

تحلیل تنش خارج صفحه‌ای در باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده توسط دو نیم صفحه الاستیک حاوی چندین ترک در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه

در این مقاله با استفاده از روش توزیع نابجایی تحلیل تنش در باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده توسط دو نیم صفحه الاستیک حاوی مجموعه ای از ترکها در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه ایزوتروپیک تحت بار خارج صفحه‌ای انجام شده است. ابتدا حل نابجایی در منطقه با حل معادله حاکم، اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی مربوط به نابجایی با استفاده از تبدیل فوریه انجام می‌گردد. بعد از اعمال شرایط مرزی می‌توان معکوس تبدیل فوریه را اعمال نمود و میدان تنش ناشی از نابجایی را در باریکه با خواص تابعی و نیم صفحه الاستیک محاسبه نمود. سپس با استفاده از این حل، معادلات انتگرالی برای تحلیل مسأله چندین ترک واقع در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه الاستیک بدست می‌آیند. این معادلات از نوع تکنیکی کوشی می‌باشند که با استفاده از روش عددی مناسب حل گردیده تا تابع توزیع نابجایی روی ترکها بدست آید. با بدست آوردن توزیع نابجایی روی ترکها می‌توان ضرایب شدت تنش برای نوک ترکهای واقع در فصل مشترک را بدست آورد.

رسول باقری^۱

استادیار

مجتبی آیت‌اللهی^۲

دانشیار

مجتبی محمودی منفرد^۳

استادیار

واژه های راهنما: نابجایی ولترا- بارگذاری خارج صفحه‌ای- باریکه ساخته شده از مواد تابعی- ترک واقع در فصل مشترک- ضرایب شدت تنش

۱- مقدمه

تحلیل تنش در محیط های تضعیف شده توسط مجموعه‌ای از ترکها از دیرباز مورد توجه محققین بوده است. از جمله تکنیک های موثر در تحلیل مذکور استفاده از روش توزیع نابجایی می‌باشد. تحقیقات انجام شده نشان داده است که از نظر ریاضی ترک را می‌توان بصورت مجموعه‌ای از نابجایی‌ها در نظر گرفت و با استفاده از اصل جمع آثار حرکت نسبی لبه‌های ترک نسبت به یکدیگر و در نتیجه ضریب شدت تنش را محاسبه نمود. در واقع توانایی حل نابجایی در حل مسائل مکانیک شکست خطی به قدرتمندی حل گرین در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز: rasul_m65@yahoo.com

^۲ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان: mo_ayatollahy@yahoo.com

^۳ استادیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد هشتگرد، البرز: mo_m_monfared@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۳/۱۸، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۷/۲۸

نخستین بار دانشمندان علم مواد در فرایند بررسی مکانیزم تخریب مواد به وجود نابجایی پی بردند. بعدها نابجایی از دیدگاه الاستیسیته نیز تعریف گردید. V. Volterra [۱] جزء نخستین کسانی بود که به تعریف نابجایی پرداخت. تحلیل تنش در قطعات مکانیکی که دارای ترک بوده از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. طراحی با استفاده از اصول مکانیک شکست مستلزم داشتن معیاری است که مشخص کننده واماندگی^۱ قطعه باشد یکی از این معیارها ضریب شدت تنش است. ضریب شدت تنش در نوک ترکها تابعی از هندسه ترک، شکل قطعه، شرایط و اندازه بارگذاری می‌باشد که پس از محاسبه با مقدار بحرانی آن مقایسه می‌گردد.

در ابتدا مروری بر تحقیقات انجام شده برای تحلیل تنش در محیط های الاستیک حاوی ترک، انجام می‌شود. N. Ashbaugh [۲]، مسأله یک ترک با جهت دلخواه در مجاورت فصل مشترک دو ورق نیمه بینهایت با خواص مواد متفاوت را بررسی نمود. مسأله برای فشار یکنواخت و تنش برشی غیر یکنواخت روی سطح ترک حل گردید و ضرایب شدت تنش در نوک ترک بدست آمد. مسأله تعدادی ترک همراستا با آرایش متناوب واقع در فصل مشترک دو نیم صفحه ارتوتروپیک غیر همجنس و چسبیده به یکدیگر توسط A.C. Grag [۳] بررسی شده است. در حل این مسأله از تبدیل فوریه محدود در جهت ترک استفاده شده و پس از حل معادلات انتگرالی تکین، ضرایب شدت تنش در نوک ترکها برای حالتی که ترکها تحت فشار هستند بدست آمده است.

M. Ozturk, F. Erdogan [۴]، مسأله باریکه ساخته شده از ماده تابعی محدود شده توسط دو نیم صفحه ایزوتروپیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای را بررسی نمودند. آنها یک ترک واقع در فصل مشترک را مطالعه نموده و ضرایب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی را برای نوک ترک بدست آوردند. Z. T. Chen و همکارانش [۵] مسأله ترک متحرک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای در بین دو لایه از جنس ماده پیزوالکتریک ناهمسان را بررسی کردند. برای حل مسأله از تبدیلات فوریه بهره بردند. آنها روابط بین سرعت ترک و ضرایب مربوط به جنس ماده را بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی و جابجائی الکتریکی بدست آوردند.

مسأله ترک گریفیت متحرک در بین دو لایه ارتوتروپیک ناهمسان تحت بارگذاری درون صفحه‌ای توسط B. Patra, S. Das [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها برای حل معادلات انتگرالی تکین از چند جمله ای ژاکوبین استفاده کردند و تاثیر ضخامت لایه ها را بر ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار دادند.

X. F. Wu و X. F. Li [۷] مسأله ترک متحرک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای را بین دو لایه از جنس ماده پیزوالکتریک ناهمسان بررسی کردند. برای حل مسأله از تبدیل انتگرالی فوریه کسینوسی استفاده کردند و اثرات سرعت حرکت ترک بر روی ضریب شدت تنش را بدست آوردند. مسأله اندرکنش بین ترکهای تکرارشونده در فصل مشترک چندین لایه الاستیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای توسط Y.S. Wang, D. Gross [۸] ارائه شده است. در این مطالعه تعداد لایه‌ها دلخواه بوده و ترکها می‌توانند در هر یک از لایه‌ها واقع شوند. آنها از سری فوریه بهره برده و مسأله مقدار مرزی ترکیبی را به معادلات انتگرالی تکین هیبلر تبدیل کردند. در ادامه اثر فرکانس موج برخوردی، هندسه و خواص ماده روی ضریب شدت تنش بررسی شد.

J. S. Lee و همکارانش [۹]، ترک متحرک واقع در فصل مشترک لایه‌ای از جنس ماده پیزوالکتریک سرامیکی و دو لایه از جنس ماده ارتوتروپیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و بارگذاری درون صفحه‌ای الکتریکی را بررسی کردند. حل به کمک تبدیل فوریه انجام شده است.

¹ Failure

اثر طول ترک، ضخامت، شدت و جهت بارگذاری الکتریکی و سرعت ترک بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی بررسی گردید. نتایج آنها نشان داد که ضریب شدت تنش همیشه با افزایش طول ترک بی بعد شده و سرعت حرکت ترک در موردی که مدول برشی لایه ارتوتروپیک بالایی بزرگتر از لایه پایینی باشد افزایش می‌یابد ولی برای حالتی که مدول برشی لایه ارتوتروپیک بالایی کوچکتر از لایه پایینی باشد، عکس این رفتار مشاهده می‌شود.

X. S. Bi و همکارانش [۱۰] ترک متحرک در باریکه از جنس ماده تابعی تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی را بررسی کردند. آنها مدول‌های برشی را به شکل نمایی در نظر گرفتند و معادلات را با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی و روش کاپسون^۱ حل کردند. در این مطالعه اثرات سرعت ترک متحرک و مدول برشی بر روی ضریب چگالی انرژی کرنشی بررسی شده است. L. Ma و همکارانش [۱۱] مسأله یک ترک متحرک با طول ثابت در یک باریکه از جنس ماده تابعی تحت بار درون صفحه‌ای را حل کردند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه و تعریف باز شدگی دهانه ترک در عرض ترک به عنوان تابع ناشناخته، دو جفت معادله انتگرالی به دست آوردند. سپس با استفاده از روش چند جمله‌ای ژاکوبی معادلات انتگرالی را حل کردند. نتایج عددی ارائه شده اثر خواص مواد، ضخامت ماده تابعی و سرعت رشد ترک را بر روی رفتار شکست دینامیکی نشان می‌دهد. مسأله بر هم کنش سه ترک گریفیت متحرک هم راستا در نیم صفحه تشکیل شده از دو ماده الاستیک مختلف تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی توسط S. Das [۱۲] ارائه شد.

حل مسأله با استفاده از تبدیل فوریه و روش تبدیل هیلبرت^۲ محدود انجام شده و سپس ضریب شدت تنش نوک ترک برای لایه الاستیک با ضخامت متفاوت بدست آمد. مسأله ترک در سطح مشترک دو ماده غیر مشابه از جنس الکترومگنتوالاستیک توسط G.A. Kardomateas, R. Li [۱۳] ارائه شد. آنها مد سوم مکانیک شکست را در نظر گرفته و نشان دادند که میدان‌های تنش در فاصله r از نوک ترک واقع در فصل مشترک دارای تکینگی $r^{-1/2}$ می‌باشند. آنها در این مطالعه میدان تنش و باز شدگی دهانه ترک را بدست آوردند. Z. Cheng [۱۴] انتشار ترک در یک محیط با پوششی از جنس ماده تابعی با خواص دلخواه که به یک لایه همگن چسبانده شده را مورد بررسی قرار داد. برای حل مسأله از یک مدل چند لایه استفاده کرد و با استفاده از تبدیل فوریه مسأله شرایط مرزی را به دستگاه معادلات انتگرالی تکین کاهش داد و آنرا با استفاده از چند جمله‌ای چیبیشف به صورت عددی حل کرد.

Z. Cheng و همکاران [۱۵] یک ترک متحرک موجود در فصل مشترک بین دو باریکه از جنس مواد تابعی مختلف تحت تغییر شکل صفحه‌ای را با روش معادلات انتگرالی بررسی کردند. آنها اثر پارامترهای هندسی همانند ضخامت باریکه و سرعت ترک را بر روی ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار دادند.

M. Ayatollahi, R. Bagheri [۱۶] انتشار ترک در باریکه ساخته شده از مواد تابعی را که تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای قرار داشته، مورد بررسی قرار دادند.

آنها برای حل مسأله از تبدیل فوریه بهره‌جسته و اثر طول ترک، ثابت ماده تابعی و سرعت ترک را بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی بدست آوردند.

¹ Copson's method

² Hilbert transform techniques

در این مقاله حل تحلیلی مساله باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده به دو نیم صفحه الاستیک حاوی چندین ترک در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه پائینی تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای توسط روش توزیع نابجایی انجام شده است. از این حل برای بدست آوردن معادلات انتگرالی توزیع نابجایی روی ترکها استفاده شده است. این معادلات دارای تکینگی از نوع کوشی بوده که از حل آنها توزیع نابجایی روی ترکها و سپس ضرایب شدت تنش ترکها بدست آمده است.

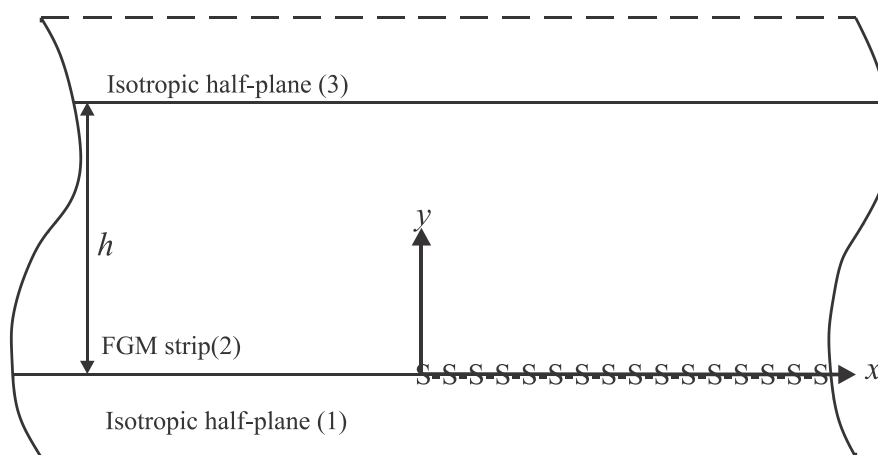
در اکثر مطالعات انجام شده تا به حال، محققین فقط قادر به حل مسائل با تعداد ترک محدود بوده اند در حالیکه مزیت استفاده از این روش در این است که تعداد ترکها در روش حل تاثیری ندارد.

۲- حل نابجایی خارج صفحه‌ای در فصل مشترک باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده توسط دو نیم صفحه ایزوتروپیک

باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده توسط دو نیم صفحه الاستیک مورد نظر دارای بعد بی نهایت در راستای محور x و بعد محدود در راستای محور y بوده و خط نابجایی در قسمت مثبت محور x است (شکل ۱). در این مقاله مود سوم مکانیک شکست مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نتیجه مولفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای u, v صفر بوده و فقط مولفه تغییر مکان عمود بر صفحه w که تابعی از مختصات درون صفحه‌ای x, y است، وجود دارد در نتیجه روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$u = 0, v = 0, w = w(x, y) \quad (1)$$

برای تغییر شکل‌های خارج صفحه‌ای، میدانهای تنش برای باریکه و دو نیم صفحه الاستیک بصورت زیر بدست می‌آیند.



شکل ۱- نمایش نابجایی در فصل مشترک

$$\begin{aligned} \sigma_{zx1} &= \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, & \sigma_{zy1} &= \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} & -\infty < y \leq 0 \\ \sigma_{zx2} &= \mu_2(y) \frac{\partial w_2}{\partial x}, & \sigma_{zy2} &= \mu_2(y) \frac{\partial w_2}{\partial y} & 0 \leq y \leq h \\ \sigma_{zx3} &= \mu_3 \frac{\partial w_3}{\partial x}, & \sigma_{zy3} &= \mu_3 \frac{\partial w_3}{\partial y} & h \leq y < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن μ_1 ، $\mu_2(y)$ و μ_3 به ترتیب ثابت‌های الاستیسیته برای نیم صفحه پایینی، باریکه و نیم صفحه بالایی بوده و β ثابت مربوط به ماده تابعی می‌باشد. در اینجا فرض شده که ثابت الاستیک برای باریکه بطور نمایی در جهت ضخامت باریکه تغییر می‌کند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \mu_2(y) &= \mu_1 e^{2\beta y} \\ \mu_3 &= \mu_1 e^{2\beta h} \end{aligned} \quad (3)$$

در صورت نبود نیروهای جسمی، تنها معادله تعادل تنش برای بارگذاری‌های خارج صفحه‌ای به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۴) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= 0 & -\infty < y \leq 0 \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2\beta \frac{\partial w_2}{\partial y} &= 0 & 0 \leq y \leq h \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} &= 0 & h \leq y < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

روابط (۵) بیانگر دستگاه معادلات با مشتقات جزئی است. حل تحلیلی دستگاه معادلات بالا نیازمند بررسی شرایط مرزی مسأله است. مطابق شکل (۱) نایجایی در مبدا مختصات در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه پایینی قرار گرفته است. نایجایی در الاستیسیته با ایجاد یک شکاف در محیط الاستیک، و حرکت لبه‌های شکاف نسبت به یکدیگر و سپس حذف شکاف تعریف می‌شود. در اثر این عمل تغییر مکان در جسم دو مقداری شده و میدان تنش در ماده بوجود می‌آید. در صورتیکه تغییر مکان وجوه شکاف در جهت عمود بر لبه شکاف به اندازه b_z باشد نایجایی را پادصفحه‌ای می‌نامند که b_z مولفه بردار برگرز^۱ نامیده می‌شود. مولفه تغییر مکان براساس تئوری ولترا در محل نایجایی به دلیل چند مقداری بودن تغییر مکان روی خط نایجایی دارای ناپیوستگی بوده و در نتیجه می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$w_2(x, 0^+) - w_1(x, 0^-) = b_z H(x) \quad (6)$$

^۱ Burgers vector

که $H(x)$ تابع واحد پله‌ای است. همچنین مولفه‌های تنش روی خط نابجایی دارای پیوستگی می‌باشند که این شرط عبارت است از:

$$\sigma_{zy1}(x, 0^-) = \sigma_{zy2}(x, 0^+) \quad (7)$$

با توجه به شکل (۱) شرایط پیوستگی بین باریکه و نیم صفحه بالایی و شرایط حدی مسأله بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_{zy2}(x, h^-) &= \sigma_{zy3}(x, h^+) \\ w_2(x, h^-) &= w_3(x, h^+) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} w_3(x, y) &= 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} w_1(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} w_i(x, y) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma_{zyi}(x, y) &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

برای حل مسأله از تبدیل فوریه نمایی استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx \quad (9)$$

$i = \sqrt{-1}$ پارامتر موهومی است. معکوس تبدیل فوریه عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds \quad (10)$$

حال با اعمال تبدیل فوریه (۹) به روابط (۵)، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}_1(s, y)}{dy^2} - s^2 \hat{w}_1(s, y) &= 0 & -\infty < y < 0 \\ \frac{d^2 \hat{w}_2(s, y)}{dy^2} + 2\beta \frac{d\hat{w}_2(s, y)}{dy} - s^2 \hat{w}_2(s, y) &= 0 & 0 \leq y \leq h \\ \frac{d^2 \hat{w}_3(s, y)}{dy^2} - s^2 \hat{w}_3(s, y) &= 0 & h \leq y < \infty \end{aligned} \quad (11)$$

که $\hat{w}_i(s, y)$ $i = 1, 2, 3$ تبدیل فوریه تابع $w_i(x, y)$ $i = 1, 2, 3$ می‌باشد. روابط (۱۱) دستگاه معادلات کامل با ضریب ثابت است که به سادگی قابل حل می‌باشند. بنابراین مولفه‌های میدان جابجایی برای هر بخش در فضای فوریه بصورت زیر حاصل خواهند شد

$$\begin{aligned} \hat{w}_1(s, y) &= A_1(s) e^{|s|y} & -\infty < y \leq 0 \\ \hat{w}_2(s, y) &= A_2(s) e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + s^2})y} + A_3(s) e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 + s^2})y} & 0 \leq y \leq h \\ \hat{w}_3(s, y) &= A_4(s) e^{-|s|y} & h \leq y < \infty \end{aligned} \quad (12)$$

که ضرایب $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ توابعی از ثابت تبدیل فوریه می‌باشند که با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آیند. به علت بررسی ترکهای واقع در فصل مشترک بین باریکه ساخته شده از مواد تابعی و نیم صفحه ایزوتروپیک پایینی، تنها کافی است، میدان تنش در نیم صفحه الاستیک پایینی در فصل مشترک بدست آید.

لذا میدان تنش بدست آمده فقط در ناحیه یک مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از روابط (۲)، (۱۰) و (۱۲) میدان تنش برای ناحیه سوم بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\sigma_{zy1}(x, y) = \frac{\mu_1 b_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s[\pi\delta(s) + i/s]}{(|s|Q - 1)} e^{|s|y - isx} ds \quad -\infty < y \leq 0 \quad (13)$$

در رابطه بالا $Q = \frac{(\lambda - \beta) + |s| + [(\lambda + \beta) - |s|]e^{-2\lambda h}}{\{(\lambda - \beta)[(\lambda + \beta) - |s|]e^{-2\lambda h}\} - \{[(\lambda - \beta) + |s|](\lambda + \beta)\}}$ و $\lambda = \sqrt{\beta^2 + s^2}$ و $\delta(s)$

تابع دلتای دیراک می‌باشد. حال انتگرال بالا را به دو بخش زوج و فرد نسبت به پارامتر s تبدیل کرده و میدان تنش بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\sigma_{zy1}(x, y) = \frac{\mu_1 b_z}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{sy}}{(sQ - 1)} \sin(sx) ds \quad -\infty < y \leq 0 \quad (14)$$

از آنجایی که انتگرال رابطه (۱۴) تابعی پیوسته از s می‌باشد و نیز انتگرال در $s = 0$ محدود است، نقاط تکینگی باید در محلی که $s \rightarrow +\infty$ ، به دست آید. روابط مجانبی برای انتگرال وقتی که $s \rightarrow +\infty$ بدست آمده است که در نهایت فرم مجانبی مولفه تنش بصورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_{zy1\infty} = \frac{\mu_1 b_z}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad -\infty < y \leq 0 \quad (15)$$

رفتار مجانبی مولفه تنش با نزدیک شدن به رأس نابجایی یعنی $x \rightarrow 0$ و $y \rightarrow 0$ بصورت تکینگی از نوع کوشی می‌باشد که به فرم کلی $\frac{1}{r}$ است. این بدین معنی است که در محل نابجایی مقدار تنش بی‌نهایت می‌شود که این از خصوصیات شناخته شده نابجایی است.

۳- معادلات انتگرالی در محیط های حاوی ترک

حل نابجایی بدست آمده در بخش قبل را می‌توان برای یافتن ضرایب شدت تنش در نوک تعدادی از ترکهای واقع در فصل مشترک بین باریکه و نیم صفحه پایینی تحت مود سوم مکانیک شکست، بکار برد. فرض می‌شود که صفحه توسط N ترک مستقیم در فصل مشترک تضعیف شده است. معادلات پارامتری ترکها را می‌توان بصورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + l_i q \\ y_i &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن $(x_{0i}, 0)$ مختصات وسط ترک i ام و l_i نصف طول ترک i ام می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجایی با چگالی $B_z dl$ در راستای ترک در نقطه‌ای از ترک j ام به مختصات $(x_j(p), 0)$ روی المان بینهایت کوچک dl ، میدان تنش ایجاد شده روی سطح ترک i ام بدست می‌آید که عبارتست از:

$$\sigma_{zy}(x_i(q), y_i(q)) = \int_{-1}^1 K_{ij}(q, p) B_{zj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

میدان تنش ایجاد شده روی ترک i ام در صورتیکه N ترک وجود داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار عبارت خواهد شد از:

$$\sigma_{zy}(x_i(q), y_i(q)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}(q, p) B_{zj}(p) dp \quad i=1,2,\dots,N \quad (18)$$

مطابق اصل باکنر [۱۷] مولفه تنش ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترکها در صفحه بدون ترک بعد از تغییر علامت در رابطه (۱۸) قرار گرفته و دانسیته نابجایی $B_{zj}(p)$ باید محاسبه گردد. که در آن کرنل معادله انتگرالی در رابطه (۱۷) یعنی $K_{ij}(q, p)$ برابر با ضرایب b_z در رابطه تنش σ_{zy} محاسبه شده در روش نابجایی است. در معادله انتگرالی (۱۸) کرنل $K_{ij}(q, p)$ تابع معلومی است. تابع $\sigma_{zy}(x_i(q), y_i(q))$ نیز تابع معلومی هستند که با توجه به بارگذاری خارجی تعیین می شود. با حل معادله انتگرالی (۱۸) که دارای تکینگی از نوع کوشی است تابع دانسیته نابجایی $B_{zj}(p)$ بدست می آید.

پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترکهای واقع در فصل مشترک باریکه ساخته شده از مواد تابعی و نیم صفحه الاستیک بایستی روابطی ارائه نمود که بکمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش در نوک ترکها را بر حسب دانسیته نابجایی بر روی ترکها محاسبه نمود. با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی، بازشدگی دهانه ترک برای ترک j ام از رابطه زیر حاصل می شود.

$$w_j^+(q) - w_j^-(q) = \int_{-1}^q \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{zj}(p) dp = \int_{-1}^q l_j B_{zj}(p) dp \quad j=1,2,\dots,N \quad (19)$$

که در آن -1 حد پایین که مشخص کننده ابتدای ترک با طول بی بعد شده واحد و N تعداد ترکها می باشد و دانسیته نابجایی B_{zj} است. $w_j^+(q)$ و $w_j^-(q)$ ، به ترتیب نشان دهنده تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک در نقطه ای واقع بر ترک است. برای ترکهای واقع در فصل مشترک، جابجائی در خارج از لبه های ترک تک مقداری است بنابراین برای دانسیته نابجایی باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{zj}(p) dp = l_j \int_{-1}^1 B_{zj}(p) dp = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (20)$$

دانسیته نابجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۱۸) و (۲۰) بدست می آید. بعلت تکینگی تنش در نوک تابع محدود و پیوسته می - $g_{zj}(p)$ ترکها تابعیت دانسیته نابجایی بصورت زیر در نظر گرفته می شود که باشد.

$$B_{zj}(p) = \frac{g_{zj}(p)}{\sqrt{1-p^2}} \quad -1 \leq p \leq 1 \quad j=1,2,\dots,N \quad (21)$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی اولین بار توسط F. Erdogan و همکاران [۱۸] ارائه گردید. در این روش معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه های چندجمله ای چبیشف^۱ و نظائر آن تعیین می شود گسسته شده و به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می شود با حل این سیستم معادلات جبری دانسیته نابجایی در نقاطی که در آنها معادلات گسسته شده اند بدست می آید. با قراردادن رابطه (۲۱) در روابط (۱۸) و (۱۹) سیستم معادلات جبری خطی زیر حاصل می شوند [۱۹]

¹ Chebyshev polynomials

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{z1}(p_n) \\ g_{z2}(p_n) \\ \vdots \\ g_{zN}(p_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(q_r) \\ T_2(q_r) \\ \vdots \\ T_N(q_r) \end{bmatrix} \quad (22)$$

که در آن نقاطی که در آن معادلات انتگرالی گسسته شده‌اند عبارتند از

$$q_r = \cos\left(\frac{\pi r}{m}\right), r = 1, 2, \dots, m-1, \quad p_t = \cos\left(\frac{\pi(2t-1)}{2m}\right), t = 1, 2, \dots, m \quad (23)$$

و درآیه‌های ماتریس و بردارها در رابطه (۲۲) عبارتند از

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{bmatrix}$$

که در رابطه بالا B_{ij} بصورت زیر است.

$$B_{ij} = \frac{\pi}{m} \begin{bmatrix} K_{ij}(q_1, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_1, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_1, p_m)\Delta_i(p_m) \\ K_{ij}(q_2, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_2, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_2, p_m)\Delta_i(p_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ij}(q_{m-1}, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_{m-1}, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_{m-1}, p_m)\Delta_i(p_m) \\ \delta_{ij}\Delta_i(p_1) & \delta_{ij}\Delta_i(p_2) & \cdots & \delta_{ij}\Delta_i(p_m) \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر می باشد. ضریب شدت تنش برای ترک i ام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می شود.

$$K_{Li} = \frac{\sqrt{2}}{4} \mu \lim_{r_{Li} \rightarrow 0} \frac{w_i^-(q) - w_i^+(q)}{\sqrt{r_{Li}}} \quad (25)$$

$$K_{Ri} = \frac{\sqrt{2}}{4} \mu \lim_{r_{Ri} \rightarrow 0} \frac{w_i^-(q) - w_i^+(q)}{\sqrt{r_{Ri}}}$$

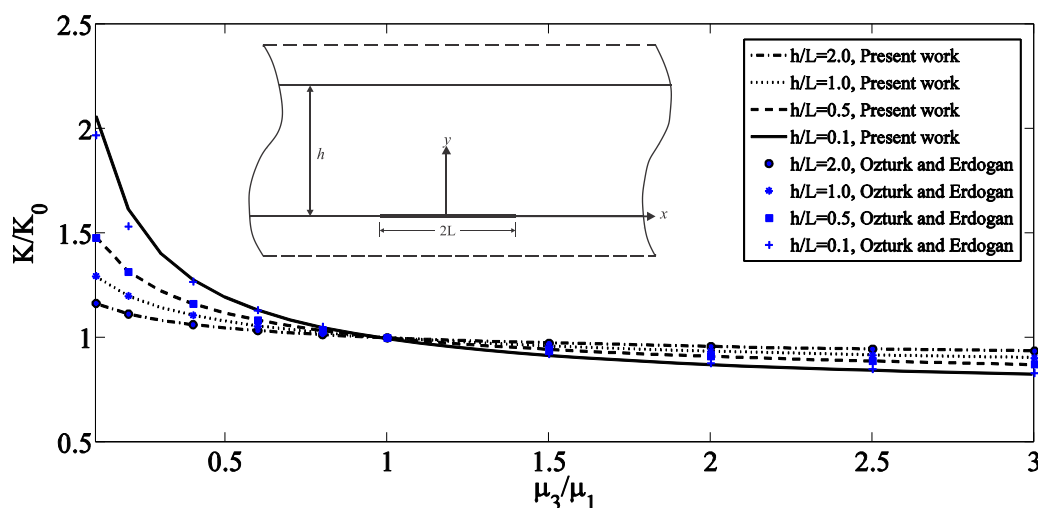
با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۱) در رابطه (۲۵) و استفاده از بسط تیلور و عملیات جبری، ضرایب شدت تنش برای ترک i ام بصورت زیر بدست می آیند.

$$K_{Li} = \frac{\mu}{2} \left[[\alpha'_i(-1)]^2 + [\beta'_i(-1)]^2 \right]^{\frac{1}{4}} g_{zi}(-1) \quad (26)$$

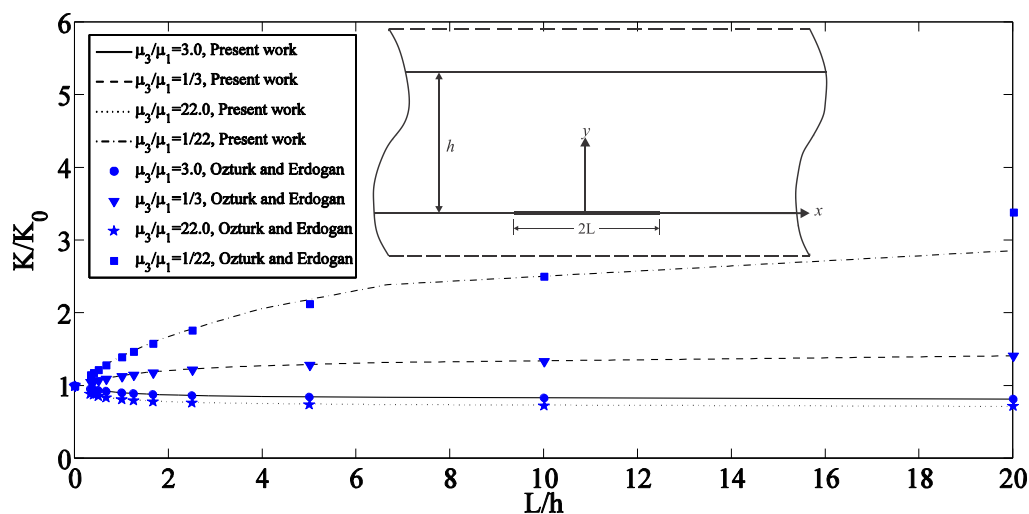
$$K_{Ri} = -\frac{\mu}{2} \left[[\alpha'_i(1)]^2 + [\beta'_i(1)]^2 \right]^{\frac{1}{4}} g_{zi}(1)$$

۴- نتایج و مثالهای عددی

با استفاده از حل نابجایی خارج صفحه‌ای بدست آمده مثال هایی از باریکه ساخته شده از مواد تابعی محدود شده به دو نیم صفحه ایزوتروپیک حاوی چندین ترک واقع در فصل مشترک ارائه شده است. برای بی بعد سازی ضرایب شدت تنش در مود سوم مکانیک شکست از $K_0 = \tau_0 \sqrt{L}$ که بیانگر ضریب شدت تنش در صفحه نامحدود حاوی یک ترک بطول $2L$ تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای در دور دست، استفاده شده است. در اولین مثال حل شده مطابق شکل (۲)، یک ترک با طول محدود در فصل مشترک باریکه و نیم صفحه الاستیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده K/K_0 بر حسب μ_3/μ_1 برای مقادیر مختلف h/L رسم شده است. همانطوریکه مشاهده می شود با افزایش نسبت مدول برشی μ_3/μ_1 ، ضرایب شدت تنش در نوکهای ترک کاهش می یابد. نتایج حاصله با نتایج بدست آمده توسط F. Erdogan و M. Ozturk [۴] مقایسه شده است که صحت نتایج بدست آمده را نشان می دهد.



شکل ۲- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب نسبت مدول برشی

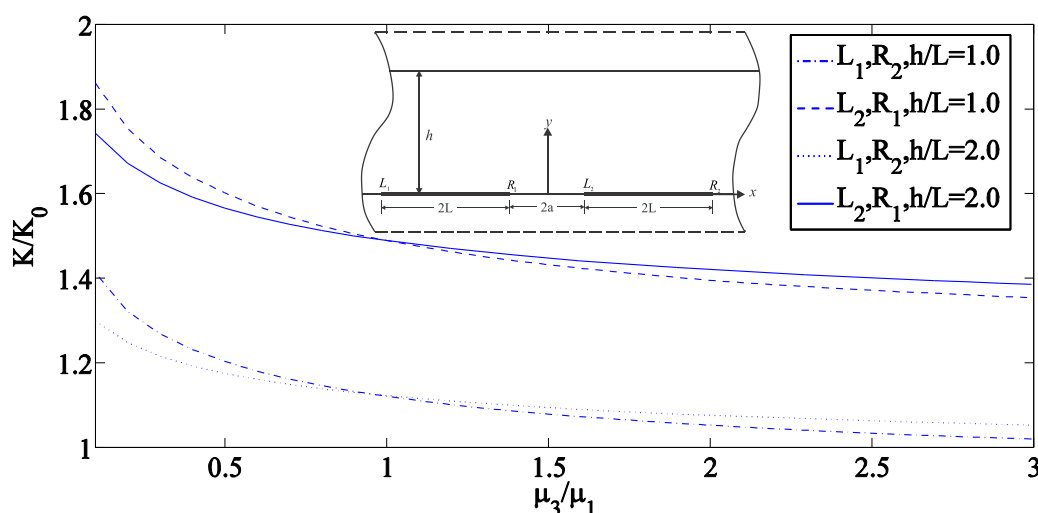


شکل ۳- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب طول ترک بی بعد

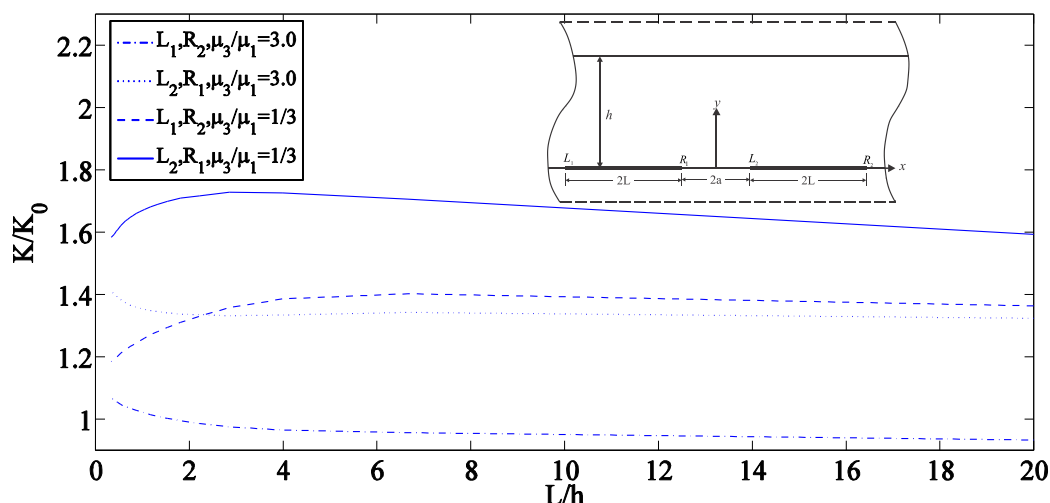
در شکل (۳) تغییرات ضرایب شدت تنش در نوکهای یک ترک واقع در فصل مشترک بر حسب طول بی بعد شده L/h نشان داده شده است. در این مثال ضخامت باریکه متغییر در نظر گرفته شده است. بطوریکه ملاحظه می‌شود برای $\mu_3 > \mu_1$ با کاهش ضخامت باریکه، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد در صورتیکه برای $\mu_1 > \mu_3$ رفتار متفاوتی مشاهده می‌گردد. همچنین برای $L/h = 0.0$ ، مقدار ضریب شدت تنش بی بعد شده یک می‌شود زیرا با افزایش h به سمت بی نهایت، مسأله به صفحه نامحدود ایزوتروپیک تبدیل می‌گردد. در این مثال نیز، نتایج بدست آمده با مرجع [۴] مقایسه و صحت سنجی شده است.

در شکل (۴) نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده بر حسب نسبت مدول برشی μ_3/μ_1 برای دو ترک همراستا واقع در فصل مشترک نشان داده شده است. همانند مثال حل شده برای یک ترک، در این حالت نیز همان رفتار ولی با مقادیر متفاوت برای ضرایب شدت تنش مشاهده می‌گردد. در این مسأله، طول هر دو ترک ثابت باقی مانده و نسبت فاصله دو نوک نزدیک ترکها از هم به نصف طول ترکها $a/L = 0.1$ در نظر گرفته شده است. به دلیل تقارن مسأله نسبت به محور y ضرایب شدت تنش در نوکهای R_1 با L_2 و هم چنین R_2 با L_1 با هم برابر می‌باشند. ملاحظه می‌شود که نوک های R_1 و L_2 بعلت نزدیک بودن به یکدیگر دارای اندر کنش بالاتری بوده، در نتیجه دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می‌باشند.

به عنوان آخرین مثال، دو ترک با طولهای مساوی واقع در فصل مشترک در نظر گرفته می‌شود. در این مثال تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده K/K_0 ، بر حسب L/h برای مقادیر متفاوت نسبت مدول برشی μ_3/μ_1 رسم شده است. در این مثال نیز مشابه مثال قبل، طول هر دو ترک ثابت باقی مانده و $a/L = 0.1$ می‌باشد. همانطوریکه از شکل (۵) ملاحظه می‌شود، ضرایب شدت تنش برای دو ترک واقع در فصل مشترک، نسبت به حالت یک ترک، دارای مقادیر بزرگتری می‌باشند و این به دلیل وجود اندرکنش بین دو ترک می‌باشد.



شکل ۴- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده بر حسب نسبت مدول برشی برای دو ترک همراستای واقع در فصل مشترک



شکل ۵- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده بر حسب طول ترک بی بعد شده برای دو ترک همراستای واقع در فصل مشترک

۵- نتیجه گیری

روش‌های تحلیلی مختلفی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط‌های تضعیف شده توسط ترک واقع در فصل مشترک مورد استفاده قرار می‌گیرند از جمله این روشها، می‌توان به روش توابع تنش مختلط، استفاده از تبدیلات انتگرالی و توابع گرین اشاره نمود. استفاده از حل نابجایی دارای این مزیت است که روش حل تابع تعداد ترکها نمی‌باشد. همچنین حل مسائل ترک با روش‌های توابع تنش مختلط و یا استفاده از تبدیلات انتگرالی از نوع مسائل شرط مرزی ترکیبی است ولی در روش توزیع نابجایی شرط مرزی تنها از نوع تغییر مکان بوده و مساله محیط همبند با شرایط مرزی ساده که حل آن به مراتب ساده تر از مساله مقدار مرزی ترکیبی است، انجام می‌شود. با توجه به مثال‌های حل شده نتایج زیر بدست می‌آیند:

۱. ضرایب شدت تنش بی بعد برای زمانیکه $\mu_3 > \mu_1$ است با افزایش ضخامت باریکه ساخته شده از مواد تابعی، افزایش می‌یابند و برای حالت $\mu_3 < \mu_1$ ، رفتار وارونی ملاحظه می‌گردد.
۲. ضرایب شدت تنش با میل کردن ضخامت باریکه به بی نهایت به مقدار یک نزدیک می‌شوند زیرا که در این حالت مساله به صفحه نامحدود ایزوتروپیک تبدیل می‌گردد.
۳. ضرایب شدت تنش برای نوک‌های نزدیک دو ترک واقع در فصل مشترک، بدلیل اندرکنش متقابل آنها بر یکدیگر نسبت به نوکهای دور بیشتر می‌باشد.
۴. ضرایب شدت تنش برای دو ترک واقع در فصل مشترک، نسبت به حالت یک ترک، دارای مقادیر بزرگتری می‌باشند و این به دلیل وجود اندرکنش بین دو ترک می‌باشد.

مراجع

- [1] Volterra, V., "Sur Pe'quilibre Des Carps Elastiques Multiplement Connexes", Annales Scientifiques De l'Ecole Normale Superiure, Paris, Series 3, Vol. 24, pp. 401-517, (1907).
- [2] Ashbaugh, N., "Stress Solution for Crack at an Arbitrary Angle to an Interface", International Journal Fracture, Vol. 11, pp. 205-219, (1975).
- [3] Grag, A.C., "Stress Distribution Near Periodic Cracks at the Interface of Two Bounded Dissimilar Orthotropic Half-planes", International Journal of Engineering, Vol. 19, pp. 1101-1114, (1981).
- [4] Ozturk, M., and Erdogan, F., "Anti-plan Shear Crack Problem in Bonded Materials with a Graded Interfacial Zone", International Journal of Engineering Science, Vol. 31, pp. 1641-1657, (1993).
- [5] Chen, Z. T., Karihaloo, B. L, and Yu, S. W., "A Griffith Crack Moving Along the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials", International Journal of Fracture, Vol. 91, pp. 197-203, (1998).
- [6] Das, S., and Patra, B., "Stress Intensity Factors for Moving Interfacial Crack between Bonded Dissimilar Fixed Orthotropic Layers", Computers and Structures, Vol. 69, pp. 459-472, (1998).
- [7] Li, X. F., and Wu, X. F., "A Moving Mode-III Crack at the Interface between Two Dissimilar Piezoelectric Materials", International Journal of Engineering Science, Vol. 38, pp. 1219-1234, (2000).
- [8] Wang, Y.S., and Gross, D., "Interaction of Harmonic Waves with a Periodic Array of Interface Cracks in a Multi-layered Medium: Anti-plane Case", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 4631-4655, (2001).
- [9] Lee, J. S., Kwon, S. M., Lee, K. Y., and Kwon, J. H., "Anti-plane Interfacial Yoffe-crack between a Piezoelectric and Two Orthotropic Layers", European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 21, pp. 483-492, (2002).
- [10] Bi, X.S., Cheng, J., and Chen, X. L., "Moving Crack for Functionally Grated Material in an Infinite Length Strip under Anti-plane Shear", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 39, pp. 89-97, (2003).
- [11] Ma, L., Wu, L.Z., Zhou, Z.G., and Zeng, T., "Crack Propagation in a Functionally Graded Strip under the Plane Loading", International Journal of Fracture Vol. 126, pp. 39-55, (2004).
- [12] Das, S., "Interaction of Moving Interface Collinear Griffith Cracks under Anti-plane Shear", International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 7880-7890, (2006).
- [13] Li, R., and Kardomateas, G. A., "The Mode III Interface Crack in Piezo-electro-magneto-elastic Dissimilar Bimaterials", Vol. 73, pp. 220-227, (2006).

- [14] Cheng, Z., "Crack Propagating in Functionally Graded Coating with Arbitrarily Distributed Material Properties Bonded to Homogeneous Substrate", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, pp. 437-446, (2010).
- [15] Cheng, Z., Gao, D., and Zhong, Z., "A Moving Interface Crack between Two Dissimilar Functionally Graded Strips under Plane Deformation with Integral Equation Methods", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, pp. 267-273, (2012).
- [16] Bagheri, R., and Ayatollahi, M., "Multiple Moving Cracks in a Functionally Graded Strip", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 4677-4686, (2012).
- [17] Korsunsky, A. M., and Hills, D. A., "The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei", Part C, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 210, No. 1, pp. 23-31, (1996).
- [18] Erdogan, F., Gupta, G. D., and Cook, T. S., "Numerical Solution of Singular Integral Equations, Method of Analysis and Solution of Crack Problems", Edited by G. C. Sih, Noordhoof, Leyden, Holland, (1973).
- [19] Faal, R. T., Fotuhi, A. R., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., "Antiplane Stress Analysis of an Isotropic Wedge with Multiple Cracks", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4535-4550, (2004).

فهرست نمادهای انگلیسی

ضرایب ظاهر شده در تبدیل فوریه تغییر مکان $w(x, y)$	$A_i(s), i = 1, 2, 3, 4$
تابع دانسیته نابجایی بر حسب متغیر بی بعد	$B_{zj}(p)$
بردار برگرز	b_z
تابع محدود و پیوسته	$g_{zj}(p)$
تابع پله‌ای	$H(x)$
ضخامت باریکه ساخته شده از ماده تابعی	h
ضرایب شدت تنش نوکهای سمت راست و چپ ترک	K_R, K_L
کرنل معادله انتگرالی	$K_{ij}(s, p)$
نصف طول ترک i ام	l_i
تعداد نقاط روی ترک	m
تعداد ترک در فصل مشترک	N
محل اعمال نابجایی	p
محل بررسی تنش	q
متغیر تبدیل فوریه	s
مولفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x, y	u, v

مولفه جابجایی خارج صفحه‌ای	$w(x, y)$
تبدیل فوریه نامحدود تغییر مکان $w(x, y)$	$\hat{w}(s, y)$
تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک	$w^+_i(q), w^-_i(q)$
مولفه تنش خارج صفحه‌ای	$\sigma_{zy}(x, y)$
ثابت ماده تابعی	β
تابع دلتای دیراک	δ_{ij}
ثابت الاستیسیته نیم صفحه ایزوتروپیک پایینی	μ_1
ثابت الاستیسیته نیم صفحه ایزوتروپیک بالایی	μ_3

Abstract

In this paper, analyses of several finite cracks in bonded materials with a graded interfacial zone were studied. The distributed dislocation technique is used to carry out stress analysis for two elastic half planes bonded through a non-homogeneous interfacial zone under anti-plane loading. The solution is obtained by means of Fourier transform method. The stress components reveal the familiar Cauchy singularity at the location of dislocation. Finally several examples are solved and the numerical results for the stress intensity factor are obtained. The influences of the geometric parameters, the thickness of the functionally graded strip and the crack size have significant effects on the stress intensity factors of crack tips which are displayed graphically.