

## یک میدان سرعت جدید برای تحلیل فرآیند کشش میله با پروفیل قالب منحنی

در این مقاله یک میدان سرعت جدید و حل کرانه بالایی برای فرآیند کشش میله با پروفیل قالب منحنی داخوادارایه شده اند. در تحلیل، مرزهای برشی ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل به صورت تابع های نمایی انعطاف پذیر در نظر گرفته شده اند. با توجه به قانون پیوستگی جریان ماده و معادله منحنی قالب، منحنی جریان هر ذره ماده، در ناحیه تغییر شکل به دست آمده و نقطه همگرایی منحنی جریان به عنوان مبدا دستگاه مختصات کروی برای توصیف معادله منحنی جریان و مولفه های سرعت نقاط مادهی واقع بر آن انتخاب شده است. توان کل لازم برای انجام فرآیند محاسبه و نسبت به شکل هندسی مرزهای برشی، حداقل سازی شده و پروفیل قالب بهینه طراحی شده است. نیروی کشش با نتایج حل تحلیلی کلاسیک ارایه شده توسط سایر محققان که در آن مرزهای برشی ناحیه تغییر شکل به صورت کروی فرض شده اند، و همچنین با نتایج شبیه سازی با نرم افزار دیفرم مقایسه شده اند. نشان داده شده که مقدار نیروی کشش محاسبه شده از حل تحلیلی کلاسیک کمتر بوده و با نتایج شبیه سازی اجزا محدود انطباق بیشتری دارد.

محمد مهدی مهدوی<sup>۱</sup>

دانشجوی دکترا

حشمت اله حقیقت<sup>۲</sup>

دانشیار

واژه های راهنما: کشش میله، قالب منحنی، میدان سرعت، روش کرانه بالایی

### ۱- مقدمه

در فرآیند کشش میله، میله با مقطع گرد از درون روزنه قالب و با اعمال نیروی کششی به آن، عبور داده شده و قطر آن کاهش می یابد. پارامترهای این فرآیند شامل قطرهای اولیه و نهایی میله، جنس میله، ثابت اصطکاک و شکل هندسی قالب می باشند. پروفیل قالب نقش اصلی در مقدار نیروی کشش لازم برای انجام فرآیند دارد. بهینه سازی پروفیل قالب برای کاهش نیروی کشش، مزایای متعددی داشته که می توان به کاهش سایش و در نتیجه افزایش عمر قالب اشاره نمود. در تحلیل فرآیند مذکور مانند سایر فرآیندهای شکل دهی فلزات، مدل کردن فرآیند تغییر شکل واقعی و رسیدن به حل دقیق امکان پذیر نبوده و معمولاً از روش های تقریبی استفاده می شود. از میان روش های تقریبی، روش کرانه بالایی به طور وسیعی توسط محققان مختلف برای به دست آوردن نیروی کشش لازم و بهینه سازی این فرآیند استفاده شده است. در تحلیل به روش مذکور، هر چه ناحیه

<sup>۱</sup> دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه mmahdavi@gmail.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه hhaghighat@razi.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۲۹

تغییر شکل و میدان سرعت پیشنهادی به فرآیند واقعی نزدیک تر باشند، نتایج تحلیل با نتایج واقعی انطباق بیشتری خواهند داشت. Avitzur [۱، ۲] یک میدان سرعت را برای تحلیل کرانه بالایی فرآیند کشش ماده صلب-پلاستیک با قالب مخروطی ارائه کرد. وی مرزهای برشی ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل را کروی فرض کرد. به همین دلیل میدان سرعت ارائه شده، به میدان سرعت کروی معروف شد. Chen و Ling [۳] و Nagpal [۴] از جمله محققانی بودند که با توسعه میدان های سرعت برای فرآیند اکستروژن متقارن محوری با قالب های با پروفیل منحنی را بررسی کردند. Chen و همکاران [۵] و Liu و Chang [۶] روش المان محدود را برای شبیه سازی فرآیندهای اکستروژن و کشش میله با قالب مخروطی به کار بردند. Yang و همکاران [۷] و Yang و Han [۸] روش کرانه بالایی را با استفاده از خطوط جریان گسترش دادند. Peng [۹] به تحلیل کرانه بالایی و ناحیه تغییر شکل در اکستروژن میله با قالب مخروطی پرداخت. وی مرز برشی ورودی ناحیه تغییر شکل را تابع نمایی و مرز خروجی را کروی فرض کرد. اما میدان سرعت ارائه شده، شرایط مرزی روی مرز ورودی را برآورد نمی کرد. Chevalier [۱۰] اثر پارامترهای هندسی و شرایط اصطکاکی را بر کیفیت محصول نهایی فرآیند کشش با استفاده از شبیه سازی المان محدود بررسی کرد. Zhao و همکاران [۱۱] دو میدان سرعت برای تحلیل کرانه بالایی فرآیند اکستروژن با قالب های بیضوی شکل ارائه کردند. آنها مرزهای برشی ورودی و خروجی را به صورت صفحات عمود بر محور مرکزی قالب فرض و برای توصیف شکل قالب و میدان سرعت از دستگاه مختصات استوانه ای استفاده نمودند. Lu و Lo [۱۲] از روش تعادل نیروها برای محاسبه تغییر اصطکاک و تغییرات مواد در منطقه تغییر شکل، استفاده کردند. Luis و همکاران [۱۳] مقایسه ای بین نتایج تحلیلی و اجزا محدود، برای به دست آوردن نیروها، انرژی، تنش ها و کرنش در فرآیند کشش سیم انجام دادند. Ponalagusamy و همکاران [۱۴]، قالب هایی را بر اساس منحنی های بیضی و چندجمله ای های ساده طراحی و آنها را با هم مقایسه کردند. آنها دریافتند که نیروی اکستروژن در قالب هایی که براساس منحنی های بیضی طراحی شده اند در فرآیند اکستروژن ماده صلب-پلاستیک کمتر هست. Chen و Hang [۱۵] روش المان محدود را برای بهینه کردن پارامترهای فرآیند کشش به کار بردند. نتایج آنها نشان داد که نیم زاویه قالب، ضریب اصطکاک و دما تاثیر زیادی روی فرآیند کشش دارند. Gordon و همکاران [۱۶-۱۸] به ارائه میدان های سرعت عمومی، برای تحلیل فرآیند اکستروژن متقارن محوری با قالب منحنی و فرض مرزهای برشی ورودی و خروجی کروی و فرض رفتار صلب-پلاستیک ماده پرداختند. برای توصیف سرعت ماده در ناحیه تغییر شکل نیز از یک دستگاه مختصات کروی با مبدا منطبق بر نقطه همگرایی منحنی قالب استفاده نمودند. Pantegini و Genna [۱۹] با لحاظ اثرات کار سختی ماده، فرآیند کشش میله با قالب مخروطی را بررسی کنند. Rubio و همکاران [۲۰] یک راه حل برای کشش ورق با در نظر گرفتن ماده صلب-پلاستیک و تحت شرایط کرنش صفحه ای ارائه کردند. Herman و همکاران [۲۱] روش تعادل نیروها و روش المان محدود را برای پیش بینی تنش کششی لازم در کشش میله استفاده کردند. Rubio و همکاران [۲۲] راه حل ساده ای را که در مطالعه قبلی و برای میله ارائه کرده بودند، برای فرآیند کشش ورق با در نظر گرفتن کار سختی ماده توسعه دادند. Pantegini [۲۳] روش کرانه بالایی را برای تخمین تنش کششی لازم در فرآیند کشش سه بعدی ورق به کار بست. Zhang و همکاران [۲۴] فرآیند کشش با استفاده از روش کرانه بالایی و در نظر گرفتن یک قالب سهموی دو تکه ای را تحلیل کردند. آنها مرزهای برشی ورودی و خروجی را به صورت صفحات عمود بر

محور مرکزی قالب فرض و برای توصیف شکل قالب و میدان سرعت از دستگاه مختصات استوانه ای استفاده نمودند. پراغزه و حقیقت [۲۵] به تحلیل فرآیند اکستروژن میله با قالب مخروطی و استفاده از روش کرانه بالایی پرداختند. آنها مرز برشی ورودی ناحیه تغییر شکل را تابع نمایی و مرز خروجی را کروی فرض کردند. اما میدان سرعت ارایه شده، شرط پیوستگی جریان فلز روی مرز برشی ورودی را برآورد نمی کرد. مهدوی و حقیقت [۲۶] با فرض مرزهای برشی کروی به بررسی تحلیلی، تجربی و عددی اثر کارسختی بر نیروی کشش و زاویه بهینه قالب در فرآیند کشش میله با قالب مخروطی پرداختند.

همانگونه که بیان شد در تحلیل های انجام شده مرزهای برشی ناحیه تغییر شکل به صورت کروی فرض شده و از یک دستگاه مختصات برای توصیف حرکت کل ذرات مادی واقع در ناحیه تغییر شکل استفاده شده است. در این مقاله مرزهای برشی ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل به صورت تابع های نمایی انعطاف پذیر در نظر گرفته شده اند. مسیر حرکت هر ذره مادی در ناحیه تغییر شکل تعیین و میدان سرعت نقاط واقع بر آن مسیر در دستگاه مختصات کروی، با مبدا واقع در نقطه همگرایی منحنی جریان، بیان شده اند. برای یک شرایط فرآیند داده شده، توان کل نسبت به شکل هندسی مرزهای برشی بهینه شده و نیروی کشش لازم محاسبه شده است.

## ۲-نواحی تغییر شکل و مرزهای برشی

فرآیند کشش میله با قالب با پروفیل منحنی دلخواه در شکل (۱) نشان داده شده است. در این فرآیند، ماده اولیه به صورت یک میله با مقطع گرد با شعاع اولیه  $R_{od}$  به دهانه قالب وارد و با اعمال نیروی کششی  $R_{od}$  به فضای درون قالب کشیده شده و طی عبور، شعاع آن به تدریج کاهش یافته و به شعاع نهایی  $R_{fd}$  در خروج از قالب تبدیل می شود. اولین نقطه تماس میله با پروفیل قالب نقطه ابتدا و آخرین نقطه تماس میله با پروفیل قالب نقطه انتهای پروفیل قالب است. طول تصویر شده پروفیل قالب در راستای خط مرکزی، طول قالب نامیده شده و با  $L_d$  نشان داده شده است. زاویه بین محور قالب و خطی که از اتصال نقاط ابتدا و انتهای قالب به وجود می آید  $\alpha_d$  نشان داده شده و از رابطه محاسبه می شود:

$$\tan \alpha_d = \frac{R_{od} - R_{fd}}{L_d} \quad (1)$$

اولین گام برای حل یک مساله شکل دهی فلز با روش کرانه بالایی، ارایه یک میدان سرعت مجاز است. میدان سرعت باید در شرط تراکم ناپذیری صدق کرده و نیز شرایط مرزی و پیوستگی جریان ماده روی مرز مشترک بین ناحیه ها را برآورد نماید. هر چه میدان سرعت پیشنهادی و ناحیه تغییر شکل به فرآیند واقعی نزدیکتر باشند، نتایج تحلیل به مقدارهای واقعی نزدیکتر خواهند بود. در کار حاضر مرزهای برشی به صورت تابع های نمایی دلخواه مدل شده اند. برای توصیف سرعت ذرات مادی، جریان ماده همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده به سه ناحیه سرعت تقسیم شده است. در ناحیه اول، قبل از ورود به فضای قالب، میله بدون تغییر شکل بوده و دارای سرعت افقی  $v_o$  است. ناحیه دوم (محصور بین مرزهای برش  $S_1$  و  $S_2$  و سطح قالب  $S_2$  و محور مرکزی قالب)، ناحیه تغییرشکل بوده و شعاع میله طی عبور از قالب به تدریج کاهش می یابد. سپس وارد ناحیه سوم شده و بدون تغییر شکل و با سرعت  $v_f$  از دهانه خروجی قالب به بیرون از فضای قالب هدایت می شود.

از قانون پیوستگی جریان ماده داریم:

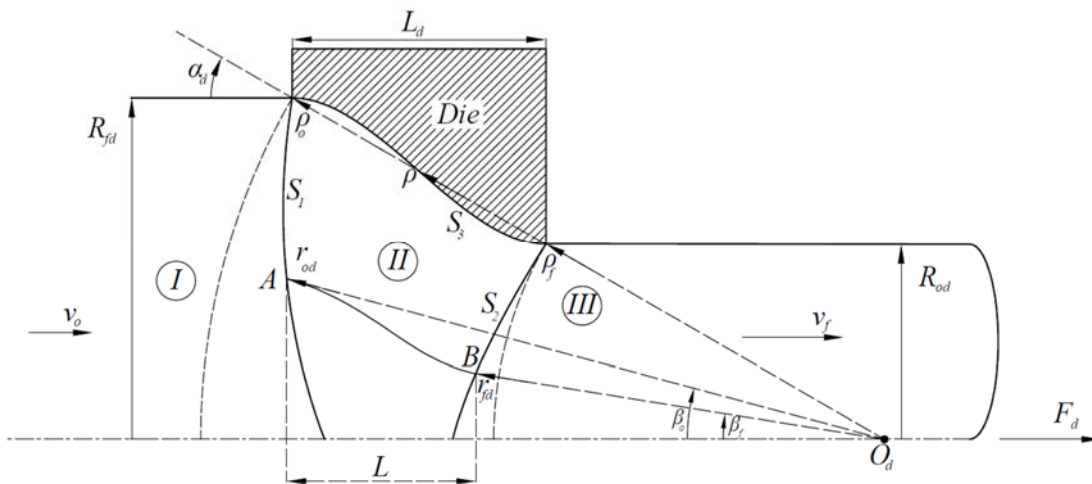
$$v_o = v_f \left( \frac{R_{fd}}{R_{od}} \right)^2 \quad (2)$$

مرز برشی ورودی ناحیه تغییر شکل  $S_1$  و مرز برشی خروجی  $S_2$  هر دو به صورت تابع های نمایی در نظر گرفته شده اند. از دستگاه مختصات کروی برای بیان معادله قالب و معادله های مرزهای برشی استفاده شده است. مبدا این دستگاه مختصات کروی، نقطه  $O_d$ ، در محل تقاطع امتداد خط اتصال بین نقطه های ابتدا و انتهای پروفیل قالب با محور مرکزی قالب قرار دارد. معادلات مرزهای برشی ورودی و خروجی  $S_1$  و  $S_2$  در دستگاه مختصات کروی به مرکز  $O_d$  توسط روابط زیر بیان شده اند:

$$r_{od}(\theta, \rho_o) = \rho_o \exp\left[\frac{b_o(\theta - \alpha_d)}{\alpha_d}\right] = \rho_o g_o(\theta) \quad (3)$$

$$r_{fd}(\theta, \rho_f) = \rho_f \exp\left[\frac{b_f(\theta - \alpha_d)}{\alpha_d}\right] = \rho_f g_f(\theta)$$

که در این رابطه،  $\rho$  فاصله شعاعی نقاط روی پروفیل قالب از مرکز  $O_d$  بوده و مقدار آن از  $\rho_f$  تا  $\rho_o$  تغییر می کند. زاویه  $\alpha_d$  همانگونه که در شکل (۱) نشان داده شده، زاویه بین امتداد خط اتصال بین نقطه های ابتدا و انتهای پروفیل قالب با محور مرکزی قالب است. پارامترهای مستقل  $b_o$  و  $b_f$ ، پارامترهای هندسی شکل مرزهای ناحیه تغییر شکل هستند. اگر این پارامترها کوچکتر از صفر باشند، مرزها از مرکز  $O_d$  دور و اگر بزرگتر از صفر باشند مرزها به مبدا  $O_d$  نزدیک می شوند. اگر  $b_o$  و  $b_f$ ، هر دو برابر صفر باشند، مرزهای برشی به مرزهای کروی شکل به شعاع های  $\rho_f$  و  $\rho_o$  به مرکز  $O_d$  تبدیل می شوند. این مرزها در شکل (۱) به صورت خط چین نشان داده شده اند.



شکل ۱- فرآیند کشش میله، مرزهای برشی و منحنی جریان یک ذره مادی در ناحیه تغییر شکل

### ۳- میدان سرعت مجاز

برای یک نقطه A واقع بر مرز برشی ورودی با فاصله  $R_o$  از محور قالب، همانگونه که در شکل (۲) نشان داده شده، براساس قانون تراکم ناپذیری موقعیت نقطه B نظیر آن روی مرز برشی خروجی به دست می آید:

$$R_f = R_o \sqrt{\frac{v_o}{v_f}} \quad (۴)$$

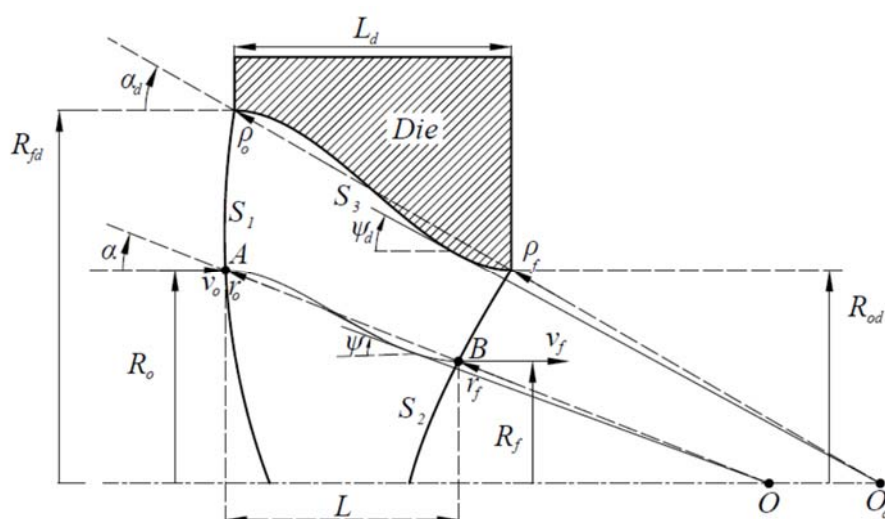
که  $R_f$  فاصله عمودی نقطه B از محور قالب است. با اتصال نقطه های ابتدا و انتهای منحنی جریان، نقطه های A و B در شکل (۲)، و ادامه آن محل تقاطع آن با محور تقارن قالب به دست می آید. با معلوم بودن مختصات نقاط A و B می توان منحنی مسیر جریان ماده را به دست آورد. از دستگاه مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$  با مبدا متغییر برای توصیف منحنی جریان و میدان سرعت در ناحیه تغییر شکل استفاده شده است. برای مسیر منحنی شکل AB طول تصویر شده بر امتداد محور قالب با  $L$  نشان داده شده و با توجه به شکل (۱) برابر است با:

$$L = r_{od}(\beta_o, \rho_o) \cos \beta_o - r_{of}(\beta_f, \rho_f) \cos \beta_f \quad (۵)$$

زاویه  $\alpha$  نشان داده شده در شکل (۲) زاویه بین محور قالب و امتداد خطی که از اتصال نقاط A و B به وجود می آید نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\tan \alpha = \frac{R_o - R_f}{L} \quad R_f = r_{fd}(\beta_f, \rho_f) \sin \beta_f \quad \text{و} \quad R_o = r_{od}(\beta_o, \rho_o) \sin \beta_o \quad (۶)$$

اگر  $b_o$  و  $b_f$  هر دو برابر صفر باشند، مرزهای برشی ورودی و خروجی به سطوح کروی تبدیل و امتداد خط AB از مرکز  $O_d$  عبور خواهد نمود. با در نظر گرفتن منحنی های جریان در ناحیه تغییر شکل، هر منحنی جریان دارای زاویه  $\alpha$  مختص به خود است.



شکل ۲- مسیر حرکت ذره مادی در ناحیه تغییر شکل و متغییرهای آن

از دستگاه مختصات کروی  $(\rho, \theta, \phi)$  با مبدا  $O_d$  برای توصیف مولفه های سرعت نقاط مادی که روی پروفیل قالب حرکت می نمایند، استفاده شده است. مولفه های سرعت نقاط روی پروفیل قالب به صورت زیر می باشند [۱۶]:

$$\begin{aligned} V_r &= -v_f \left(\frac{\rho_f}{\rho}\right)^2 \frac{\sin^2 \alpha_d}{\sin^2 \psi_d} \cos \psi_d \\ V_\theta &= -v_f \frac{\rho_f^2}{\rho} \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \alpha_d}{\sin^2 \psi_d} \cos \psi_d \\ V_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

که  $\rho$  و  $\psi_d$  به ترتیب موقعیت های شعاعی و زاویه ای نقطه های روی پروفیل قالب می باشند. میدان سرعت در شرط تراکم ناپذیری صدق کرده و نیز شرایط مرزی را برآورد می نماید. قانون تراکم ناپذیری در سیستم مختصات کروی به صورت رابطه زیر است:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = 0 \quad (8)$$

با مراجعه به شکل (۲)، مولفه های سرعت روی نقاط واقع بر هر منحنی جریان، به صورت زیر فرض شده اند:

$$\begin{aligned} V_r &= -v_f \left(\frac{r_f}{r}\right)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \psi} \cos \psi \\ V_\theta &= -v_f \frac{r_f^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \psi} \cos \psi \\ V_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

که  $r$  و  $\psi$  به ترتیب موقعیت های شعاعی و زاویه ای هر نقطه روی مسیر حرکت ذره مادی در دستگاه مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$  با مبدا  $O$  می باشند. اگر  $b_o$  و  $b_f$  هر دو برابر صفر باشند، یک دستگاه مختصات کروی و یک میدان سرعت برای کل ناحیه تغییر شکل بیان و میدان سرعت عمومی ارایه شده بر میدان سرعت مرجع [۱۶] منطبق می شود. با میدان سرعت داده شده، مولفه های نرخ کرنش از رابطه (۱۰) قابل محاسبه می باشند. مولفه های کرنش در مختصات کروی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \\ \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta}{r} \cot \theta \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} V_\phi \right) \\ \dot{\varepsilon}_{\phi r} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط بالا (با  $i \neq j$ )  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  مولفه های نرخ کرنش برشی هستند.

#### ۴- تحلیل کرانه بالایی

روش کرانه بالایی شامل محاسبه توان داخلی تغییر شکل برای ناحیه تغییر شکل توان برشی روی مرزهای برشی، سطوح ناپیوستگی سرعت، و توان اصطکاکی بین ماده و سطح قالب می باشند. با داشتن میدان سرعت و مولفه های نرخ کرنش می توان توان های داخلی، برشی و اصطکاکی را محاسبه نمود. معادله عمومی برای محاسبه توان داخلی  $\dot{W}_i$  برای ماده پلاستیک کامل برابر است با:

$$\dot{W}_i = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \quad (11)$$

که  $\sigma_0$  تنش سیلان و  $dV$  المان حجم هستند. با توجه به متقارن محوری بودن فرآیند، رابطه مقدار توان داخلی به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\dot{W}_i = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{rr}^2 + \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{\phi\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{r\theta}^2} dV \quad (12)$$

مولفه های نرخ کرنش نیز به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= 2v_f \left( \frac{r_f}{r} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \psi}{\sin^2 \psi} \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\tan \psi} \right) \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= -v_f \left( \frac{r_f}{r} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \psi}{\sin^2 \psi} \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\tan \psi} \right) \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= -\frac{v_f}{2} \left( \frac{r_f}{r} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\tan \psi \sin \psi} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2}{\tan \psi} \right. \\ &\quad \left. + r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 (1 + \tan^2 \psi) + \frac{\tan \psi}{r} \right) \\ \dot{\epsilon}_{\theta\phi} &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{\phi r} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

رابطه توان اصطکاکی به صورت زیر است:

$$\dot{W}_f = \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{S_f} |\Delta V_3| dS_f \quad (14)$$

$dS_f$  المان سطح قالب،  $m$  ثابت اصطکاک برشی و

$$|\Delta V_3| = |V_r \cos \eta + V_\theta \sin \eta|_{\theta=\psi} \quad (15)$$

که  $\eta$  زاویه بین راستای شعاعی و راستای مماس بر منحنی قالب بوده و

$$\cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho} \right)^2}}, \quad \sin \eta = \frac{\rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho}}{\sqrt{1 + \left( \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho} \right)^2}} \quad (16)$$

المان سطح قالب نیز به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$dS_3 = 2\pi(\rho \sin \psi_d) \sqrt{1 + \left(\rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho}\right)^2} d\rho \quad (17)$$

با توجه به روابط فوق، توان اصطکاکی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{W}_f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} m \sigma_0 \int_{\rho_f}^{\rho_0} |\Delta v_3| (\rho \sin \psi_d) \sqrt{1 + \left(\rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \rho}\right)^2} d\rho \quad (18)$$

رابطه توان برشی به صورت زیر است:

$$\dot{W}_s = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_s |\Delta V| dS_s \quad (19)$$

که  $dS_s$  المان سطح بر روی سطوح ناپیوستگی سرعت است. مولفه های سرعت ها در یک نقطه با موقعیت زاویه ای  $\beta$  روی مرز برشی ورودی در شکل (۳) نشان داده شده اند. اندازه ناپیوستگی سرعت روی مرز برشی ورودی برابر است با

$$|\Delta V_1| = |V_r \sin \lambda_o + V_\theta \cos \lambda_o - v_o \sin(\beta_o - \lambda_o)| \quad (20)$$

که زاویه  $\lambda_o$  همانگونه که در شکل (۳) نشان داده شده، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sin \lambda_o = \frac{g_o \frac{\partial g_o}{\partial \beta_o}}{\sqrt{1 + \left(g_o \frac{\partial g_o}{\partial \beta_o}\right)^2}}, \quad \cos \lambda_o = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(g_o \frac{\partial g_o}{\partial \beta_o}\right)^2}} \quad (21)$$

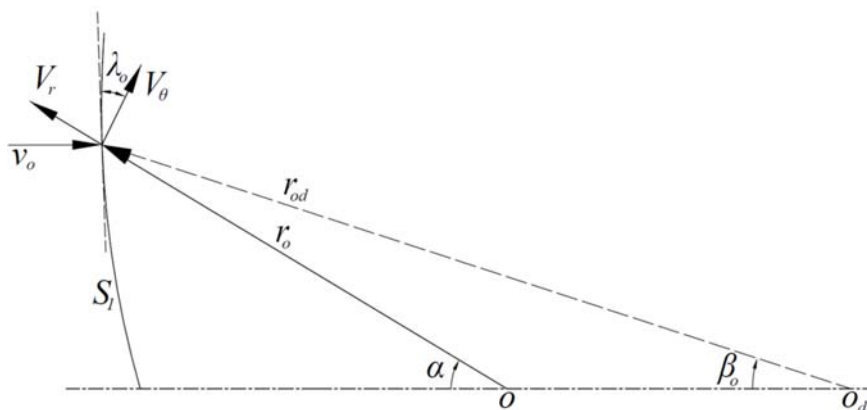
و المان سطح روی مرز برشی ورودی برابر است با

$$dS_1 = 2\pi(r_{od} \sin \beta_o) r_{od} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{g_o} \frac{\partial g_o}{\partial \beta_o}\right)^2} d\beta_o \quad (22)$$

و رابطه توان برشی روی مرز برشی ورودی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{W}_{s_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_0^\alpha |\Delta V_1| r_o^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{g_o} \frac{\partial g_o}{\partial \beta_o}\right)^2} \sin \beta_o d\beta_o \quad (23)$$

رابطه های ریاضی اندازه ناپیوستگی سرعت و المان سطح روی مرز برشی خروجی و توان برشی  $dS_s$  همانند مرز برشی ورودی بوده و کافی است به جای اندیس  $o$  اندیس  $f$  جایگزین گردد.



شکل ۳- مولفه های سرعت روی یک نقطه روی مرز برشی ورودی



نیروی کشش لازم برای انجام فرآیند از تقسیم توان کل بر سرعت میله در خروج از قالب و از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$F_d = \frac{\dot{W}_i + \dot{W}_{S1} + \dot{W}_{S2} + \dot{W}_f}{v_f} \quad (24)$$

## ۵- پروفیل قالب

شکل هندسی قالب، تغییرات تدریجی شعاع میله در ناحیه تغییر شکل پلاستیک را تعیین می کند. مدل تغییر شکل، میدان سرعت و تحلیل کرانه بالایی ارائه شده در این مقاله، قابل کاربرد برای هر پروفیل منحنی قالب می باشند. برای این کار کافی است معادله قالب به صورت تابع  $\psi_d(\rho)$  در مختصات کروی بیان شود. در این مقاله از قالب منحنی شکل ارائه شده توسط Balaji و همکاران [۲۷] استفاده شده است. معادله پروفیل قالب مذکور به صورت تابع درجه سه بوده و دارای شیب صفر در نقاط ابتدا و انتها می باشد. در واقع خط های مماس بر پروفیل قالب در نقاط ابتدا و انتهای منحنی قالب، موازی محور قالب بوده و بنابراین مقدار ناپیوستگی سرعت روی سطوح برشی  $S_1$  و  $S_2$  برابر صفر است. معادله ریاضی شکل قالب در مختصات کروی به صورت زیر بیان می شود:

$$\rho \sin \psi_d = R_{od} + (R_{od} - R_{fd}) \left[ 2 \left( \frac{\rho \cos \psi_d}{L_d} \right)^3 - 3 \left( \frac{\rho \cos \psi_d}{L_d} \right)^2 \right] \quad (25)$$

که  $\rho$  و  $\psi$  موقعیت زاویه ای هر نقطه روی پروفیل منحنی قالب در دستگاه مختصات کروی  $(\rho, \theta, \phi)$  است. معادله مسیر حرکت یک ذره با موقیت شعاعی نیز به صورت تابع درجه سه فرض شده و با توجه به موقعیت نقطه شروع و انتهای مسیر نقطه های A و B در شکل (۲) به صورت زیر است:

$$r \sin \psi = R_o + (R_o - R_f) \left[ 2 \left( \frac{r \cos \psi}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{r \cos \psi}{L} \right)^2 \right] \quad (26)$$

که  $r$  و  $\psi$  به ترتیب موقعیت های شعاعی و زاویه ای هر نقطه روی مسیر حرکت ذره مادی در دستگاه مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$  به مرکز  $O$  می باشند. کلیه رابطه های ریاضی نوشته شده در این بخش و قسمت های قبل به صورت یک برنامه کامپیوتری در محیط نرم افزار متلب تبدیل شده اند. با توجه به رابطه های بالا مشاهده می شود که نیروی کشش لازم برای انجام فرآیند کشش میله با جنس مشخص، تابعی از شعاع های اولیه و نهایی میله، طول قالب، ثابت اصطکاک برشی، پارامترهای هندسی معادله های مرزهای برشی ورودی و خروجی می باشد.

## ۶- شبیه سازی اجزا محدود

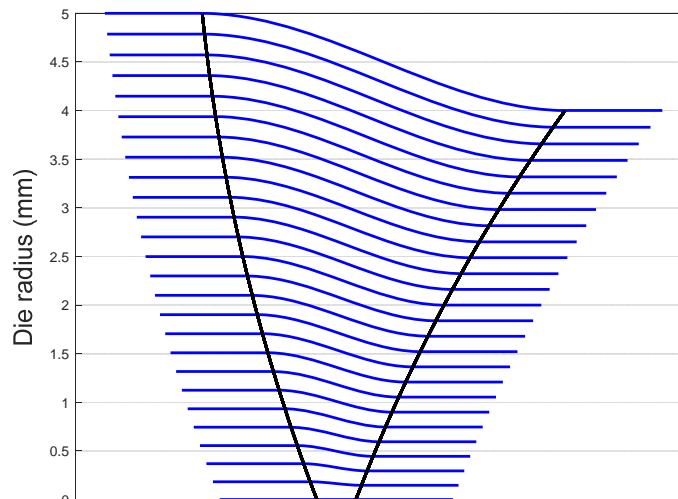
برای بررسی اعتبار نتایج حل تحلیلی که در بخش های قبلی ارائه شد، نتایج تحلیل با نتایج شبیه سازی فرآیند به روش اجزای محدود انجام شدند. برای شبیه سازی اجزا محدود از نرم افزار دیفرم استفاده شد. از بین نرم افزارهای متعدد موجود برای مدل سازی، شبیه سازی و تحلیل فرآیندهای شکل دهی، نرم افزار دیفرم دارای قابلیت های ویژه ای است. برخلاف کدهای المان محدود همه منظوره، دیفرم برای مدل کردن تغییر شکل

مناسب می باشد. محیط گرافیکی کاربر پسند و سهولت آماده سازی اطلاعات به محققان کمک می کند که بیشتر روی فرآیند شکل دهی متمرکز شوند و خود را درگیر روند طاقت فرسای مدل سازی کامپیوتری نکنند.

## ۷- نتایج و بحث

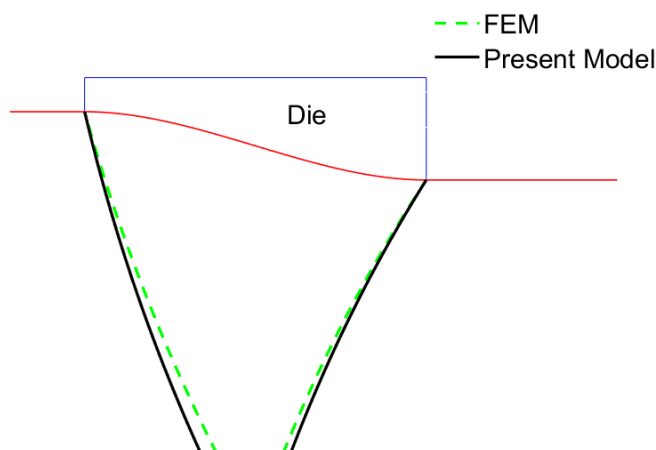
در شکل (۴)، پروفیل قالب، مرزهای برشی، هندسه ناحیه تغییر شکل و منحنی های جریان ماده نشان داده شده اند. این شکل برای کشش میله با شعاع اولیه ۵ میلی متر و تبدیل به شعاع نهایی ۴ میلی متر، طول قالب ۱۰ میلی متر،  $b_f = -0.1$  و  $b_o = 0.2$  رسم شده است. در این فرآیند، به دلیل وجود تقارن، از مدل دوبعدی برای شبیه سازی استفاده شده است. ثابت اصطکاک بین ماده و قالب ۰٫۰۵ در نظر گرفته شده است. سرعت میله در ورود به دهانه قالب ۱ میلی متر بر ثانیه و تعداد المان ها برابر ۳۰۰۰ عدد در نظر گرفته شده است. افزایش تعداد المان ها به تعداد بالاتر، تاثیر قابل توجهی بر نتیجه حاصل ندارد. تنش سیلان میانگین ماده نیز  $\sigma_0 = 200MPa$  فرض شد. برای یک شرایط داده شده فرآیند و پروفیل منحنی قالب داده شده، نیروی کشش لازم برای انجام فرآیند کشش، تابعی از طول قالب و پارامترهای هندسی معادله های مرزهای برشی ورودی و خروجی می باشد که باید نسبت به این سه متغیر بهینه شود. شکل (۵) مقایسه مرزهای ناحیه تغییر شکل در دو روش تحلیلی و شبیه سازی اجزا محدود را نشان می دهد. مقایسه این دو نتیجه با هم نشان می دهد که انطباق مناسبی بین نتایج تحلیلی و شبیه سازی وجود دارد.

در شکل (۶) تغییرات نیرو برحسب طول قالب برای مرزهای ورودی و خروجی کروی و نمایی و همچنین مقادیر شبیه سازی المان محدود رسم شده است. این شکل نشان می دهد که یک قالب بهینه وجود دارد که در آن نیرو حداقل می شود. همچنین مشاهده می شود که تحلیل کرانه بالایی حاضر حل بهتری از پایه داده و نتایج نیرو انطباق بسیار خوبی با مقادیر شبیه سازی اجزا محدود دارند.



شکل ۴- پروفیل قالب، مرزهای برشی ورودی و خروجی و منحنی های جریان ذرات مادی

$$\text{برای } b_o = 0.1 \text{ و } b_f = -0.07$$

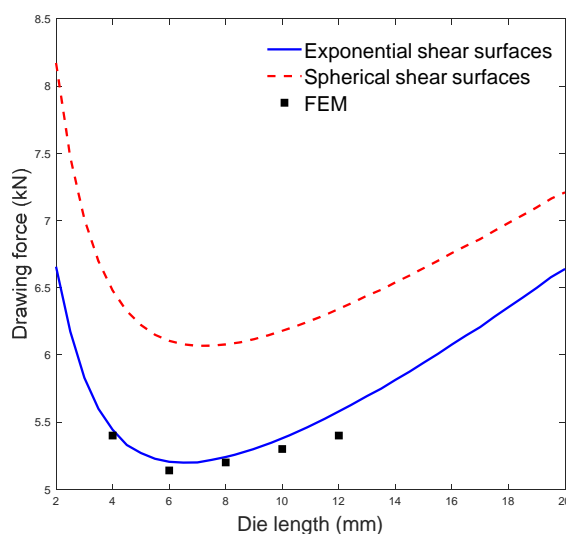


شکل ۵- مقایسه مرزهای برشی پیش بینی شده با شبیه سازی و حل حاضر برای طول قالب ۱۰ میلی متر و ثابت اصطکاک ۰,۰۵

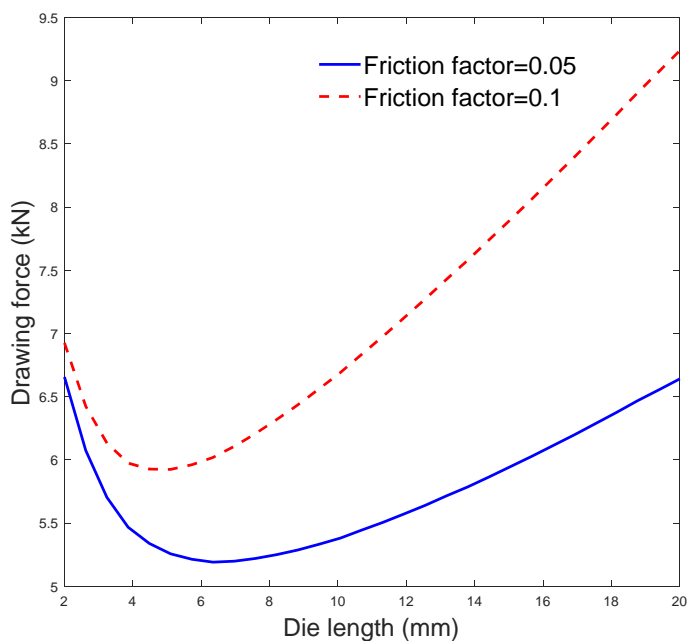
نتایج کرانه بالایی بالاتر از نتایج المان محدود قرار دارند که به دلیل طبیعت این روش تحلیلی بوده که در آن نیرو بیشتر از مقدار واقعی محاسبه می شود. طول قالب بهینه در حل حاضر کمتر از طول قالب ناشی از حل کلاسیک [۱۶] که در آن مرزهای برشی کروی فرض شده بودند و از یک دستگاه مختصات برای توصیف پروفیل منحنی قالب و میدان سرعت استفاده شده بود، کمتر است. این طول انطباق مناسب تری با طول قالب بهینه حاصل از شبیه سازی اجزا محدود دارد.

در شکل (۷) تغییرات نیروی کشش لازم برحسب طول قالب برای ثابت های اصطکاک ۰,۰۵ و ۰,۱ رسم شده است. همانگونه که انتظار می رفت و در این شکل نیز نشان داده شده، با افزایش ثابت اصطکاک، نیروی کشش لازم افزایش یافته و همچنین طول قالب بهینه کاهش می یابد.

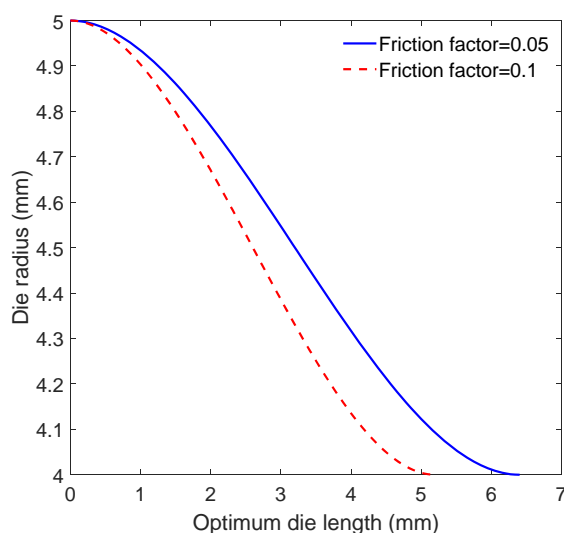
در شکل (۸)، شکل هندسی پروفیل منحنی قالب بهینه به دست آمده از تحلیل کرانه بالایی که در شکل (۷) بیان شدند، برای دو ثابت اصطکاک مختلف رسم شده است. مشاهده می شود که با افزایش ثابت اصطکاک طول قالب بهینه کاهش یافته است. با کاهش طول سطح اصطکاکی کاهش می یابد.



شکل ۶- تغییر نیروی کشش با طول قالب برای ثابت اصطکاک ۰,۰۵

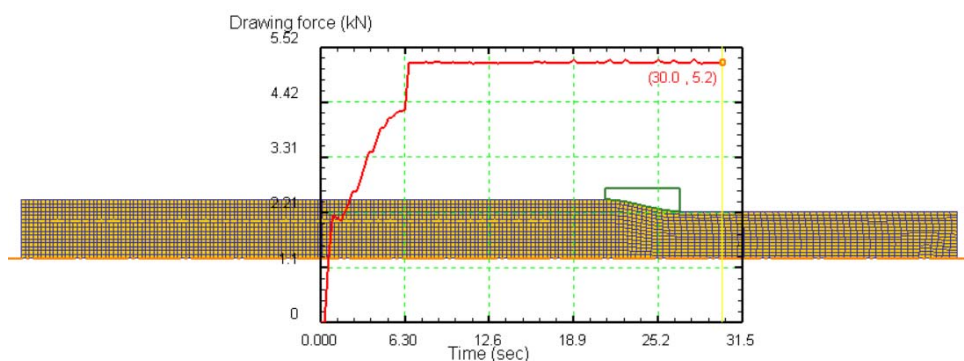


شکل ۷- تغییر نیروی کشش با طول قالب در ثابت های اصطکاک ۰,۵ و ۰,۱

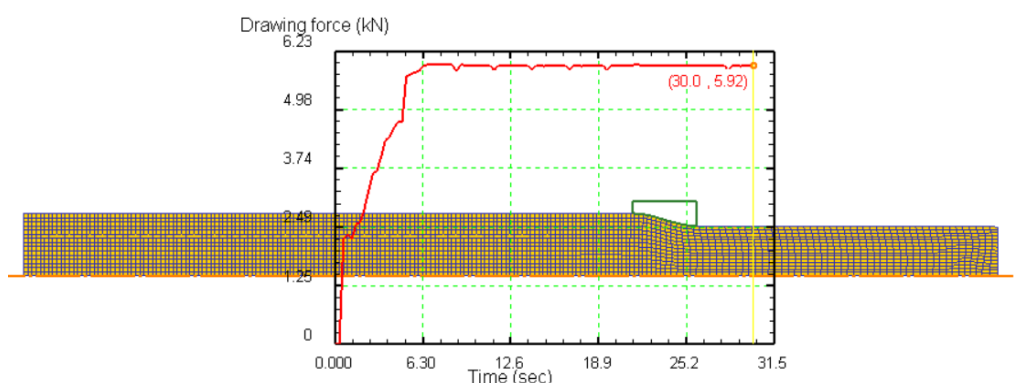


شکل ۸- پروفیل قالب بهینه در ثابت های اصطکاک ۰,۵ و ۰,۱

مدل هر دو قالب بهینه، با طول های ۶,۴ میلی متر و ۵,۲ میلی متر، در محیط نرم افزار دیفرم تهیه و فرآیند کشش میله در آنها شبیه سازی شدند. در شکل های (۹) و (۱۰)، شبیه سازی فرآیند کشش و نمودار تغییرات نیرو بر حسب زمان در نرم افزار دیفرم رسم شده اند. در این شکل ها مشاهده می شود که نیروی کشش در ابتدا با شیب زیاد افزایش یافته و زمانی که ماده فضای قالب را پر کرده و از آن خارج می شود، مقدار نیرو ثابت شده و تا پایان فرآیند، بدون تغییر باقی می ماند. نیروی کشش در آنها به ترتیب ۵,۲ کیلونیوتن و ۵,۹۲ کیلونیوتن می باشند. این مقادیر انطباق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی دارند.



شکل ۹- نیروی کشش برای قالب بهینه با طول ۴.۶ در ثابت اصطکاک ۰.۵



شکل ۱۰- نیروی کشش برای قالب بهینه با طول ۵.۲ میلی متر در ثابت اصطکاک ۰.۱

## ۸- نتیجه گیری

- در این مقاله فرآیند کشش میله از میان یک قالب با پروفیل منحنی دلخواه بر اساس روش کرانه بالایی تحلیل شد. معادله قالب و معادله های مرزهای برشی در دستگاه مختصات کروی با مبدا واقع بر نقطه همگرایی منحنی قالب بیان شدند. هر منحنی جریان ماده، در دستگاه مختصات کروی مختص به خود و با مبدهای واقع بر نقطه همگرایی منحنی ها بیان شدند. توان کل نسبت به شکل هندسی مرزهای برشی
- حل تحلیلی ارایه شده عمومی بوده و قابل اعمال به هر پروفیل منحنی قالب است.
  - مرزهای برشی پیش بینی شده توسط حل حاضر، نتایج دقیق تر و نزدیکتری به شبیه سازی اجزا محدود نسبت به مرزهای کروی دارند.
  - نیروی کشش پیش بینی شده در مقایسه با نتایج کارهای قبلی کمتر بوده و انطباق بیشتری با داده های حاصل از شبیه سازی اجزای محدود دارد.
  - با افزایش ثابت اصطکاک طول بهینه قالب کاهش می یابد.
  - نشان داده شد که مدل پیشنهادی پیش بینی های دقیق تری داشته و می تواند برای طراحی، تحلیل و بهینه سازی فرآیند کشش استفاده شود.
  - برای یک شرایط داده شده فرآیند، قالب بهینه که در آن نیروی کشش حداقل است، قابل طراحی بوده و دارای کاربرد صنعتی می باشد.

## مراجع

- [1] Avitzur, B., "Analysis of Wire Drawing and Extrusion through Conical Dies of Small Cone Angle", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 85, pp. 89-96, (1963).
- [2] Avitzur, B., "Analysis of Wire Drawing and Extrusion through Conical Dies of Large Cone Angle", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 86, pp. 305-316, (1964).
- [3] Chen, C.T., and Ling, F.F., "Upper Bound Solutions to Axisymmetric Extrusion Problems", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 10, pp. 863-879, (1968).
- [4] Nagpal, V., "General Kinematically Admissible Velocity Fields for some Axisymmetric Metal Forming Problems", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, pp. 1197-1201, (1974).
- [5] Oh S.I., Chen, C.C., and Kobayashi, S., "Ductile Fracture in Axisymmetric Extrusion and Drawing-Part I: Deformation Mechanics of Extrusion and Drawing Metal", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 101, pp. 36-44, (1979).
- [6] Liu, T.S., and Chung, N.L., "Extrusion Analysis and Workability Prediction using Finite Element Method", Composite Structures, Vol. 36, pp. 369-377, (1990).
- [7] Yang, D.Y., Han, C.H., and Lee, B.C., "The use of Generalized Deformation Boundaries for the Analysis of Axisymmetric Extrusion through Curved Dies", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 27, pp. 653-663, (1985).
- [8] Yang, D.Y., and Han C.H., "A New Formulation of Generalized Velocity Field for Axisymmetric Forward Extrusion through Arbitrarily Curved Dies", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 109, pp. 161-168, (1987).
- [9] Peng, D.S., "An Upper Bound Analysis of the Geometric Shape of the Deformation Zone in Rod Extrusion", Journal of Material Processing Technology, Vol. 21, pp. 303-311, (1989).
- [10] Chevalier, L., "Prediction of Defects in Metal Forming: Application to Wire Drawing", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 32, pp.145-153, (1992).
- [11] Zhao, D.W., Zhao, H.J., and Wang, G.D., "Curvilinear Integral of the Velocity Field of Drawing and Extrusion through Elliptic Die Profile", Transactions of Nonferrous Metals Society of China, Vol. 5, pp. 79-83, (1995).
- [12] Lu, Y.H., and Lo, S.W., "An Advanced Model of Designing Controlled Strain Rate Dies for Axisymmetric Extrusion", Journal of Materials Engineering Performance, Vol. 8, pp. 51-60, (1999).
- [13] Luis, C.J., Leon, J., and Luri, R., "Comparison Between Finite Element Method and Analytical Methods for Studying Wire Drawing Processes", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 164-165, pp. 1218-1225, (2005).

- [14] Ponalagusamy, R., Narayanasamy, R., and Srinivasan P., "Design and Development of Streamlined Extrusion Dies: A Bezier Curve Approach", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 161, pp. 375-380, (2005).
- [15] Chen, D.C., and Huang, J.Y., "Design of Brass Alloy Drawing Process using Taguchi Method", *Materials Science Engineering*, Vol. 464, pp. 135-140, (2007).
- [16] Gordon, W.A., Van Tyne, C.J., and Moon, Y.H., "Axisymmetric Extrusion through Adaptable Dies-Part I: Flexible Velocity Fields and Power Terms", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 86-95, (2007).
- [17] Gordon, W.A., Van Tyne, C.J., and Moon Y.H., "Axisymmetric Extrusion through Adaptable Dies-Part II: Comparison of Velocity Fields", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 96-103, (2007).
- [18] Gordon, W.A., Van Tyne, C.J., and Moon, Y.H., "Axisymmetric Extrusion through Adaptable Dies-Part III: Minimum Pressure Streamlined Die Shapes", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 104-115, (2007).
- [19] Panteghini, A., and Genna, F., "An Engineering Analytical Approach to the Design of Cold Wire Drawing Processes for Strain-hardening Materials", *International Journal of Material Forming*, Vol. 3, pp. 279-289, (2010).
- [20] Rubio Alvir, E.M., Sebastian Perez, M.A., and Sanz, L., "A Mechanical Solutions for Drawing Processes under Plane Strain Conditions by the Upper Bound Method", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 143-144, pp. 539-545, (2003).
- [21] Gonzalez Rojas, H.A., Calvet, J.V., and Bubnovich, V.I., "A New Analytical Solution for Prediction of Forward Tension in the Drawing Process", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 198, pp. 93-98, (2008).
- [22] Rubio Alvir, E.M., Mariin, M., Domingo, R., and Sebastian Perez, M., "Analysis of Plate Drawing Processes by the Upper Bound Method using Theoretical Work-hardening Materials", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 40, pp. 261-269, (2009).
- [23] Panteghini, A., "An Analytical Solution for the Estimation of the Drawing Force in Three Dimensional Plate Drawing Processes", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 147-157, (2014).
- [24] Zhang, S.H., Chen, X.D., Zhou, J., and Zhao, D.W., "Upper Bound Analysis of Wire Drawing through a Twin Parabolic Die", *Meccanica*, Vol. 51, pp. 2099-2110, (2016).
- [25] Parghazeh, A., and Haghghat, H., "Prediction of Central Bursting Defects in Rod Extrusion Process with the Method of Upper Bound", *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, Vol. 26, No. 11, pp. 2892-2899, (2016).
- [26] Haghghat, H., and Mahdavi, M.M., "On the Optimum Die Angle in Rod Drawing Process Considering Strain-hardening Effect of Material", *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transaction of ISME*, Vol. 20, No. 1, pp. 113-128, (2019)

- [27] Balaji, P.A., Sundararajan, T., and Lal, G.K., "Viscoplastic Deformation Analysis and Extrusion Die Design by FEM", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 644-650, (1991).

### فهرست نمادهای انگلیسی

نیروی کشش	$F_d$
پارامترهای هندسی مرزهای برشی	$b_o, b_f$
تابع های نمایی	$g_o, g_f$
طول قالب	$L$
طول منحنی جریان	$L_d$
شعاع میله در ورودی و خروجی قالب	$R_o, R_f$
فاصله عمودی یک نقطه روی مرزهای برشی از محور قالب	$R_{od}, R_{fd}$
مختصات کروی با مبدا O	$(r, \theta, \phi)$
فاصله شعاعی مرزهای ورودی و خروجی نسبت به دستگاه $(r, \theta, \phi)$	$r_o, r_f$
فاصله شعاعی مرزهای ورودی و خروجی نسبت به دستگاه $(\rho, \theta, \varphi)$	$r_{od}, r_{fd}$
مرزهای برشی ورودی و خروجی	$S_1, S_2$
ثابت اصطکاک برشی	$m$
سطح تماس بین قالب و قطعه کار	$S_3$
مولفه های شعاعی، و زاویه ای و محیطی سرعت	$V_\varphi, V_r, V_\theta$
توان داخلی تغییر شکل، توان برشی و توان اصطکاکی	$\dot{W}_f, \dot{W}_s, \dot{W}_i$
سرعت ماده در ورودی و خروجی قالب	$v_f, v_o$
المان حجم	$dV$
المان سطح روی سطح اصطکاکی	$dS_f$
المان سطح روی سطوح ناپیوستگی سرعت	$dS_s$

### نمادهای یونانی

زاویه بین محور قالب و امتداد خطی که از اتصال نقاط A و B به وجود می آید.	$\alpha$
زاویه بین محور قالب و امتداد خطی که از اتصال نقاط A و B به وجود می آید.	$\alpha_d$
موقعیت زاویه ای	$\theta$
موقعیت زاویه ای	$\theta_1$
مولفه های اصلی و برشی نرخ کرنش	$\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{\epsilon}_{ii}$



تنش سیلان ماده	$\sigma_0$
تنش برشی اصطکاکی	$\tau_f$
سرعت نسبی روی سطوح ناپیوستگی سرعت	$\Delta V$
فاصله شعاعی	$\rho$
فاصله شعاعی مرز ورودی و مرز خروجی	$\rho_o, \rho_f$
دستگاه مختصات کروی	$(\rho, \theta, \varphi)$
موقعیت زاویه ای نقاط نظیر هم روی مرزهای برشی ورودی و خروجی	$\beta_o, \beta_f$
موقعیت زاویه ای نقاط منحنی قالب	$\psi_d$

**Abstract**

In this paper, a new velocity field and the upper bound solution of rod drawing process through arbitrarily curved dies are presented. In analysis, the inlet and outlet shear boundaries of deformation zone have been assumed as flexible exponential curves. By using the continuity of material flow and the geometry of the die, mathematical equation of flow curve for each particle in deformation zone, is defined. By minimizing the required total power with respect to the shapes of the inlet and outlet shear boundaries, the drawing force has been determined.

The rod drawing process is also simulated by using the finite element code, DEFORM. The analytical results have been compared with finite element data and the theoretical results obtained from a classic solution to illustrate the validity of the proposed upper bound solution. These comparisons show a good agreement. It was found that the proposed approach can result in lower upper bound predictions while comparing with the results of previous work.