

حل نیمه تحلیلی تیر بتنی خودترمیم در چارچوب مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم

در این مقاله مدل سازی نیمه تحلیلی برای پیش بینی رفتار تیر بتنی خودترمیم ارائه شده است. در این راستا یک مدل ساختاری برای پیش بینی رفتار مواد خودترمیم استفاده شده است. رشد متغیرهای آسیب و ترمیم به عنوان متغیرهای داخلی به دست آمده و سطوح آسیب و ترمیم کششی و فشاری برای تشخیص رفتار آسیب و ترمیم از رفتار الاستیک، معرفی شده است. صحت سنجی پاسخ با حل یک مثال برای تیر تحت بارگذاری گسترده انجام شده است. نتایج بدست آمده نشان دادند که برای هندسه بیان شده تیر بتنی خودترمیم ۲۱٪ از تیر بتنی ساده بار بیشتری را تحمل می کند، همچنین خیز تیر خودترمیم تا بارگذاری نهایی ۲۷٪ بزرگتر از بارگذاری نهایی تیر بتنی ساده می باشد.

امین کاظمی^۱

دانشجوی دکترا

مصطفی باغانی^۲

دانشیار

حمید شهسواری^۳

دکترا

واژه های راهنما: مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم، بتن خودترمیم، مدل الاستیک آسیب-ترمیم، تیر بتنی، انرژی پتانسیل گیبس

۱- مقدمه

مطالعه رفتار ترک های میکروسکوپی در ماده از حوزه هایی است که مورد توجه دانشمندان بوده است. در این مطالعات محققین مکانیک بیش تر به بررسی تاثیرات ترک در ماده می پردازند. این امر با معرفی یک متغیر حالت داخلی در قالب ترمودینامیک و مکانیک محیط پیوسته انجام می پذیرد. این متغیر مکانیکی، آسیب نامیده می شود. اخیرا مکانیک آسیب محیط پیوسته (مکانیک آسیب) برای مطالعه رشد خلل و فرج های میکروبی و تأثیر آنها رو رفتار مکانیکی مواد مورد توجه قرار گرفته است. اگرچه مکانیک آسیب معیاری برای تباهی ماده ارائه می دهد، ولی متغیرهای آسیب به عنوان معیاری برای اثبات تباهی ماده در مقیاس ماکرو استفاده می شوند و بر این اساس مکانیک آسیب محیط پیوسته تعمیم داده شده است. بر این اساس، از اصول مکانیک محیط پیوسته برای مدل سازی رشد ترک استفاده می کنند. وقتی ماده دچار آسیب می شود، ساختار میکروسکوپی آن دچار تغییر خواهد شد. این تغییرات باعث تغییر در خواص مکانیکی ماده می شود. پس وقتی با یک مسأله آسیب روبه رو هستیم علاوه بر بررسی ایجاد آسیب، رشد آسیب و شکست نهایی، باید

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران amin.kazemi@ut.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران baghani@ut.ac.ir

^۳ دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف hamid.shah@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۵/۱۶، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۹

تغییر خواص مکانیکی ماده بررسی گردد. این خواص شامل مقاومت شکست، مدول الاستیسیته، حد خستگی، هدایت گرمایی، تنش تسلیم و ... می‌باشد. تغییر در این خواص در مواردی که آسیب ناهمسانگرد باشد اهمیت بیشتری دارد. میکرو ساختار مواد ترد شامل تعداد زیادی میکروتکرک و ناهمگنی است. ایجاد، رشد و به هم پیوستن این میکروتکرک‌ها باعث بروز رفتار غیرخطی ماده تحت بارهای خارجی می‌شود. رشد میکروتکرک‌ها باعث کم شدن ظرفیت تحمل بار در ماده می‌شود. تحقیقات تجربی در چند دهه گذشته نشان داده است که بسیاری از مواد مانند پلیمرها، بافت‌های زنده، قیر، آسفالت و بتن‌ها تحت شرایط خاص و گذشت زمان، توانایی ترمیم و بهبود قسمتی از استحکام و سفتی خود را دارند [۱]. در آینده ممکن است خواص پیشرفته‌ی مواد خودترمیم در طراحی و تامین ایمنی هواپیماهای سبک وزن و سازه‌های فضایی، بسیار تاثیرگذار باشند [۲]. تئوری‌های بر پایه‌ی مکانیک محیط پیوسته‌ی آسیب، به منظور بیان تغییر خواص مکانیکی در مواد مختلف به کار برده می‌شود که یک فرض اساسی در این تئوری‌ها، برگشت ناپذیر بودن پدیده‌ی آسیب یا به بیان دیگر افزایشی بودن متغیر آسیب است. معادلات ساختاری^۱ که در آن‌ها پدیده ترمیم در نظر گرفته نشده است، پیش‌بینی مناسبی از رفتار این مواد ارائه نمی‌دهند [۳].

برای تحلیل و بررسی رفتار مکانیکی مواد خودترمیم نمی‌توان از تئوری‌های کلاسیک آسیب استفاده کرد، بنابراین ضروری است که برای پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار این مواد، مدل‌های شامل آسیب-ترمیم ارائه شود. از این رو تئوری جدیدی به نام تئوری مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم^۲ (CDHM) برای بررسی این مواد به مرور زمان توسعه پیدا کرده است. بسیاری از مدل‌های سال‌های اخیر فرمول بندی رفتار یک سازه بتنی را ارائه می‌کند، هر چند مدل‌سازی این سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف هنوز به طور کامل جای بحث دارد. از دیدگاه پدیدارشناسانه مکانیک آسیب محیط‌های پیوسته یک تئوری قدرتمند است که می‌تواند رفتار غیرخطی بتن را مدل‌سازی می‌کند. بر اساس ترمودینامیک فرآیندهای برگشت‌ناپذیر و متغیرهای حالت داخلی، مکانیک محیط‌های پیوسته می‌تواند برای بسیاری از مواد از جمله بتن مدل‌های مناسب ساختاری سازگار به دست آورد [۱۳-۱۶، ۴، ۵]. در میان مدل‌های مختلف آسیب مدلی محبوب‌تر است که علاوه بر اینکه به آسانی قابل فهمیدن باشد شبیه‌سازی عددی آن هم ساده باشد. رفتار متفاوت بتن تحت کشش و فشار هم پیچیدگی مدل‌سازی بتن را افزایش می‌دهد. مدل‌های زیادی رفتار بتن را تحت کشش و فشار پیش‌بینی می‌کنند اما نقطه ضعف عمده آن‌ها پیچیدگی‌شان می‌باشد. علت رفتار متفاوت در کشش و فشار مربوط به بازکردن یا بستن ترک‌ها در سازه می‌باشد، به این اثر، اثر بسته‌شدن^۳ می‌گویند. اثر بسته‌شدن باعث ایجاد ناهمسانگردی در رفتار ماده می‌شود. تجزیه طیفی روش استفاده شده برای شبیه‌سازی اثر بسته بودن در بارگذاری کششی و فشاری می‌باشد. به اثر بسته بودن اثر یک‌طرفه^۴ نیز می‌گویند. چابوچه در سال (۱۹۹۲) اثر یک‌طرفه را در مدل‌های مختلف بررسی کرد و به این نتیجه رسید که هنگامی که شرایط یک طرفه اعمال می‌شود این مدل‌ها همگی یک گسست غیر واقع‌بینانه در پاسخ تنش-کرنش دارند، یا در برخی از بارگذاری‌ها سختی الاستیک نامتقارن تشخیص داده می‌شود که یک پدیده غیرقابل قبول است.

¹ Constitutive equations

² Continuum Damage-Healing Mechanics (CDHM)

³ Closure effect

⁴ Unilateral effect

این تکنیک را می‌توان به تانسور کرنش [۱۷، ۱۸] یا تانسور تنش [۱۹، ۲۰] اعمال کرد تا برای میکروترک اثر بسته‌بودن را در مواد آسیب دیده محاسبه کند. تئوری‌های که برای توصیف رفتار بتن استفاده شده است عبارت از: مکانیک شکست، مکانیک محیط‌های آسیب و مکانیک محیط‌های الاستیک-آسیب و مکانیک محیط‌های پلاستیک-آسیب هستند. ارتباط بین الاستوپلاستیک و آسیب را می‌توان در نوشتجات مربوط به مدل‌سازی رفتار مکانیکی بتن مشاهده کرد. سیسیکلی در سال (۲۰۰۷) و وویاجیس در سال‌های (۲۰۰۸) و (۲۰۰۹) روابط ساختاری برای بتن ساده که از قوانین ترمودینامیکی پیروی می‌کند، پیشنهاد دادند. مدل‌های آسیب ناهمسانگرد با معیار تسلیم پلاستیسیته در کنار یک معیار آسیب برای توصیف رفتار پلاستیک و آسیب بتن معرفی شده‌اند. تعریف دو تانسور اثر آسیب در کشش و فشار باعث ناهمسانگردی در رفتار ماده می‌شود. فرضیه کرنش‌های معادل که نتایج قبلی را به چالش کشید [۲۱].

فرض اصلی در به دست آوردن این مدل‌ها می‌باشد. کار دیگری که توسط وو در سال (۲۰۰۶) انجام شد مدل ساختاری پلاستیک-آسیب را برای بتن پیشنهاد داد. این مدل بر پایه فرضیه کرنش معادل و سازگار با ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر است. مدل پیشنهاد شده نتایج قابل قبولی دارد که با داده‌های تجربی همخوانی خوبی دارد. به تازگی در سال (۲۰۱۰) ابوالراب و کیم از مدل پلاستیک-آسیب کوپل برای شبیه‌سازی رفتار بتن ساده استفاده کردند. به منظور به دست آوردن معادلات ساختاری فرضیه کرنش معادل را در نظر گرفتند. روش کرنش معادل توسط محققین دیگر هم مانند جو در سال (۱۹۸۹)، اولسون و ریستینما در سال (۲۰۰۵) و وویاجیس در سال (۲۰۰۹) استفاده شده است. علاوه بر این کوپل کردن پلاستیسیته و آسیب برای مطالعه رفتار بتن استفاده شده است [۲۲-۲۴، ۱۳، ۱۲، ۴]. مواد خودترمیم در دسته مواد هوشمند قرار می‌گیرند که این ظرفیت درونی را دارند که قبل از اینکه آسیب باعث شکست در ماده شود در مراحل اولیه خود را ترمیم کنند. این پروسه از طبیعت الهام گرفته شده است. (مانند ترمیم آسیب در یک استخوان شکسته شده در اندام‌های بدن و یا بهبود زخم) به تازگی خاصیت خود ترمیمی به عنوان یک عملکرد مطلوب برای مواد ساخته دست انسان مد نظر قرار گرفته است. اولین تلفیق عملکرد خاصیت خودترمیمی در سیستم اپوکسی با میکرو کپسوله سازی توسط اسکات وایت و همکارانش در دانشگاه ایلینویز انجام پذیرفت [۲۵]. در حال حاضر گروه‌هایی در سراسر جهان تحقیق را برای بررسی این مفاهیم و ساختار موادی که از خاصیت خودترمیمی بهره‌مند هستند شروع کرده‌اند. این بررسی‌ها برای کاربردهای مختلف این مواد می‌باشد. در سال (۱۹۵۸) کاچانوف برای اولین بار متغیرهای پیوسته‌ای را متناسب با چگالی خلل و فرج میکروبی در ماده معرفی کرد و مفهوم فاکتور پیوسته و تنش مؤثر را در شکست خزشی استفاده کرد [۲۶]. با استفاده از این تعریف، مفهوم متغیر آسیب بعداً توسط رباتنوف تعمیم داده شد [۲۷]. وویاجیس و همکارانش روابط یک مدل ساختاری را برای بتن ساده ارائه کرده که معادلات با روابط ترمودینامیکی سازگار می‌باشند. آن‌ها مدل آسیب ناهمسانگرد خود از سطوح تسلیم پلاستیک و آسیب برای توصیف رفتار پلاستیک و آسیب بتن استفاده کرده‌اند و با تعریف دو تانسور تأثیر آسیب متفاوت در کشش و فشار، رفتار ناهمسانگرد بتن را مدل‌سازی کرده‌اند. آن‌ها از نظریه کرنش معادل برای استخراج مدل خود استفاده کردند. در کار دیگر وویاجیس و همکارانش یک مدل ساختاری پلاستیک-آسیب برای بتن ارائه دادند.

مدل آن‌ها بر پایه نظریه کرنش معادل است و سازگار با ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر می‌باشد. مدل نتایج قابل قبولی داشته و تطابق خوبی با نتایج تجربی نیز دارد [۱۴, ۱۵]. ابوالراب و کیم از یک مدل پلاستیسیته آسیب برای مدل سازی رفتار بتن ساده استفاده کردند. آن‌ها برای استخراج مدل خود از نظریه کرنش معادل استفاده کرده‌اند. دیدگاه کرنش معادل نیز توسط محققین دیگری استفاده شده است. تلفیق پلاستیسیته با آسیب نیز برای مدل سازی رفتار بتن استفاده شده است [۲۳]. گنجیانی و همکاران یک مدل الاستیک-آسیب براساس نظریه انرژی کرنش معادل برای مدل سازی رفتار بتن ارائه کرد. این مدل بر پایه ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر با متغیرهای حالت داخلی استخراج گردیده است. برای استخراج مدل فرض شده که انرژی آزاد گیبس شامل دو ترم الاستیک و آسیب است. علاوه بر این گنجیانی و همکاران حل تحلیلی یک مخزن جدار ضخیم ارائه داده است که در آن تأثیر انواع آسیب بر توزیع تنش را بررسی کرده است. ایشان در حل از فرضیاتی همچون صرف نظر کردن از کرنش پلاستیک در باربرداری، ناهمسانگرد بودن و متفاوت بودن رفتار در کشش و فشار، استفاده از قوانین ترمودینامیکی و تعریف کردن متغیرهای داخلی مناسب در به دست آوردن معادلات ساختاری استفاده کرده است [۲۸, ۲۹].

روش‌های متنوعی برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی مواد خود ترمیم استفاده شده است. برای اولین بار میاوو همکاران در سال (۱۹۹۵) برای مدل‌سازی ترمیم در ملات بتن، مکانیک محیط‌های پیوسته آسیب-ترمیم همسانگرد را پیشنهاد دادند [۳۰]. باربرو و لانتیدر سال (۲۰۰۳) کاربرد مکانیک محیط‌های پیوسته آسیب-ترمیم را در مواد خودترمیم کامپوزیتی بررسی کردند [۳۱]. همچنین باربرو در سال (۲۰۰۵) یک مدل ساختاری بر پایه ترمودینامیک محیط‌های پیوسته با در نظر گرفتن ترمیم ماکروترک‌ها^۱ پیشنهاد داد [۳۲]. این مدل با فرض وجود فرایندهای آسیب غیرقابل بازگشت و ارضا قانون اول و دوم ترمودینامیک ارائه شده است. در سال (۲۰۰۷) هم باربرو و فورد تأثیر ترمیم ماکروترک‌ها را بر سختی و استحکام مواد خودترمیم کامپوزیتی مطالعه کردند [۳۳]. اخیراً پلیمرهای حافظه‌دار برپایه سیستم‌های خودترمیم با تعبیه ذرات ترموپلاستیک به منظور توسعه تئوری ویسکوپلاستیک-ویسکواسیب-ویسکوترمیم برای پلیمرهای شیشه‌ای استفاده شده است [۳۴, ۳۵]. ژو و همکارانش از مشاهدات تجربی و مدل تیلور برای ارائه یک مدل میکرو مکانیکی دوبعدی آسیب-ترمیم برای مواد خودترمیم فعال سیمانی استفاده کرده‌اند. آن‌ها ترک و میکروکپسول با استفاده از مساحت المان معرفی کردند و یک معادله رشد میکروترک با به‌کاربردن نظریه احتمال و مکانیک شکست پیشنهاد دادند [۳۶]. زمسکو و همکارانش یک هندسه مشخص برای یک دامنه محاسباتی به‌جهت ساختن یک مدل میکرو مکانیکی دوبعدی برای پروسه مواد خودترمیم باکتریایی در بتن انتخاب کردند. در این مدل معادلات انتشار با به کارگیری روش المان محدود گلرکین حل شده است [۳۷]. در سال‌های اخیر نیز میکروکپسول‌های پلیمری که توانایی مقاومت در برابر فرآیند مخلوط‌شدن و شکست بتن هنگامی که ترک‌ها ظاهر می‌شوند علاقه‌های زیادی را به خود جلب کرده است. [۳۸, ۳۹]. شهسواری و همکاران در سال (۲۰۱۵) یک مدل ساختاری بر پایه مکانیک محیط‌های پیوسته و ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر ارائه دادند. این مدل با استفاده از تجزیه طیفی تنش پیشنهاد شده که می‌توان از این مدل برای مواد بتنی استفاده کرد [۴۰].

^۱ Macrocracks

این مقاله یک حل نیمه تحلیلی برای پیش بینی رفتار تیر بتنی خودترمیم ارائه می دهد. از یک مدل ساختاری استفاده شده که توسط شهسواری و همکاران [۴۰] پیشنهاد شده است. این مدل فرایند ترمودینامیک برگشت ناپذیر و فرضیه انرژی کرنشی معادل را در نظر گرفته است. بعد از آن انرژی پتانسیل گیس به سه قسمت الاستیک، آسیب و ترمیم تقسیم شده است. همچنین نامساوی کلازیوس-دوئم برای این کار در نظر گرفته شده است. تکنیک تجزیه طیفی استفاده شده تا بتوانیم رفتار نامتقارن بتن در کشش و فشار را تحقیق کنیم. دو متغیر ترمیم معرفی شده تا رفتار قسمت ترمیم در نظر گرفته شود که علت تعریف این دو متغیر نبود متغیر ترمیم سازگار فیزیکی است. سخت شوندگی ایزوتروپیک خطی برای بیان رشد متغیرهای آسیب و ترمیم لحاظ شده است. سطوح آسیب و ترمیم برای تشخیص رفتار متفاوت بتن استفاده شده است. بعد از آن ما با استفاده از معادلات تعادل و روابط قیدها برای تیر بتنی خود ترمیم تحت بارگذاری خمشی دلخواه استفاده کرده ایم تا بتوانیم معادلات حاکم بر تیر بتنی خود ترمیم را به دست آوریم. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. ابتدا مکانیک محیط های پیوسته آسیب-ترمیم معرفی شده است بعد از آن یک مدل الاستیک آسیب-ترمیم در چهارچوب مکانیک محیط های پیوسته آسیب-ترمیم ارائه شده است. سپس یک حل نیمه تحلیلی برای تیر بتنی خودترمیم با تکیه گاه های ساده تحت بارگذاری گسترده یکنواخت انجام شده است. پس از آن پارامترهای مادی که با مقایسه با نتایج تجربی در دسترس در تاریخچه کالیبره شده، مورد استفاده برای شبیه سازی عددی قرار می گیرند. در نهایت نتایج تیر بتنی خودترمیم ارائه شده تا قابلیت این روش پیشنهادی نیمه تحلیلی برای پیش بینی رفتار تیر بتنی نشان داده شود.

۲- مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم

در ابتدای بارگذاری بر روی مواد ترد، رفتار خطی الاستیک مشاهده می شود. با افزایش بار، آسیب در ماده شروع به رشد خواهد کرد. زمانی که آسیب و تنش به مقدار خاصی می رسند، متغیر ترمیم شروع به رشد می کند. بنابراین، ما در مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم با چهار وضعیت روبرو هستیم: ۱- هیچگونه آسیب و ترمیم در ماده وجود ندارد، ۲- فقط آسیب وجود دارد، ۳- هم آسیب و هم ترمیم در ماده وجود دارد، ۴- به عنوان یک وضعیت موهومی، آسیب ترمیم نشده در نظر گرفته نمی شود. همانطور که در شکل (۱-۳) مشاهده می شود، این وضعیت ها با نام وضعیت های اولیه^۱، آسیب دیده^۲، آسیب دیده-ترمیم یافته^۳ و موثر^۴ می باشند. وضعیت موثر یک وضعیت غیر آسیب دیده موهومی است که تمام آسیب ترمیم نیافته از وضعیت قبلی (آسیب دیده-ترمیم یافته) پاک شده است. بنابراین مساحت سطح مقطع در وضعیت موهومی نسبت به سه وضعیت دیگر کمتر است. مساحت سطح مقطع کل^۵ (A) را می توان به دو قسمت آسیب دیده^۶ (A^d) و آسیب ندیده^۷ (A^{ud}) تقسیم کرد:

¹ Initial

² Damaged

³ Damaged-healed

⁴ Effective

⁵ Total

⁶ Damaged

⁷ Undamaged

$$A = A^d + A^{uh} \quad (۱)$$

که مساحت آسیب دیده خود از دو بخش تشکیل می‌شود، ترمیم یافته^۱ (A^h) و ترمیم نیافته^۲ (A^{uh}):

$$A^d = A^h + A^{uh} \quad (۲)$$

متغیرهای آسیب و ترمیم به ترتیب بصورت نسبت مساحت آسیب دیده به مساحت کل و نسبت مساحت آسیب ترمیم یافته به مساحت آسیب دیده تعریف می‌شوند [۴۱]:

$$D = \frac{A^d}{A}; 0 \leq D < 1 \quad (۳)$$

$$H = \frac{A^h}{A^d}; 0 \leq H < 1 \quad (۴)$$

متغیر آسیب موثر ($\tilde{D}$) در وضعیت موثر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{D} = \frac{A^{uh}}{A} \quad (۵)$$

بعد از انجام تعدادی محاسبات ریاضی می‌توان به رابطه‌ی بین متغیرهای آسیب موثر، آسیب و ترمیم بصورت زیر دست یافت:

$$\tilde{D} = D(1 - H) \quad (۶)$$

همانند مکانیک محیط پیوسته آسیب و با در نظر گرفتن وضعیت موثر، تانسور تنش موثر از ضرب تانسور مرتبه چهار تاثیر آسیب-ترمیم^۳ ($\mathbb{M}(D.H)$) در تانسور تنش محاسبه خواهد شد. در این تحقیق، همانند تانسور تاثیر آسیب^۴ ($\mathbb{M}(D)$) ارائه شده توسط لو و چو [۴۲]، تانسور تاثیر آسیب-ترمیم ($\mathbb{M}(\tilde{D})$) بر پایه‌ی متغیر آسیب موثر (که خود شامل آسیب و ترمیم می‌باشد) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= (\mathbb{M}(D.H)) : \sigma \\ &= \mathbb{M}(\tilde{D}) : \sigma \end{aligned} \quad (۷)$$

که $\tilde{\sigma}$ و σ به ترتیب تانسورهای تنش در وضعیت‌های موثر و آسیب دیده-ترمیم یافته می‌باشند. برای تبدیل وضعیت آسیب دیده-ترمیم یافته به وضعیت موثر، معمولاً سه فرضیه‌ی اساسی وجود دارد: ۱- فرضیه‌ی کرنش برابر^۵، ۲- فرضیه‌ی انرژی کرنشی برابر^۶ و ۳- فرضیه‌ی توان برابر^۷. معمولاً فرضیه‌ی توان برابر برای مواد با رفتار وابسته به زمان (مانند ویسکوالاستیک یا ویسکوپلاستیک) مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین استفاده از چنین فرضیه‌ای برای مدل‌سازی رفتار مواد ترد منطقی نمی‌باشد. اگرچه استفاده از فرضیه‌ی انرژی کرنشی برابر جای فرضیه‌ی کرنش برابر پیاده‌سازی فرمولاسیون را پیچیده‌تر می‌کند، ولی معمولاً در پیش‌بینی رفتار مواد موفق‌تر می‌باشد. همانطور که بسیاری از محققین از فرضیه انرژی کرنشی برابر استفاده می‌کنند [۴۳]، در اینجا هم از همین فرض استفاده می‌شود:

¹ Healed

² Unhealed

³ Fourth order damage-heal effect tensor

⁴ Damage effect tensor

⁵ Strain equivalence

⁶ Strain energy equivalence

⁷ Power equivalence

$$\frac{1}{2} \sigma^T : \mathbb{C}^{-1} : \sigma = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbb{C}}^{-1} : \tilde{\sigma} \quad (۸)$$

که $\mathbb{C}^{-1}$ تانسور نرمی الاستیک^۱ آسیب دیده و $\tilde{\mathbb{C}}^{-1}$ تانسور نرمی الاستیک موثر (آسیب ندیده) می باشند که بصورت زیر می باشد:

$$[\tilde{\mathbb{C}}^{-1}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (۹)$$

E و ν به ترتیب مدول الاستیک و نسبت پواسون در پاسخ الاستیک هستند.

۳- تجزیه طیفی تنش

مواد ترد و نیمه ترد مانند بتن رفتار متفاوتی را از خود حین بارگذاری کششی و فشاری نشان می دهند. برای در نظر گرفتن درست این رفتار، با استفاده از تکنیک تجزیه طیفی تنش، تانسور تنش کوشی^۲ به دو قسمت مثبت و منفی تقسیم می شود [۷، ۱۲، ۱۷، ۴۴]:

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^-; \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^+ + \tilde{\sigma}^- \quad (۱۰)$$

قسمت های مثبت و منفی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= \mathbb{P}_{\sigma}^+ : \sigma \\ \sigma^- &= \mathbb{P}_{\sigma}^- : \sigma \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که $\mathbb{P}_{\sigma}^+$ و $\mathbb{P}_{\sigma}^-$ به ترتیب تانسورهای تصویر مثبت و منفی^۳ مرتبه چهار هستند. این تانسورها بصورت زیر محاسبه می شوند [۷]:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\sigma}^+ &= \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle n_i \otimes n_i \otimes n_i \otimes n_i \\ \mathbb{P}_{\sigma}^- &= \mathbb{I} - \mathbb{P}_{\sigma}^+ \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که $\langle \sigma_i \rangle$ نشان دهنده تابع پله هویساید می باشد. σ_i نیز آیین مقدار ویژه تانسور تنش و n_i بردار ویژه متناظر با آن می باشد. همچنین $\mathbb{I}$ بردار همانی مرتبه چهار می باشد. با در نظر گرفتن معادله ی (۷) برای تانسورهای تنش کششی و فشاری، داریم:

$$\tilde{\sigma}^+ = \mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+ . \mathbf{H}^+) : \sigma^+; \tilde{\sigma}^- = \mathbb{M}^-(\mathbf{D}^- . \mathbf{H}^-) : \sigma^- \quad (۱۳)$$

که $\mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+ . \mathbf{H}^+)$ و $\mathbb{M}^-(\mathbf{D}^- . \mathbf{H}^-)$ به ترتیب تانسورهای مرتبه چهار تاثیر آسیب-ترمیم کششی و فشاری^۴ هستند. همچنین $\mathbf{D}^{\pm}$ و $\mathbf{H}^{\pm}$ به ترتیب تانسورهای مرتبه دو آسیب و ترمیم هستند.

¹ Elastic compliance tensor

² Cauchy stress tensor

³ Positive and negative projection tensors

⁴ Fourth order tensile and compressive damage-healing effect tensors

در استخراج این تانسورها، از مولفه‌های برشی تانسور آسیب و ترمیم صرف نظر می‌شود. همانند تانسور تاثیر آسیب [۲۱، ۴۳، ۴۵]، $\mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+)$ و $\mathbb{M}^-(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+)$ در نشان‌گذاری وویت^۱ به صورت زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$[\mathbb{M}^\pm]_{ii} = \frac{1}{1 - D_i^\pm(1 - H_i^\pm)}; i = 1.2.3$$

$$[\mathbb{M}^\pm]_{ii} = \frac{1}{\sqrt{(1 - D_j^\pm(1 - H_j^\pm))(1 - D_k^\pm(1 - H_k^\pm))}}; \quad (14)$$

$$i = 4.5.6; \quad j = 2.3.1; \quad k = 9 - j - i$$

با جایگذاری معادلات (۱۱) در (۱۳) و در نظر گرفتن معادلات (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^+ : \sigma + \mathbb{M}^-(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^- : \sigma \\ &= (\mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^+ + \mathbb{M}^-(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^-): \sigma \end{aligned} \quad (15)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۷) و (۱۵)، تانسور تاثیر آسیب-ترمیم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\mathbf{D}^+.\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+.\mathbf{H}^+) &= \\ \mathbb{M}^+(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^+ + \mathbb{M}^-(\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+): \mathbb{P}_\sigma^- \end{aligned} \quad (16)$$

با فرض اینکه آسیب و ترمیم بصورت همسانگرد باشند، تانسور تاثیر آسیب-ترمیم بصورت زیر ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\mathbf{D}^+.\mathbf{D}^+.\mathbf{H}^+.\mathbf{H}^+) &= \frac{\mathbb{P}_\sigma^+}{(1 - D^+(1 - H^+))} + \frac{\mathbb{P}_\sigma^-}{(1 - D^-(1 - H^-))} \\ &= \frac{\mathbb{P}_\sigma^+}{\tilde{D}^+} + \frac{\mathbb{P}_\sigma^-}{\tilde{D}^-} \end{aligned} \quad (17)$$

که $D^\pm$ و $H^\pm$ متغیرهای آسیب و ترمیم هستند. معادله‌ی (۱۷) نشان می‌دهد که آسیب و ترمیم باقیمانده از قبل در ماده با وجود تانسورهای تصویر کششی و فشاری ($\mathbb{P}_\sigma^\pm$) موجب رفتار ناهمسانگردی در ماده خواهد شد [۲۸].

۴- مدل‌سازی ساختاری الاستیک آسیب-ترمیم

از دیدگاه پدیده شناختی^۲، مکانیک محیط پیوسته آسیب یک تئوری قدرتمند است که می‌تواند رفتار غیرخطی انواع مواد را مدل کند. بر اساس متغیرهای حالت داخلی^۳ و ترمودینامیک چرخه‌های غیر بازگشت‌پذیر، این روش می‌تواند برای استخراج مدل‌های ساختاری مناسب برای مواد بتنی مورد استفاده قرار گیرد. در این راستا، با فرض تغییر شکل الاستیک هم دما، انرژی پتانسیل گیبس^۴ (Γ) و انرژی آزاد هلمهولتز^۵ (ψ) بر حسب متغیرهای حالت داخلی ارائه می‌شوند.

¹ Voigt notation

² Phenomenologically

³ Internal state variables

⁴ Gibbs potential energy

⁵ Helmholtz free energy

این دو انرژی توسط رابطه‌ی زیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند:

$$\Gamma(\sigma, \mathbf{D}^+, \mathbf{D}^-, \mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-, \beta^+, \beta^-, \zeta^+, \zeta^-) = \sigma: \varepsilon_e - \psi(\varepsilon_e, \mathbf{D}^+, \mathbf{D}^-, \mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-, \beta^+, \beta^-, \zeta^+, \zeta^-) \quad (18)$$

که $\beta^\pm$ و $\zeta^\pm$ به ترتیب متغیرهای آسیب و ترمیم کل^۱ می‌باشند. قانون دوم ترمودینامیک را به وسیله نامساوی کلازیوس-دوهم می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\sigma: \dot{\varepsilon}_e - \dot{\psi} \geq 0 \quad (19)$$

به دلیل رشد آسیب و به تبع آن تغییر در خواص الاستیک ماده، کرنش الاستیک را نمی‌توان به راحتی در مواد آسیب دیده بدست آورد. به همین دلیل در این زمینه مطالعات تجربی زیادی با استفاده از تست‌های تنش کنترل^۲ (و نه کرنش کنترل^۳) انجام گرفته است. برای ساده‌سازی فرمول‌ها و ایجاد شباهت بین توابع رشد کرنش، آسیب و ترمیم، ترجیح داده می‌شود که زوج نیروهای آسیب و ترمیم^۴ به تانسور تنش مرتبط شوند [۴۶]. بنابراین در این فصل از انرژی پتانسیل گیبس (به عنوان تابعی از تانسور تنش) برای استخراج معادله ساختاری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با استفاده از معادلات (۱۸) و (۱۹) و انجام تعدادی محاسبات ریاضی، به نامساوی زیر دست خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}: \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} - \varepsilon_e \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{D}^+}: \dot{\mathbf{D}}^+ + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{D}^-}: \dot{\mathbf{D}}^- + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{H}^+}: \dot{\mathbf{H}}^+ + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{H}^-}: \dot{\mathbf{H}}^- \\ + \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta^+}: \dot{\beta}^+ + \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta^-}: \dot{\beta}^- + \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta^+}: \dot{\zeta}^+ + \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta^-}: \dot{\zeta}^- \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

با در نظر گرفتن ترمودینامیک چرخه‌های بازگشت ناپذیر و استفاده از نامساوی (۲۰)، تانسور کرنش الاستیک همانند دیگر زوج نیروهای ترمودینامیکی دیگر به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e = \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma}; \mathbf{Y}^\pm = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{D}^\pm}; \mathbf{X}^\pm = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{H}^\pm}; \\ B^\pm = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta^\pm}; G^\pm = \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta^\pm} \end{aligned} \quad (21)$$

که $\mathbf{Y}^\pm$ و $\mathbf{X}^\pm$ به ترتیب زوج نیروهای ترمودینامیکی آسیب ($\mathbf{D}^\pm$) و ترمیم ($\mathbf{H}^\pm$) هستند. همچنین، $B^\pm$ و $G^\pm$ به ترتیب زوج نیروهای آسیب کل ($\beta^\pm$) و ترمیم کل ($\zeta^\pm$) می‌باشند که اثر سخت شوندگی همسانگرد در توابع رشد آسیب و ترمیم را نشان می‌دهند. همانند تحقیق ویاجیس و همکاران [۴۷]، انرژی پتانسیل گیبس Γ به سه قسمت انرژی پتانسیل الاستیک Γ_e ، انرژی پتانسیل آسیب Γ_d و انرژی پتانسیل ترمیم Γ_h تقسیم می‌شود:

$$\Gamma(\sigma, \mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm, \beta^\pm, \zeta^\pm) = \Gamma_e(\sigma, \mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) + \Gamma_d^\pm(\beta^\pm) + \Gamma_h^\pm(\zeta^\pm) \quad (22)$$

این انرژی‌های پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

¹ Overall damage and healing

² Stress control

³ Strain control

⁴ Damage and healing conjugate forces

$$\begin{aligned}
\Gamma_e(\sigma, \mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbb{C}}_e^{-1} : \tilde{\sigma} \\
&= \frac{1}{2} \sigma^T : \mathbb{M}^T(\mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) : \tilde{\mathbb{C}}_e^{-1} : \mathbb{M}(\mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) : \sigma \\
\Gamma_d^\pm(\beta^\pm) &= \frac{1}{2} K_d^\pm (\beta^\pm)^2
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\Gamma_h^\pm(\zeta^\pm) = \frac{1}{2} K_h^\pm (\zeta^\pm)^2$$

که $K_h^\pm$ و $K_d^\pm$ به ترتیب پارامترهای مادی سخت‌شوندگی^۱ یا نرم‌شوندگی^۲ آسیب و ترمیم هستند. با استفاده از معادلات (۸) و (۲۳)، رابطه‌ی بین تانسور نرمی الاستیک ($\mathbb{C}_e^{-1}$) و تانسور نرمی الاستیک موثر ($\tilde{\mathbb{C}}_e^{-1}$) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbb{C}_e^{-1} = \mathbb{M}^T(\mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) : \tilde{\mathbb{C}}_e^{-1} : \mathbb{M}(\mathbf{D}^\pm, \mathbf{H}^\pm) \tag{24}$$

با جایگذاری معادلات (۲۳) در معادله‌ی (۲۲) و در نظر گرفتن معادله‌ی (۲۱) زوج نیروهای ترمودینامیکی بصورت زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}^\pm &= \frac{1}{2} \sigma^T : \frac{\partial \mathbb{C}_e^{-1}}{\partial \mathbf{D}^\pm} : \sigma \\
\mathbf{X}^\pm &= \frac{1}{2} \sigma^T : \frac{\partial \mathbb{C}_e^{-1}}{\partial \mathbf{H}^\pm} : \sigma \\
B^\pm &= K_d^\pm \beta^\pm \\
G^\pm &= K_h^\pm \zeta^\pm
\end{aligned} \tag{25}$$

همانند پلاستیسیته، برای ایجاد تمایز بین رفتار ماده در حالت آسیب دیده و آسیب ندیده، سطوح آسیب کششی و فشاری $F_d^\pm(\mathbf{Y}^\pm, \beta^\pm)$ تعریف می‌شوند. همچنین سطوح ترمیم کششی و فشاری $F_h^\pm(\mathbf{X}^\pm, \zeta^\pm)$ برای ایجاد تمایز رفتار در حالت ترمیم یافته و ترمیم نیافته ارائه می‌شوند. حالت‌های $\dot{F}_d^\pm < 0$ ، $\dot{F}_d^\pm = 0$ و $\dot{F}_d^\pm > 0$ به ترتیب نشان دهنده‌ی حالت آسیب ندیده، حالت آسیب دیده و حالت غیرممکن می‌باشند. به طور مشابه حالت‌های $\dot{F}_h^\pm < 0$ ، $\dot{F}_h^\pm = 0$ و $\dot{F}_h^\pm > 0$ به ترتیب نشان دهنده‌ی حالت ترمیم نیافته، ترمیم یافته و حالت غیرممکن می‌باشند. زمانی که متغیرهای آسیب و ترمیم شروع به رشد (یا $\dot{F}_d^\pm = 0$ یا $\dot{F}_h^\pm = 0$) می‌کنند، معادلات رشد به صورت زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{D}}^\pm &= \lambda_d^\pm \frac{\partial F_d^\pm}{\partial \mathbf{Y}^\pm}; \dot{\beta}^\pm = -\lambda_d^\pm \frac{\partial F_d^\pm}{\partial B^\pm} \\
\dot{\mathbf{H}}^\pm &= \lambda_h^\pm \frac{\partial F_h^\pm}{\partial \mathbf{X}^\pm}; \dot{\zeta}^\pm = -\lambda_h^\pm \frac{\partial F_h^\pm}{\partial G^\pm}
\end{aligned} \tag{26}$$

که $\lambda_h^\pm$ و $\lambda_d^\pm$ به ترتیب ضرایب لاگرانژی آسیب و ترمیم هستند. این ضرایب می‌بایست شرایط کان-تاکر^۱ را ارضا کنند:

^۱ Hardening

^۲ Softening

$$\begin{aligned} \dot{F}_d^\pm \leq 0; \quad \lambda_d^\pm \geq 0; \quad \lambda_d^\pm \dot{F}_d^\pm &= 0 \\ \dot{F}_h^\pm \leq 0; \quad \lambda_h^\pm \geq 0; \quad \lambda_h^\pm \dot{F}_h^\pm &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

سطوح آسیب کششی و فشاری $F_d^\pm(\mathbf{Y}^\pm, \beta^\pm)$ منطقه‌ای را در فضای زوج نیروی آسیب $\mathbf{Y}^\pm$ احاطه می‌کند. فضای داخل سطوح آسیب $(F_d^\pm(\mathbf{Y}^\pm, \beta^\pm) \leq 0)$ نشان دهنده رفتار الاستیک آسیب ندیده ماده می‌باشد که در آن آسیب رشد نمی‌کند. گنجیانی و همکاران [۲۸]، سطوح آسیب کششی و فشاری زیر را برای بتن ارائه دادند:

$$F_d^\pm(\mathbf{Y}^\pm, \beta^\pm) = \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Y}^\pm : \mathbb{J} : \mathbf{Y}^\pm \right\}^{\frac{1}{2}} - B_0^\pm - B^\pm(\beta^\pm) \quad (28)$$

که $B_0^\pm$ آستانه‌ی آسیب^۲ و $\mathbb{J}$ یک تانسور مرتبه چهار متقارن است که توسط چو و ونگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbb{J}] = 2 \begin{bmatrix} 1 & \mu_d & \mu_d & 0 & 0 & 0 \\ \mu_d & 1 & \mu_d & 0 & 0 & 0 \\ \mu_d & \mu_d & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_d) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_d) \end{bmatrix} \quad (29)$$

لازم به ذکر است که μ_d یک پارامتر مادی می‌باشد. سطوح ترمیم کششی و فشاری $F_h^\pm(\mathbf{X}^\pm, \zeta^\pm)$ منطقه‌ای را در فضای زوج نیروی ترمیم $\mathbf{X}^\pm$ احاطه می‌کند.

فضای داخل سطوح ترمیم $(F_h^\pm(\mathbf{X}^\pm, \zeta^\pm) \leq 0)$ نشان دهنده رفتار الاستیک آسیب دیده و ترمیم نیافته ماده می‌باشد که در آن ترمیم رشد نمی‌کند. همانند صفحات آسیب (معادله‌ی (۲۹))، سطوح ترمیم سطوح ترمیم بصورت زیر پیشنهاد می‌گردند:

$$F_h^\pm(\mathbf{X}^\pm, \zeta^\pm) = \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{X}^\pm : \mathbb{L} : \mathbf{X}^\pm \right\}^{\frac{1}{2}} - G_0^\pm - G^\pm(\zeta^\pm) \quad (30)$$

که $G_0^\pm$ آستانه‌ی ترمیم^۳ و $\mathbb{L}$ یک تانسور مرتبه چهار متقارن است که در نشان‌گذاری وویت بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$[\mathbb{L}] = 2 \begin{bmatrix} 1 & \mu_h & \mu_h & 0 & 0 & 0 \\ \mu_h & 1 & \mu_h & 0 & 0 & 0 \\ \mu_h & \mu_h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu_h) \end{bmatrix} \quad (31)$$

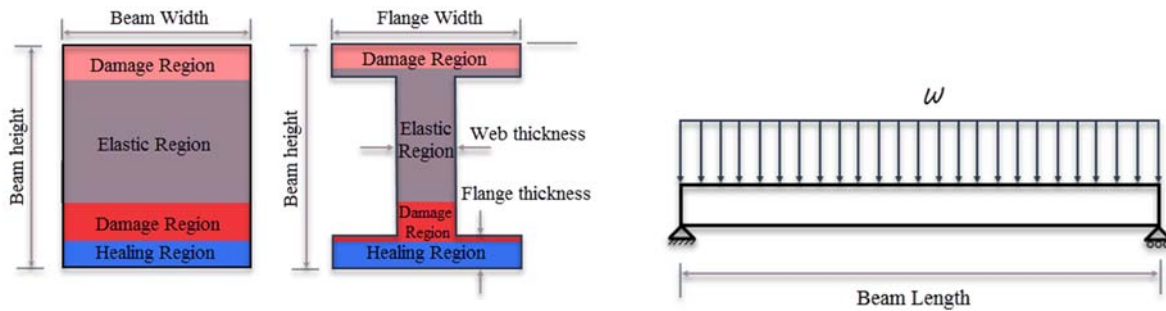
μ_h هم به عنوان یک پارامتر مادی می‌باشد.

¹ Kuhn-Tucker conditions

² Damage threshold

³ Healing threshold

۵- مدل سازی الاستیک آسیب-ترمیم برای تیر بتنی خودترمیم



شکل ۱- تیر بتنی خودترمیم تحت بار یکنواخت گسترده با مقطع الف) مستطیلی ب) I شکل

در این قسمت فرمولاسیون تیر بتنی خودترمیم را تحت بارگذاری گسترده بررسی می‌کنیم. ارتفاع تیر h و پهنای آن را b در نظر می‌گیریم. L طول تیر و M ممان خمشی وارد بر تیر در هر سطح مقطع می‌باشد. نسبت ارتفاع به طول کمتر از یک دهم در نظر گرفته می‌شود، بنابراین تاثیر تنش برشی در تیر قابل صرف نظر می‌باشد. یک تیر همگن با سختی متفاوت در کشش فشار در نظر گرفته می‌شود. با این فرض که هر سطح مقطع بعد از خمش هم صفحه باقی می‌ماند از اثرات کرنش در جهات دیگر صرف نظر می‌شود. بنابراین نیروی در هر سطح مقطع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int \sigma \, dA = b \int \sigma \, dy = 0 \quad (32)$$

در معادله بالا S مساحت سطح مقطع می‌باشد. این معادله به عنوان اولین معادله تعادل در نظر گرفته می‌شود، که y و b به ترتیب فاصله از تار خنثی و پهنای تیر می‌باشد. همچنین σ تنش خمشی وارد بر هر سطح مقطع است. معادله تعادلی ممان خمشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \int y \sigma \, dA = b \int y \sigma \, dy \quad (33)$$

با در نظر گرفتن تغییرات خطی کرنش در سطح مقطع معادله زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (34)$$

که ρ شعاع انحنای تیر در هر سطح مقطع است. تحت بارگذاری خمشی قسمت بالایی تیر فشرده شده و قسمت پایین تیر کشیده می‌شود. با استفاده از معادله (۳۴) معادله زیر به دست می‌آید:

$$y_c - y_t = h \cdot \varepsilon_t - \varepsilon_c = \frac{h}{\rho} \quad (35)$$

که ε_c و ε_t بیشینه کرنش های فشاری و کششی در سطح مقطع می باشند. با استفاده از نشانه گذاری وویت^۱ می توانیم قسمت های مثبت و منفی تانسور تنش را به صورت زیر بنویسیم:

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = [\sigma^+ \ 0 \ 0]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^- = [\sigma^- \ 0 \ 0]^T \quad (36)$$

که $\boldsymbol{\sigma}^+$ و $\boldsymbol{\sigma}^-$ به ترتیب تنش های فشاری و کششی را نشان می دهند. تانسور پروجکشن برای ناحیه ای که تحت کشش هست به صورت زیر بیان می شود

$$\mathbb{P}_{\sigma}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\sigma}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

همچنین تانسور پروجکشن برای ناحیه ای که تحت فشار است به صورت زیر می باشد:

$$\mathbb{P}_{\sigma}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\sigma}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱۶) تانسورهای آسیب-ترمیم فشاری و کششی به صورت زیر معرفی می گردند:

$$\mathbb{M}(\mathbf{D}^{\pm}, \mathbf{H}^{\pm}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - D^{\pm}(1 - H^{\pm})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۲۲) انرژی پتانسیل گیبس محاسبه می شود:

$$\Gamma_e(\sigma, D^{\pm}, H^{\pm}) = \frac{(\sigma^{\pm})^2}{2 E^{\pm}} \left(\frac{1}{1 - D^{\pm}(1 - H^{\pm})} \right)^2 \quad (40)$$

با استفاده از معادله (۲۵) و معادله (۴۰) نیروهای ترمودینامیکی جفت^۲ آسیب مشخص می شوند:

$$Y_1^{\pm} = \frac{1}{E^{\pm}} \frac{(1 - H^{\pm})(\sigma^{\pm})^2}{(1 - D^{\pm}(1 - H^{\pm}))^3}, \quad Y_2^{\pm} = Y_3^{\pm} = 0 \quad (41)$$

به طور مشابه با استفاده از معادلات (۲۵) و (۴۰) نیروهای ترمودینامیکی جفت ترمیم به دست می آیند:

$$X_1^{\pm} = \frac{1}{E^{\pm}} \frac{-D^{\pm}(\sigma^{\pm})^2}{(1 - D^{\pm}(1 - H^{\pm}))^3}, \quad X_2^{\pm} = X_3^{\pm} = 0 \quad (42)$$

با جایگذاری معادله (۴۰) در معادله (۲۶) معادلات رشد آسیب و آسیب کل به صورت زیر ساده می شود:

$$\dot{D}^{\pm} = \dot{\lambda}_d^{\pm} \frac{\partial F_d^{\pm}}{\partial Y^{\pm}} = \dot{\lambda}_d^{\pm}, \quad \dot{\beta}^{\pm} = -\dot{\lambda}_d^{\pm} \frac{\partial F_d^{\pm}}{\partial B^{\pm}} = \dot{\lambda}_d^{\pm} \quad (43)$$

همچنین معادلات سطوح آسیب به صورت زیر ساده می شوند:

$$F_d^{\pm} = Y^{\pm} - B_0^{\pm} - K_d^{\pm} D^{\pm} \quad (44)$$

به طور مشابه با جایگذاری معادله (۴۰) در معادله (۲۶) معادلات رشد ترمیم و ترمیم کل مشخص می شوند:

¹ Voight notation

² conjugate

$$\dot{H}^{\pm} = \dot{\lambda}_h^{\pm} \frac{\partial F_h^{\pm}}{\partial X^{\pm}} = \dot{\lambda}_h^{\pm} \quad \dot{\zeta}^{\pm} = -\dot{\lambda}_h^{\pm} \frac{\partial F_h^{\pm}}{\partial G^{\pm}} = \dot{\lambda}_h^{\pm} \quad (45)$$

بنابراین معادلات سطوح ترمیم به صورت زیر معرفی می گردند:

$$F_h^{\pm} = X^{\pm} - G_0^{\pm} - K_h^{\pm} H^{\pm} \quad (46)$$

با استفاده از معادلات (۴۰) و (۲۱) مولفه های کرنش الاستیک مشخص می شوند. بعد از آن با استفاده از محاسبات ریاضی تنش های فشاری و کششی محاسبه می گردند:

$$\sigma^{\pm} = E^{\pm} \varepsilon^{\pm} \left(1 - D^{\pm} (1 - H^{\pm}) \right)^2 \quad (47)$$

در ناحیه کشش سطوح آسیب و ترمیم کششی فعال هستند و مولفه های رشد آسیب فشاری و رشد ترمیم فشاری برابر صفر می باشند ($D^- = H^- = 0$). متغیرهای ترمیم و آسیب کششی از دو معادله کوپل سطح آسیب کششی ($F_d^+ = 0$) و سطح ترمیم کششی ($F_h^+ = 0$) به دست می آیند. با جایگذاری معادلات (۴۷) و (۴۱) در معادله (۴۴) و برابر صفر قرار دادن آن معادله اول مشخص می شود. به طور مشابه با جایگذاری معادله (۴۷) و معادله (۴۲) در معادله (۴۶) معادله دوم به دست می آید. با حل این دو معادله کوپل شرایط لازم برای به دست آوردن متغیرهای آسیب و ترمیم کششی مشخص می شود مشابه این روش برای ناحیه فشاری و استفاده از معادلات سطوح آسیب ($F_d^- = 0$) و ترمیم ($F_h^- = 0$) فشاری شرایط لازم برای رشد متغیرهای آسیب و تعیین فشاری به دست می آید. معادلات آسیب و ترمیم برای هر دو ناحیه مشابه یکدیگر و به صورت زیر می باشد:

$$D^{\pm} = \frac{1}{1 - H^{\pm}} - \frac{\frac{1}{1 - H^{\pm}} + \frac{B_0^{\pm}}{K_d^{\pm}}}{1 + \frac{E^{\pm} (1 - H^{\pm})^2}{K_d^{\pm}} (\varepsilon^{\pm})^2} \quad (48)$$

$$H^{\pm} = 1 - \frac{1}{D^{\pm}} - \frac{1 - \frac{1}{D^{\pm}} + \frac{G_0^{\pm}}{K_h^{\pm}}}{1 + \frac{E^{\pm} (D^{\pm})^2}{K_h^{\pm}} (\varepsilon^{\pm})^2} \quad (49)$$

این معادلات کوپل روابط لازم برای متغیرهای آسیب و ترمیم در هر ناحیه می باشند. با جایگذاری معادله (۴۰) در اولین معادله تعادل معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$b\rho \int E\varepsilon \left(1 - D (1 - H) \right)^2 d\varepsilon = 0 \quad (50)$$

این معادله با در نظر گرفتن دو ناحیه کششی و فشاری می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\int_{-\rho\varepsilon_t}^0 E^+ \varepsilon^+ \left(1 - D^+ (1 - H^+)\right)^2 d\varepsilon^+ + \int_0^{-\rho\varepsilon_c} E^- \varepsilon^- \left(1 - D^- (1 - H^-)\right)^2 d\varepsilon^- = 0 \quad (51)$$

E^+ و E^- مدول یانگ فشاری و کششی می‌باشند. ε^+ و ε^- به ترتیب کرنش های فشاری و کششی در راستای ارتفاع تیر می باشند. به طور مشابه با جایگذاری معادله (۴۷) در معادله تعادل ممان خمشی (معادله (۳۳)) معادله زیر به دست می آید:

$$M = b\rho^2 \int E \varepsilon^2 \left(1 - D (1 - H)\right)^2 d\varepsilon \quad (52)$$

با در نظر گرفتن نواحی فشاری و کششی معادله بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

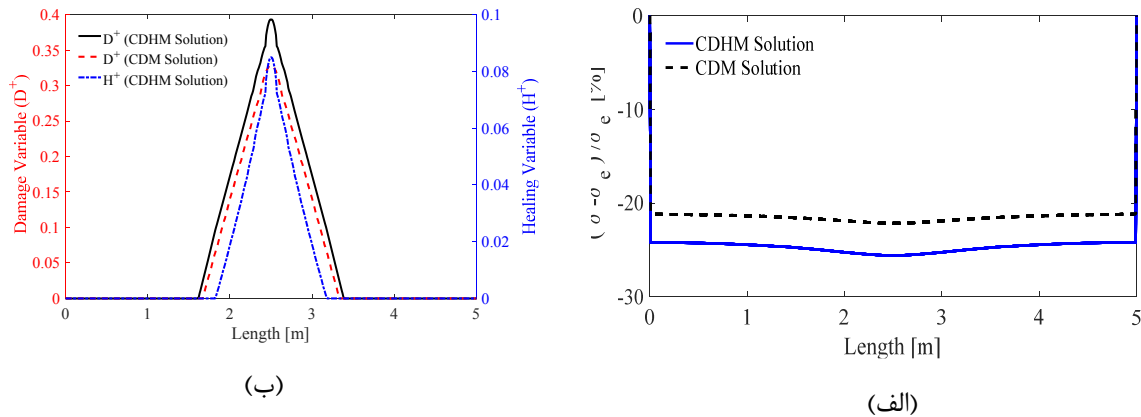
$$M = b\rho^2 \int_{-\rho\varepsilon_t}^0 E^+ (\varepsilon^+)^2 \left(1 - D^+ (1 - H^+)\right)^2 d\varepsilon^+ + b\rho^2 \int_0^{-\rho\varepsilon_c} E^- (\varepsilon^-)^2 \left(1 - D^- (1 - H^-)\right)^2 d\varepsilon^- \quad (53)$$

۶- نتایج عددی

مدل که در این کار از آن استفاده شده است قابلیت پیش بینی رفتار مواد خودترمیم را دارد. اگرچه با توجه به کمبود داده های تجربی برای بتن های خودترمیم فقط صحت سنجی با داده های بتن معمولی انجام گرفته است. این صحت سنجی را شهسواری و همکاران [۴۰] انجام داده اند. آنها نشان دادند که شبیه سازی های عددی همخوانی خوبی با نتایج داده های تجربی در حالت کششی دارد. در این مقایسه، برای دو حالت مختلف بارگذاری تحت فشار بتن، رفتار نرم شوندگی همانند ناحیه سخت شوندگی به خوبی پیش بینی شده است. پارامترهای ماده استفاده شده در این کار برای تیر بتنی خود ترمیم در جدول (۱) لیست شده است. شهسواری و همکاران [۴۰] این پارامترهای مادی را برای بتن خودترمیم ارائه کرده اند.

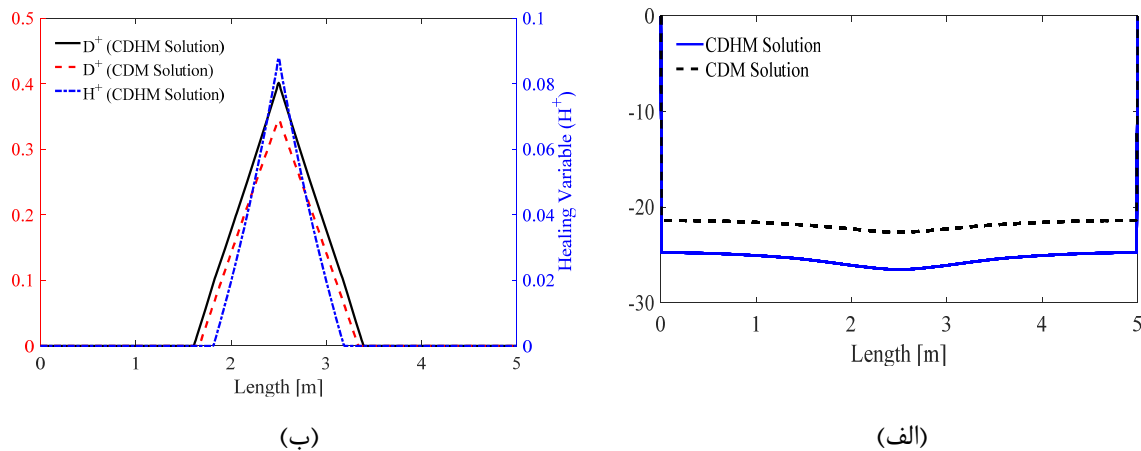
جدول ۱- پارامترهای مادی برای شبیه سازی تیر بتنی خودترمیم

$E^+ = 35 \text{ GPa}$	$E^- = 42 \text{ GPa}$
$B_0^+ = 332 \text{ Pa}$	$B_0^- = 43 \text{ Pa}$
$K_d^+ = 6.1 \text{ Pa}$	$K_d^- = 265 \text{ Pa}$
$G_0^+ = 49.8 \text{ Pa}$	$G_0^- = 4.3 \text{ Pa}$
$K_h^+ = 750 \text{ Pa}$	$K_h^- = 1300 \text{ Pa}$



شکل ۲- الف) خیز تیر (ب) متغیرهای آسیب و ترمیم کششی در لایه‌ی زیرین در طول تیر بتنی خودترمیم
بتنی خودترمیم I شکل تحت بارگذاری گسترده یکنواخت

تیر در نظر گرفته شده برای تحلیل دارای پهنای ۰/۲۰ متر و ارتفاع ۰/۲۰ متر و طول ۵/۰۰ متر است هر دو تکیه گاه های تیر تکیه گاه ساده می باشد. بارگذاری تیر گسترده و یکنواخت است، این بارگذاری تا بار نهایی بر اساس تئوری آسیب-ترمیم محیط‌های پیوسته و تئوری الاستیک انجام می گیرد. بار به صورت پله‌ای اعمال می شود تا بتوانیم به جواب همگرایی برسیم. شکل (۲الف) و (۳الف) خیز تیر تا بار نهایی با توجه به دو مدل مختلف مکانیک آسیب-ترمیم محیط‌های پیوسته و حل الاستیک نشان می دهد. توضیح خواهیم داد که تیر خودترمیم در مقایسه با تیر الاستیک بار بیشتری را تحمل می کند. ما برای به دست آوردن جواب، بارگذاری را به صورت پله های کوچک اعمال کردیم تا بر سختی های پاسخ ناپایدار مانند هنگامی که آسیب رشد می کنند، غلبه کنیم. شکل (۲ب) و (۳ب) متغیرهای آسیب و ترمیم کششی برای لایه زیرین در طول کل تیر بتنی خودترمیم نشان می دهند. همانطور که در این شکل‌ها مشخص است، مقدار بیشینه پارامترهای آسیب و ترمیم در ناحیه زیرین و در سطح مقطع وسط تیر می باشد، همان جایی که ممان خمشی بیشینه اعمال می شود.



شکل ۳- الف) خیز تیر (ب) متغیرهای آسیب و ترمیم کششی در لایه‌ی زیرین در طول تیر بتنی خودترمیم
بتنی خودترمیم با مقطع مستطیل تحت بارگذاری گسترده یکنواخت

جدول (۲) و (۳) اثرات ترمیم را برای دو نوع مختلف سطح مقطع، سطح مقطع مستطیلی و سطح مقطع I شکل مقایسه می‌کنند. این مقایسه برای بارگذاری نهایی هر کدام از این دو نوع تیر بتنی خود ترمیم می‌باشد. این جدول ها تنش فشاری بیشینه و تنش کششی بیشینه در وسط تیر نشان می‌دهد. سطح مقطع وسط تیر سطح مقطع بحرانی می‌باشد که در آن پیشینه خیز و در نتیجه بیشترین تنش کششی برای بارگذاری گسترده یکنواخت اتفاق می‌افتد. همانطور که در جدول مشخص است، متغیر آسیب موثر $32/4$ درصد در تیر بتنی خود ترمیم کاهش می‌یابد، این کاهش در مقایسه با حل تیر بتنی هنگامی که ترمیم اتفاق نمی‌افتد، می‌باشد. مقایسه بین حل الاستیک و مدل مکانیک محیط های پیوسته آسیب- ترمیم نشان می‌دهند که تیر بتنی خود ترمیم در مقایسه با حل الاستیک 21% وزن بیشتری را تحمل می‌کند. این درصد تحمل بار برای هر دو نوع تیر با سطح مقطع مستطیلی و I شکل یکسان است. در ناحیه ترمیم، هنگامی که بارگذاری افزایش می‌یابد تنش کششی کاهش می‌یابد، اما یکی از اثرات ترمیم در تیر بتنی این است که این میزان کاهش تنش کششی را کم می‌کند. بنابراین میزان قابلیت تحمل بار توسط تیر افزایش می‌یابد. رشد آسیب وابسته به میزان کاهش تنش کششی می‌باشد. هنگامی که میزان بار در بارگذاری گسترده افزایش می‌یابد متغیرهای آسیب و ترمیم در ناحیه ترمیم افزایش می‌یابند. هنگامی که بارگذاری افزایش می‌یابد ابتدا آسیب شروع به رشد می‌کند و هنگامی که آسیب به یک آستانه مشخص رسید ترمیم شروع به بازیابی بخشی از خصوصیات مادی تضعیف شده می‌کند. این بازیابی خصوصیات مادی باعث افزایش قابلیت تحمل بار و در نتیجه قابلیت تحمل خیز بیش‌تر در تیر بتنی خودترمیم در مقایسه با تیر بتنی ساده می‌شود.

جدول ۲- مقایسه بین نتایج مکانیک محیط پیوسته آسیب و مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم در وسط سطح مقطع تیر بتنی خودترمیم I شکل تحت بارگذاری گسترده یکنواخت.

درصد بهبود	حل CDHM	حل CDM	
۲۳.۷	۲.۵۱	۲.۰۳	تنش کششی در لایه زیرین تیر
-۰.۸	۴.۹۰	۴.۹۴	تنش فشاری در لایه بالایی تیر
۲۴.۲	۰.۲۵	۰.۳۳	آسیب موثر بیشینه

جدول ۳- مقایسه بین نتایج مکانیک محیط پیوسته آسیب و مکانیک محیط پیوسته آسیب-ترمیم در وسط سطح مقطع تیر بتنی خودترمیم با مقطع مستطیل تحت بارگذاری گسترده یکنواخت

درصد بهبود	حل CDHM	حل CDM	
۲۶.۴	۲.۴۹	۱.۹۷	تنش کششی در لایه زیرین تیر
-۴	۴.۸۲	۵.۰۲	تنش فشاری در لایه بالایی تیر
۳۲.۴	۰.۲۳	۰.۳۴	آسیب موثر بیشینه

۷- نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله مدلسازی نیمه تحلیلی تیر بتنی خود ترمیم ارائه شد. این تیر تحت بارگذاری گسترده یکنواخت و دارای تکیه گاه های ساده بود در راستای این هدف با مقایسه مدل های موجود، یک مدل انتخاب شد. این مدل از تکنیک تجزیه طیفی تنش برای تشخیص رفتار کششی و فشاری در تیر بتنی خودترمیم استفاده کرده است. فرضیات انرژی کرنش معادل و انرژی پتانسیل گیبس استفاده شد. برای به دست آوردن نیرو های مزدوج آسیب و ترمیم در حل نیمه تحلیلی برای تیر بتنی تحت خمش، ترمودینامیک فرایندهای برگشتناپذیر در نظر گرفته شده است. معادلات رشد متغیرهای آسیب و ترمیم به دست آمد سطوح آسیب و ترمیم برای تشخیص رفتار غیر خطی از رفتار الاستیک در نظر گرفته شد. در نهایت معادلات تعادل، قید و معادلات رشد آسیب و ترمیم برای تحلیل نتایج تیر بتنی خودترمیم تحت بارگذاری گسترده یکنواخت، حل شد. با به دست آوردن نتایج برای یک هندسه مشخص اثر متغیرهای آسیب و ترمیم کششی بر خیز تیر در بارگذاری نهایی تحقیق شد. حل مکانیک آسیب-ترمیم محیط های پیوسته با حل الاستیک مقایسه شد. نتایج نشان دادند که برای هندسه بیان شده تیر بتنی خودترمیم ۲۱ درصد بیشتر بار تحمل می کند. همچنین حل مکانیک آسیب-ترمیم محیط های پیوسته خیز بیشینه تیر را نزدیک به ۲۷ درصد بیشتر از حل الاستیک پیش بینی می کند. نتایج نشان می دهد هنگامی که بارگذاری افزایش می یابد ابتدا آسیب شروع به رشد می کند و هنگامی که آسیب به یک آستانه مشخص رسید ترمیم شروع به بازیابی بخشی از خصوصیات مادی تضعیف شده می کند. این بازیابی خصوصیات مادی باعث افزایش قابلیت تحمل بار و در نتیجه قابلیت تحمل خیز بیش تر در تیر بتنی خودترمیم در مقایسه با تیر بتنی ساده می شود.

تشکر و قدردانی

این پژوهش با حمایت مالی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) انجام گرفته است.

مراجع

- [1] Brown, E., Sottos, N.R., and White, S.R., "Fracture Testing of a Self-healing Polymer Composite", *Experimental Mechanics*, Vol. 42, pp. 372-379, (2002).
- [2] Williams, G., Trask, R., and Bond, I., "A Self-healing Carbon Fibre Reinforced Polymer for Aerospace Applications", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 38, pp. 1525-1532, (2007).
- [3] Darabi, M.K., Abu Al-Rub, R.K., Masad, E.A., Huang, C. W., and Little, D.N., "A Thermo-viscoelastic-viscoplastic-viscodamage Constitutive Model for Asphaltic Materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 191-207, (2011).
- [4] Yazdani, S., and Schreyer, H.L., "Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, pp. 1435-1450, (1990).

- [5] Chaboche, J.L.L., "Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with the Active/Passive Unilateral Condition", *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 1, pp. 148-171, (1992).
- [6] Abu-Lebdeh, T.M., Voyiadjis, G.Z., Abu Lebdeh, T.M., Voyiadjis, G.Z., Abu-Lebdeh, T.M., and Voyiadjis, G.Z., "Plasticity-damage Model for Concrete under Cyclic Multiaxial Loading", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, pp. 1465-1484, (1993).
- [7] Lubarda, V.A.V.A., Krajcinovic, D., and Mastilovic, S., "Damage Model for Brittle Elastic Solids with Unequal Tensile and Compressive Strengths", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 49, pp. 681-697, (1994).
- [8] Murakami, S., and Kamiya, K., "Constitutive and Damage Evolution Equations of Elastic-Brittle Materials Based on Irreversible Thermodynamics", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 39, pp. 473-486, (1997).
- [9] Faria, R., Oliver, J., and Cervera, M., "A Strain-based Plastic Viscous-damage Model for Massive Concrete Structures", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, pp. 1533-1558, (1998).
- [10] Boudon-Cussac, D., Hild, F., and Pijaudier-Cabot, G., "Tensile Damage in Concrete: Analysis of Experimental Technique", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, pp. 906-913, (1999).
- [11] Grassl, P., and Jirásek, M., "Damage-plastic Model for Concrete Failure", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 7166-7196, (2006).
- [12] Wu, J.Y., Li, J., and Faria, R., "An Energy Release Rate-based Plastic-damage Model for Concrete", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 583-612, (2006).
- [13] Cicekli, U., Voyiadjis, G.Z., and Abu Al-Rub, R.K., "A Plasticity and Anisotropic Damage Model for Plain Concrete", *International Journal of Plasticity*, Vol. 23, pp. 1874-1900, (2007).
- [14] Voyiadjis, G.Z., Taqieddin, Z.N., and Kattan, P.I., "Theoretical Formulation of a Coupled Elastic-plastic Anisotropic Damage Model for Concrete using the Strain Energy Equivalence Concept", *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 18, pp. 603-638, (2009).
- [15] Voyiadjis, G.Z., Taqieddin, Z.N., and Kattan, P.I., "Anisotropic Damage-plasticity Model for Concrete", *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, pp. 1946-1965, (2008).
- [16] Yu, T., "Statistical Damage Constitutive Model of Quasi-brittle Materials", *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 22, pp. 95-100, (2009).
- [17] Hansen, N.R.R., and Schreyer, H.L.L., "A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 359-389, (1994).
- [18] Ortiz, M., "A Constitutive Theory for the Inelastic Behavior of Concrete", *Mechanics of Materials*, Vol. 4, pp. 67-93, (1985).

- [19] Hayakawa, K., and Murakami, S., "Space of Damage Conjugate Force and Damage Potential of Elastic-Plastic-Damage Materials", Studies in Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 27-44, (1998).
- [20] Bielski, J., Skrzypek, J.J., and Kuna-Ciskal, H., "Implementation of a Model of Coupled Elastic-Plastic Unilateral Damage Material to Finite Element Code", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 15, pp. 5-40, (2006).
- [21] Chow, C.L., and Wang J., "An Anisotropic Theory of Elasticity for Continuum Damage Mechanics", International Journal of Fracture, Vol. 33, pp. 3-16, (1987).
- [22] Luccioni, B.M.M., and Rougier, V.C.C., "A Plastic Damage Approach for Confined Concrete", Computers and Structures, Vol. 83, pp. 2238-2256, (2005).
- [23] Abu Al-Rub, R.K., and Kim, S.M., "Computational Applications of a Coupled Plasticity-Damage Constitutive Model for Simulating Plain Concrete Fracture", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, pp. 1577-1603, (2010).
- [24] Richard, B., Ragueneau, F., Cremona, C., and Adelaide, L., "Isotropic Continuum Damage Mechanics for Concrete under Cyclic Loading: Stiffness Recovery, Inelastic Strains and Frictional Sliding", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, pp. 1203-1223, (2010).
- [25] Jung, D., Hegeman, A., Sottos, N.R., Geubelle, P.H., and White, S.R., "Self-healing Composites using Embedded Microspheres", American Society of Mechanical Engineers, Materials Division (Publication) MD, Vol. 80, pp. 265-275, (1997).
- [26] Kachanov, L.M., "Time of the Rupture Process under Creep Conditions", Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk, Vol. 8, pp. 26-31, (1958).
- [27] Rabotnov, Y.N., "*Creep Rupture*", Applied Mechanics, pp. 342-349, Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, (1969).
- [28] Ganjiani, M., Naghdabadi, R., and Asghari, M., "Analysis of Concrete Pressure Vessels in the Framework of Continuum Damage Mechanics", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 21, pp. 843-870, (2012).
- [29] Ganjiani, M., Naghdabadi, R., and Asghari, M., "An Elastoplastic Damage-induced Anisotropic Constitutive Model at Finite Strains", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 22, pp. 499-529, (2012).
- [30] Miao, S., Wang, M.L., and Schreyer, H.L., "Constitutive Models for Healing of Materials with Application to Compaction of Crushed Rock Salt", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, pp. 1122-1129, (1995).
- [31] Barbero, E.J., and Lonetti, P., "Application of Continuum Damage Healing Mechanics to Self-Healing Composites", ASME 2003 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers, pp. 515-519, Washington, DC, USA, (2003).

- [32] Barbero, E.J., "Continuum Damage-healing Mechanics with Application to Self-healing Composites", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 14, pp. 51-81, (2005).
- [33] Barbero, E.J., and Ford, K.J., "Characterization of Self-healing Fiber-reinforced Polymer-Matrix Composite with Distributed Damage", Journal of Advanced Materials -Covina-, Vol. 39, pp. 20-27, (2007).
- [34] Voyiadjis, G.Z., Shojaei, A., and Li, G., "A Generalized Coupled Viscoplastic-viscodamage-viscohealing Theory for Glassy Polymers", International Journal of Plasticity, Vol. 28, pp. 21-45, (2012).
- [35] Voyiadjis, G.Z., Shojaei, A., Li, G., and Kattan, P.I., "A Theory of Anisotropic Healing and Damage Mechanics of Materials", Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 468, pp. 163-183, (2011).
- [36] Zhu, H., Zhou, S., Yan, Z., Ju, J.W., and Chen, Q., "A Two-dimensional Micromechanical Damage-healing Model on Microcrack-Induced Damage for Microcapsule-Enabled Self-healing Cementitious Composites under Tensile Loading", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 24, No. 1, pp. 95-115, (2014).
- [37] Zemskov, S. V, Jonkers, H.M., and Vermolen, F.J., "A Mathematical Model for Bacterial Self-Healing of Cracks in Concrete", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 25, pp. 4-12, (2014).
- [38] Hilloulin, B., Van Tittelboom, K., Gruyaert, E., De Belie, N., and Loukili, A., "Design of Polymeric Capsules for Self-healing Concrete", Cement and Concrete Composites, Vol. 55, pp. 298-307, (2015).
- [39] Mignon, A., Graulus, G. J., Snoeck, D., Martins, J., De Belie, N., Dubruel, P., and Van Vlierberghe, S., "PH-Sensitive Superabsorbent Polymers: A Potential Candidate Material for Self-healing Concrete", Journal of Materials Science, Vol. 50, pp. 970-979, (2015).
- [40] Shahsavari, H., Baghani, M., Sohrabpour, S., and Naghdabadi, R., "Continuum Damage-Healing Constitutive Modeling for Concrete Materials Through Stress Spectral Decomposition", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 25, Issue. 6, pp. 900-918, (2015).
- [41] Al-Rub, R.K.A., and Darabi, M.K., "A Thermodynamic Framework for Constitutive Modeling of Time and Rate-dependent Materials, Part I: Theory", International Journal of Plasticity, Vol. 34, pp. 61-92, (2012).
- [42] Lu, T.J.J., and Chow, C.L.L., "On Constitutive Equations of Inelastic Solids with Anisotropic Damage", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 14, pp. 187-218, (1990).
- [43] Voyiadjis, G.Z., and Kattan, P.I., *Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites with an Introduction to Fabric Tensors*, Elsevier, (2010).
- [44] Simo, J.C., and Ju, J.W., "Strain and Stress-based Continuum Damage Models-II. Computational Aspects", International Journal of Solids and Structures, Vol. 23, pp. 841-869, (1987).

- [45] Chow, C.L.L., and Wang, J., "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 27, pp. 547-558, (1987).
- [46] Hayakawa, K., and Murakami, S., "Thermodynamical Modeling of Elastic-plastic Damage and Experimental Validation of Damage Potential", International Journal of Damage Mechanics, Vol. 6, pp. 333-363, (1997).
- [47] Voyiadjis, G.Z., Abu Al-Rub, R.K., Shojaei, A., and Li, G., "A Thermodynamic Consistent Damage and Healing Model for Self Healing Materials", International Journal of Plasticity, Vol. 27, pp. 1025-1044, (2011).

فهرست نمادهای انگلیسی

مساحت سطح مقطع کل	A
مساحت سطح مقطع آسیب دیده	A^d
مساحت سطح مقطع آسیب ندیده	A^{ud}
مساحت سطح مقطع ترمیم یافته	A^h
مساحت سطح مقطع ترمیم نیافته	A^{uh}
متغیر آسیب	D
متغیر ترمیم	H
متغیر آسیب موثر	$\tilde{D}$
تانسور مرتبه چهار تاثیر آسیب-ترمیم	$\mathbb{M}(D, H)$
تانسور تنش موثر	$\tilde{\sigma}$
تانسور نرمی الاستیک	$\mathbb{C}^{-1}$
تانسور نرمی الاستیک موثر (آسیب ندیده)	$\tilde{\mathbb{C}}^{-1}$
تانسور تصویر مرتبه چهار	$\mathbb{P}_\sigma$
زوج نیروهای ترمودینامیکی آسیب	$\mathbf{Y}^\pm$
زوج نیروهای ترمودینامیکی ترمیم	$\mathbf{X}^\pm$
پارامترهای مادی سخت شوندگی یا نرم شوندگی آسیب	K_d
پارامترهای مادی سخت شوندگی یا نرم شوندگی ترمیم	K_h
زوج نیروی آسیب کل	B
زوج نیروی ترمیم کل	G
سطح آسیب	F_d
سطح ترمیم	F_h
فاصله از تار خنثی	y

نمادهای یونانی

انرژی آزاد هلمهولتز	ψ
انرژی پتانسیل گیبس	Γ
متغیر آسیب کل	β
متغیر ترمیم کل	ζ
ضرایب لاگرانژی آسیب	λ_d
ضرایب لاگرانژی ترمیم	λ_h
شعاع انحنای تیر	ρ
تنش خمشی وارد بر هر سطح مقطع	σ
کرنش	ε

Abstract

Self-healing materials are a class of smart materials that have a structurally capability to recover damage caused by environmental stimuli over time. In this paper, a semi-analytic modeling is presented for predicting the mechanical behavior of a self-healing concrete beam. Along this purpose, a continuum damage-healing constitutive model is used to investigate the effect of damage and healing in stress field of concrete pressure vessels. This model use stress spectral decomposition method to model the different behavior of concrete in tensile and compressive loadings. Also, Clausius-Duhem inequality and the thermodynamics of irreversible processes are considered and conjugate forces of damage and healing are derived for a concrete thick-walled cylinder. Gibbs potential energy is divided into three parts; elastic energy, damage energy and healing energy. In this regard, the model introduce damage and healing surfaces to detect damage and healing behaviors from elastic one.

Then, two linear isotropic hardening functions are used in these surfaces for evolving of damage and healing variables. The verification of the solution is shown by solving an example for a simply supported beam having uniformly distributed the load. Finally, a result of a self-healing concrete beam is compared to elastic one to demonstrate the capability of the proposed analytical method in simulating concrete beam behavior. The results show that for the specific geometry, the self-healing concrete beam has 21% more weight tolerate, and the deflection of the entire beam up to failure load is about 27% larger than elastic solution under ultimate elastic load.