

# ارتعاشات غیرخطی تیر بر بستر الاستیک غیرخطی تحت بارهای حرارتی بر اساس روش اغتشاشات هوموتوپی

موسی رضائی<sup>۱</sup>

استاد

مسعود مینائی<sup>۲</sup>

دانشجوی دکترا

ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ تیر اولر- برنولی با تکیه‌گاه‌های نامتحرک واقع بر بستر الاستیک غیرخطی و تحت بارهای حرارتی بررسی شده است. با استفاده از اصل همیلتون، معادله حاکم بر سیستم استخراج می‌شود. با اعمال روش گالرکین، معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی سیستم به دست آمده و به دلیل بزرگ بودن ضریب جمله غیرخطی، روش حل ترکیبی اغتشاشات و هوموتوپی اعمال شده و دقت روش مذکور نیز مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی، نتایج به دست آمده از حل حاضر با نتایج موجود در ادبیات فن مقایسه شده است. تأثیر ضرایب سفتی بستر، اثر بارهای حرارتی و نیز تأثیر مودهای ارتعاشی بر فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی سیستم مورد تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های راهنما: تیر اولر- برنولی، ارتعاشات با دامنه بزرگ، روش اغتشاشات هوموتوپی، بستر الاستیک غیرخطی، بار حرارتی

## ۱- مقدمه

تیر یکی از اجزای اساسی در سازه‌های مهندسی می‌باشد که در کاربردهای سازه‌ای مختلفی استفاده می‌شود. بعلاوه، سازه‌هایی نظیر تیغه‌های روتور هلی‌کوپتر، آنتن‌های فضاپیما، ماهواره‌ها، بال‌های هواپیما، لوله‌های تفنگ، بازوهای روبات، ساختمان‌های بلند مرتبه، پل‌های طویل و سازه‌های پیچیده‌تر می‌توانند به عنوان شبه‌تیر مدل‌سازی شوند. بنابراین مطالعه پاسخ استاتیکی و دینامیکی تئوری و تجربی این اجزای سازه‌ای تحت شرایط بارگذاری مختلف، به فهم و توضیح رفتارهای پیچیده‌تر سازه‌های واقعی تحت شرایط بارگذاری مشابه، کمک خواهد کرد. اطلاع از مشخصه‌های ارتعاشی یک سیستم، مانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی آن لازمه شناخت آن سیستم می‌باشد. محاسبه مشخصه‌های ارتعاشی، برای یک سیستم خطی آسان است. اما در عمل بیشتر سیستم‌های مورد استفاده ماهیت غیرخطی دارند.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [m\\_rezaee@tabrizu.ac.ir](mailto:m_rezaee@tabrizu.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [masoud\\_minaei@tabrizu.ac.ir](mailto:masoud_minaei@tabrizu.ac.ir)

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۱/۲۴، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۴/۲۲

بنابراین محققان همیشه درصدد دستیابی به آن دسته از روش‌های تئوری بوده‌اند که منجر به نتایج واقعی‌تر شده و بدون صرف‌نظر کردن از خصوصیات غیرخطی سیستم‌ها، بتوانند رفتار ارتعاشی آنها را نیز با دقت مناسبی پیش‌بینی نمایند.

ارائه روش تحلیلی برای مسایل غیرخطی بسیار دشوار می‌باشد، بنابراین معمولاً از روش‌های عددی و یا حل تقریبی برای تحلیل این معادلات استفاده می‌شود. He [۴-۱] در تحقیقات گسترده‌ای روش‌های مختلفی به منظور حل تقریبی معادلات غیرخطی ارائه کرده است. بر اساس تحقیقات انجام شده، از روش‌های مختلف حل تقریبی معادلات غیرخطی، می‌توان به روش‌های اغتشاشات [۵،۶]، هوموتوپي [۷]، روش‌های ترکیبی اغتشاشات- هوموتوپي [۸،۹]، فرمول‌بندی فرکانس- دامنه [۱۰]، روش بالانس انرژی [۱۱،۱۲]، روش هارمونیک بالانس [۱۳]، روش تغییرات اصلاح شده [۱۴]، روش ماکزیمم-مینیمم [۱۵،۱۶] و نیز سایر روش‌ها [۱۷-۲۰]، اشاره کرد. برای استفاده از روش‌های کلاسیک اغتشاشات، ضریب جمله غیرخطی بایستی کوچکتر از واحد بوده و از این رو قابل اعمال به سیستم‌های با رفتار غیرخطی قوی نمی‌باشد. روش اغتشاشات- هوموتوپي این محدودیت از لحاظ اندازه ضریب جمله غیرخطی را برطرف کرده است. در یکی از تحقیقات انجام شده توسط Ramezani و همکاران [۲۱]، رفتار ارتعاشات غیرخطی تیر با دامنه نوسانات بزرگ مورد بررسی قرار گرفته است.

آن‌ها با استفاده از اصل همیلتون معادله حاکم بر سیستم را استخراج کرده و سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ سیستم را با به کارگیری دو جمله تصحیح به دست آورده‌اند. در حل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، ضریب جمله غیرخطی می‌بایست کوچکتر از واحد باشد. اما از آنجایی که در معادله استخراج شده در تحقیق مذکور، ضریب جمله غیرخطی برای تیر آزمایشگاهی بسیار بزرگتر از واحد به دست می‌آید، بنابراین استفاده از روش اغتشاشات برای تحلیل، جواب‌های غیر واقعی را در اختیار خواهد گذاشت و نمی‌توان از این روش استفاده نمود.

Pirbodaghi و همکاران [۲۲] با استفاده از روش تحلیلی هوموتوپي رفتار غیرخطی تیر را بررسی کرده و عبارتی مناسب برای بیان فرکانس غیرخطی آن به دست آوردند. Sedighi و همکاران [۲۳] از این روش برای آنالیز ارتعاشات تیری با میرایی غیرخطی استفاده نموده و به نتایج قابل قبولی نیز دست یافتند. Sarma و همکاران [۲۴] فرمول‌های المان محدود گوناگونی از ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ یک تیر دو سر مفصل را بحث کرده و فرمول تحلیلی را بر اساس روش ریلی- ریتز ارائه دادند. Poorjamshidian و همکاران [۲۵] ارتعاشات غیرخطی تیر با در نظر گرفتن جملات غیرخطی درجه پنجم را مورد مطالعه قرار داده و از روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ فرکانسی تیر را مورد بررسی قرار دادند. Wang و همکاران [۲۶] اثر حرارت بر ارتعاش و پایداری نانو لوله‌های کربنی حامل سیال را با به کارگیری روش تفاضل مربعی<sup>۲</sup> بررسی کردند. همانگونه که توضیح داده شد، روش‌های معمول اغتشاشات از جمله روش مقیاس‌های چندگانه مبتنی بر فرض کوچک بودن ضریب جمله غیرخطی است. در حالی که در مسأله حاضر، این ضریب بسیار بزرگتر از واحد می‌باشد. از این رو استفاده از روش‌های اغتشاشات منجر به حل معتبری برای سیستم نخواهد شد.

<sup>1</sup>Modified Variational Approach

<sup>2</sup>Differential Quadrature Method

در مقاله حاضر، رفتار ارتعاشی تیر اولر- برنولی با تکیه‌گاه‌های نامتحرک واقع بر بستر الاستیک غیرخطی و تحت اثر بارهای حرارتی مورد مطالعه قرار گرفته است. تحلیل انجام شده در مقاله حاضر بر مبنای حالت پایای حرارتی می‌باشد. بدین معنی که تغییرات درجه حرارت در حالت پایا، منجر به ایجاد نیروی محوری در تیر می‌شود. بنابراین تأثیر تغییر درجه حرارت تیر به صورت نیروی محوری ظاهر می‌شود. با استفاده از روابط کرنش- جابجایی ون- کارمن و نیز به کارگیری اصل همیلتون، معادله حاکم بر سیستم استخراج و با اعمال روش گالرکین، معادله حاکم به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده است. در ادامه و به منظور حل معادله دیفرانسیل غیرخطی حاصل، روش حل تحلیلی بر اساس ترکیب روش اغتشاشات و هوموتوپی اعمال می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده به ازای بازه وسیعی از ضریب جمله غیرخطی، پاسخ را با دقت مناسبی در اختیار می‌گذارد.

برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اولر- برنولی واقع بر بستر الاستیک غیرخطی، فرکانس غیرخطی به دست آمده از تقریب مرتبه اول روش ارائه شده با دقت خوبی با فرکانس غیرخطی حاصل از حل دقیق هم‌خوانی دارد. به منظور تأیید صحت نتایج روش ترکیبی اغتشاشات و هوموتوپی، اولاً پاسخ زمانی حاصل از تقریب مرتبه اول این روش، به ازای دامنه‌های ارتعاشی مختلف با پاسخ به دست آمده از حل عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم مورد مقایسه قرار گرفته و ثانیاً برای حالتی که ضریب جمله غیرخطی کوچکتر از واحد باشد، نتایج به دست آمده در تحقیق حاضر با سایر نتایج موجود در ادبیات فن مقایسه شده است. همچنین اثر ضرایب سفتی بستر، بارهای حرارتی و نیز تأثیر موده‌های ارتعاشی بر فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی سیستم مورد تحلیل قرار گرفته است.

## ۲- فرمول‌بندی مسأله و استخراج معادله غیرخطی حرکت

در شکل (۱) تیر اولر- برنولی با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگیردار- یکسر مفصل به طول  $L$ ، مدول الاستیسیته  $E$ ، جرم واحد حجم  $\rho$ ، ممان سطح  $I$ ، سطح مقطع  $A$ ، و با ضرایب سفتی بستر خطی و غیرخطی  $K_L$  و  $K_{NL}$  نشان داده شده است.

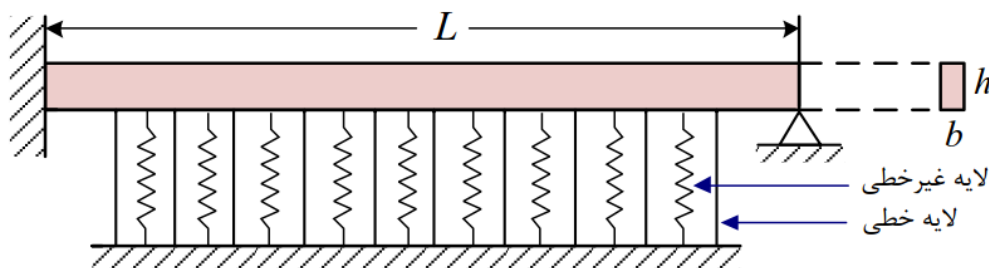
بر اساس مدل کیرشهف با مد نظر قرار دادن مدل تیر اوپلر- برنولی، مؤلفه‌های بارهای جابجایی در راستای محورهای مختصات  $x$  و  $z$  یعنی  $\tilde{u}(x, z, t)$  و  $\tilde{w}(x, z, t)$  به صورت رابطه (۱) بیان می‌شوند [۲۴].

$$\tilde{u}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tilde{w}(x, z, t) = w(x, t) \quad (1)$$

که در آن  $u(x, t)$  و  $w(x, t)$  مؤلفه‌های جابجایی طولی و عرضی در صفحه میانی تیر و در لحظه  $t$  می‌باشند. با استفاده از روابط کرنش- جابجایی غیرخطی ون- کارمن<sup>۱</sup> به منظور در نظر گرفتن دامنه نوسانات بزرگ تیر و قانون سازگاری الاستیک<sup>۲</sup>، رابطه غیرخطی کرنش- جابجایی  $(\epsilon_x)$  و تنش نرمال  $(\sigma_x)$  برای تیر، معادله (۱) به صورت معادله (۲) به دست می‌آید.

<sup>1</sup> Von Karman

<sup>2</sup> Elastic Constitutive Law



شکل ۱- شماتیک تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل واقع بر بستر الاستیک غیرخطی

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

با صرف نظر کردن از اثرات اینرسی محوری، انرژی کرنشی و انرژی جنبشی سیستم را می‌توان با استفاده از روابط (۳) و (۴) به دست آورد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4)$$

با به کارگیری اصل همپلتون، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاش غیرخطی تیر اولر- برنولی به صورت معادلات (۵) و (۶) به دست می‌آید.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right) = 0 \quad (6)$$

که در آن Q از معادله (۷) تعریف می‌شود.

$$Q = -k_L w - k_{NL} w^3 \quad (7)$$

در رابطه (۷)  $k_L$  و  $k_{NL}$  به ترتیب ضرایب سفتی خطی و غیرخطی بستر می‌باشند. با انتگرال‌گیری از رابطه (۶) و جایگذاری آن در رابطه (۵)، معادله حرکت از رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - F_{Th} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{EA}{2L} \left( \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_L w + k_{NL} w^3 + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

که در رابطه اخیر،  $F_{Th}$  نیروی محوری کششی یا فشاری ناشی از بارهای حرارتی بوده و مقدار آن بر اساس تئوری الاستیسیته حرارتی، از رابطه (۹) محاسبه می‌شود [۲۶].

$$F_{Th} = -\frac{EA}{1-2\nu} \alpha_x \Delta T \quad (9)$$

که  $\alpha_x$  معرف ضریب انبساط حرارتی در راستای محور  $x$ ،  $\nu$  نسبت پواسون و  $\Delta T$  تغییرات دمایی محیط می‌باشد.

### ۳- بی‌بعدسازی معادله حرکت

به منظور کسب نتایج کلی‌تر، متغیرهای بی‌بعد را مطابق روابط (۱۰) تعریف می‌کنیم.

$$\hat{t} = \omega_n t, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{w} = \frac{w}{L} \quad (10)$$

$$\hat{F}_{Th} = \frac{\alpha_x \Delta T}{1-2\nu} \left(\frac{L}{r}\right)^2, \quad \hat{k}_L = \frac{k_L L^2}{EA} \left(\frac{L}{r}\right)^2, \quad \hat{k}_{NL} = \frac{k_{NL} L^4}{EA} \left(\frac{L}{r}\right)^2$$

که در آن  $r = \sqrt{I/A}$  معرف شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر،  $n$  معرف شماره مود ارتعاشی و  $\omega_n$  فرکانس طبیعی  $n$ ام سیستم خطی متناظر بوده و مقدار آن از رابطه (۱۱) به دست می‌آید.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (11)$$

که در آن  $\beta_n L$  مقادیر ویژه تیر می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۱) در معادله دیفرانسیل (۸)، معادله (۱۲) به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} - \hat{F}_{Th} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \left( \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \hat{k}_L \hat{w} + \hat{k}_{NL} \hat{w}^3 + (\beta_n L)^4 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} = 0 \quad (12)$$

با توجه به این‌که معادله اخیر یک معادله دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد و جواب تحلیلی برای آن وجود ندارد، بنابراین برای حل آن از روش گالرکین استفاده می‌کنیم. برای استفاده از روش گالرکین جواب معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۲) در حالتی که تیر فقط در یک مود خاص نوسان کند، به صورت  $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \phi_n(\hat{x}) q(\hat{t})$  تقریب زده می‌شود که در آن توابع مقایسه‌ای نرمالیزه شده مود  $n$ ام هستند که شرایط مرزی حاکم بر سیستم را ارضا می‌کنند [۱۹].

برای تیر اولر- برنولی با شرایط مرزی یکسرگیردار- یکسر مفصل، تابع مقایسه‌ای  $\phi_n(\hat{x})$  را می‌توان مطابق شکل مودهای خطی نرمال آن که از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود، در نظر گرفت:

$$\phi_n(\hat{x}) = \cosh(\beta_n L^2 \hat{x}) - \cos(\beta_n L^2 \hat{x}) - \frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)} \left( \sinh(\beta_n L^2 \hat{x}) - \sin(\beta_n L^2 \hat{x}) \right) \quad (13)$$

با فرض این‌که سیستم فقط در یکی از مودهای ارتعاشی اول، دوم و یا سوم نوسان کند، مقادیر ویژه تیر به ترتیب  $\beta_1 L = 3/9266$ ،  $\beta_2 L = 7/0686$  و  $\beta_3 L = 10/2102$  به دست می‌آید.

با توجه به روش گالرکین و با جایگذاری جواب فرضی در معادله (۱۲) و ضرب رابطه حاصل در  $\phi_n(\hat{x})$  و انتگرال گیری از آن در طول تیر، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر قسمت زمانی رفتار ارتعاشی تیر از رابطه (۱۴) به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 & (\beta_n L)^4 \left( \int_0^1 \phi^2 d\hat{x} \right) \ddot{q} + \\
 & \left\{ \left( \int_0^1 \phi \phi^{(4)} d\hat{x} \right) - \frac{\alpha_x \Delta T}{1-2\nu} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \left( \int_0^1 \phi \phi'' d\hat{x} \right) + \frac{k_L L^2}{EA} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \left( \int_0^1 \phi^2 d\hat{x} \right) \right\} q + \\
 & \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \left( \int_0^1 \phi'^2 d\hat{x} \right) \left( \int_0^1 \phi \phi'' d\hat{x} \right) + \frac{k_{NL} L^4}{EA} \left( \frac{L}{r} \right)^2 \left( \int_0^1 \phi^4 d\hat{x} \right) \right\} q^3 = 0
 \end{aligned} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) را می توان به شکل فشرده به صورت رابطه (۱۵) بازنویسی می شود.

$$\ddot{q} + \omega_L^2 q + \varepsilon q^3 = 0 \quad (15)$$

که در آن پارامترهای بی بعد  $\omega_L^2$  و  $\varepsilon$  از روابط (۱۶) قابل محاسبه اند.

$$\begin{aligned}
 \omega_L^2 &= \frac{f_4 EI(1-2\nu) - f_2 EAL^2 \alpha_x \Delta T + f_1 k_L L^4 (1-2\nu)}{f_1 EI \beta_n^4 L^4 (1-2\nu)} \\
 \varepsilon &= \frac{-EA f_2 f_3 + 2f_5 k_{NL} L^4}{2f_1 EI \beta_n^4 L^2}
 \end{aligned} \quad (16)$$

در روابط اخیر:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \int_0^1 \phi^2 d\hat{x}, & f_2 &= \int_0^1 \phi \phi'' d\hat{x}, & f_3 &= \int_0^1 \phi'^2 d\hat{x}, \\
 f_4 &= \int_0^1 \phi \phi^{(4)} d\hat{x}, & f_5 &= \int_0^1 \phi^4 d\hat{x}
 \end{aligned} \quad (17)$$

با فرض شرایط اولیه جابجایی خالص، شرایط اولیه حاکم بر معادله (۱۵) به صورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته می شود.

$$q(0) = a_0 = \frac{W_{\max}}{L}, \quad \dot{q}(0) = 0 \quad (18)$$

که در آن  $W_{\max}$  حداکثر خیز تیر می باشد.

مشخصات تیر مورد نظر در مقاله حاضر، مطابق جدول (۱) می باشد.

جدول ۱- مشخصات تیر مورد نظر

مقدار	مشخصه
۳/۹	b (mm)
۶/۴	h (mm)
۴۸۵	L (mm)
۷۸۸۰	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
۱۹۰	E (GPa)
$1/2 \times 10^{-5}$	$\alpha_x$ (K <sup>-1</sup> )
۰/۳	$\nu$

تاکنون روش‌های مختلفی برای حل تقریبی معادله (۱۵) ارائه شده است. با این وجود عمده این روش‌ها فقط برای حالتی که ضریب جمله غیرخطی ( $\varepsilon$ ) کوچکتر از واحد باشد، پاسخ تقریبی مناسبی را در اختیار می‌گذارد. این ضریب به عوامل مختلفی مانند شرایط تکیه‌گاهی تیر، طول تیر، شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر و نیز فرکانس‌های طبیعی تیر وابسته بوده و در عمل تحت شرایط متعددی ضریب اخیر برای تیرها بسیار بزرگتر از واحد می‌باشد. به عنوان مثال برای تیر یکسرگیردار - یکسر مفصل با مشخصات مندرج در جدول (۱)، مقدار  $\varepsilon = 8513/8$  به دست می‌آید. از این رو به کارگیری روش‌های معمول اغتشاشات که مبتنی بر  $\varepsilon$  کوچکتر از واحد می‌باشند، منجر به استخراج نتایج غیرمعتبر برای سیستم خواهند شد. در مقاله حاضر برای دستیابی به یک حل مجانبی معتبر، با استفاده از روش ترکیبی اغتشاشات هوموتوپی، پاسخ تیر به ازای هر مقدار مثبت دلخواه از ضریب جمله غیرخطی استخراج می‌شود.

#### ۴- استخراج پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش اغتشاشات هوموتوپی

به منظور محاسبه پاسخ معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۵) هوموتوپی را مطابق معادله (۱۹) تشکیل می‌دهیم [۲].

$$L[v] - L[q_0] + pL[q_0] + p\varepsilon v^3 = 0 \quad (19)$$

که در آن تابع  $v$  و عملگر  $L[q]$  از روابط (۲۰) تعریف می‌شود.

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots$$

$$q = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

$$L[q] = \ddot{q} + \omega_L^2 q \quad (20)$$

مطابق روش هوموتوپی با متحد قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف  $p$  در طرفین تساوی معادله (۱۹)، معادلات خطی (۲۱) و (۲۲) مطابق زیر به دست می‌آید.

$$L[v_0] - L[q_0] = 0, \quad v_0(0) = a_0, \quad \dot{v}_0(0) = 0 \quad (21)$$

$$L[v_1] + L[q_0] + \varepsilon v_0^3 = 0, \quad \dot{v}_1(0) = v_1(0) = 0 \quad (22)$$

با فرض  $v_0(t) = q_0(t)$  جواب معادله (۱۸) که به عنوان پاسخ خطی متناظر با معادله غیرخطی (۱۹) شناخته می‌شود از رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

$$v_0(t) = q_0(t) = a_0 \cos \omega_{NL} t \quad (23)$$

که در آن فرکانس سیستم غیرخطی اصلی است. با جایگذاری پاسخ به دست آمده در معادله (۲۲)، معادله (۲۴) به دست می‌آید.

$$\ddot{v}_1 + \omega_L^2 v_1 + a_0 \left( -\omega_{NL}^2 + \omega_L^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \cos \omega_{NL} t + \frac{\varepsilon a_0^3}{4} \cos 3\omega_{NL} t = 0 \quad (24)$$

با توجه به شرایط اولیه در نظر گرفته شده برای معادله فوق در رابطه (۲۲)، جواب عمومی معادله برابر صفر بوده و برای محاسبه جواب خصوصی معادله فوق با استفاده از روش اغتشاشات هوموتوپی، به معادله (۲۵) خواهیم رسید:

$$v_1(t) = \int_0^t \sin(\omega_L \tau - t) \left[ a_0 \left( -\omega_{NL}^2 + \omega_L^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \cos \omega_{NL} t + \frac{\varepsilon a_0^3}{4} \cos 3\omega_{NL} t \right] d\tau =$$

$$\left( -\omega_{NL}^2 + \omega_L^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \frac{a_0}{\omega_{NL}^2 - \omega_L^2} (\cos \omega_{NL} t - \cos \omega_L t) +$$

$$\frac{\varepsilon a_0^3}{4(9\omega_{NL}^2 - \omega_L^2)} (\cos 3\omega_{NL} t - \cos \omega_L t) \quad (25)$$

مقدار  $\omega_{NL}$  را می‌توان با استفاده از روش‌های مختلف باقیمانده‌های وزنی مانند روش حداقل مربعات، روش کولوکیشن<sup>۱</sup> و نیز روش گالرکین به دست آورد. در مقاله حاضر از روش ساده‌تری جهت محاسبه فرکانس غیرخطی سیستم استفاده می‌شود به این صورت که به منظور حذف جمله سکولار<sup>۲</sup> از معادله اخیر، ضریب جمله  $\cos \omega_L t$  را برابر صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه معادله (۲۶) به دست می‌آید.

$$-\left( -\omega_{NL}^2 + \omega_L^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \frac{a_0}{\omega_{NL}^2 - \omega_L^2} - \frac{\varepsilon a_0^3}{4(9\omega_{NL}^2 - \omega_L^2)} = 0 \quad (26)$$

که از حل معادله اخیر، فرکانس غیرخطی سیستم از رابطه (۲۷) قابل محاسبه است.

$$\omega_{NL} = \sqrt{\frac{(10\omega_L^2 + 7\varepsilon a_0^2 + \sqrt{64\omega_L^4 + 104\varepsilon a_0^2 \omega_L^2 + 49\varepsilon^2 a_0^4})}{18}} \quad (27)$$

با استفاده از رابطه فوق پاسخ تقریب مرتبه اول روش اغتشاشات هوموتوبی را می‌توان با توجه به معادله (۲۲) به صورت معادله (۲۸) بازنویسی کرد.

$$v_1(t) = \left( -\omega_{NL}^2 + \omega_L^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a_0^2 \right) \frac{a_0}{\omega_{NL}^2 - \omega_L^2} \cos \omega_{NL} t + \frac{\varepsilon a_0^3}{4(9\omega_{NL}^2 - \omega_L^2)} \cos 3\omega_{NL} t \quad (28)$$

بنابراین اگر تقریب مرتبه اول مطلوب باشد، پاسخ سیستم با توجه به رابطه (۲۰) به صورت رابطه (۲۹) به دست می‌آید.

$$q(t) = v_0(t) + v_1(t) \quad (29)$$

با توجه به معادله (۲۷)، پرپود نوسانات برای تقریب مرتبه اول از رابطه (۳۰) محاسبه می‌شود.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{NL}} \quad (30)$$

با تحلیل کیفی سیستم‌های کانسرواتو و با انتگرال‌گیری از منحنی تراز در صفحه فاز به ازای یک تراز انرژی کل دلخواه، نایفه مقدار دقیق پرپود سیستم را به دست آورده است. پس از عملیات ریاضی پرپود سیستم از معادله (۳۱) به دست می‌آید [۶].

$$T_{ex} = \frac{4}{\sqrt{\omega_L^2 + \varepsilon a_0^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) \quad (31)$$

<sup>1</sup> Collocation

<sup>2</sup> Secular Term



که عبارت  $F(\frac{\pi}{2}, \kappa)$ ، انتگرال بیضوی کامل نوع اول می‌باشد و از رابطه (۳۲) به دست می‌آید.

$$F(\frac{\pi}{2}, \kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \quad (32)$$

که در آن ثابت  $\kappa$  از معادله (۳۳) تعریف می‌شود.

$$\kappa = \sqrt{\frac{\varepsilon a_0^2}{2(\omega_L^2 + \varepsilon a_0^2)}} \quad (33)$$

به منظور امکان مقایسه نتایج، درصد خطای نسبی پیروی نوسانات سیستم،  $RE(\%)$ ، به صورت رابطه (۳۴) تعریف می‌شود [۱۷].

$$RE(\%) = \left| \lim_{\varepsilon a_0^2 \rightarrow \infty} \frac{T - T_{ex}}{T_{ex}} \right| \times 100 \quad (34)$$

## ۵- پاسخ زمانی سیستم و صحنه‌سنجی نتایج

در این بخش، دقت و کارایی روش تحلیلی ارائه شده برای محاسبه فرکانس غیرخطی و پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور از تیری با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی ارائه شده در جدول (۱) استفاده می‌شود.

در جدول (۲) درصد خطای نسبی پیروی نوسانات سیستم با توجه به معادلات (۲۷) و (۳۰-۳۴) برای دو روش حل، ارائه شده و نتایج روش اغتشاشات به ازای دامنه نوسانات مختلف مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که درصد خطای نسبی ماکزیمم برای تقریب مرتبه اول روش اغتشاشات هوموتوپی، برابر ۴/۱٪ می‌باشد. همانطور که از نتایج مشاهده می‌شود با افزایش دامنه نوسانات روش اغتشاشات هوموتوپی با دقت بسیار مناسبی، رفتار سیستم را پیش‌بینی می‌نماید.

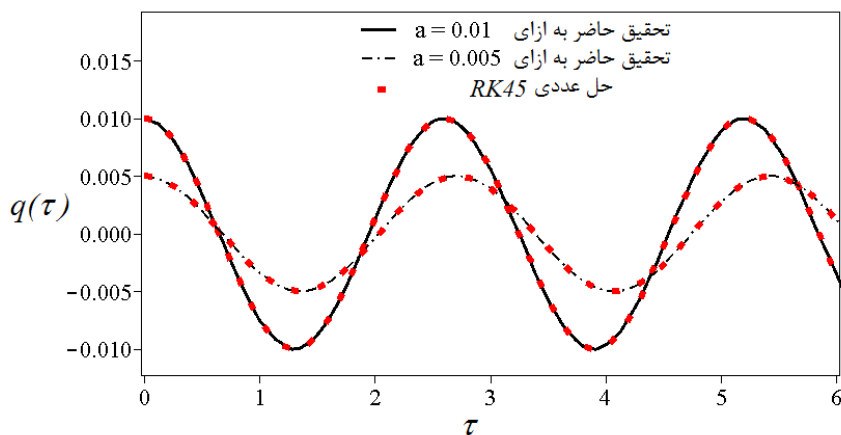
برای نشان دادن دقت و کارایی تقریب مرتبه اول روش اغتشاشات هوموتوپی، پاسخ تیر در نقطه دارای خیز ماکزیمم یعنی در فاصله  $L = 0.5809$  از سر گیردار آن با استفاده از روش اغتشاشات هوموتوپی به دست آمده و نتایج با حل عددی به دست آمده از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم مورد مقایسه قرار گرفته است. شکل (۲) پاسخ تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل که در مود ارتعاشی اول نوسان می‌کند، به ازای دامنه‌های ارتعاشی ۰/۰۱ و ۰/۰۰۵ و نیز با در نظر گرفتن ضرایب سفتی خطی و غیرخطی بی‌بعد بستر الاستیک،  $\hat{k}_L = 1000$  و  $\hat{k}_{NL} = 10000$  را نشان می‌دهد. برای تیر با مشخصات مذکور،  $\omega_L = 2/282$  و  $\varepsilon = 8545$  ( $\varepsilon \gg 1$ ) به دست می‌آید. همانگونه که از شکل (۲) دیده می‌شود، پاسخ‌های به دست آمده از تقریب مرتبه اول روش اغتشاشات هوموتوپی، حل عددی را با دقت بسیار خوبی دنبال می‌کند.

به منظور صحنه‌سنجی برای حالتی که ضریب جمله غیرخطی کوچکتر از واحد باشد، نتایج به دست آمده در تحقیق حاضر با نتایج حاصل از تحقیق Ramezani و همکاران [۲۱] در شکل (۳) مورد مقایسه قرار گرفته است.

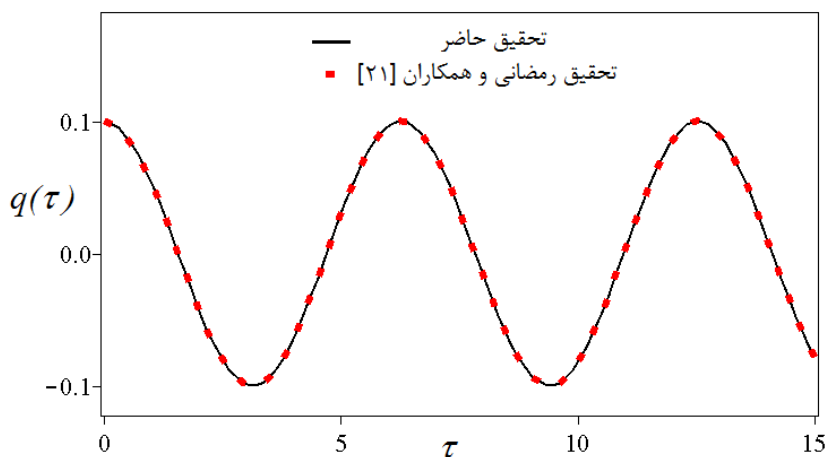
**جدول ۲- مقایسه درصد خطای نسبی پیروید نوسانات به ازای مقادیر مختلف  $\varepsilon a_0^2$**

برای تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل

مقدار $\varepsilon a_0^2$	درصد خطای نسبی پیروید نوسانات، RE (%), برای تقریب مرتبه اول از روش اغتشاشات هموتوپی
۱	۰/۷۵
۱۰	۳/۱۸
۱۰۰	۳/۹۹
۱۰۰۰	۴/۰۹
۱۰۰۰۰	۴/۱



**شکل ۲- مقایسه پاسخ حاصل از روش اغتشاشات هموتوپی با حل عددی برای تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل به ازای دامنه‌های ارتعاشی مختلف**



**شکل ۳- مقایسه پاسخ حاصل از روش اغتشاشات هموتوپی با پاسخ ارائه شده در مرجع [۲۱]**

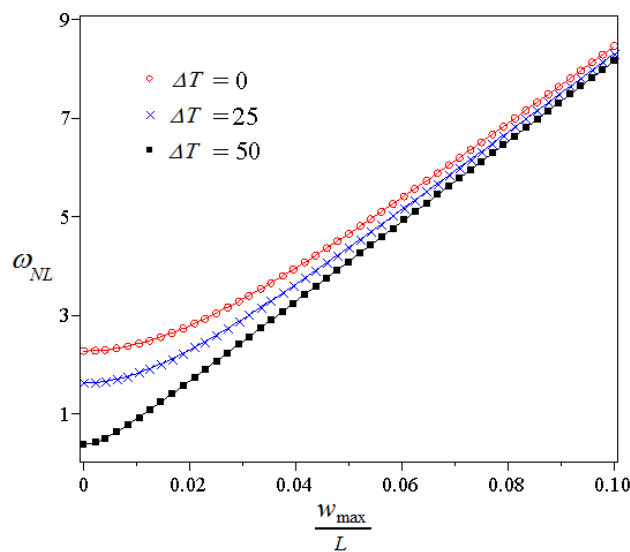
برای تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل

برای حالتی که  $\omega_L = 1$  و  $\varepsilon = 0.5$  باشد، نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر با دقت بسیار خوبی، نتایج حاصل از مرجع [۲۱] را دنبال می‌کند. با این وجود همانگونه که قبلاً اشاره شد، برای تیر واقعی مقدار ضریب جمله غیرخطی بسیار بزرگتر از واحد به دست می‌آید و از این رو روش‌های معمول اغتشاشات قادر به تحلیل صحیح این مسائل نمی‌باشند.

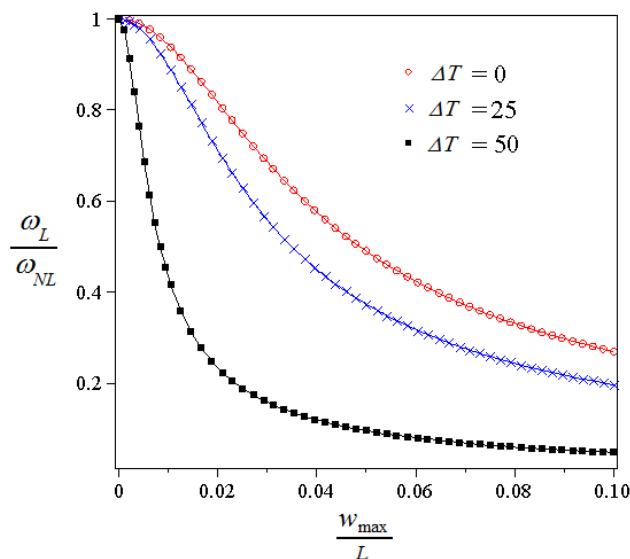
### ۶- بررسی اثر ضرایب سفتی بستر الاستیک و بار حرارتی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی تیر

به منظور بررسی اثر ضرایب سفتی خطی و غیرخطی بستر الاستیک و نیز تأثیر بار حرارتی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی تیر، منحنی‌های فرکانس غیرخطی تیر در برابر دامنه بی‌بعد و به ازای تغییر هر یک از پارامترهای مذکور رسم می‌شود.

در شکل (۴) تأثیر بار حرارتی بر روی فرکانس طبیعی غیرخطی تیر و شکل (۵) تأثیر بار حرارتی بر نسبت فرکانسی تیر نشان داده شده است. این نمودارها با فرض  $\hat{k}_L = 1000$  و  $\hat{k}_{NL} = 10000$  ترسیم شده‌اند. همانگونه که از این نمودارها دیده می‌شود، افزایش بار حرارتی، هم فرکانس غیرخطی و هم نسبت فرکانسی تیر (نسبت فرکانس خطی به فرکانس غیرخطی تیر) را افزایش می‌دهد. در واقع تأثیر بار حرارتی در فرکانس خطی سیستم ( $\omega_L$ ) بیشتر از فرکانس غیرخطی آن است. به علاوه افزایش دامنه ارتعاشی، سبب افزایش فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود.



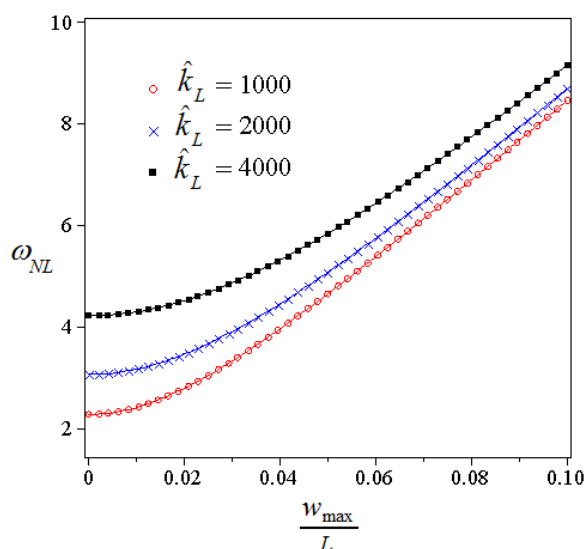
شکل ۴- تغییرات فرکانس غیرخطی تیر در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف از بار حرارتی



شکل ۵- تغییرات نسبت فرکانسی در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف از بار حرارتی

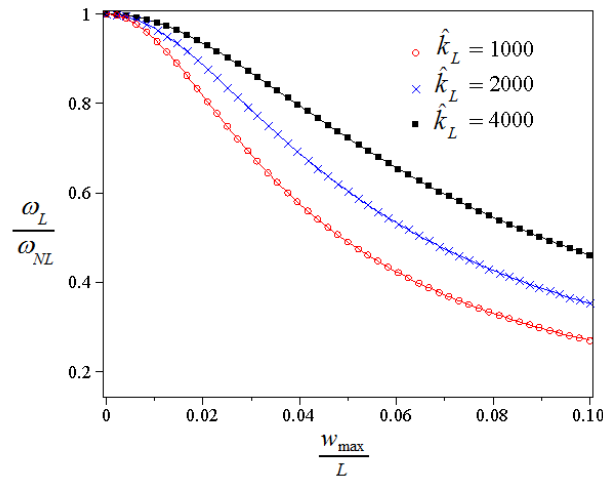
شکل‌های (۶) و (۷) به ترتیب تأثیر ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک ( $\hat{k}_L$ ) بر فرکانس غیرخطی و نیز نسبت فرکانسی تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل را با در نظر گرفتن  $\hat{k}_{NL} = 10000$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک باعث افزایش فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود.

اگرچه با توجه به معادله (۱۶) افزایش ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک، موجب افزایش فرکانس خطی می‌شود، ولی با دقت در نمودارهای (۶) و (۷) می‌توان دریافت که تأثیر افزایش ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک، بر افزایش فرکانس خطی بیشتر از فرکانس غیرخطی است.



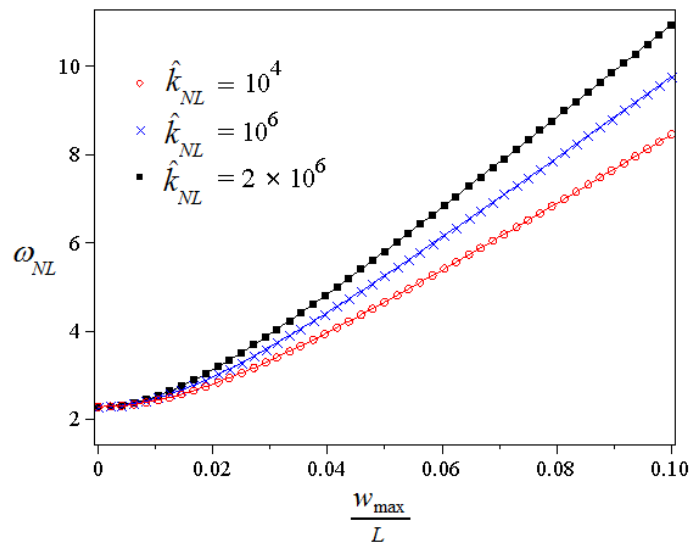
شکل ۶- تغییرات فرکانس غیرخطی در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف

از ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک

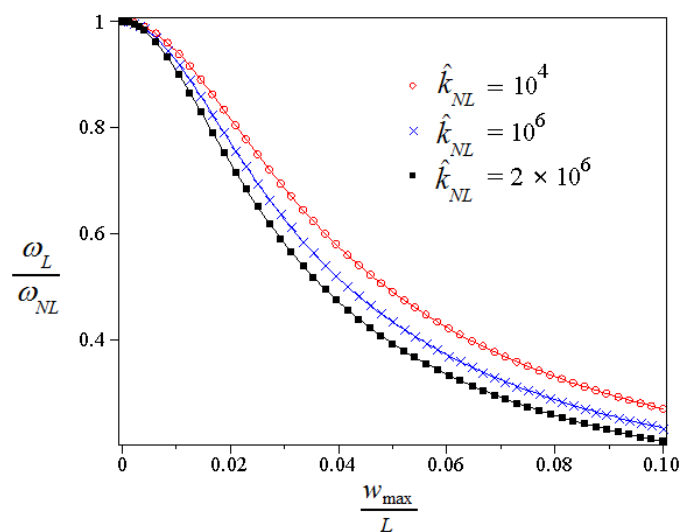


شکل ۷- تغییرات نسبت فرکانسی در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف از ضریب سفتی خطی بی‌بعد بستر الاستیک

شکل‌های (۸) و (۹) به ترتیب تأثیر ضریب سفتی غیرخطی بی‌بعد بستر الاستیک ( $\hat{k}_{NL}$ ) بر فرکانس غیرخطی و نیز نسبت فرکانسی تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل را با در نظر گرفتن  $\hat{k}_L = 1000$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش ضریب سفتی غیرخطی بی‌بعد بستر الاستیک، باعث افزایش فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود. در عین حال با توجه به شکل (۹)، افزایش ضریب سفتی غیرخطی بی‌بعد بستر الاستیک، موجب کاهش نسبت فرکانسی می‌شود که این مسأله با دقت در روابط (۱۶) و (۲۷) به خوبی قابل استنباط می‌باشد.

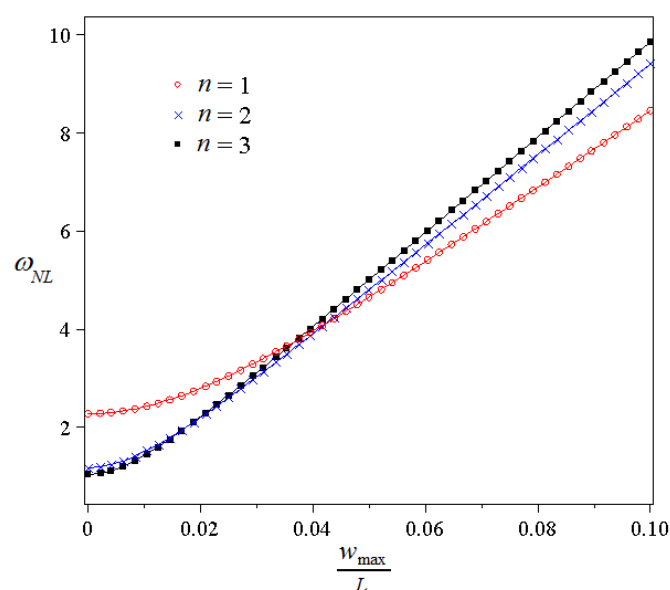


شکل ۸- تغییرات فرکانس غیرخطی در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف از ضریب سفتی غیرخطی بی‌بعد بستر الاستیک

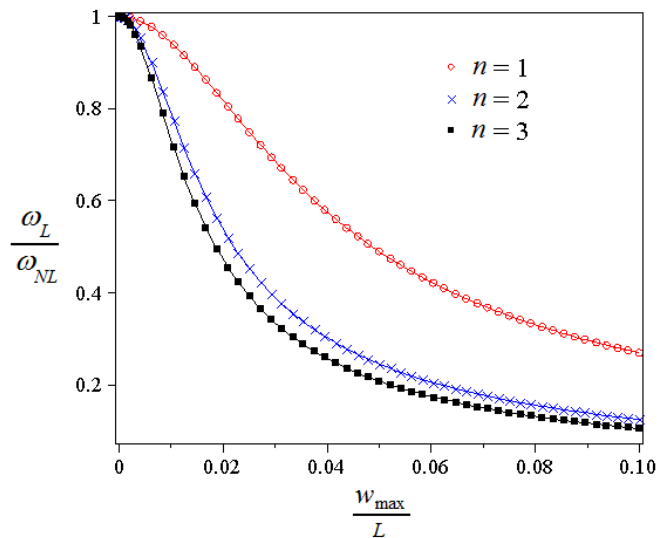


**شکل ۹-** تغییرات نسبت فرکانسی در برابر دامنه به ازای مقادیر مختلف از ضریب سفتی غیرخطی بی بعد بستر الاستیک

در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) به ترتیب تأثیر مودهای مختلف بر فرکانس غیرخطی و نسبت فرکانسی تیر یکسرگیردار- یکسر مفصل را با در نظر گرفتن  $\hat{k}_L = 1000$  و  $\hat{k}_{NL} = 10000$  نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود، ارتعاش در مودهای بالاتر در بازه مشخصی از دامنه‌های ارتعاشی مختلف باعث کاهش فرکانس غیرخطی سیستم شده و به ازای بازه‌های مشخص دیگر سبب افزایش فرکانس غیرخطی می‌شود. از طرفی با توجه به شکل (۱۱) می‌توان دریافت که ارتعاش در مودهای بالاتر، همواره سبب کاهش نسبت فرکانسی سیستم خواهد شد.



**شکل ۱۰-** تغییرات فرکانس غیرخطی در برابر دامنه به ازای مودهای مختلف



شکل ۱۱- تغییرات نسبت فرکانسی در برابر دامنه به ازای مودهای مختلف

## ۷- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر ارتعاشات با دامنه بزرگ تیر اولر- برنولی واقع بر بستر الاستیک غیرخطی و نیز تحت اثر بارهای حرارتی مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های مرتبه اول و با در نظر گرفتن غیرخطینگی هندسی و با اعمال اصل همپلتون، معادلات دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر استخراج شد و با استفاده از تقریب گالرکین، معادلات حاکم به معادلات غیرخطی معمولی تبدیل شد. با توجه به بزرگ بودن ضریب جمله غیرخطی ( $\epsilon \gg 1$ )، استفاده از روش‌های معمول اغتشاشات مانند روش مقیاس‌های چندگانه که در پاره‌ای از مقالات از جمله در مرجع [۲۱] به کار گرفته شده است، منجر به استخراج پاسخ معتبری برای سیستم نمی‌شود. از این رو در ادامه با استفاده از روش ترکیبی اغتشاشات و هوموتوپی که به ازای هر ضریب مثبت دلخواه منجر به حل معتبری برای سیستم می‌شود، معادلات پاسخ سیستم به دست آمد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که این روش به ازای بازه وسیعی از ضریب جمله غیرخطی، پاسخ را با دقت مناسبی در اختیار می‌گذارد. در ادامه و به منظور صحت‌سنجی، برای حالتی که ضریب جمله غیرخطی کوچکتر از واحد باشد، نتایج به دست آمده در تحقیق حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱] مقایسه شد که حاکی از تطابق بسیار خوب نتایج است. فرکانس غیرخطی به دست آمده از تقریب مرتبه اول روش ارائه شده نیز با دقت بسیار خوبی فرکانس غیرخطی حاصل از حل دقیق را دنبال می‌کند. به علاوه تأثیر ضرایب سختی خطی و غیرخطی بستر الاستیک، اثر بارهای حرارتی و تأثیر مودهای ارتعاشی بر فرکانس غیرخطی و بر نسبت فرکانسی سیستم مورد تحلیل قرار گرفت و نشان داده شد که:

الف) افزایش بار حرارتی، هم فرکانس غیرخطی و هم نسبت فرکانسی تیر (نسبت فرکانس خطی به فرکانس غیرخطی تیر) را کاهش می‌دهد. با این وجود اثر تغییر بار حرارتی در فرکانس خطی سیستم بیشتر از فرکانس غیرخطی آن است.

ب) افزایش ضریب سفتی خطی بستر الاستیک باعث افزایش فرکانس خطی و فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود. اما تأثیر افزایش ضریب سفتی خطی بستر الاستیک، بر افزایش فرکانس خطی بیشتر از فرکانس غیرخطی است.

ج) افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر الاستیک باعث افزایش فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود و در عین حال موجب کاهش نسبت فرکانسی سیستم می‌گردد.

د) ارتعاش در مودهای بالاتر در بازه مشخصی از دامنه‌های ارتعاشی باعث کاهش فرکانس غیرخطی سیستم شده و در بازه‌های مشخص دیگر سبب افزایش فرکانس غیرخطی می‌شود. به علاوه، ارتعاش در مودهای بالاتر، همواره سبب کاهش نسبت فرکانسی سیستم خواهد شد.

## مراجع

- [1] He, J.H., "Homotopy Perturbation Technique", Computer Methods in Applied Mechanical Engineering, Vol. 178, pp. 257-262, (1999).
- [2] He, J.H., "A Coupling Method of Homotopy Technique and Perturbation Technique for Nonlinear Problems", International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 35, pp. 37-43, (1999).
- [3] He, J.H., "A Variational Iteration Method to Duffing Equation (in Chinese)", Chinese Journal of Computational Physics, Vol. 16, pp. 121-133, (1999).
- [4] He, J.H., "An Elementary Introduction to the Homotopy Perturbation Method", Computers and Mathematics with Applications, Vol. 57, pp. 410-412, (2009).
- [5] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., "Nonlinear Oscillations", Wiley Interscience, New York, (1979).
- [6] Nayfeh, A.H., "Introduction to Perturbation Techniques", Wiley Interscience, New York, (1981).
- [7] Liao, S.J., and Chwang, A.T., "Application of Homotopy Analysis Method in Nonlinear Oscillations", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 65, pp. 914-922, (1998).
- [8] He, J.H., "New Interpretation of Homotopy Perturbation Method", International Journal of Modern Physics B, Vol. 20, pp. 2561-2568, (2006).
- [9] He, J.H., "Homotopy Perturbation Method with an Auxiliary Term", Abstract and Applied Analysis, Vol. 2012, pp. 1-7, (2012).
- [10] He, J.H., "Comment on He's Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators", European Journal of Physics, Vol. 29, pp. 19-22, (2008).
- [11] He, J.H., "Preliminary Report on the Energy Balance for Nonlinear Oscillations", Mechanics Research Communications, Vol. 29, pp. 107-111, (2002).



- [12] Ganji, D.D., Gorji, M., Soleimani, S., and Esmaeilpour, M., "Solution of Nonlinear Cubic-quantic Duffing Oscillators using He's Energy Balance Method", *Journal of Zhejiang University: Science A*, Vol. 10, pp. 1263-1268, (2009).
- [13] Mickens, R.E., "Mathematical and Numerical Study of the Duffing-harmonic Oscillator", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244, pp. 563-567, (2001).
- [14] Yazdi, M.K., Mirzabeigy, A., and Abdollahi, H., "Nonlinear Oscillators with Non-polynomial and Discontinuous Elastic Restoring Forces", *Nonlinear Science Letters A*, Vol. 3, pp. 48-53, (2012).
- [15] He, J.H., "Max-min Approach to Nonlinear Oscillators", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 9, pp. 207-210, (2008).
- [16] Yazdi, M.K., Ahmadian, H., Mirzabeigy, A., and Yildirim, A., "Dynamic Analysis of Vibrating Systems with Nonlinearities", *Communications in Theoretical Physics*, Vol. 57, pp. 183-187, (2012).
- [17] He, J.H., "Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear Equations", *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 20, pp. 1141-1199, (2006).
- [18] Noor, M.A., and Khan, W.A., "New Iterative Methods for Solving Nonlinear Equation by using Homotopy Perturbation Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, pp. 3565-3574, (2012).
- [19] Momani, S., Erjaee, G.H., and Alnasr, M.H., "The Modified Homotopy Perturbation Method for Solving Strongly Nonlinear Oscillators", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, pp. 2209-2220, (2009).
- [20] Hu, M., and Wang, L., "Periodic Solutions for Some Strongly Nonlinear Oscillators by He's Energy Balance Method", *World Academy of Science Engineering and Technology*, Vol. 68, pp. 620-622, (2012).
- [21] Ramezani, A., Alasty, A., and Akbari, J., "Effects of Rotary Inertia and Shear Deformation on Nonlinear Free Vibration of Microbeams", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 128, pp. 611-615, (2006).
- [22] Pirbodaghi, T., Ahmadian, M.T., and Fesanghary, M., "On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Vibration of Beams", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 143-148, (2009).
- [23] Sedighi, H.M., Shirazi, K.H., and Zare, J., "An Analytic Solution of Transversal Oscillation of Quantic Nonlinear Beam with Homotopy Analysis Method", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 47, pp. 777-784, (2012).
- [24] Sarma, B.S., Vardan, T.K., and Parathap, H., "On Various Formulation of Large Amplitude Free Vibration of Beams", *Journal of Computers and Structures* Vol. 29, pp. 959-966, (1988).

- [25] Poorjamshidan, M., Sheikhi, J., Mahjoobmoghadas, S., and Norouzinia, M., "An Analytic Solution of Transversal Vibrations and Frequency Response of Quantic Nonlinear Beam", Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, pp. 1-9, (2014).
- [26] Wang, L., Ni, Q., Li, M., and Qian, Q., "The Thermal Effect on Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid", Physica E, Vol. 40, pp. 3179-3182, (2008).

## فهرست نمادهای انگلیسی

- $L$ : طول تیر  
 $b$ : عرض سطح مقطع تیر  
 $h$ : ارتفاع سطح مقطع تیر  
 $E$ : مدول الاستیسیته  
 $I$ : ممان سطح  
 $A$ : سطح مقطع  
 $r$ : شعاع ژیراسون سطح مقطع تیر  
 $t$ : زمان  
 $X$ : محور مختصات طولی  
 $Z$ : محور مختصات عرضی  
 $u_0$ : مولفه جابجایی طولی  
 $w_0$ : مولفه جابجایی عرضی  
 $\Delta T$ : تغییرات دمایی محیط  
 $K_L$ : ضریب سفتی خطی بستر  
 $K_{NL}$ : ضریب سفتی غیرخطی بستر  
 $F_{Th}$ : نیروی محوری ناشی از بارهای حرارتی  
 $\hat{t}$ : زمان بی بعد  
 $\hat{X}$ : جابجایی طولی بی بعد  
 $\hat{W}$ : جابجایی عرضی بی بعد  
 $\hat{F}_{Th}$ : نیروی محوری بی بعد ناشی از بارهای حرارتی  
 $\hat{K}_L$ : ضریب سفتی خطی بی بعد بستر  
 $\hat{K}_{NL}$ : ضریب سفتی غیرخطی بی بعد بستر  
 $n$ : شماره مود ارتعاشی  
 $w_{max}$ : خیز ماکزیمم تیر  
 $q(t)$ : پاسخ قسمت زمانی  
 $T$ : پریود نوسانات

RE (%): درصد خطای نسبی پریود نوسانات

### نمادهای یونانی

$v$ : نسبت پوآسون

$\rho$ : جرم واحد حجم تیر

$\varepsilon_x$ : کرنش طولی

$\sigma_x$ : تنش نرمال طولی

$\alpha_x$ : ضریب انبساط حرارتی طولی تیر

$\omega_n$ : فرکانس طبیعی  $n$  ام تیر

$\beta_n L$ : مقدار ویژه  $n$  ام تیر

$\varepsilon$ : ضریب بی‌بعد جمله غیرخطی

$\omega_L$ : فرکانس خطی بی‌بعد

$\omega_{NL}$ : فرکانس غیرخطی بی‌بعد

**Abstract**

The large amplitude free vibration behaviour of an Euler-Bernoulli beam with immovable ends subjected to the thermal loads is investigated. Applying the Hamilton's principle, the beam governing equation of motion is derived. By implementing the Galerkin's method, the ordinary nonlinear differential equation is derived and because of the large coefficient of the nonlinear term, the Homotopy Perturbation Method (HPM) is used to solve the governing nonlinear equation and the accuracy of the mentioned method is investigated. The results are validated by comparing them with those available in the literature. Moreover, the effects of the system parameters including foundation coefficients, thermal load and vibrational modes on the system nonlinear vibration behaviour are investigated.