

## تأثیر بستر ویسکو-پاسترناک بر ارتعاش ورق سه لایه با یک هسته مدرج و لایه های مدرج پیزوالکتریک

مقاله حاضر به بررسی مشخصه های ارتعاشی ورق ساخته شده از یک هسته مدرج الاستیک و مجهز شده به دو لایه مدرج پیزوالکتریک می پردازد. سازه مورد بررسی بر روی بستر الاستیک خطی ویسکو-پاسترناک قرار گرفته است. تمام خواص مکانیکی و الکتریکی به غیر از ضریب پواسون در راستای ضخامت بر اساس تابع توانی تغییر می کند. پتانسیل الکتریکی سه بعدی در سه راستای ورق در نظر گرفته می شود. نتایج بدست آمده شامل مشخصه های ارتعاشی سیستم الکترومکانیکال میتواند اثر پارامترهای مکانیکی مختلف و همچنین اثر پارامترهای مختلف بستر را نشان دهد.

محمد عارفی<sup>۱</sup>

استادیار

واژه های راهنما: ورق مدرج، بستر ویسکوپاسترناک، تحلیل ارتعاشی، مواد مدرج، پیزوالکتریک

### ۱- مقدمه

کاربرد مواد برای محیط های مختلف و همچنین تحمل شرایط و خواص متفاوت و گاه متضاد، از جمله مسائلی بوده است که تعداد زیادی از محققان را به خود جذب کرده است. برای چنین شرایطی، محققان ژاپنی موادی را معرفی کردند که می توانست گرادیان بسیار بالای حرارتی را تحمل کند و در عین حال خواص مکانیکی و حرارتی بسیار خوبی را داشته باشد. این مواد دارای خواص متغیر در راستای ضخامت بودند. این خواص بصورت تدریجی از یک طرف لایه به طرف دیگر لایه در حال تغییر می باشد. ترکیب مواد مدرج با مواد پیزوالکتریک می تواند خواص بسیار مناسبی برای کاربرد در سیستم های الکترومکانیکال مختلف به عنوان سنسور و عملگر ایجاد کند. خاصیت پیزوالکتریک توسط پیر و ژاکوس کوری در سال (۱۸۸۰) بصورت علمی بیان شد. آنها اثر مستقیم و معکوس را به عنوان پایه پیزوالاستیسیته بیان کردند. برآورد فرکانس طبیعی یک سیستم یکی از عناوین بسیار مهم در تحقیقات حوزه مهندسی مکانیک می باشد. محاسبه فرکانس طبیعی یک سیستم برای طراحان از آن جهت بسیار مهم است که کارکرد یک سیستم باید در محدوده امن و پایینتری از این مقدار باشد تا از بروز تشدید جلوگیری کند. اگر فرکانس کارکرد سیستم به مقدار فرکانس طبیعی سیستم برسد تغییر شکل ها بسیار زیاد شده و سازه رو به انهدام می رود. در این تحقیق به بررسی تأثیر پارامترهای مکانیکی و همچنین بستر ویسکو-پاسترناک بر

<sup>۱</sup> استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان arefi@kashanu.ac.ir

رفتار ارتعاشی یک ورق سه لایه مدرج الکتریکی پرداخته می شود. تحقیق بر روی مراجع گذشته می تواند ضرورت این تحقیق را بیش از پیش نشان دهد.

چن و همکاران [۱] به بررسی ارتعاشات آزاد یک استوانه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد مدرج پر شده با مایع با ضخامت متغیر و دلخواه پرداختند. آنها جهت تحلیل خود از توابع مثلثاتی با ضرایب نامعین بهره بردند. برای تابعیت زمانی از تغییرات نمایی استفاده شد. کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای مدرج با خواص متغیر با دما بوسیله کادلی و گانسان [۲] ارائه شد. شرایط مرزی گیردار برای دوسر سیلندر مورد بررسی قرار گرفت. کادلی [۳] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ترموالاستیک خطی یک پوسته مخروطی ساخته شده از مواد مدرج پرداختند. پراکاش و گاناپاتی [۴] به بررسی ارتعاشات عرضی و پایداری الاستیک یک ورق دایروی ساخته شده از مواد مدرج با استفاده از روش المان محدود پرداختند. توزیع بار حرارتی به صورت یکنواخت در راستای ضخامت در نظر گرفته شده بود. روابط حرکت لاگرانژ جهت یافتن معادلات اساسی سیستم مورد استفاده قرار گرفت.

تحلیل ارتعاشی خطی و غیرخطی یک پوسته استوانه ای سه لایه با شرایط مرزی عمومی بوسیله لیو و همکاران [۵] مورد بررسی قرار گرفت. آنها یک توزیع گرادیان حرارتی را در راستای ضخامت در نظر گرفتند. اثر ضرایب ناهمگنی، افزایش دما و همچنین مودهای ارتعاشی بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت. شن [۶] به بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق ساخته شده از مواد مدرج با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا پرداخت. افریم و ایسنبرگ [۷] تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد مدرج را انجام دادند. آنها یک میدان سه بعدی در سه راستای شعاعی، محیطی و عرضی را مورد استفاده قرار دادند. الله وردیزاده و همکاران [۸-۹] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری ورق دایروی مدرج پرداختند. تحلیل آنها یک تحلیل متقارن بود و از یک روش نیمه تحلیلی برای یافتن جوابها استفاده کردند. تحلیل سه بعدی ارتعاشات ورق مدرج توسط لی و همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. جهت تحلیل، نویسندگان از تئوری های مختلف ورق نظیر ورق کلاسیک، برشی های مرتبه اول و سوم استفاده کردند. معادلات نهایی حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شد. یک دست کامل از توابع متعامد چبیشف چند جمله ای به جهت همگرایی بسیار سریع و پایداری مورد استفاده قرار گرفت. نتایج بدست آمده جهت صحت سنجی با نتایج قبلی مورد مقایسه قرار گرفت.

حل دقیق ورق ضخیم مدرج قرار گرفته بر روی بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیسته توسط هوانگ و همکاران [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر ضریب سفتی بستر الاستیک، بارگذاری و ضریب ناهمگنی بر رفتار ورق مورد بررسی قرار گرفت. ابراهیمی و راستگو [۱۲] رفتار ارتعاشی آزاد ورق دایروی مدرج پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. تغییرات تابعی توانی برای تغییرات خواص مکانیکی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده با نتایج سه بعدی المان محدود مقایسه شد.

ارتعاشات با تغییر شکل های بزرگ تیر کامپوزیت بر روی بستر الاستیک غیرخطی توسط ملک زاده و وثوقی [۱۳] مورد تحلیل واقع شد. بستر مورد استفاده در این تحقیق دارای اثرات غیرخطی مرتبه سوم و همراه با لایه های برشی بود. خوشگفتار و همکاران [۱۴] به تحلیل ترمو الکترو الاستیک سیلندر متقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج پیزوالکتریک تحت فشار داخلی و گرادیان حرارتی پرداختند.

خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی به صورت متغیر در راستای ضخامت در نظر گرفته شده بود. بن یوسف و همکاران [۱۵] به بررسی و تحلیل الاستیک ورقهای با تکیه گاه ساده ساخته شده از مواد مدرج تحت بارگذاری یکنواخت جانبی قرار گرفته بر روی بستر الاستیک خطی پرداختند. آیت عظمی و همکاران [۱۶] به بررسی ارتعاش آزاد ورق مدرج بر روی بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی جدید پرداختند. اصل همیلتون جهت یافتن معادلات نهایی سیستم مورد استفاده قرار گرفت. زنکور و همکاران [۱۷] به بررسی تحلیل خمشی ورق مستطیلی ارتوتروپیک قرار گرفته بر روی بستر دو پارامتری پرداختند. جواب تحلیلی برای خیز و تنش بوسیله تئوری برشی ساده و ترکیبی بدست آمد. سیلندر دوار ساخته شده از مواد مدرج پیزوالکتریک به عنوان سنسور مکانیکی توسط رحیمی و همکاران [۱۸] مورد تحلیل واقع شد. تحلیل خمشی ورق ارتوتروپیک با تکیه گاه ساده قرار گرفته بر روی بستر پاسترناک توسط زنکور [۱۹] و با استفاده از تئوری برشی ترکیبی انجام شد.

تحلیل ارتعاشی سیستم کوپله دو لایه گرافن شیت قرار گرفته بر روی بستر ویسکو-پاسترناک توسط قربانپور و همکاران [۲۰] انجام شد. جهت تحلیل ورق ارتوتروپیک از تئوری غیرمحملی مورد استفاده قرار گرفت. مولفه های کرنش غیرخطی ون-کارمن جهت تحلیل استفاده شد. تاثیر پارامترهای بستر بر جواب ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفت. قربانپور و شکروی [۲۱] به بررسی تاثیر سطح و پارامتر غیرمحملی بر رفتار ارتعاشی جانبی ورق تک لایه گرافن شیت ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی داخل صفحه پرداختند. محیط اطراف سازه مورد نظر بوسیله یک بستر ویسکو-پاسترناک مدل شد. ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری نانو تیوب بورون-نیتريد دو لایه بر روی بستر ویسکو-الاستیک توسط قربانپور و همکاران [۲۲] انجام شد. زنکور و همکاران [۲۳] تحلیل خمشی ورق مستطیلی ارتوتروپیک بر روی بستر دو مولفه ای تحت بارگذاری ترمو-مکانیکی را با استفاده از تئوری برشی متحده انجام دادند. آنها [۲۴] همچنین رابطه ای بین تئوری برشی ساده و ترکیبی برای ورق مدرج تحت بارگذاری جانبی ارائه دادند. چندین تحلیل غیرخطی سازه های ساخته شده از مواد مدرج پیزوالکتریک توسط نویسنده در سالهای اخیر انجام شد [۲۵-۲۷]. ارتعاشات آزاد یک میکرو سیلندر ساخته شده از مواد مدرج بر اساس تئوری گرادیان کرنش و بر اساس تئوری برشی توسط ژانگ و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۲۸]. تاثیر پارامترهای مهمی نظیر، ضخامت، طول، ناهمگنی و پارامتر کوچک بر جوابها مورد بررسی قرار گرفت.

قربانپور و شکروی [۲۹] به تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق دولایه گرافن در اثر میدان مغناطیسی پرداختند. تئوری گرادیان کرنش جهت تحلیل مورد استفاده قرار گرفت. سازه مورد نظر بر روی یک بستر ویسکو-پاسترناک قرار داده شده بود. تاثیر پارامترهای بستر و میدان مغناطیسی بر جوابها مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل ارتعاشات آزاد یک ورق گرافن دولایه ویسکوالاستیک بر اساس تئوری ورق کیرشهف و مدل ویسکوالاستیک کلونین-ویت توسط حسینی هاشمی و همکاران [۳۰] مورد بررسی قرار گرفت.

مطالعه تحقیقات گذشته نشان می دهد که مطالعه تاثیر پارامترهای بستر ویسکو-پاسترناک بر رفتار ارتعاشی سازه بسیار مهم می باشد. به همین دلیل، در این مقاله تلاش می شود مطالعه ای بر روی رفتار ارتعاشی یک ورق ناهمگن سه لایه به همراه تاثیر پارامترهای بستر ویسکو-پاسترناک به اضافه مشخصه های تغییرات خواص مواد در آن مورد بررسی قرار بگیرد.

ورق سه لایه مورد بررسی از یک لایه مدرج و دو لایه متصل شده در بالا و پایین ساخته شده از مواد مدرج پیزوالکتریک می باشد. تغییرات خواص مکانیکی و الکتریکی در هسته و لایه های مجهز شده به طور کلی و متفاوت در نظر گرفته می شود. بواسطه استفاده از مواد مدرج پیزوالکتریک می توان مشخصه های ارتعاشی و رفتار خمشی سازه را مورد کنترل قرار داد.

## ۲- فرمول بندی

همانطور که اشاره شد در این تحقیق، تحلیل الکترواستیک ورق ساندویچی سه لایه شامل یک هسته مدرج و دو لایه متصل شده در بالا و پایین مدرج پیزوالکتریک با استفاده از تئوری کلاسیک ورق ها ارائه می شود. بر اساس تئوری کلاسیک ورقها، تغییرشکل در هر نقطه شامل تغییرشکل صفحه میانی به اضافه یک مولفه چرخش حول صفحه میانی می باشد. بر اساس این تئوری خواهیم داشت: [۱۲ و ۲۵]

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $u_0, v_0, w_0$  مولفه های تغییرمکان صفحه میانی می باشد. با لحاظ رابطه (۱) و با استفاده از مولفه های غیرخطی کرنش ون کارمن داریم: [۲۵]

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (2)$$

با قرار دادن مولفه های جابجایی از رابطه (۱) در رابطه کرنش تغییرمکان غیرخطی رابطه (۲) و صرفنظر کردن از مولفه های غیرخطی بسیار کوچک بر اساس فرض ون کارمن داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

پس از تعریف مولفه های کرنش- جابجایی، روابط ساختاری تنش-کرنش برای دو قسمت ورق ساندویچی بازنویسی می شود. شکل (۱)، شماتیک یک ورق سه لایه را به همراه دستگاه مختصات مورد استفاده نشان می دهد. رابطه تنش-کرنش برای در حالت کلی با لحاظ میدان الکتریکی به صورت زیر می باشد: [۱۴]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (4)$$

در رابطه (4)،  $\sigma_{ij}$  و  $\epsilon_{kl}$  مولفه های تنش و کرنش می باشند.  $E_k$  میدان الکتریکی،  $C_{ijkl}$ ،  $e_{ijk}$  ضرایب سفتی و پیزوالکتریک می باشند. برای هسته مدرج، جایی که پتانسیل الکتریکی هیچ تاثیری ندارد، روابط تنش-کرنش به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{xxxx}^e \epsilon_{xx} + c_{xxxy}^e \epsilon_{xy} + c_{xxyy}^e \epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= c_{yyxx}^e \epsilon_{xx} + c_{yyxy}^e \epsilon_{xy} + c_{yyyy}^e \epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} &= c_{xyxx}^e \epsilon_{xx} + c_{xyxy}^e \epsilon_{xy} + c_{xyyy}^e \epsilon_{yy}\end{aligned}\quad (5)$$

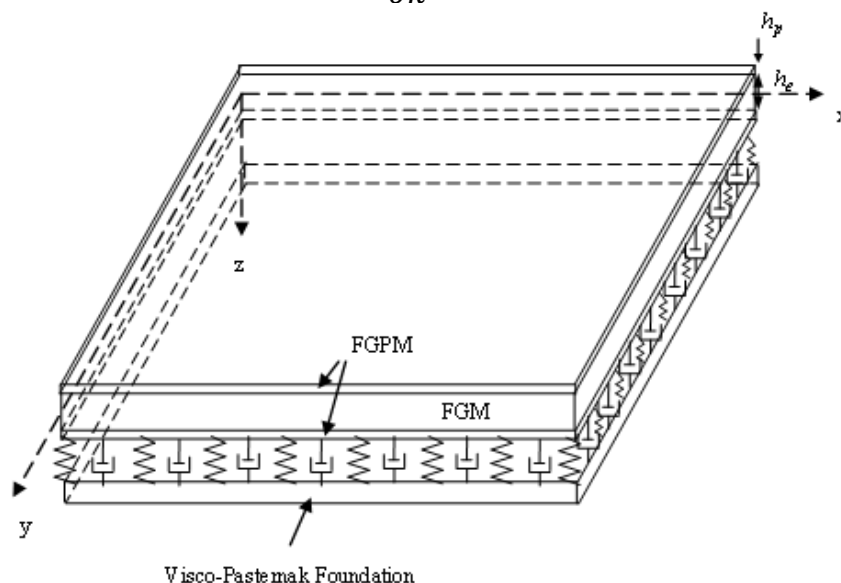
در رابطه (5)، تنش های نرمال تنها به کرنش نرمال و تنش برشی تنها به کرنش برشی بستگی دارد. با فرض در نظر گرفته شده، ضرایب  $c_{xxxy}^e$ ،  $c_{yyxy}^e$ ،  $c_{xyxx}^e$ ،  $c_{xyyy}^e$  برابر صفر می باشد. علاوه بر این با این فرض که ضخامت ورق نسبت به سایر ابعاد آن بسیار کوچک می باشد، تنش نرمال در جهت  $z$  و تنشهای برشی قابل صرف نظر خواهد بود. روابط ساختاری برای دو لایه متصل شده پیزوالکتریک به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{xxxx}^p \epsilon_{xx} + c_{xxxy}^p \epsilon_{xy} + c_{xxyy}^p \epsilon_{yy} - e_{xxx} E_x - e_{xxy} E_y - e_{xxz} E_z \\ \sigma_{yy} &= c_{yyxx}^p \epsilon_{xx} + c_{yyxy}^p \epsilon_{xy} + c_{yyyy}^p \epsilon_{yy} - e_{yyx} E_x - e_{yyy} E_y - e_{yyz} E_z \\ \sigma_{xy} &= c_{xyxx}^p \epsilon_{xx} + c_{xyxy}^p \epsilon_{xy} + c_{xyyy}^p \epsilon_{yy} - e_{xyx} E_x - e_{xyy} E_y - e_{xyz} E_z\end{aligned}\quad (6)$$

فرض بیان شده برای هسته برای لایه های پیزوالکتریک نیز برقرار بوده و ضرایب  $c_{xxxy}^p$ ،  $c_{yyxy}^p$ ،  $c_{xyxx}^p$ ،  $c_{xyyy}^p$  برابر با صفر می باشند.

میدان الکتریکی با استفاده از گرادیان تابع پتانسیل الکتریکی بدست می آید. بنابراین بر اساس مختصات سه بعدی ورق، میدان الکتریکی به صورت زیر تعریف می شود [۱۴]

$$E_k = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial k}, \quad k = x, y, z \quad (7)$$



شکل ۱- شماتیک یک ورق ساندویچی مدرج مجهز شده با لایه های مدرج پیزوالکتریک

در سیستم های الکترومکانیکال، جابجایی الکتریکی بصورتی تعریف می شود تا رابطه ماکسول را ارضا کند. [۱۴]

$$D_i = e_{ijk}\epsilon_{jk} + \eta_{ik}E_k \quad (۸)$$

در رابطه (۸)،  $\eta_{ik}$  ضرایب دی الکتریک می باشد. رابطه جابجایی الکتریکی برای لایه های متصل شده مدرج پیزوالکتریکی به صورت رابطه (۹) می باشد.

$$\begin{aligned} D_x &= e_{xxx}\epsilon_{xx} + e_{xxy}\epsilon_{xy} + e_{xyy}\epsilon_{yy} + \eta_{xx}E_x + \eta_{xy}E_y + \eta_{xz}E_z \\ D_y &= e_{yxx}\epsilon_{xx} + e_{yxy}\epsilon_{xy} + e_{yyy}\epsilon_{yy} + \eta_{yx}E_x + \eta_{yy}E_y + \eta_{yz}E_z \\ D_z &= e_{zxx}\epsilon_{xx} + e_{zxy}\epsilon_{xy} + e_{zyy}\epsilon_{yy} + \eta_{zx}E_x + \eta_{zy}E_y + \eta_{zz}E_z \end{aligned} \quad (۹)$$

پس از تعریف روابط اساسی سیستم الکترومکانیکال، می توان روش انرژی را برای یافتن جوابهای غیرخطی سیستم مورد استفاده قرار داد. انرژی بر واحد حجم  $\bar{u}$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$u_p = \frac{1}{2}(\epsilon^T \sigma - E^T D) \quad (۱۰)$$

پس از تعریف انرژی پتانسیل سیستم (انرژی کرنشی) اصل همیلتون جهت تشکیل انرژی کلی سیستم مورد استفاده قرار می گیرد. انرژی کلی سیستم شامل انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی ناشی از بارهای خارجی و محیط می باشد. با تعریف انرژی پتانسیل با  $u_p$ ، انرژی جنبشی با  $u_k$  خواهیم داشت:

$$Y = u_k - u_p, \quad U = \iiint_{-(h_e+h_p)}^{(h_e+h_p)} Y dz dx dy + \iint L(x, y, t) w dx dy \quad (۱۱)$$

که انرژی پتانسیل و جنبشی به صورت زیر می باشد.

$$u_p = \frac{1}{2}(\epsilon^T \sigma - E^T D), \quad u_k = \frac{1}{2}\rho(z)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \quad (۱۲)$$

در رابطه بالا،  $\rho(z)$  چگالی وابسته به موقعیت می باشد. در رابطه (۱۲)،  $L(x, y, t)$  فشار توزیع شده بر روی ورق می باشد. این فشار ناشی از فشار مستقیم اعمالی و تاثیرات بستر الاستیک ویسکو-پاسترناک می باشد. در حالت عمومی برای اثرات مستقیم و برشی و میرایی بستر خواهیم داشت:

$$L(x, y, t) = p(x, y) + \frac{1}{2}f_f \quad (۱۳)$$

که  $f_f$  نیروی بستر می باشد و از رابطه زیر حاصل می شود.

$$f_f = -kw + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - c\dot{w} \quad (۱۴)$$

با تکمیل روابط مورد نیاز حال می توان به برآورد جواب پرداخت. ورق مورد بررسی فرض می شود که بر روی چهار تکیه گاه ساده قرار گرفته باشد. علاوه بر این شرایط مرزی همگن برای پتانسیل الکتریکی در صفحه XY و در مرزها در نظر گرفته می شود. بر این اساس، ۴ میدان جابجایی و الکتریکی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= e^{i\omega t} \sum U_{pq} \sin\left(\frac{2\pi px}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi(q-1)y}{L}\right) \\
 v_0 &= e^{i\omega t} \sum V_{pq} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi qy}{L}\right) \\
 w_0 &= e^{i\omega t} \sum W_{pq} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi(q-1)y}{L}\right) \\
 \varphi &= f(z) e^{i\omega t} \sum \Phi_{pq} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi(q-1)y}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در رابطه (۱۵)،  $U_{pq}, V_{pq}, W_{pq}, \Phi_{pq}$  مقادیر توابع نامعین می باشد و  $p, q$  تعداد جملات لازم برای تعریف ۴ میدان در نظر گرفته در رابطه (۱۶) می باشد. ارتعاشات هارمونیک با لحاظ جمله نمایی  $e^{i\omega t}$  در نظر گرفته می شود که  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم می باشد. جمله ای است که تضمین می کند بالا و پایین لایه های پیزوالکتریک اتصال کوتاه شده باشند. [۱۲]

$$\begin{aligned}
 \varphi(z = h_e) &= \varphi(z = h_e + h_p) = 0 \\
 f(z) &= \left(1 - \left\{\frac{2z - 2h_e - h_p}{h_p}\right\}^2\right)
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

بر اساس میدان های در نظر گرفته شده، رابطه انرژی را می توان بر حسب مقادیر  $U_{pq}, V_{pq}, W_{pq}, \Phi_{pq}$  و مقدار فرکانس  $\omega$  محاسبه کرد

$$U = U(U_{pq}, V_{pq}, W_{pq}, \Phi_{pq}, \omega) \tag{۱۷}$$

حل نهایی سیستم با استفاده از مینیمم کردن انرژی کل سیستم نسبت به مقادیر مجهول توابع تعیین شده در رابطه (۱۵) بدست می آید. بر این اساس، و با مرتب کردن جملات، خواهیم داشت:

$$([K] - \omega^2[M])\check{U} = 0 \tag{۱۸}$$

که در رابطه (۱۸)، بردار مجهولات به صورت زیر تعریف می شود.

$$\check{U} = \{U_{pq} \ V_{pq} \ W_{pq} \ \Phi_{pq}\} \tag{۱۹}$$

حل بدیهی برای معادله داده شده در رابطه (۱۹)، حل صفر می باشد. برای جلوگیری از صفر شدن حل، دترمینان ماتریس ضرایب بردار مجهولات بایستی صفر باشد.

$$[K] - \omega^2[M] = 0 \tag{۲۰}$$

با حل سیستم بالا، جواب های نهایی سیستم که در واقع پاسخ های فرکانسی سیستم می باشند بدست می آید.

### ۳- نتایج و بحث

برای هسته مدرج فرض می شود از دو ماده فلزی و سرامیکی تشکیل شده باشد. سرامیک در بالای هسته و فلز در پایین هسته می باشد. بر این اساس، توزیع خواص برای هسته مدرج به صورت زیر در نظر گرفته می شود. [۱۲]

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2h_e}\right)^{n_1} + E_m \quad (21)$$

$$-h_e \leq z \leq h_e$$

در رابطه (۲۱)،  $E_c$ ،  $E_m$  مدول الاستیسیته فلز و سرامیک می باشد و  $2h_e$  ضخامت هسته مدرج می باشد.  $n_1$  نیز ضریب ناهمگنی می باشد. برای لایه های متصل شده مدرج پیزوالکتریکی، خواص متغیر مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر در نظر گرفته می شود. [۱۴]

$$E(z) = E_i \left(\frac{z}{h_e}\right)^{n_2} \quad h_e \leq z \leq h_e + h_p \quad (22)$$

که  $E_i$  مقدار نمادین هر یک از خواص در محل تماس لایه مدرج پیزوالکتریک به هسته می باشد. مقادیر عددی برای خواص هسته و لایه پیزوالکتریک از قرار زیر می باشد. [۱۲ و ۱۴]

$$E_c = 3.8 \times 10^{11} Pa, E_m = 2 \times 10^{11} Pa, E_{he} = 7.6 \times 10^{11} Pa$$

$$e_{1h} = 0.35 C m^{-2}, e_{2h} = -0.16 C m^{-2}$$

$$\eta_{1h} = 9.03 \times 10^{-11} C N^{-1} m^{-2}, \eta_{2h} = 5.62 \times 10^{-11} C N^{-1} m^{-2}$$

$$h_e = 10 mm, h_p = 2 mm, L = 0.2 m$$

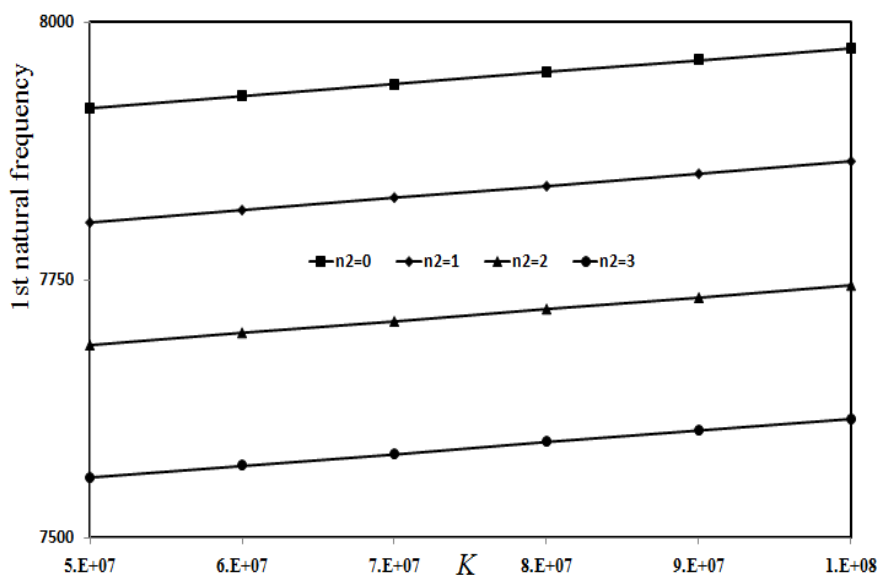
### ۳-۱- تاثیر پارامترهای ناهمگنی هسته $n_1$ و لایه های پیزوالکتریک $n_2$

در این قسمت به بررسی تاثیر ضرایب ناهمگنی هسته  $n_1$  و لایه های پیزوالکتریک  $n_2$  بر رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی پرداخته می شود.

شکل (۲)، توزیع فرکانس طبیعی سیستم را بر حسب ضریب فنری ( $K$ ) بستر ویسکو-پاسترناک به ازای ضرایب ناهمگنی مختلف لایه پیزوالکتریک مدرج نشان می دهد. این نتایج برای حالت همگن هسته می باشد. همانطور که ملاحظه می شود با افزایش ضریب فنری بستر، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می یابد. این افزایش در اثر افزایش سفتی سازه می باشد. علاوه بر این ملاحظه می شود که با افزایش ضریب ناهمگنی لایه پیزوالکتریک مدرج، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می باشد. دلیل کاهش فرکانس در اثر افزایش ضریب ناهمگنی، افزایش بیشتر اثر جرم کل لایه های پیزوالکتریک نسبت به اثرات افزایش ضرایب سفتی سازه می باشد. این اثر در نهایت منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می شود.

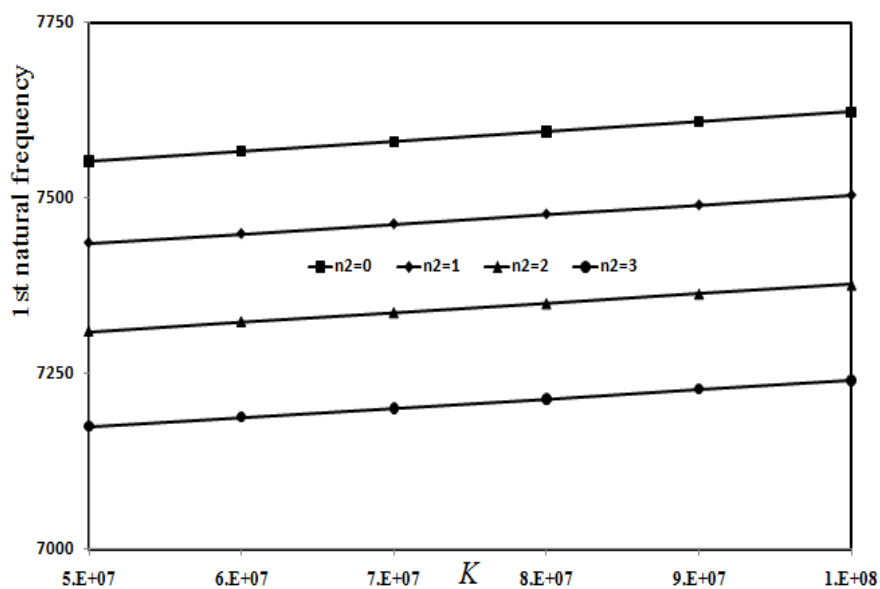
شکل (۳)، توزیع فرکانس طبیعی سیستم را بر حسب ضریب فنری ( $K$ ) بستر ویسکو-پاسترناک به ازای ضرایب ناهمگنی مختلف لایه پیزوالکتریک مدرج نشان می دهد. این نتایج برای حالت نا همگن هسته می باشد. این نتایج برای حالت نا همگن هسته می باشد. ( $n_1 = 1$ )





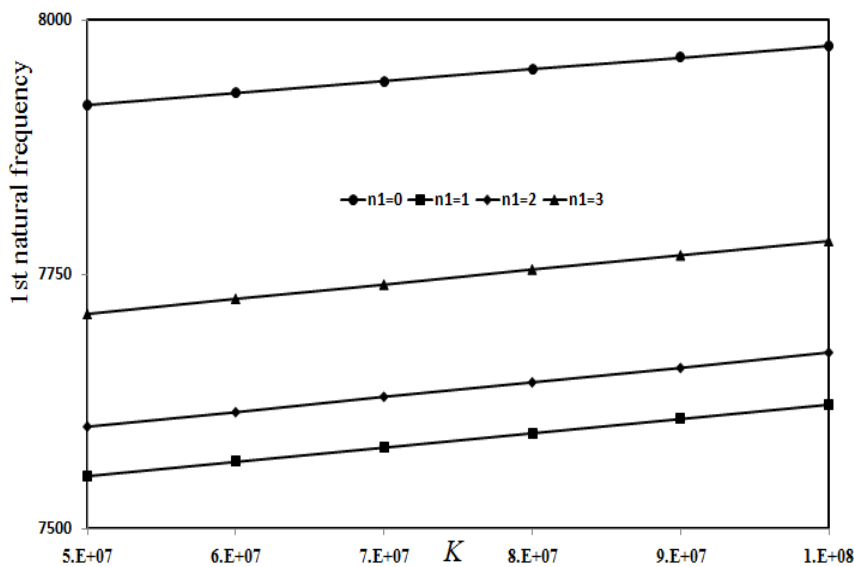
شکل ۲- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر فنری بستر برای ضرایب ناهمگنی مختلف لایه پیزوالکتریک و برای هسته همگن

به منظور بررسی تاثیر ضریب ناهمگنی هسته مدرج بر رفتار ارتعاشی، ضریب ناهمگنی لایه های مدرج پیزوالکتریک ثابت نگهداشته و مقادیر ضریب ناهمگنی هسته مدرج تغییر داده می شود. شکل (۴)، مقدار فرکانس طبیعی سیستم را بر حسب پارامتر فنری ( $K$ ) بستر ویسکو- پاسترناک برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی هسته  $n_1$  نشان می دهد. در این حالت، لایه پیزوالکتریک همگن در نظر گرفته می شود ( $n_2 = 0$ ).

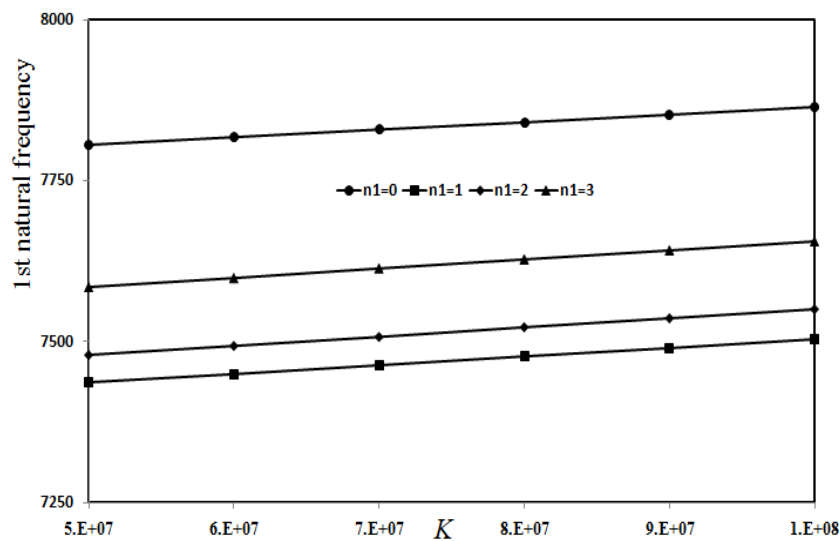


شکل ۳- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر فنری بستر برای ضرایب ناهمگنی مختلف لایه پیزوالکتریک و برای هسته ناهمگن  $n_1 = 1$

نتایج بدست آمده در این شکل نشان می دهد که با افزایش ضریب ناهمگنی هسته، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می یابد. این کاهش در اثر کاهش سفتی سیستم و نرمتر شدن سیستم می باشد. چون با توجه به رابطه تابعی ضریب ناهمگنی که بین سرامیک و فولاد تغییر می کند، با افزایش ضریب ناهمگنی، مقدار ضرایب سفتی و چگالی ورق کاهش می یابند ولی این کاهش در نهایت منجر به کاهش فرکانس طبیعی می شود. البته چنین حالتی برای افزایش ضریب ناهمگنی از صفر به یک اتفاق می افتد. برای افزایش ضریب ناهمگنی بیشتر از یک، چون اثرات کاهش جرم بیشتر از اثرات کاهش سفتی می شود، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. شکل (۵)، توزیع فرکانس طبیعی سیستم را بر حسب ضریب فنری ( $K$ ) بستر ویسکو- پاسترناک به ازای ضرایب ناهمگنی مختلف هسته مدرج نشان می دهد. این نتایج برای حالت ناهمگن لایه پیزوالکتریک می باشد. ( $n_2 = 1$ )



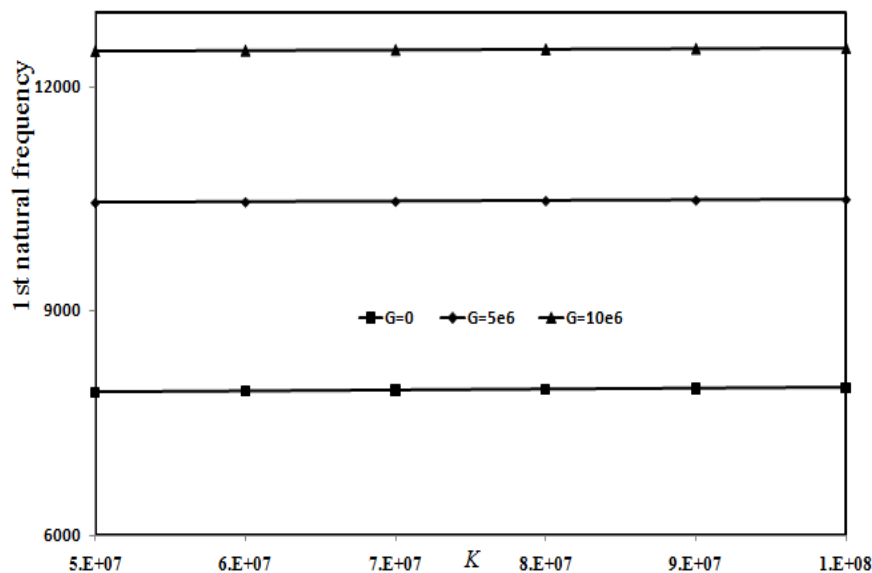
شکل ۴- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر فنری بستر برای ضرایب ناهمگنی مختلف هسته و لایه همگن



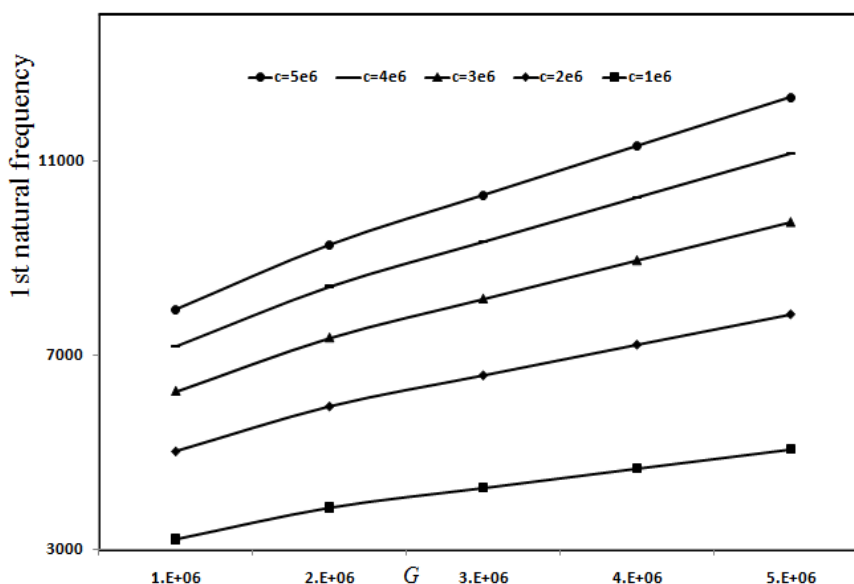
شکل ۵- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر فنری بستر برای ضرایب ناهمگنی مختلف

هسته و لایه ناهمگن  $n_2 = 1$

برای بررسی همزمان اثر پارامترهای بستر پاسترناک، شکل (۶)، مقدار فرکانس طبیعی را به ازای ضرایب فنری ( $K$ ) و برشی ( $G$ ) بستر نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود با افزایش هر دو ضریب فنری و برشی، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. افزایش فرکانس طبیعی سیستم در اثر افزایش ضرایب فنری و برشی بستر ویسکو-پاسترناک منجر به سفت تر شدن کلی بستر شده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم را کاهش می دهد.



شکل ۶- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر فنری بستر برای ضرایب برشی مختلف



شکل ۷- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر برشی بستر برای میرایی مختلف و حالت همگن هسته و لایه پیزوالکتریک

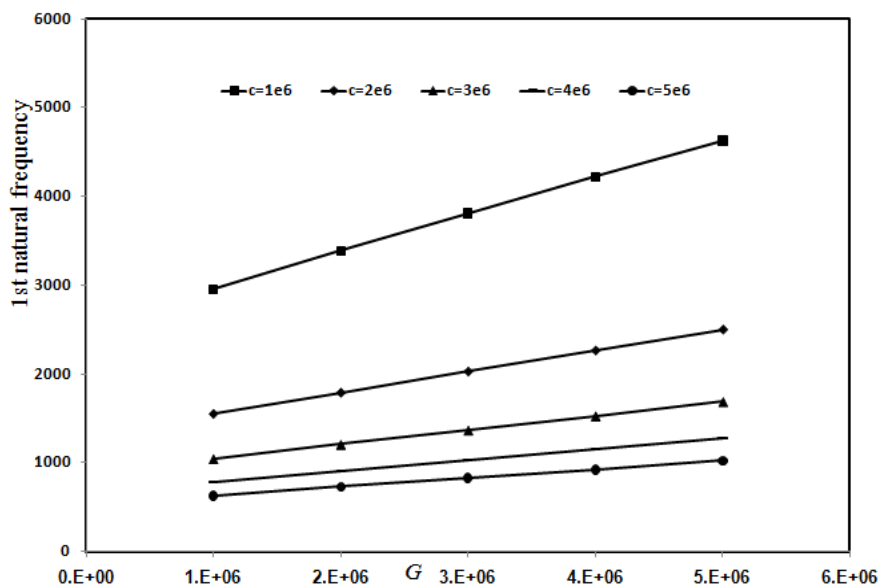
### ۳-۲- تاثیر پارامتر میرایی بستر ویسکوپاسترناک

در این بخش به بررسی اثر پارامتر میرایی (C) بستر بر رفتار ارتعاشی پرداخته می شود. شکل‌های (۷) و (۸)، توزیع فرکانس طبیعی سیستم را به ترتیب بر حسب ضریب برشی (G) بستر به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی بستر و به ترتیب برای حالت‌های همگن و ناهمگن نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود با افزایش ضریب میرایی بستر، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می یابد. شکل (۹)، توزیع فرکانس طبیعی مود دوم ورق را نشان می دهد. این فرکانس بر حسب مدول برشی بستر و به ازای ضریب میرایی مختلف نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود با افزایش ضریب برشی بستر، مقدار فرکانس طبیعی مود دوم به یک مقدار مجانبی میل می کند. به عبارت دیگر مقادیر بسیار زیاد ضریب برشی بستر اثر چندانی بر رفتار ارتعاشی نخواهد داشت. این نتیجه با نتیجه ای که از فرکانس اول بدست آمد متفاوت می باشد.

### ۴- نتیجه گیری

تحلیل ارتعاشات آزاد یک سیستم الکترومکانیکال شامل یک ورق سه لایه در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. ورق ساندویچی سه لایه شامل هسته مدرج و مجهز شده به دو لایه مدرج پیزوالکتریک می باشد. سیستم مورد اشاره بر روی بستر ویسکو- پاسترناک قرار داده می شود. خواص ورق سه لایه شامل ضرایب سفتی، چگالی و ... بر اساس قانون توانی مواد مدرج تغییر می کند. تاثیر پارامترهای مختلف نظیر ضرایب ناهمگنی هسته مدرج و لایه های مدرج پیزوالکتریک، پارامترهای بستر شامل ضرایب فنری، برشی و میرایی بر جوابهای فرکانس سیستم مورد بحث قرار گرفت. برخی از نتایج مهم بدست آمده در این تحقیق به شرح زیر بیان می شود:

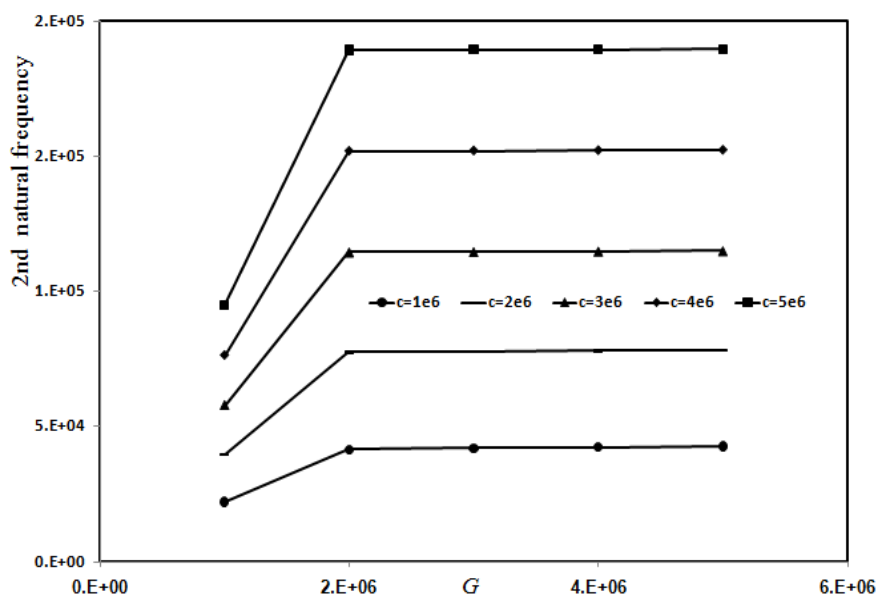
۱. تحقیق بر روی اثر ضریب ناهمگنی هسته نشان می دهد که با افزایش ضریب ناهمگنی هسته، فرکانس طبیعی سیستم ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می یابد. این افزایش و کاهش در اثر تغییرات ضرایب سفتی و چگالی یا جرم هسته می باشد که بر اساس رابطه توانی مواد مدرج تغییر می کند. این نتیجه برای کلیه ضرایب ناهمگنی لایه های مدرج پیزوالکتریک برقرار می باشد.
۲. مطالعه بر روی اثر پارامترهای مستقیم و برشی ( $K, G$ ) بستر نشان می دهد که فرکانس طبیعی سیستم با افزایش هر دو پارامتر افزایش می یابد. دلیل افزایش فرکانس طبیعی سیستم در اثر افزایش پارامترهای بستر، افزایش سفتی کلی بستر می باشد. این رفتار را می توان برای کلیه حالات ناهمگنی هسته و لایه پیزوالکتریک مشاهده کرد.
۳. بررسی اثر ضریب میرایی بستر ویسکو پاسترناک نشان می دهد که اگرچه فرکانس مود اول با افزایش ضریب میرایی بستر، کاهش می یابد، فرکانس مود دوم با افزایش ضریب میرایی به شدت افزایش می یابد.



شکل ۸- فرکانس طبیعی سیستم بر حسب پارامتر برشی بستر برای ضریب میرایی مختلف و

$$n_1 = n_2 = 1$$

حالت ناهمگن هسته و لایه پیزوالکتریک



شکل ۹- فرکانس طبیعی مود دوم بر حسب پارامتر برشی بستر برای ضریب میرایی مختلف

### تقدیر و تشکر

نویسنده این مقاله لازم است که از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان بابت حمایت مالی این مقاله تشکر نماید.  
(شماره قرار داد: ۱۵/۴۶۳۸۶۵)

## مراجع

- [1] Chen, W. Q., Bian, Z. G., and Ding, H. J., "Three-dimensional Vibration Analysis of Fluid-filled Orthotropic FGM Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 46, pp. 159–171, (2004).
- [2] Kadoli, R., and Ganesan, N., "Buckling and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to a Temperature-specified Boundary Condition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 450–480, (2006).
- [3] Kadoli, R., Ganesan, N., and Padmanabhan, C., "Linear Thermoelastic Buckling and Free Vibration Behavior of Functionally Graded Truncated Conical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, pp. 341–371, (2006).
- [4] Prakash, T., and Ganapathi, M., "Asymmetric Flexural Vibration and Thermoelastic Stability of FGM Circular Plates using Finite Element Method", *Composites Part B-Engineering*, Vol. 37, No. 7-8, pp. 642-649, (2006).
- [5] Liew, K. M., Yang, J., and Wu, Y. F., "Nonlinear Vibration of a Coating-FGM-substrate Cylindrical Panel Subjected to a Temperature Gradient", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 1007–1026, (2006).
- [6] Hui-Shen, S., "Nonlinear Thermal Bending Response of FGM Plates Due to Heat Conduction", *Composites Part B-Engineering*, Vol. 38, pp. 201–215, (2007).
- [7] Efraim, E., and Eisenberger, M., "Exact Vibration Analysis of Variable Thickness Thick Annular Isotropic and FGM Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp. 720–738, (2007).
- [8] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., and Bahrami, M., "Vibration Amplitude and Thermal Effects on the Nonlinear Behavior of Thin Circular Functionally Graded Plates", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 50, pp. 445–454, (2008).
- [9] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., and Bahrami, M., "Nonlinear Free and Forced Vibration Analysis of Thin Circular Functionally Graded Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, pp. 966–984, (2008).
- [10] Li, Q., Iu, V.P., and Kou, K. P., "Three-dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Material Sandwich Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, pp. 498–515, (2008).
- [11] Huang, Z. Y., Lü, C. F., and Chen, W. Q., "Benchmark Solutions for Functionally Graded Thick Plates Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundations", *Composite Structures*. Vol. 85, No. 2, pp. 95–104, (2008).
- [12] Ebrahimi, F., and Rastgo, A., "An Analytical Study on the Free Vibration of Smart Circular Thin FGM Plate Based on Classical Plate Theory", *Thin Walled Structures*, Vol. 46, pp. 1402–1408, (2008).

- [13] Malekzadeh, P., and Vosoughi, A. R., "DQM Large Amplitude Vibration of Composite Beams on Nonlinear Elastic Foundations with Restrained Edges", *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 14, pp. 906–915, (2009).
- [14] Khoshgoftar, M. J., Ghorbanpour Arani, A., and Arefi, M., "Thermoelastic Analysis of a Thick Walled Cylinder Made of Functionally Graded Piezoelectric Material", *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 11, pp. 115007 (8), (2009).
- [15] Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., and Adda Bedia, E. A., "Bending of Thick Functionally Graded Plates Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundations", *Mechanic of Composite Materials*, Vol. 46, No. 4, pp. 425-434 , (2010).
- [16] Ait Atmane, A., Tounsi, H., Mechab, A., and Adda Bedia, I., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundations using a New Shear Deformation Theory", *International Journal of Mechanic and Materials in Design*, Vol. 6, No. 2, pp. 113-121, (2010).
- [17] Zenkour, A. M., "Bending of Orthotropic Plates Resting on Pasternak's Foundations using Mixed Shear Deformation Theory", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 27, No. 6, pp. 956-962, (2011).
- [18] Rahimi, G. H., Arefi, M., and Khoshgoftar, M. J., "Application and Analysis of Functionally Graded Piezoelectrical Rotating Cylinder as Mechanical Sensor Subjected to Pressure and Thermal Loads", *Applied Mathematics and Mechanics (English-Edition)*, Vol. 32, No. 8, pp. 1–12, (2011).
- [19] Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., and Radwan, A. F., "Bending of Cross-ply Laminated Plates Resting on Elastic Foundations under Thermo-mechanical Loading", *International Journal of Mechanic and Materials in Design*, Vol. 9, No. 3, pp. 239-251, (2013).
- [20] Ghorbanpour Arani, A., Bagheri, M. R., Kolahchi, R., and Khoddami Maraghi, Z., "Nonlinear Vibration and Instability of Fluid-conveying DWBNNT Embedded in a Visco-Pasternak Medium using Modified Couple Stress Theory", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 2, pp. 2645-2658, (2013).
- [21] Ghorbanpour Arani, A., and Shokravi, M., "Nonlocal Vibration Behavior of a Viscoelastic SLGS Embedded on Visco-Pasternak Foundation under Magnetic Field", *Journal of Nano Structures*, Vol. 3, No. 4, pp. 467-476, (2013).
- [22] Ghorbanpour Arani, A., Shiravand, A., Rahi, M., and Kolahchi, R., "Nonlocal Vibration of Coupled DLGS Systems Embedded on Visco-Pasternak Foundation", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 407, No. 21, pp. 4123–4131, (2012).
- [23] Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., Shaker, M. O., and Radwan, A. F., "On the Simple and Mixed First-order Theories for Plates Resting on Elastic Foundations", *Acta Mechanica*, Vol. 220, No. 1-4, pp. 33-46, (2011).
- [24] Zenkour, A. M., and Radwan, A. F., "On the Simple and Mixed First-order Theories for Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations", *Meccanica*, Vol. 48, No. 6, pp. 1501-1516, (2013).

- [25] Arefi, M., and Rahimi, G. H., "Nonlinear Analysis of a Functionally Graded Square Plate with Two Smart Layers as Sensor and Actuator under Normal Pressure", *Smart Structures and Systems*, Vol. 8, No. 5, pp. 433–446, (2011).
- [26] Arefi, M., and Rahimi, G. H., "Studying the Nonlinear Behavior of the Functionally Graded Annular Plates with Piezoelectric Layers as a Sensor and Actuator under Normal Pressure", *Smart Structures and Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 127–143, (2012).
- [27] Arefi, M., "Nonlinear Thermoelastic Analysis of Thick-walled Functionally Graded Piezoelectric Cylinder", *Acta Mechanica*, Vol. 224, pp. 2771–2783, (2013).
- [28] Zhang, B., He, Y., Liu, D., Shen, L., and Lei, J., "Free Vibration Analysis of Four-unknown Shear Deformable Functionally Graded Cylindrical Micro Shells Based on the Strain Gradient Elasticity Theory", *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 578–597, (2015)
- [29] Ghorbanpour Arani, A., and Shokravi, M., "Vibration Response of Visco-elastically Coupled Double-layered Visco-elastic Graphene Sheet Systems Subjected to Magnetic Field via Strain Gradient Theory Considering Surface Stress Effects", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanoengineering and Nanosystems*, Vol. 229, No. 4, pp. 180-190, (2015).
- [30] Hosseini Hashemi, Sh., Mehrabani, H., and Ahmadi-Savadkoohi, A., "Exact Solution for Free Vibration of Coupled Double Viscoelastic Graphene Sheets by ViscoPasternak Medium", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 78, No. 1, pp. 377–383, (2015).

### فهرست نمادهای انگلیسی

ضرایب سفتی	$c_{ijkl}$
ضریب میرایی بستر	$C$
جابجایی الکتریکی	$D_i$
ضریب پیزوالکتریک	$e_{ijk}$
میدان الکتریکی	$E_k$
توزیع خواص متغیر	$E(z)$
ضخامت هسته	$2h_e$
ضخامت لایه های مدرج پیزوالکتریک	$h_p$
پارامترهای فنری و برشی بستر	$K, G$



طول و عرض ورق	$L$
ضریب ناهمگنی	$n$
تعداد ترم های حل سری مثلثاتی	$p, q$
فشار اعمالی	$p$
مولفه دستگاه کارتزین	$x, y, z$
مولفه جابجایی در راستای دستگاه کارتزین	$u, v, w$
انرژی کل سیستم	$U$
مقادیر توابع جابجایی و پتانسیل	$\{U_{pq} \ V_{pq} \ W_{pq} \ \Phi_F\}$
مولفه های کرنش	$\epsilon_{ij}$
مولفه های تنش	$\sigma_{ij}$
ضریب دی الکتریک	$\eta_{ij}$
پتانسیل الکتریکی	$\phi$

## Abstract

The present paper investigates vibration analysis of a functionally graded square plate integrated with two functionally graded piezoelectric layers as sensor or actuator resting on the elastic Visco-Pasternak foundation. All the mechanical and electrical properties except Poisson's ratio can vary continuously and gradually along the thickness of the plate based on a power function. Electric potential was assumed as a quadratic function along the thickness direction and trigonometric function along the planar coordinate. Short circuited boundary conditions are considered on the top and bottom of functionally graded piezoelectric layers. The general constitutive relations in electromechanical systems are used for considering the effect of all mechanical and visco-Pasternak foundation parameters.

These parameters are including the non-homogeneous indexes of core and piezoelectric layers, direct, shear and damping parameters of foundation. The obtained results present the effect of various mechanical and foundation parameters on the vibration responses of the system. The functionalities of two considered layers and core can be regarded independently and the effect of these indexes can be considered on the responses. The obtained results indicate that with increasing the non-homogeneous index of core and layers, the natural frequencies of the system decreases.