)}(x, 0)$  و  $T^{(2)}(x, h)$  در نظر گرفته می‌شود. جهت دستیابی به توزیع دمای پایا در داخل لایه محافظ و بستر، با استفاده از قانون رسانش فوریه کلاسیک، معادله حاکم بر میدان دما توسط رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T^{(k)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(k)}(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

شرایط پیوستگی دما و شار حرارتی در فصل مشترک، در رابطه زیر ارائه شده است:

$$T^{(1)}(x, h_1) = T^{(2)}(x, h_1) \quad (2)$$

$$-\frac{\partial T^{(1)}(x, h_1)}{\partial y} = -k_p \frac{\partial T^{(2)}(x, h_1)}{\partial y}$$

که در رابطه بالا  $k_p = K^{(2)}/K^{(1)}$  بوده و  $K^{(1)}$  و  $K^{(2)}$  به ترتیب ضریب رسانش حرارتی لایه محافظ و بستر هستند. جهت حل معادله (۱) از تبدیل فوریه مختلط استفاده می‌شود. تبدیل فوریه مختلط تابعی چون  $g(x)$  به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx \quad (3)$$

و معکوس تبدیل فوریه در رابطه زیر معرفی شده است:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} G(\omega) d\omega \quad (۴)$$

تبدیل فوریه میدان دما  $T^{(k)}(x, y)$  در راستای محور  $x$  با  $T^{(k)}(\omega, y)$  نشان داده می شود. اعمال تبدیل فوریه بر روی معادله (۱) به رابطه زیر منجر می شود:

$$\frac{d^2 T^{(k)}(\omega, y)}{dy^2} - \omega^2 T^{(k)}(\omega, y) = 0 \quad (۵)$$

جواب معادله دیفرانسیل (۵) به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$T^{(k)}(\omega, y) = A_1^{(k)}(\omega) e^{-|\omega|y} + A_2^{(k)}(\omega) e^{|\omega|y} \quad (۶)$$

که در معادله بالا  $A_1^{(k)}(\omega)$  و  $A_2^{(k)}(\omega)$   $k \in \{1, 2\}$  هنوز مجهول هستند. تبدیل فوریه شرط مرزی در سطح آزاد لایه محافظ به صورت  $T^{(1)}(\omega, 0)$  و در مرز پایینی بستر به صورت  $T^{(2)}(\omega, h)$  نوشته می شود. با اعمال تبدیل فوریه بر روی شرایط پیوستگی (۲) داریم:

$$T^{(1)}(\omega, h_1) = T^{(2)}(\omega, h_1) \quad (۷)$$

$$-\frac{dT^{(1)}(\omega, h_1)}{dy} = -k_p \frac{dT^{(2)}(\omega, h_1)}{dy}$$

با استفاده از شرایط مرزی و شرایط پیوستگی، مجهولات  $A_1^{(k)}(\omega)$  و  $A_2^{(k)}(\omega)$  بدست آمده و سپس در معادله (۶) جایگذاری می شوند. شکل کامل  $A_1^{(k)}(\omega)$  و  $A_2^{(k)}(\omega)$  در پیوست (الف) آورده شده است. توزیع دما با اعمال معکوس تبدیل فوریه بر روی معادله (۶) بدست می آید. در نهایت، میدان دمای پایا در لایه سرامیکی و بستر به صورت رابطه (۸) حاصل می گردد.

همانطور که ذکر شد، به دلیل محدودیت معادله انتقال حرارت فوریه کلاسیک در مسائل گذرا همچون بارگذاری به صورت شوک حرارتی، جهت بررسی پاسخ سیستم پوشش سد حرارتی به بارگذاری گذرای حرارتی از معادله رسانش حرارت با تاخیر دوفازی استفاده می گردد. به همین منظور، در این قسمت میدان دمای گذرای  $T(x, y, t)$  در لایه محافظ و بستر بدست خواهد آمد. رسانش حرارتی با تاخیر دوفازی برای ماده همسانگرد در رابطه (۹) معرفی شده است [۳].

$$T^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{E(\omega)} \left\{ \left( [e^{2|\omega|h} (k_p + 1) + e^{2|\omega|h_1} (k_p - 1)] e^{|\omega|(2h_1 - y)} \right. \right. \\ \left. \left. + [e^{2|\omega|h_2} (1 - k_p) - (1 + k_p)] e^{|\omega|(2h_1 + y)} \right) T^{(1)}(\omega, 0) \right. \\ \left. + 2k_p (e^{|\omega|(h + 2h_1 + y)} - e^{|\omega|(h + 2h_1 - y)}) T^{(2)}(\omega, h) \right\} d\omega \quad (8)$$

$$T^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{E(\omega)} \left\{ 2(e^{|\omega|[2(h+h_1) - y]} - e^{|\omega|(2h_1 + y)}) T^{(1)}(\omega, 0) \right. \\ \left. + \left( [e^{2|\omega|h_1} (k_p - 1) - (k_p + 1)] e^{|\omega|(h + 2h_1 - y)} \right. \right. \\ \left. \left. + [1 - k_p + e^{2|\omega|h_1} (k_p + 1)] e^{|\omega|(h + y)} \right) T^{(2)}(\omega, h) \right\} d\omega$$

$$\vec{q}(\vec{r}, t + \tau_q) = -k \nabla T(\vec{r}, t + \tau_T) \quad (9)$$

که در مختصات دکارتی دو بعدی  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$ ، اوپراتور گرادیان،  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$  بردار مکان و  $\tau_q$  و  $\tau_T$  دارای مقادیر مثبتی بوده و جزو خواص ذاتی ماده محسوب می‌شوند. این نکته قابل توجه است که در مدل رسانش حرارتی با تاخیر دو فازی سه مشخصه زمانی باید مد نظر قرار بگیرد: زمان  $t$  که لحظه آغاز انتقال گرما می‌باشد، زمان  $t + \tau_q$  که در این لحظه شار حرارتی شروع به جریان در داخل ماده می‌کند و  $t + \tau_T$  لحظه‌ای که گرادیان دما در داخل ماده احساس می‌شود [۳]. بسط تیلور مرتبه اول معادله (۹) نسبت به زمان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{q}(\vec{r}, t) + \tau_q \frac{\partial \vec{q}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -k \left\{ \nabla T(\vec{r}, t) + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \nabla T(\vec{r}, t) \right\} \quad (10)$$

معادله بقای انرژی بدون حضور منبع و یا چاه حرارتی نیز به شکل زیر است:

$$-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{r}, t) = \rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (11)$$

که  $\rho$  چگالی ماده و  $c_p$  گرمای ویژه ماده می‌باشد. با ادغام معادلات (۱۰) و (۱۱) و حذف شار حرارتی، فرمولاسیون معادله حاکم بر میدان دما به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{K}{\rho c_p \tau_q}\right) \nabla^2 T(\vec{r}, t) + \left(\frac{K \tau_T}{\rho c_p \tau_q}\right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau_q} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

معادله (۱۲) در حالت دو بعدی و با معرفی ضریب پخش حرارتی  $\alpha^{(k)} = K^{(k)} / \rho^{(k)} c_p^{(k)}$  برای پوشش محافظ و بستر به صورت زیر ساده می شود:

$$\nabla^2 T^{(k)}(x, y, t) + \tau_T^{(k)} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 T^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{\alpha^{(k)}} \frac{\partial T^{(k)}(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\tau_q^{(k)}}{\alpha^{(k)}} \frac{\partial^2 T^{(k)}(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (13)$$

که  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  است. همانطور که ذکر شد،  $(k) = (1)$  نشانگر لایه محافظ و  $(k) = (2)$  نشانگر بستر است. جهت حل معادله (۱۳) از تبدیل انتگرالی (۳) و تبدیل لاپلاس استفاده می شود. با اعمال تبدیلات مذکور بر روی معادله (۱۳) رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\frac{d^2 \bar{T}^{(k)}}{dy^2} - \omega^2 \bar{T}^{(k)} + \tau_T^{(k)} \left[ \left( \frac{d^2}{dy^2} - \omega^2 \right) (s \bar{T}^{(k)} - T_0^{(k)}) \right] = \frac{1}{\alpha^{(k)}} (s \bar{T}^{(k)} - T_0^{(k)}) + \frac{\tau_q^{(k)}}{\alpha^{(k)}} (s^2 \bar{T}^{(k)} - s T_0^{(k)} - \frac{dT_0^{(k)}}{dt}) \quad (14)$$

که  $\bar{T}^{(k)} = \bar{T}^{(k)}(\omega, y, s)$  میدان دما در حوزه لاپلاس و فوریه است.  $T_0^{(k)}(x, y, 0)$  توزیع دمای اولیه در لایه محافظ و بستر بوده و مستقل از زمان در نظر گرفته می شود ( $\frac{dT_0^{(k)}}{dt} = 0$ ). با مرتب کردن معادله (۱۴) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & (1 + s \tau_T^{(k)}) \frac{d^2 \bar{T}^{(k)}}{dy^2} - [\omega^2 (1 + \tau_T^{(k)} s) + \frac{s}{\alpha^{(k)}} (1 + \tau_q^{(k)} s)] \bar{T}^{(k)} \\ & = \tau_T^{(k)} \frac{d^2 T_0^{(k)}}{dy^2} - \left( \tau_T^{(k)} \omega^2 + \frac{1 + s \tau_q^{(k)}}{\alpha^{(k)}} \right) T_0^{(k)} \end{aligned} \quad (15)$$

با توجه به غیرهمگن بودن معادله دیفرانسیل (۱۵) جواب کلی آن به صورت ترکیبی از جواب عمومی و جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(k)}(\omega, y, s) & = B_1^{(k)}(\omega, s) e^{-m^{(k)} y} + B_2^{(k)}(\omega, s) e^{m^{(k)} y} \\ & + \frac{e^{-m^{(k)} y}}{2m^{(k)}} \int_0^y e^{-m^{(k)} y} R^{(k)}(x, y) dy + \frac{e^{m^{(k)} y}}{2m^{(k)}} \int_0^y e^{m^{(k)} y} R^{(k)}(x, y) dy \end{aligned} \quad (16)$$

که در رابطه بالا

$$m^{(k)} = \frac{\sqrt{(1+s\tau_T^{(k)})[\omega^2(1+\tau_T^{(k)}s) + \frac{s}{\alpha^{(k)}}(1+\tau_q^{(k)}s)]}}{1+s\tau_T^{(k)}} \quad (17)$$

$$R^{(k)}(x, y) = \tau_T^{(k)} \frac{d^2 T_0^{(k)}}{dy^2} - \left( \tau_T^{(k)} \omega^2 + \frac{1+s\tau_q^{(k)}}{\alpha^{(k)}} \right) T_0^{(k)}$$

دمای اولیه در پوشش محافظ و بستر به صورت  $T_0^{(k)}(x, y, 0)$  می باشد. توزیع دمای اولیه در لایه محافظ و بستر همان توزیع دمایی است که توسط رابطه (۸) ارائه شد. در نتیجه، میدان دمای پایای بدست آمده در بخش قبل به عنوان شرط اولیه مسئله گذرای کنونی در نظر گرفته می شود. حال، مرز آزاد لایه محافظ  $(y=0)$  در معرض بار حرارتی گذرا قرار می گیرد ولی مرز پایینی بستر در هر زمان در دمای  $T(x, h)$  نگاه داشته می شود. شرایط اولیه و مرزی حرارتی به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} T_0^{(1)}(x, y, 0) &= T^{(1)}(x, y) \\ T_0^{(2)}(x, y, 0) &= T^{(2)}(x, y) \\ T^{(1)}(x, 0, t) &= T^{(1)}(x, 0) f(t) \\ T^{(2)}(x, h, t) &= T^{(2)}(x, h) \end{aligned} \quad (18)$$

که در رابطه بالا  $T^{(1)}(x, 0) f(t)$  بیانگر توزیع دمای غیریکنواخت و وابسته به زمان است و در لحظه  $t=0$  به مرز  $(y=0)$  اعمال می شود. شرایط پیوستگی در فصل مشترک پوشش/بستر نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, h_1, t) &= T^{(2)}(x, h_1, t) \\ -\frac{\partial T^{(1)}(x, h_1, t)}{\partial y} &= -k_p \frac{\partial T^{(2)}(x, h_1, t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (19)$$

مجهولات  $B_1^{(k)}(\omega, s)$  و  $B_2^{(k)}(\omega, s)$ ،  $k \in \{1, 2\}$  در معادله (۱۶) با استفاده از شرایط (۱۸) و (۱۹) در حوزه لاپلاس و فوریه بدست می آیند. مجهولات  $B_1^{(k)}(\omega, s)$  و  $B_2^{(k)}(\omega, s)$   $k \in \{1, 2\}$  پس از محاسبات جبری طولانی بدست آمده و در معادله (۱۶) جایگذاری شده اند. با اعمال معکوس تبدیل فوریه بر روی معادله (۱۶) میدان دما در فضای لاپلاس به صورت زیر حاصل می گردد:



$$T^{(1)}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{-i\omega x}}{\Delta(\omega, s)} \left( B_1^{(1)}(\omega, s) e^{m^{(1)}(h_1 - y) - m^{(2)}h_1} + B_2^{(1)}(\omega, s) e^{m^{(1)}y - m^{(2)}h_1} \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-(2m^{(2)}h_1 + m^{(1)}y)}}{2m^{(1)}} \int_0^y e^{-m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy + \frac{e^{m^{(1)}y - 2m^{(2)}h_1}}{2m^{(1)}} \int_0^y e^{m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy \right\} d\omega \quad (20)$$

$$T^{(2)}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{-i\omega x}}{\Delta(\omega, s)} \left( B_1^{(2)}(\omega, s) e^{m^{(2)}(h - y)} + B_2^{(2)}(\omega, s) e^{m^{(2)}(y - h_1)} \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-m^{(2)}(2h_1 + y)}}{2m^{(2)}} \int_0^y e^{-m^{(2)}y} R^{(2)}(x, y) dy + \frac{e^{m^{(2)}(y - 2h_1)}}{2m^{(2)}} \int_0^y e^{m^{(2)}y} R^{(2)}(x, y) dy \right\} d\omega$$

که  $B_1^{(k)}(\omega, s)$ ،  $B_2^{(k)}(\omega, s)$  و  $R^{(k)}(x, y)$  و  $k \in \{1, 2\}$  در پیوست ب معرفی شده اند. جهت دستیابی به توزیع دما  $T^{(k)}(x, y, t)$ ،  $k \in \{1, 2\}$  در لایه‌های محافظ و بستر، لازم است که تبدیل معکوس لاپلاس بر روی معادلات (۲۰) اعمال شود. تبدیل معکوس لاپلاس به روش عددی موسوم به استفست [۱۶] انجام می‌گیرد. این روش توسط محققین زیادی که با مسائل گذرا سروکار داشته اند، استفاده شده است. یک تابع وابسته به زمان همچون  $f(t)$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^M v_n F\left(\frac{\ln 2}{t} n\right) \quad (21)$$

که در رابطه (۲۱)  $F(\cdot)$  تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  است و  $M$  یک عدد زوج است. همچنین

$$v_n = (-1)^{\frac{M}{2} + n} \frac{\sum_{k=0.5(n+1)}^{\min(\frac{M}{2}, n)} k^{\frac{M}{2}} (2k)!}{\left(\frac{M}{2} - k\right)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!} \quad (22)$$

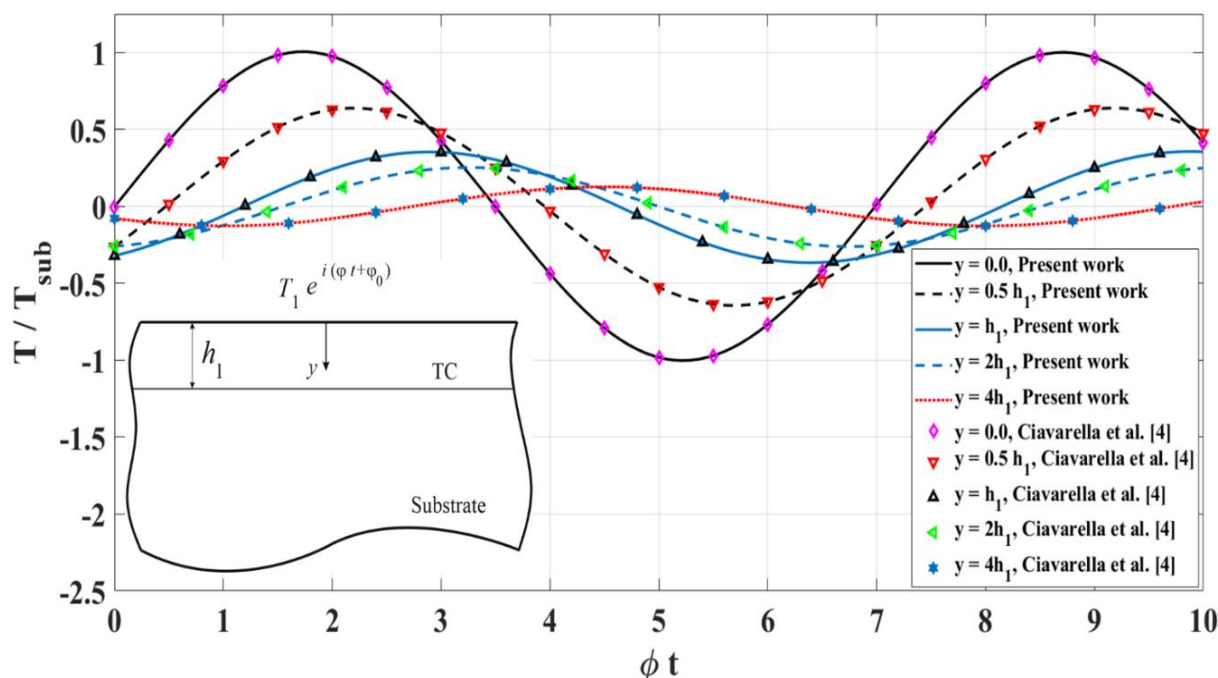
### ۳- نتایج عددی

در این بخش، نخست نتایج بدست آمده از حل تحلیلی، اعتبارسنجی شده و سپس به ارائه توزیع دمای حاصل از انواع بار حرارتی در سیستم پوشش/بستر و پارامترهای هندسی تاثیرگذار بر روی میدان دما در داخل لایه‌ها پرداخته می‌شود. جهت بررسی میدان دما در داخل سیستم پوشش/بستر، پوشش محافظ از جنس سرامیک زیرکونیای پایدار شده توسط ایتریا (YSZ) و بستر از جنس سوپرآلیاژ پایه نیکل (In 718) در نظر گرفته شده است. خواص حرارتی مواد به کار رفته در سیستم پوشش/بستر در جدول (۱) نشان داده شده است [۱۷، ۱۸].

جدول ۱- خواص لایه محافظ و لایه بستر

$\alpha$ (m <sup>2</sup> /s)	$K$ (W/m.K)	ماده	
$0.8 \times 10^{-6}$	2	YSZ	لایه محافظ
$5 \times 10^{-6}$	15	In 718	بستر

به منظور اعتبارسنجی نتایج حاصل شده، توزیع دمای ناشی از بارگذاری یکنواخت هارمونیک زمانی در حالت یک بعدی در سیستم پوشش/بستر بدست آمده و با نتایج ارائه شده توسط سیاوارالا و همکاران [۴] مقایسه شده است. با در نظر گرفتن تاخیرهای گرادیان دما و شار حرارتی برابر با صفر، معادله میدان دما در (۱۳) به معادله حاکم بر میدان دما حاصل از هدایت فوریه کلاسیک تبدیل می‌گردد. همچنین با توجه به اینکه در مطالعه حاضر، معادلات انتقال حرارت در حالت دو بعدی حل شده اند، جهت مقایسه با کار سیاوارالا و همکاران، مختصه  $x$  در معادلات حذف شده است که با این عمل،  $T(x, y, t)$  به  $T(y, t)$  کاهش می‌یابد. شرط مرزی حرارتی بر روی پوشش به صورت  $T^{(1)}(0, t) = T e^{i(\varphi t + \varphi_0)}$  در نظر گرفته شده که در آن  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\varphi$  فرکانس زاویه‌ای و  $\varphi_0$  اختلاف فاز دما بر روی پوشش می‌باشد. با میل دادن  $h_2 \rightarrow \infty$  و  $t \rightarrow \infty$  و به کارگیری خواص ترموفیزیکی ارائه شده در مرجع [۴]، توزیع دمای بی‌بعد در پوشش و بستر به صورت شکل (۲) بدست می‌آید.



شکل ۲- توزیع دما در لایه محافظ و بستر نیمه‌بینهایت در حالتی که مرز  $y = 0$  پوشش، تحت بارگذاری هارمونیک حرارتی قرار گرفته است. با تقسیم کردن دمای موقعیتهای مختلف پوشش و بستر بر دمای سطح آزاد پوشش، میدان دما بی‌بعد شده است.

همانطور که ملاحظه می شود، نتایج بدست آمده در این مطالعه با نتایج ارائه شده توسط سیاوارلا و همکاران مطابقت بسیار خوبی دارد. در هندسه مسئله که در شکل (۱) معرفی شده، ابعاد لایه سرامیکی محافظ و بستر آلیاژی به ترتیب  $h_1 = 250 \mu\text{m}$  و  $h_2 = 1.5 \text{ cm}$  در نظر گرفته شده است. در مثال های ارائه شده در ادامه، سیستم پوشش / بستر در معرض توزیع دمای غیریکنواخت  $T^{(1)}(x, 0) = T_{01} e^{-\gamma|x|}$  و توزیع دمای ثابت و یکنواخت  $T^{(2)}(x, h) = T_{02}$  در مرزهای خود قرار دارد. پس از دستیابی به توزیع دمای حاصل از بارگذاری حرارتی پایا، حل پایا به عنوان توزیع دمای اولیه در سیستم پوشش / بستر در نظر گرفته شده و با در نظر گرفتن  $f(t)$  در شرایط مرزی (۱۸) به صورت توابع مختلفی بر حسب زمان، مسئله ی گذرای حرارتی حل شده است. سپس با در نظر گرفتن  $\tau_T = \tau_q = 0$  برای هر دو لایه محافظ و بستر و تبدیل معادله (۱۳) به معادله انتقال حرارت فوریه، تحلیل پایای سیستم پوشش سد حرارتی تحت بارگذاری هارمونیک حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است.

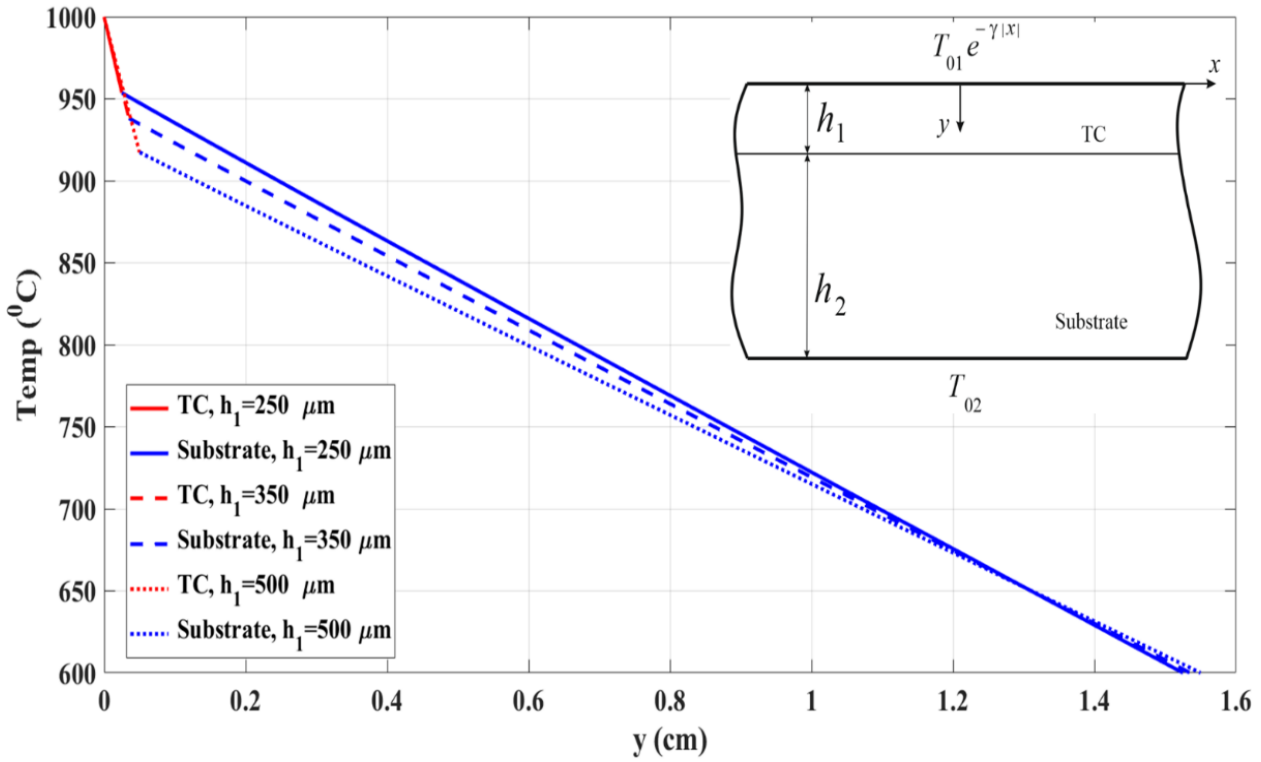
### ۳-۱- توزیع دما در سیستم پوشش / بستر در حالت پایا

شکل (۳) تغییرات دما در سیستم پوشش / بستر بر حسب موقعیت  $y$  بر روی خط  $x = 0.0$  را نشان می دهد. توزیع دمای غیریکنواخت به صورت  $T_{01} e^{-\gamma|x|}$  بر روی مرز  $y = 0$  اعمال شده که  $T_{01} = 1000^\circ\text{C}$  و  $\gamma = 1.0 \text{ m}^{-1}$  در نظر گرفته شده است. مرز  $y = h$  در تمامی بخش های این مطالعه در دمای ثابت و یکنواخت  $T_{02} = 600^\circ\text{C}$  نگاه داشته شده است. ضریب هدایت حرارتی لایه محافظ سرامیکی نسبت به ضریب هدایت بستر خیلی کم است. این عامل سبب شده که در پوشش سرامیکی، گرادیان دمای زیادی به وجود آمده و موجب کاهش قابل ملاحظه مقادیر دما در بستر گردد.

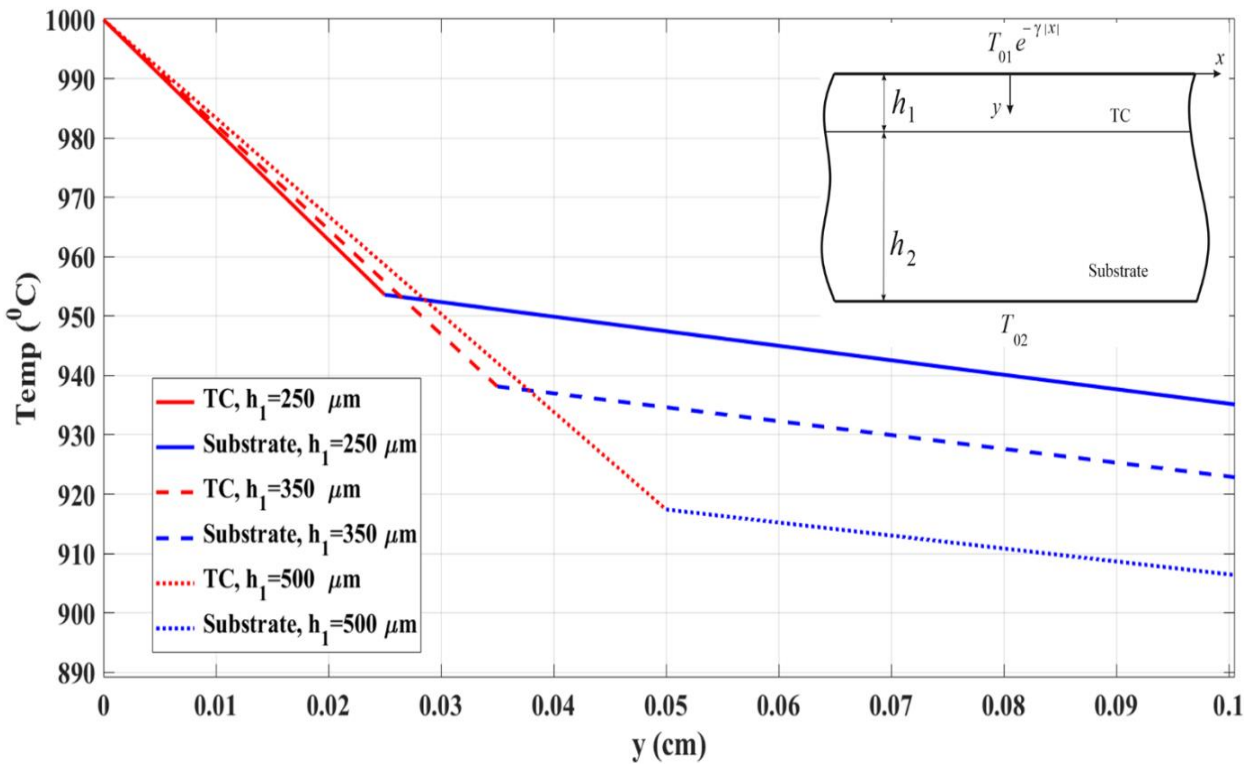
نمودار تغییرات دما در پوشش سرامیکی و بستر در راستای خط  $x = 0.0$  به ازای ضخامت های مختلف پوشش در شکل های (۳ الف) و (۳ ب) نشان داده شده است. جهت تمایز بهتر میان نمودارهای توزیع دما به ازای ضخامت های مختلف پوشش سرامیکی، نمودار توزیع دمای ارائه شده در شکل (۳ الف) به صورت بزرگنمایی شده از  $y = 0$  تا  $y = 0.1 \text{ cm}$  در شکل (۳ ب) نمایش داده شده است.

از شکل های (۳ الف) و (۳ ب) می توان دریافت که دما در موقعیت های  $y = 250 \mu\text{m}$ ،  $y = 350 \mu\text{m}$  و  $y = 500 \mu\text{m}$  به ترتیب، به مقادیر  $953.6^\circ\text{C}$ ،  $938.1^\circ\text{C}$  و  $917.4^\circ\text{C}$  رسیده است. بدین معنی که بسته به ضخامت پوشش سرامیکی، این پوشش قادر است تا مقادیر دما در بستر را حداقل به میزان 4.64%، 6.19% و 8.26% نسبت به ماکزیمم دمای ایجاد شده در سطح پوشش، کاهش دهد. با توجه به تابع توزیع دمای اعمال شده بر روی سطح آزاد پوشش، انتظار می رود که با افزایش  $x$ ، دما بر روی مرز پوشش کاهش یابد که این امر در شکل های (۴ الف) و (۵ الف) به وضوح قابل ملاحظه است.

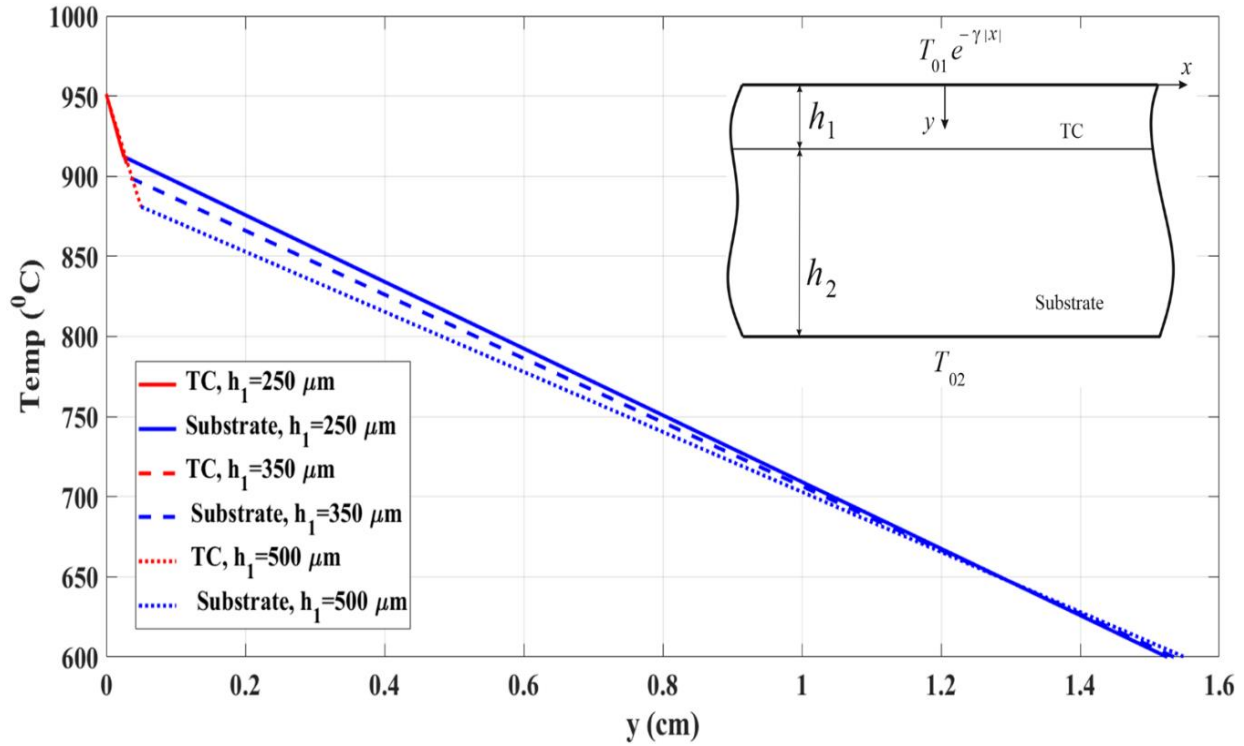
توزیع دما بر روی خطوط  $x = 5 \text{ cm}$  و  $x = 10 \text{ cm}$  در شکل های (۴ الف) و (۵ الف) نشان داده شده است. همانند نمودار ارائه شده برای شکل (۳ الف)، توزیع دمای ایجاد شده در پوشش سرامیکی به ازای ضخامتهای مختلف آن، به صورت بزرگنمایی شده در شکل های (۴ ب) و (۵ ب) نمایش داده شده است. در شکل های (۴ الف)، (۴ ب)، (۵ الف) و (۵ ب) رفتار مشابهی برای تغییرات دما همچون شکل های (۳ الف) و (۳ ب) مشاهده می شود. در قسمت های بعدی دما صرفاً بر روی خط  $x = 0.0$  به ازای یهای مختلف بررسی شده است.



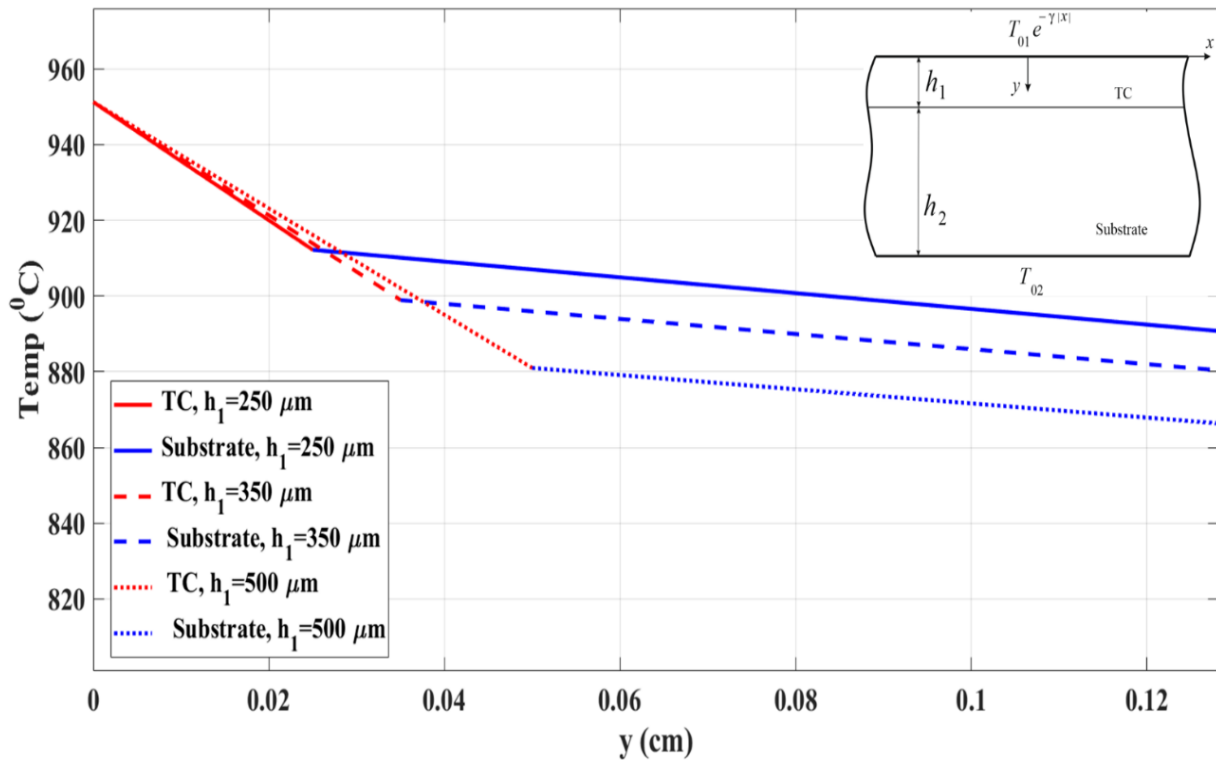
شکل ۳ الف- توزیع دمای پایایی به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 0.0$



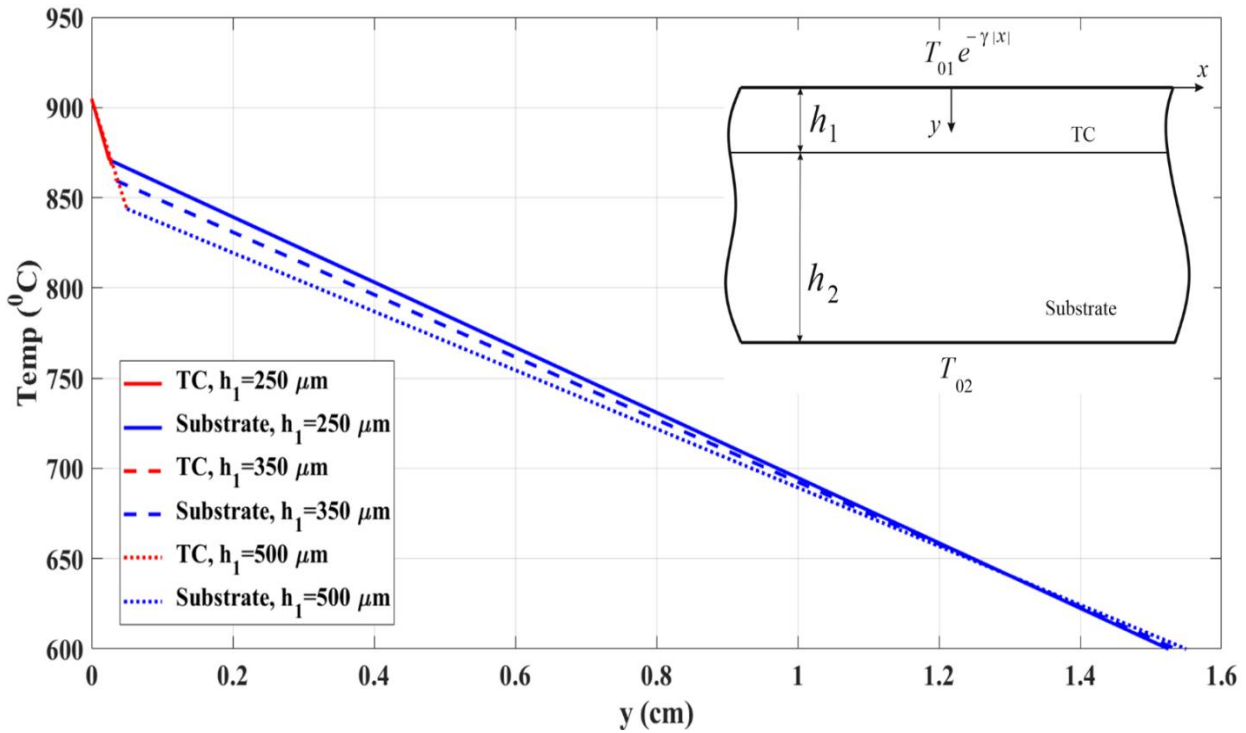
شکل ۳ ب- توزیع دمای پایایی به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 0.0$  به صورت بزرگنمایی شده



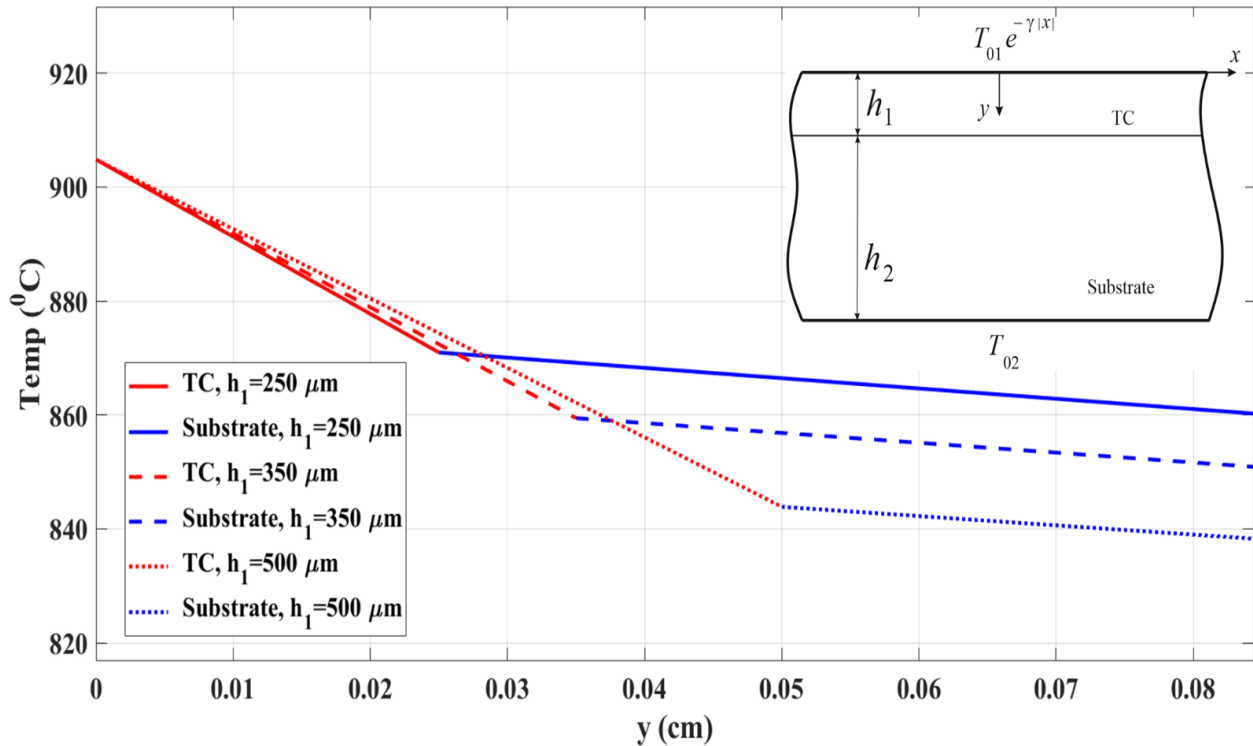
شکل ۴ الف - توزیع دمای پایای به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 5 \text{ cm}$



شکل ۴ ب - توزیع دمای پایای به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 5 \text{ cm}$  به صورت بزرگنمایی شده



شکل ۵ الف - توزیع دمای پایایی به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 10 \text{ cm}$



شکل ۵ ب - توزیع دمای پایایی به وجود آمده در لایه محافظ و بستر بر روی خط  $x = 10 \text{ cm}$  به صورت بزرگنمایی شده

### ۳-۲- شوک حرارتی

توزیع دمای پایا در سیستم پوشش/بستر در بخش قبل بدست آمد. حال، به طور ناگهانی در لحظه  $t = 0$  بار گذرای حرارتی به صورت  $T^{(1)}(x, 0, t) = T_1 e^{-\gamma|x|} f(t)$  بر روی مرز آزاد لایه محافظ اعمال می شود. جهت مدلسازی پاسخ گذرای سیستم پوشش/بستر نسبت به شوک حرارتی، تابع  $f(t)$  به ترتیب، برابر با  $H(t)$  و  $\delta(t)$  در نظر گرفته خواهد شد.  $H(\cdot)$  و  $\delta(\cdot)$  به ترتیب، تابع پله هویساید و تابع دلتای دیراک هستند. همچنین  $T_1 = 100^\circ \text{C}$  در نظر گرفته شده است.

جهت بررسی تاثیر تاخیرهای شار حرارتی و گرادیان دما بر روی توزیع دما و همچنین تفاوت میدان دمای گذرای بدست آمده از هدایت فوریه کلاسیک و هدایت با تاخیر دوفازی، شکل (۶) ارائه شده است. در این مورد، شوک حرارتی به صورت  $T_1 e^{-\gamma|x|} H(t)$  در زمان  $t = 0$  بر روی مرز  $y = 0$  اعمال شده است. در این شکل، نحوه تغییرات دما در موقعیت‌های  $y = 20 \mu\text{m}$  نزدیک به محل اعمال شوک حرارتی و  $y = 250 \mu\text{m}$  در محل فصل مشترک، بر حسب زمان ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می شود، در توزیع دمای گذرای بدست آمده از مدل فوریه؛ یعنی هنگامیکه  $\tau_q^{(k)}, \tau_T^{(k)} = 0 \quad k \in \{1, 2\}$ ، اثر شوک حرارتی در موقعیت‌های  $y = 20 \mu\text{m}$  و  $y = 250 \mu\text{m}$  در لحظه یکسان احساس شده است که این امر، ناشی از محدودیت معادله هدایت حرارتی فوریه در پاسخ به شوک حرارتی بوده که انتشار حرارت در ماده را با سرعت بینهایت تخمین می‌زند. اما با احتساب زمان تاخیر در شار حرارتی و گرادیان دما در داخل ماده این مشکل از بین رفته و موقعیت  $y = 250 \mu\text{m}$  نسبت به  $y = 20 \mu\text{m}$  دیرتر تحت تأثیر شوک حرارتی قرار گرفته است. با افزایش نسبت  $\tau_q/\tau_T$  برای پوشش محافظ و بستر مشاهده می‌شود که لحظه رسیدن به دمای تعادل در موقعیت  $y = 20 \mu\text{m}$  به تأخیر افتاده و دیرتر به شوک حرارتی پاسخ داده است. همین پدیده برای موقعیت  $y = 250 \mu\text{m}$  نیز اتفاق افتاده و با افزایش نسبت  $\tau_q/\tau_T$  اثر شوک حرارتی دیرتر به موقعیت  $y = 250 \mu\text{m}$  رسیده و دیرتر به دمای تعادل می‌رسد.

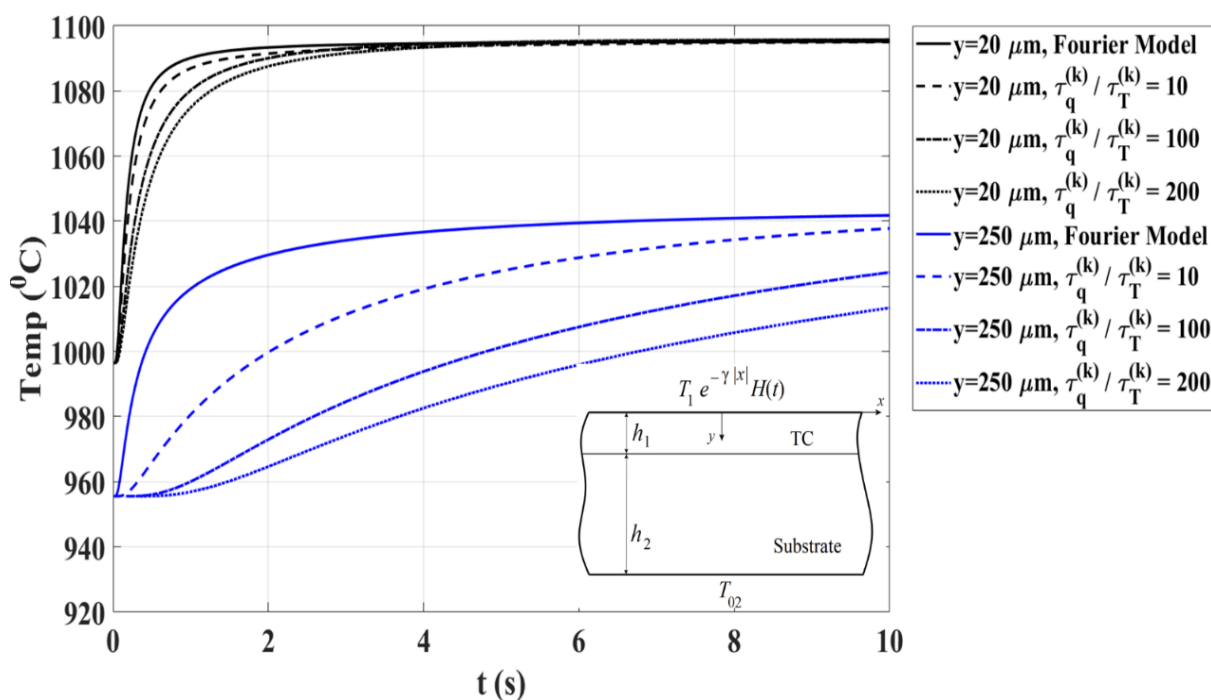
شکل (۷) نحوه توزیع دما در داخل سیستم پوشش سد حرارتی را بر حسب زمان به ازای موقعیت‌های مختلف در داخل پوشش و بستر نشان می دهد. شوک حرارتی به صورت  $T^{(1)}(x, 0, t) = T_1 e^{-\gamma|x|} H(t)$  اعمال شده است. با توجه به این شکل، در لحظه اعمال شوک حرارتی، نواحی نزدیک به محل اعمال شوک حرارتی ( $y = 0$ ) بسیار سریع گرم شده و سپس به دمای تعادل می‌رسند. نواحی که از مرز بالایی لایه محافظ دورتر هستند، با تاخیر بیشتری تحت تأثیر شوک حرارتی قرار گرفته و به دمای تعادل رسیده‌اند. نواحی خیلی نزدیک به مرز پایینی، دچار تغییرات شدید حرارتی نشده‌اند؛ چرا که مرز پایینی بستر تحت دمای ثابت قرار گرفته و اثر شوک حرارتی در نواحی نزدیک به مرز پایینی محسوس نیست. توزیع دمای گذرا در پوشش محافظ در شکل (۷ الف) و برای بستر در شکل (۷ ب) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، موقعیت  $y = 1\text{cm}$  پس از 13.4s تحت تأثیر شوک حرارتی قرار گرفته است.

شکل های (۸ الف) و (۸ ب) تغییرات دما در داخل سیستم پوشش/بستر را برای حالتی که مرز آزاد پوشش در معرض شوک حرارتی به صورت  $T_1 e^{-\gamma|x|} \delta(t)$  قرار گرفته نشان می‌دهد. در این مورد نیز شوک حرارتی در زمان  $t = 0$  اعمال شده است. در لحظه اعمال شوک حرارتی، دما در نزدیکی نواحی مرز آزاد لایه محافظ به طور ناگهانی به ماکزیمم مقدار خود رسیده و سپس کاهش یافته و به تعادل رسیده است. با توجه به این

شکل، پیک دما در لحظات اولیه اعمال شوک، مقدار زیادی داشته و با افزایش  $y$  پیک دما کاهش یافته و به تاخیر افتاده است. همچنین با وارد شدن به محدوده بستر از تغییرات شدید دما کاسته شده و این امر نشان می‌دهد که نواحی داخل بستر از تغییرات شدید دما ناشی از شوک حرارتی مصون می‌مانند. پیک دما برای موقعیت‌های  $y = 20 \mu\text{m}$ ،  $y = 100 \mu\text{m}$  و  $y = 250 \mu\text{m}$  به ترتیب در  $t = 1.97 \text{ s}$ ،  $t = 2.86 \text{ s}$  و  $t = 5.71 \text{ s}$  رخ داده است.

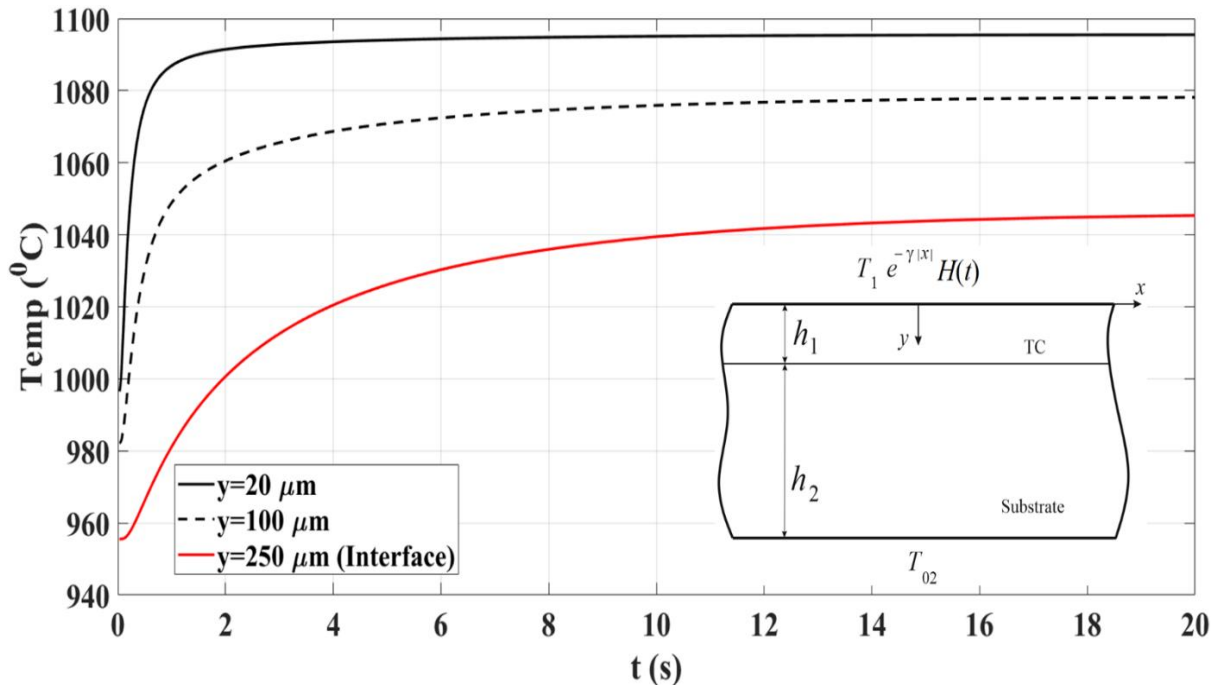
### ۳-۳- بارگذاری پایای متناوب حرارتی

به منظور بررسی تغییرات میدان دما ناشی از بارگذاری پایای متناوب حرارتی در سیستم پوشش/بستر از تابع هارمونیک زمانی  $f(t) = e^{i(\omega t + \phi_0)}$  و همان توزیع دمایی غیریکنواخت بر روی مرز آزاد پوشش محافظ که در بخش‌های قبل استفاده شد، استفاده می‌شود. با توجه به عدم محدودیت معادله رسانش حرارت کلاسیک فوریه در پاسخ به بارهای حرارتی پایا، جهت تحلیل پاسخ سیستم پوشش/بستر از معادله حاکم بر میدان دما در معادله (۱۳) با فرض  $\tau_q^{(k)}, \tau_T^{(k)} = 0$ ،  $k \in \{1, 2\}$  استفاده شده است. شکل (۹) تغییرات دما در سیستم پوشش/بستر را نسبت به فرکانس بارگذاری حرارتی  $f = \omega/2\pi$  با فرض  $\phi_0 = -\pi/2$  نشان می‌دهد. همانطور که این شکل نشان می‌دهد، به ازای افزایش فرکانس بارگذاری، در ابتدا نواحی نزدیک به بستر دچار افزایش دما شده ولی سپس دمایشان کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با دور شدن از مرز آزاد لایه محافظ (محل اعمال بار حرارتی نوسانی)، از شدت تغییرات دما کاسته می‌شود که دلیل این امر را می‌توان تاثیر محافظتی لایه پوشش دانست؛ به طوریکه در موقعیت فصل مشترک پوشش و بستر ( $y = 250 \mu\text{m}$ )، با افزایش فرکانس بارگذاری حرارتی هیچ تغییری در دمای این محل مشاهده نمی‌شود.



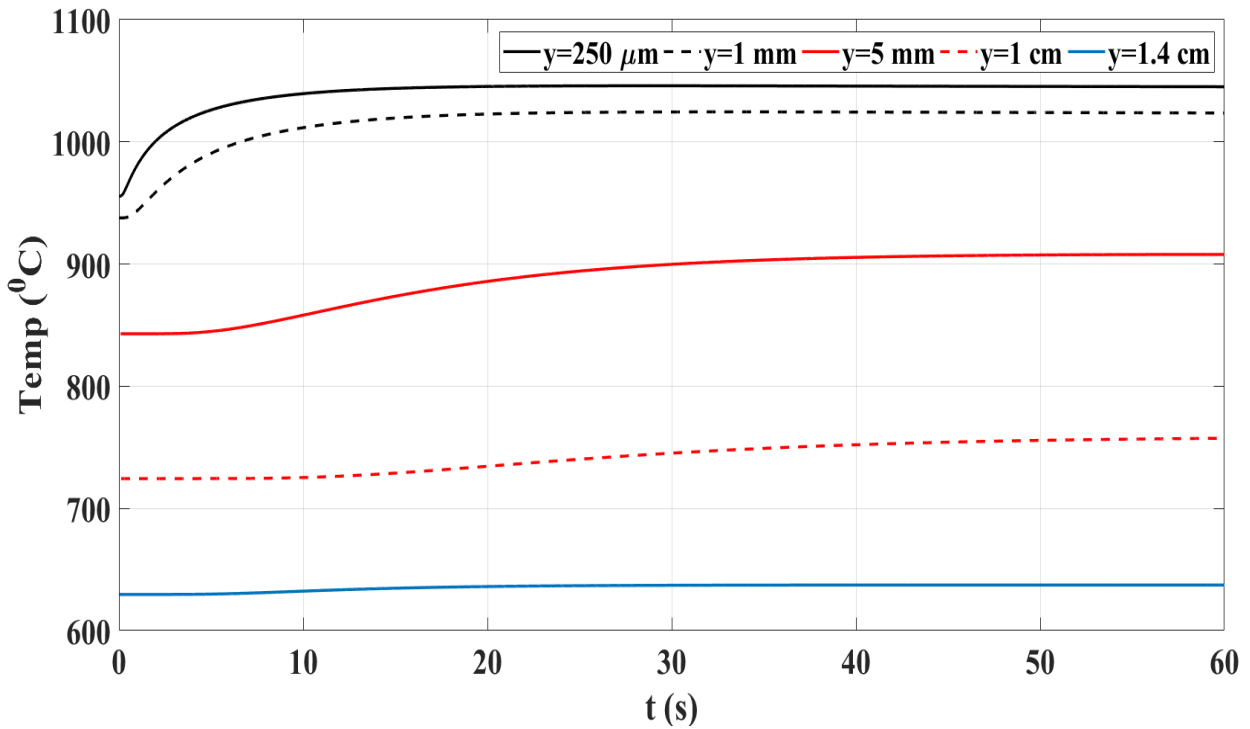
**شکل ۶-** توزیع دمایی گذرای بدست آمده از معادله رسانش حرارت فوریه و معادله رسانش حرارت با تاخیر دو فازی در موقعیتهای نزدیک به محل اعمال شوک حرارتی و فصل مشترک به ازای نسبت‌های مختلف  $\tau_q^{(k)} / \tau_T^{(k)}$ ،  $k \in \{1, 2\}$





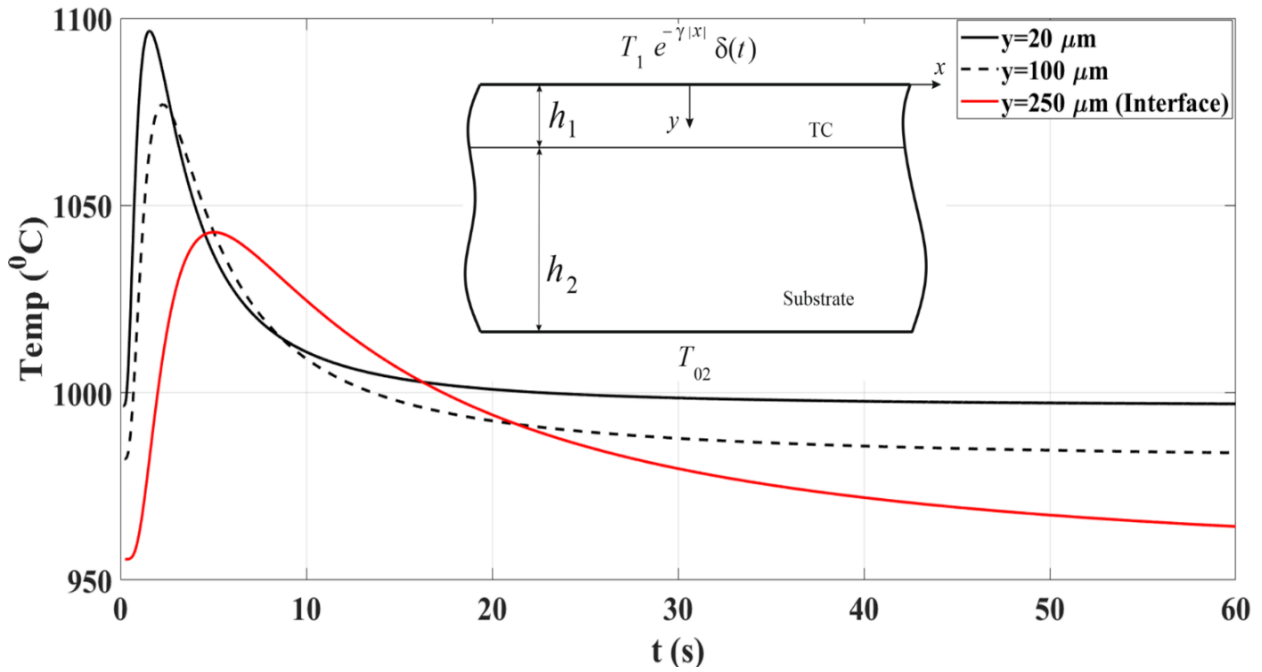
شکل ۷ الف - نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در موقعیتهای مختلف درون لایه محافظ به ازای

$$\tau_q^{(k)} / \tau_T^{(k)} = 10, \quad k \in \{1, 2\}$$

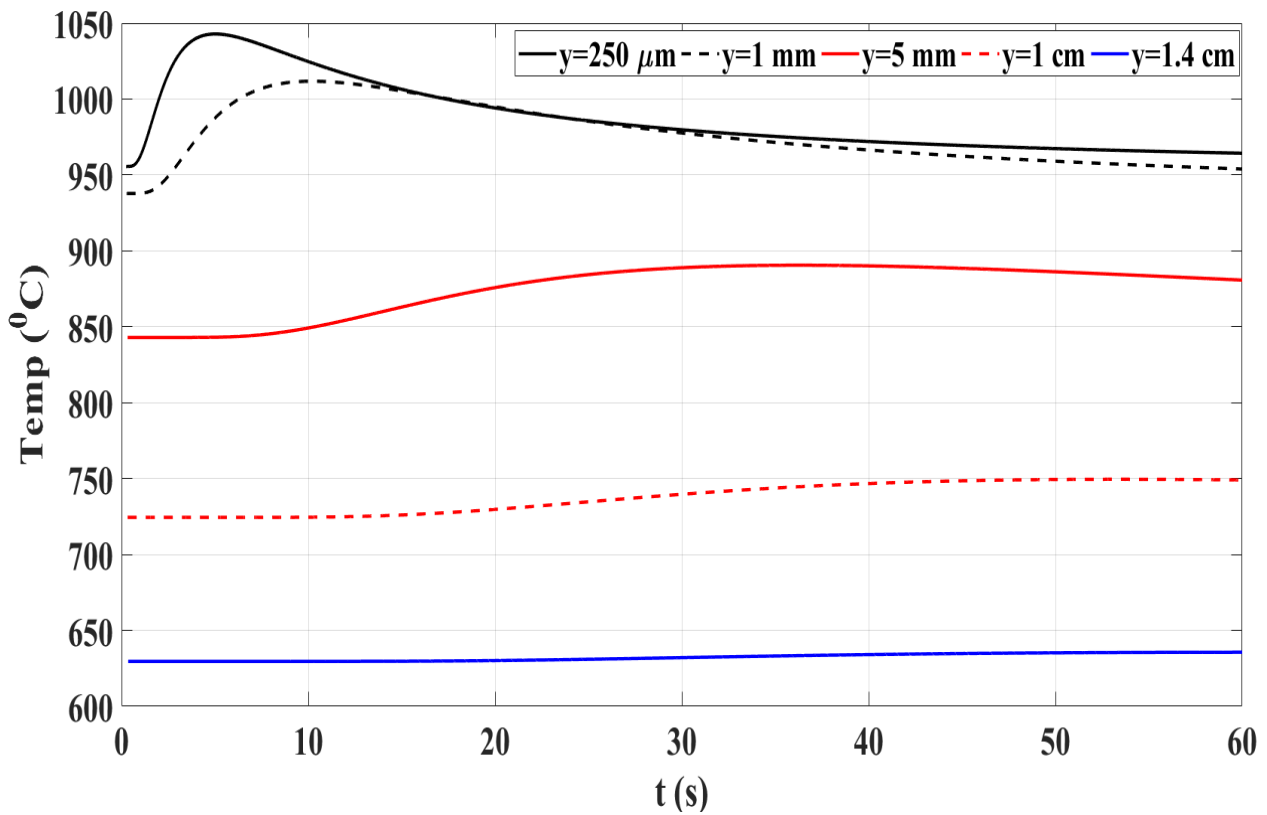


شکل ۷ ب - نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در موقعیتهای مختلف درون لایه‌ی بستر به ازای

$$\tau_q^{(k)} / \tau_T^{(k)} = 10, \quad k \in \{1, 2\}$$

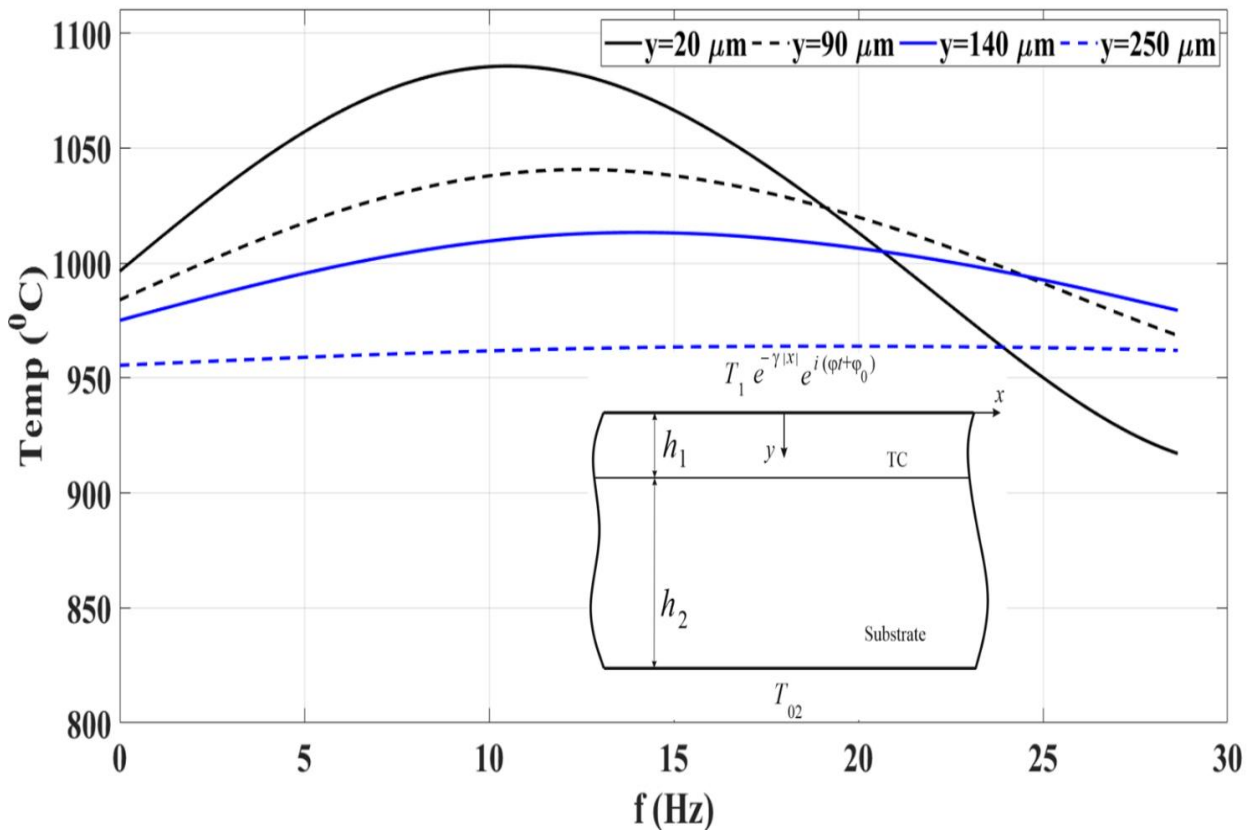


شکل ۸ الف - نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در موقعیتهای مختلف در لایه محافظ به ازای  $\tau_q^{(k)} / \tau_T^{(k)} = 10, k \in \{1, 2\}$



شکل ۸ ب - نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در موقعیتهای مختلف در لایه بستر به ازای

$$\tau_q^{(k)} / \tau_T^{(k)} = 10, k \in \{1, 2\}$$



شکل ۹- نمودار تغییرات دما بر حسب فرکانس بارگذاری هارمونیک حرارتی در موقعیتهای مختلف درون لایه محافظ

#### ۴- نتایج

در این مطالعه، بررسی نحوه توزیع دما در سیستم پوشش سد حرارتی متشکل از یک لایه محافظ سرامیکی متصل شده به بستر از جنس سوپر آلیاژ پایه نیکل که تحت بارگذاریهای حرارتی گذرا و پایا قرار گرفته است، انجام شد. برای تحلیل رفتار پایای حرارتی سیستم پوشش/بستر از معادله انتقال حرارت کلاسیک فوریه و به منظور تحلیل رفتار گذرای سیستم پوشش/بستر از معادله رسانش حرارت غیرفوریهای با تاخیر دوفازی بهره گرفته شد. مشاهده شد که معادله رسانش حرارتی غیرفوریهای، میدان دمای گذرا در سیستم پوشش/بستر تحت بارگذاری شوک حرارتی را با دقت بیشتری نسبت به رسانش حرارتی فوریهای کلاسیک ارائه می دهد. جهت طراحی سیستمهای پوشش سد حرارتی که تحت انواع بارگذاری حرارتی باید از خود قابلیت اطمینان نشان دهند، نتایج بدست آمده بسیار سودمند می باشد. با استفاده از نمودارهای عددی حاصل شده، نتایج زیر ارائه می شود:

۱- نقش پوشش محافظ و خواص حرارتی جنس به کار گرفته شده برای آن در کاهش مقادیر توزیع دمای پایا در محدوده بستر بسیار حائز اهمیت بوده و از طرفی ضخامت پوشش محافظ نیز در کاهش دمای بستر نقش بسیار مهمی ایفا می کند. از نتایج بدست آمده در شکل های (۳ الف) و (۳ ب)، درصد کاهش دما نسبت به سطح آزاد پوشش در موقعیت فصل مشترک، به ازای افزایش ضخامت پوشش از  $250\mu\text{m}$  الی  $500\mu\text{m}$ ، به ترتیب برابر با ۴.۶۴٪، ۶.۱۹٪ و ۸.۲۶٪ محاسبه شد.

۲- نقش نسبت تاخیر شارحرارتی به تاخیر گردایان دما بر روی توزیع دمای گذرا در پوشش محافظ و بستر بررسی گردید و مشاهده شد که با افزایش نسبت تاخیر شار حرارتی به گردایان دما، لحظه پاسخ‌دهی نواحی دورتر از محل اعمال شوک حرارتی، نسبت به نواحی نزدیک به محل اعمال شوک حرارتی، دیرتر رخ می‌دهد.

۳- در نمودارهای بدست آمده از تحلیل گذرا مشاهده می‌شود که هنگام بارگذاری شوک حرارتی بر روی سیستم پوشش/بستر، در لحظه‌ی رسیدن اثر شوک حرارتی، مکان‌های مورد نظر در ابتدا یک رفتار گذرا از خود نشان داده و سپس با گذشت زمان به دمای تعادل می‌رسند. نواحی درونی بستر کمتر تحت شوک حرارتی قرار گرفته‌اند؛ چراکه لایه محافظ با توجه به جنس عایقی که دارد، از تغییرات شدید حرارتی در بستر جلوگیری کرده و همچنین وجود دمای ثابت در مرز پایینی بستر نیز در کاهش شدت بارگذاری حرارتی در محل‌های داخلی بستر تاثیرگذار است. با توجه به نتایج بدست آمده از شکل‌های (۷ الف) و (۷ ب)، اثر شوک حرارتی پس از  $13.4s$  به موقعیت  $y = 1cm$  رسیده است.

۴- در نتایج حاصل از بارگذاری متناوب حرارتی مشاهده شد که حضور لایه محافظ باعث شده است که نواحی داخل بستر حتی با افزایش فرکانس بارگذاری، کمتر تحت نوسانات شدید حرارتی قرار گیرند و سهم لایه محافظ در تحمل نوسانات شدید حرارتی بیشتر است.

۵- نتایج بدست آمده در راستای تحلیل تنش ترموالاستیک پوشش‌های سد حرارتی بسیار مفید بوده؛ زیرا دستیابی به چگونگی توزیع دما در داخل پوشش و بستر که منجر به ایجاد تنش‌های حرارتی می‌گردد، اولین گام در تحلیل سیستم‌های پوشش سد حرارتی تحت بارهای ترمومکانیکی بوده و از این جهت از اهمیت بسزایی برخوردار است.

## مراجع

[1] Cattaneo, C., "A Form of Heat Conduction Equation which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation", *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences*, Vol. 247(4), pp. 431-433, (1958).

[2] Vernotte, P., "Paradoxes in the Continuous Theory of the Heat Equation", *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences*, Vol. 246, pp. 3154-3155, (1958).

[3] Tzou, D.Y., "*Macro-to Micro-scale Heat Transfer: the Lagging Behavior*", 2nd Edition, CRC Press, BocaRaton, (1996).

[4] Ciavarella, M., Decuzzi, P., Tagarielli, V.L., and Demelio, G.P., "Simple Formulas for Thermoelastic Stresses in TBC Coatings", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26, pp. 409-422, (2003).

- [5] Agarwal, B., Upadhyay, P.C., Banta, L., and Loyns, D., "Transient Temperature Distribution in Composites with Layers of Functionally Graded Materials (FGMs)", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 24, pp. 1929-1963, (2005).
- [6] Sadooghi, P., "Transient Heat Transfer in a Spherical Protective Material, Submitted to Flux and Mixed Boundary Conditions: An Investigation on Zirconia", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 93, pp. 461-472, (2005).
- [7] Shijun, Z., and Zhanqiang, L., "Analytical and Numerical Solutions of Transient Heat Conduction in Monolayer-coated Tools", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 209, pp. 2369-2376, (2009).
- [8] Lim, G., and Kar, A., "Modeling of Thermal Barrier Coating Temperature due to Transmissive Radiative Heating", *Journal of Materials Science*, Vol. 44, pp. 3589-3599, (2009).
- [9] Akwaboa, S., Mensah, P., Beyazouglu, E., and Diwan, R., "Thermal Modeling and Analysis of a Thermal Barrier Coating Structure using Non-fourier Heat Conduction", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 134(11), Article Number. 111301, (2012).
- [10] Han, M., Zhou, G., Huang, J., and Chen, S., "A Parametric Study of the Double-ceramic-layer Thermal Barrier Coatings Part I: Optimization Design of the Ceramic Layer Thickness Ratio Based on the Finite Element Analysis of Thermal Insulation (Take LZ7C3/8YSZ/NiCoAlY DCL-TBC for an Example)", *Surface and Coatings Technology*, Vol. 236, pp. 500-509, (2013).
- [11] Lee, Y.M., and Tsai, T.W., "Transient Heat Conduction Across Thermal Barrier Coating on an Anisotropic Substrate", *Engineering Computations*, Vol. 31, pp. 510-529, (2014).
- [12] Yang, Y., Chen, W., Yeh, T., Chang, W., and Lee, H., "Numerical Study of Dual-phase-lag Heat Conduction in a Thermal Barrier Coating with a Hybrid Method", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, pp. 287-296, (2016).
- [13] Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E., and Yevtushenko, O., "Frictional Heating of the Brake Disc with Essential Nonlinearity Thermal Barrier Coating", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 95, pp. 210-216, (2018).
- [14] Yang, Y., Dai, H., Ye, C., Xu, W., and Luo, A., "Investigation of the One-dimensional Transient Heat Conduction Problem of a Coated High Strength Steel Plate", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 24, pp. 3472-3484, (2019).
- [15] Chen, Z., and Akbarzadeh, A., "*Advanced Thermal Stress Analysis of Smart Materials and Structures*", Part of the Book Series: Structural Integrity (STIN, Volume 10), Springer Cham, Nature Switzerland, (2020).
- [16] Cohen, A.M., "*Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*", Springer US, New York NY, USA, (2007).
- [17] Agazhanov, A.S., Samoshkin, D.A., and Kozlovskii, Y.M., "Thermophysical Properties of Inconel 718 Alloy", *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 1382 012175, XXXV Siberian Thermophysical Seminar, August 27–29, Novosibirsk, Russia, (2019).

[18] Wereszczak, A., Lara-Curzio, E., and Bansal, N.P., "Advances in Solid Oxide Fuel Cells II", (A Collection of Papers Presented at the 30<sup>th</sup> International Conference on Advanced Ceramics and Composites, January 22-27, 2006, Cocoa Beach, Florida), John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2007).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, B_1^{(k)}, B_2^{(k)}$ : ضرایب مجهول

$c_p$ : گرمای ویژه ( $J/kg \cdot ^\circ C$ )

$e$ : عدد نپر

$h_1$ : ضخامت لایه سرامیکی محافظ (m)

$h_2$ : ضخامت لایه بستر (m)

$h$ : مجموع ضخامت های لایه محافظ و لایه بستر (m)

$H(\cdot)$ : تابع پله هویساید

$i$ : پارامتر موهمومی

$K$ : ضریب رسانش حرارتی ( $W/m \cdot K$ )

$k_p$ : نسبت ضریب رسانش لایه بستر به لایه محافظ

$q$ : شار حرارتی ( $W/m$ )

$r$ : بردار مکان (m)

$s$ : متغیر تبدیل لاپلاس

$t$ : زمان (s)

$T$ : دما ( $^\circ C$ )

$\bar{T}$ : دما در فضای تبدیلات لاپلاس و فوریه

$T_0$ : دمای اولیه ( $^\circ C$ )

$x, y$ : مختصه های طولی و عرضی در دستگاه مختصات دکارتی (m)

### نمادهای یونانی

$\alpha$ : ضریب پخش حرارتی ( $m^2/s$ )

$\delta(\cdot)$ : تابع دلتای دیراک

$\nabla$ : اوپراتور گرادیان

$\nabla^2$ : اوپراتور لاپلاسیان

$\varphi$ : فرکانس زاویه ای ( $rad/s$ )

$\rho$ : چگالی ( $kg/m^3$ )

$\tau_q$ : تاخیر زمانی شار حرارتی (s)

$\tau_T$ : تاخیر زمانی گرادیان دما (s)

$\omega$ : متغیر تبدیل فوریه

## پیوست الف

ضرایب مجهول در معادله (۶) به صورت زیر بدست آمده است:

$$A_1^{(1)}(\omega) = \frac{e^{2|\omega|h_1} \left( [e^{2|\omega|h} (k_p + 1) + e^{2|\omega|h_1} (k_p - 1)] T^{(1)}(\omega, 0) - 2k_p e^{|\omega|h} T^{(2)}(\omega, h) \right)}{E(\omega)} \quad (\text{الف-۱})$$

$$A_2^{(1)}(\omega) = \frac{e^{2|\omega|h_1} \left[ \left( e^{2|\omega|h_2} (1 - k_p) - (1 + k_p) \right) T^{(1)}(\omega, 0) + 2k_p e^{|\omega|h} T^{(2)}(\omega, h) \right]}{E(\omega)} \quad (\text{الف-۲})$$

$$A_1^{(2)}(\omega) = \frac{e^{|\omega|(h+2h_1)} \left( 2e^{|\omega|h} T^{(1)}(\omega, 0) + [e^{2|\omega|h_1} (k_p - 1) - (k_p + 1)] T^{(2)}(\omega, h) \right)}{E(\omega)} \quad (\text{الف-۳})$$

$$A_2^{(2)}(\omega) = \frac{e^{|\omega|h} \left( (1 - k_p + e^{2|\omega|h_1} (k_p + 1)) T^{(2)}(\omega, h) - 2e^{2|\omega|h_1} T^{(1)}(\omega, 0) \right)}{E(\omega)} \quad (\text{الف-۴})$$

که عبارت موجود در مخرج کسر روابط بالا بدین صورت است:

$$E(\omega) = (e^{2|\omega|h} - e^{2|\omega|h_1})(1 + e^{2|\omega|h_1}) + k_p (e^{2|\omega|h_1} - 1)(e^{2|\omega|h} + e^{2|\omega|h_1}) \quad (\text{الف-۵})$$

## پیوست ب

ضرایب مجهول در رابطه (۲۰) به صورت زیر بدست آمده است:

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(\omega, s) = & (e^{m^{(2)}h_1} - e^{m^{(2)}(h_1+2h_2)}) \left[ k_p m^{(1)} H_2 - m^{(2)} H_1 \right. \\ & \left. + m^{(1)} m^{(2)} (e^{m^{(1)}h_1} Q + J_{1m} - k_p J_{2m}) - 2m^{(2)} (m^{(1)})^2 e^{m^{(1)}h_1} T_1(\omega, 0) F(s) \right] \\ & + 2k_p m^{(1)} m^{(2)} e^{m^{(2)}h} (P - 2m^{(2)} T_2(\omega, h)) \\ & + m^{(2)} k_p (e^{m^{(2)}(h_1+2h_2)} + e^{m^{(2)}h_1}) \left( 2m^{(1)} m^{(2)} e^{m^{(1)}h_1} T_1(\omega, 0) F(s) \right. \\ & \left. - m^{(2)} (e^{m^{(1)}h_1} Q - J_{1p}) - m^{(1)} J_{2p} \right) \end{aligned} \quad (\text{ب-۱})$$

$$\begin{aligned} B_2^{(1)}(\omega, s) = & (e^{m^{(2)}(h_1+2h_2)} - e^{m^{(2)}h_1}) \left[ e^{m^{(1)}h_1} (H_2 k_p m^{(1)} - m^{(2)} H_1) \right. \\ & \left. + m^{(1)} m^{(2)} [e^{m^{(1)}h_1} (J_{1m} - k_p J_{2m}) - Q] + 2m^{(2)} (m^{(1)})^2 T_1(\omega, 0) F(s) \right] \\ & + m^{(2)} k_p (e^{m^{(2)}(h_1+2h_2)} + e^{m^{(2)}h_1}) \left( m^{(2)} (Q - e^{m^{(1)}h_1} J_{1p}) + m^{(1)} e^{m^{(1)}h_1} J_{2p} \right. \\ & \left. - 2m^{(1)} m^{(2)} T_1(\omega, 0) F(s) \right) \\ & + 2k_p e^{m^{(2)h+m^{(1)}h_1}} \left( 2m^{(1)} (m^{(2)})^2 T_2(\omega, h) - m^{(1)} m^{(2)} P \right) \end{aligned} \quad (\text{ب-۲})$$

$$\begin{aligned}
B_1^{(2)}(\omega, s) = & e^{m^{(2)}h_2} (e^{2m^{(1)}h_1} - 1) \left( k_p m^{(1)} H_2 - H_1 m^{(2)} + m^{(1)} m^{(2)} J_{1m} \right) \\
& + m^{(1)} (1 + e^{2m^{(1)}h_1}) \left[ e^{m^{(2)}h_2} m^{(2)} J_{1p} + m^{(1)} P \right. \\
& \left. - 2m^{(1)} m^{(2)} T_2(\omega, h) - m^{(1)} J_{2p} e^{m^{(2)}h_2} \right] \\
& + 2m^{(1)} e^{m^{(1)}h_1 + m^{(2)}h_2} \left( 2m^{(1)} m^{(2)} T_1(\omega, 0) F(s) - m^{(2)} Q \right) \\
& + k_p m^{(1)} m^{(2)} e^{2m^{(1)}h_1} \left( 2m^{(2)} T_2(\omega, h) - P \right) \\
& + k_p m^{(1)} m^{(2)} \left( J_{2m} (e^{m^{(2)}h_2} - e^{2m^{(1)}h_1 + m^{(2)}h_2}) - 2m^{(2)} T_2(\omega, h) + P \right)
\end{aligned} \quad (۳-ب)$$

$$\begin{aligned}
B_2^{(2)}(\omega, s) = & \left( H_1 m^{(2)} - H_2 k_p m^{(1)} - m^{(1)} m^{(2)} J_{1m} \right) (e^{2m^{(1)}h_1} - 1) \\
& + m^{(1)} (1 + e^{2m^{(1)}h_1}) \left( 2m^{(1)} m^{(2)} e^{m^{(2)}h_2} T_2(\omega, h) + m^{(1)} J_{2p} - m^{(2)} J_p - m^{(1)} e^{m^{(2)}h_2} P \right) \\
& + 2m^{(1)} m^{(2)} e^{m^{(1)}h_1} \left( Q - 2m^{(1)} T_1(\omega, 0) F(s) \right) \\
& + k_p m^{(1)} m^{(2)} \left( e^{m^{(2)}h_2} P + (e^{2m^{(1)}h_1} - 1) J_{2m} - 2e^{m^{(2)}h_2} m^{(2)} T_2(\omega, h) \right) \\
& + k_p m^{(1)} m^{(2)} \left( 2m^{(2)} T_2(\omega, h) - P \right) e^{2m^{(1)}h_1 + m^{(2)}h_2}
\end{aligned} \quad (۴-ب)$$

$$\Delta(\omega, s) = 2m^{(1)} m^{(2)} \left( m^{(1)} (e^{2m^{(1)}h_1} + 1) (e^{2m^{(2)}h_2} - 1) + k_p m^{(2)} (e^{2m^{(1)}h_1} - 1) (e^{2m^{(2)}h_2} + 1) \right) \quad (۵-ب)$$

که در روابط بالا،  $F(s)$  تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  بوده و توابع  $Q$ ،  $J_{1p}$ ،  $J_{2p}$ ،  $J_{1m}$ ،  $J_{2m}$ ،  $H_1$ ،  $H_2$  و  $P$  بدین صورت معرفی می‌شوند:

$$Q(\omega, s, x) = \left( \int_0^y e^{-m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy + \int_0^y e^{m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy \right)_{y=0} \quad (۶-ب)$$

$$J_{1p}(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(1)}h_1} \int_0^y e^{-m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy + e^{m^{(1)}h_1} \int_0^y e^{m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy \right)_{y=h_1} \quad (۷-ب)$$

$$J_{2p}(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(2)}h_1} \int_0^y e^{-m^{(2)}y} R^{(2)}(x, y) dy + e^{m^{(2)}h_1} \int_0^y e^{m^{(2)}y} R^{(2)}(x, y) dy \right)_{y=h_1} \quad (۸-ب)$$

$$J_{1m}(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(1)}h_1} \int_0^y e^{-m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy - e^{m^{(1)}h_1} \int_0^y e^{m^{(1)}y} R^{(1)}(x, y) dy \right)_{y=h_1} \quad (۹-ب)$$



$$J_{2m}(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(2)h_1}} \int_0^y e^{-m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy - e^{m^{(2)h_1}} \int_0^y e^{m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy \right)_{y=h_1} \quad (10-ب)$$

$$H_1(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(1)h_1}} \frac{d}{dy} \left( \int_0^y e^{-m^{(1)y}} R^{(1)}(x, y) dy \right) + e^{m^{(1)h_1}} \frac{d}{dy} \left( \int_0^y e^{m^{(1)y}} R^{(1)}(x, y) dy \right) \right)_{y=h_1} \quad (11-ب)$$

$$H_2(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(2)h_1}} \frac{d}{dy} \left( \int_0^y e^{-m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy \right) + e^{m^{(2)h_1}} \frac{d}{dy} \left( \int_0^y e^{m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy \right) \right)_{y=h_1} \quad (12-ب)$$

$$P(\omega, s, x) = \left( e^{-m^{(2)h}} \int_0^y e^{-m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy + e^{m^{(2)h}} \int_0^y e^{m^{(2)y}} R^{(2)}(x, y) dy \right)_{y=h} \quad (13-ب)$$

## Abstract

In this study, the temperature fields in the thermal barrier coating systems (TBC) under various types of thermal loading, including steady and transient thermal loadings, is investigated. Due to the widely use of TBCs on gas turbine blades and the urgent need to increase the temperature of the combustion chamber, thermal barrier coatings are exposed to a variety of harsh thermal loadings, including thermal shock and periodic thermal loads. Therefore, the need to achieve the temperature distribution in different positions in the TBCs, especially in the protective coating is crucial. At first, due to the application of non-uniform temperature distribution on the boundary of the TBC layer, the steady-state temperature distribution inside the coating-substrate is obtained. Using the solution of steady-state temperature distribution as the initial condition, the transient temperature field inside the coating-substrate system is obtained. To investigate the thermal transient response of the TBC system, dual-phase lag (DPL) heat conduction equation is utilized. Fourier and Laplace integral transformations have been used to solve the temperature field equations. The effect of various types of thermal shocks and periodic thermal loading on the TBC is investigated. The results show that the steady-state and transient temperature fields strongly depend on the type of thermal shock, the thickness of the coating and the frequency of thermal loading.