

ارتعاشات اجباری غیر خطی ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار

در این مطالعه به بررسی ارتعاشات اجباری ورق دایروی تو خالی با لبه های گیردار تحت نیروی هارمونیک پرداخته شده است. میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمده است. معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و برای مدل سازی رفتار ماده سوپر الاستیک از مدل، بوید-لاگوداس استفاده شده است. در ادامه برای تحلیل ورق آلیاژ حافظه دار در حالتی که تغییر فاز انجام می‌شود، برای حل معادلات از روش تفاضلات مربعی، نیومارک و الگوریتم نگاشت برگشتی بهره گرفته شده است. همچنین به منظور صحت گذاری نتایج از مراجع موجود و نرم افزار آباکوس استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که تغییر فاز آلیاژ موجب کاهش استحکام ماده می‌شود و رفتار غیرخطی نرم شوندگی در آلیاژ حاصل می‌شود.

امیرحسین نصراله براتی^۱

دانشجوی دکتری

علی اصغر جعفری^۲

استاد

شهرام اعتمادی حقیقی^۳

استادیار

عادل مقصودپور^۴

استادیار

واژه‌های راهنما: ارتعاشات اجباری، ورق دایروی توخالی، آلیاژ حافظه‌دار، سوپرالاستیک، روش تفاضلات مربعی

۱- مقدمه

در طی چند دهه اخیر، ویژگیهای منحصر به فرد آلیاژهای حافظه‌دار مانند افزایش طول بالا تا لحظه تسلیم، قابلیت میرایی بالا و کاهش ارتعاشات ناخواسته سیستم‌ها توجه بسیاری از محققین را برای استفاده در کاربردهای مختلف به خود جلب کرده است [۱]. همچنین خاصیت ارتجاعی بالا و حافظه شکلی حرارتی سبب شده است که از آلیاژهای حافظه‌دار در کاربردهای پزشکی استفاده شود [۲]. محققان بسیاری به مطالعه رفتار پیچیده دینامیکی سیستم‌های دارای آلیاژهای حافظه‌دار پرداخته‌اند که شامل رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری تیرها و ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با سیم آلیاژ حافظه‌دار می‌شود. برای نمونه در سال (۲۰۰۲) راپارلی و

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

amirhoseinbarati@gmail.com

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران ajafari@kntu.ac.ir

^۳ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

setemadi@srbiau.ac.ir

^۴ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران a.magsoudpour@srbiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۰۵

همکاران [۳] یک رباط سه درجه آزادی را با استفاده از آلیاژ حافظه‌دار طراحی کردند که شامل یک صفحه ثابت و یک صفحه متحرک بود. صفحات توسط سه سیم^۱ SMA به یکدیگر متصل بود و یک فنر مکانیکی در مرکز آن قرار داشت که کاربرد آن کنترل جهت دهی یک آینه را شامل می‌شد.

سیلکه [۴] در سال (۲۰۰۲) ارتعاش یک درجه آزادی جرم صلب معلق توسط میله‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار که تحت بار پیچشی قرار داشت را بررسی کرد. در سال (۲۰۰۴) دوو و همکاران [۵] به مطالعه تیر ترمو-ویسکوالاستیک تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. آنها نشان دادند برای اینکه تغییر شکل بهتر کنترل شود سیم‌های تقویتی بیشتری نیاز است. در سال (۲۰۰۶) روه و همکاران [۶] کاربرد آلیاژهای حافظه‌دار در سازه‌های تطبیق پذیر را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نشان دادند که محرک نوار SMA می‌تواند نیروی بازیابی کافی برای تغییر شکل سازه پایه ایجاد کند و همزمان سازه تغییر شکل یافته تحت اثر بار خارجی بزرگ را پایدار کند. در سال (۲۰۰۶) ژانگ و همکارانش [۷] به مطالعه تاثیر قرارگیری سیم‌های SMA و همچنین دما بر ویژگی‌های ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی مختلف پرداختند. نتایج مشخص کرد سختی ورق‌ها با وجود سیم های SMA بهبود می‌یابد.

در سال (۲۰۰۷) سدجاد پور و همکاران [۸] به ارائه یک مدل ساختاری سه بعدی بر پایه میکرو مکانیک برای آلیاژ حافظه‌دار پلی کریستال پرداختند. چن و همکاران [۹] در سال (۲۰۰۹) ظرفیت میرایی آلیاژ حافظه‌دار پایه Ni-Ti را مورد بررسی قرار دادند آنها نشان دادند که ظرفیت میرایی عمدتاً ناشی از حرکت مرزهای مارتنزیت است. هارتل و همکاران [۱۰] در سال (۲۰۰۹) با در نظر گرفتن همزمان تحول فازی و تسلیم پلاستیک به مطالعه تجربی و تئوری در رابطه با اثرات کرنش پلاستیک در آلیاژ حافظه‌دار پرداختند. میرزایی فر و همکارانش [۱۱] در سال (۲۰۰۹) یک فرمولاسیون جهت تحلیل استاتیکی پنل‌های استوانه‌ای SMA ارائه کردند. زبسیاک [۱۲] در سال (۲۰۱۰) به ارائه فرمولاسیون یک مسئله مقدار مرزی اولیه برای تحلیل دینامیکی یک تیر اویلر-برنولی ساخته شده از آلیاژ حافظه‌دار سوپر الاستیک پرداخت که برای حل مسئله از روش تفاضل محدود رانچ-کوتا استفاده کرد.

شیائو و همکارانش [۱۳] در سال (۲۰۱۱) تاثیر آلیاژ حافظه‌دار بر رفتار ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های کامپوزیتی چند لایه آلیاژ حافظه‌دار با استفاده از روش المان محدود را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از کار آنها نشان داد که افزایش کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار منجر به کاهش جابجایی‌های پس‌کمانش ورق و اصلاح فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

تابوشی و همکاران [۱۴] در سال (۲۰۱۳) ویژگی‌های نوار آلیاژ حافظه‌دار تحت تغییر شکل پیچشی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج کار آنها نشان داد عمر خستگی نوارها تحت بار پیچشی متناوب، کمتر از عمر خستگی آنها تحت بار پیچشی ضربانی (پالسی) است. در سال (۲۰۱۵) فروزش و جعفری [۱۵] ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای ساخته شده از آلیاژ حافظه‌دار را مورد مطالعه قرار دادند و اثرات فشار داخلی بر تغییر فاز و استحکام آن را بررسی کردند. در سال (۲۰۱۶) شکی و ذاکر زاده [۱۶] سیکل هیستریزس در آلیاژ حافظه‌دار را به روش مد لغزشی فازی، مدل‌سازی کردند. در سال (۲۰۱۹) گاندهی و همکاران [۱۷] به ارائه یک فرمولاسیون برای بهینه‌سازی لمینت کامپوزیت شامل سیم‌های آلیاژهای حافظه‌دار پرداختند. آنها نشان دادند روش ارائه شده

^۱Shape memory alloy

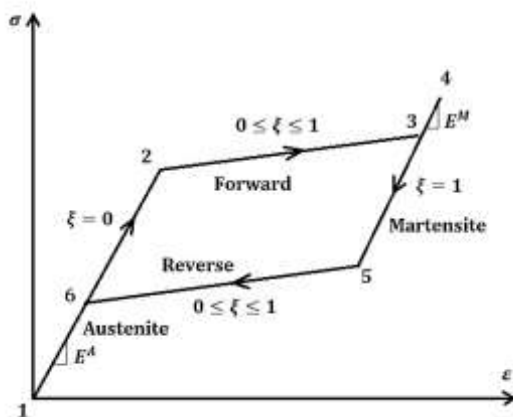
ابزاری سریع و مطمئن برای طراحی لمینت‌های کامپوزیتی با سیم آلیاژ حافظه‌دار با محدودیت تغییر شکل اولیه است.

مرور کارهای گذشته محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که تاکنون تحقیقی در زمینه تحلیل ارتعاشات ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار صورت نگرفته است. از این رو در این مقاله برای نخستین بار به بررسی رفتار ارتعاشی ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار در حالت سوپرالاستیک تحت نیروی هارمونیک پرداخته شده است. در این پژوهش از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است و رفتار آلیاژ حافظه‌دار توسط مدل سه بعدی بوید-لاگوداس مدل شده است. در حالت بدون تغییر فاز (آستنیت خالص) ورق مورد بررسی در شرایط غیر خطی بررسی و با مرجع موجود مقایسه شده است. همچنین برای بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ورق از روش‌های تفاضلات مربعی، روش زمانی نیومارک و الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب استفاده شده است. در ادامه برای صحت گذاری نتایج در حالت آستنیت خالص که شرایط ایزوتروپیک دارد (تمامی مولفه های کرنش انتقال حذف می‌شوند و $\xi = 0$ قرار داده خواهد شد) و در حالت غیر خطی نتایج با مرجع [۲۳] مقایسه شده است. در پایان برای صحت‌گذاری روش تفاضلات مربعی به مدل‌سازی ارتعاشات اجباری و تحلیل فرکانسی ورق در نرم افزار المان محدود آباکوس با استفاده از کد UMAT پرداخته شده است که تطابق خوبی بین نتایج مشاهده گردید.

۲- آلیاژهای حافظه‌دار

آلیاژهای حافظه‌دار مواد هوشمندی هستند که خواص متمایز و برتری نسبت به سایر آلیاژها دارند [۱]. رفتار تنش کرنش این مواد دو پدیده غیر خطی، اثر حافظه داری و اثر شبه الاستیک را در بر می‌گیرد و دارای دوفاز دما بالا به نام آستنیت و دما پایین به نام مارتنزیت هستند [۱].

در آلیاژ حافظه‌دار اثر حافظه شکلی بخاطر تغییر فاز ناشی از تغییر دما به وجود می‌آید و اثر سوپر الاستیسیته به علت اعمال تنش در یک دمای ثابت بالاتر از A_f ایجاد خواهد شد. در این مقاله تنها رفتار سوپر الاستیک ماده آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل (۱) نمودار تنش-کرنش برای اثر شبه الاستیک به صورت شماتیک رسم شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود در اثر بارگذاری و بار برداری یک سیکل هیسترزیس در ماده به وجود می‌آید که سطح محصور داخل آن انرژی میرا شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱- نمودار رفتار سوپرالاستیک آلیاژ حافظه‌دار [۱].

۲-۱- روابط حاکم

بوید و لاگوداس بر اساس انرژی آزاد گیبس مدلی را برای آلیاژ حافظه‌دار ارائه کردند که این مدل، تابعی بر اساس تنش (σ) ، دما (T) ، کسر حجمی مارتنزیت (ξ) و کرنش انتقال (ε^t) می‌باشد که به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود [۱].

$$G(\sigma, T, \xi, \varepsilon^t) = -\frac{1}{2\rho} \sigma : S : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : [\alpha(T - T_0) + \varepsilon^t] + C \left[(T - T_0) - T \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] - S_0 T + u_0 + \frac{1}{\rho} f(\xi) \quad (1)$$

که در رابطه فوق پارامترهای ماده عبارتند از $\rho, S, \alpha, T_0, c, S_0, u_0$ که به ترتیب معرف دانسیته، تانسور نرمی، تانسور ضریب انبساط حرارتی، دمای مرجع، گرمای ویژه مؤثر در حالت مرجع، آنتروپی ویژه مؤثر در حالت مرجع و انرژی ویژه داخلی مؤثر در حالت مرجع هستند. همچنین با توجه به روابط زیر بر اساس کسر حجمی مارتنزیت پارامترهای ماده محاسبه می‌شوند [۱].

$$\begin{aligned} S(\xi) &= S^A + \xi(S^M - S^A) = S^A + \xi \Delta S \\ \alpha(\xi) &= \alpha^A + \xi(\alpha^M - \alpha^A) = \alpha^A + \xi \Delta \alpha \\ c(\xi) &= c^A + \xi(c^M - c^A) = c^A + \xi \Delta c \\ S_0(\xi) &= S^A + \xi(S_0^M - S_0^A) = S_0^A + \xi \Delta S_0 \\ u_0(\xi) &= u_0^A + \xi(u_0^M - u_0^A) = u_0^A + \xi \Delta u_0 \end{aligned} \quad (2)$$

که در روابط فوق بالانویس A و M به ترتیب بیانگر خواص در فاز آستنیت کامل و فاز مارتنزیت کامل هستند و آپراتور Δ تغییرات مربوط به کمیت‌ها در دوفاز کامل را نشان می‌دهد. سایر ویژگی‌های ماده از قبیل مدول یانگ را نیز می‌توان بصورت روابط فوق محاسبه کرد. ξ کسر حجمی مارتنزیت است که مقداری بین ۰ و ۱ دارد. در فاز آستنیت کامل $\xi = 0$ ، در فاز مارتنزیت کامل $\xi = 1$ و در انتقال فاز پیشرو و پسرو $(0 \leq \xi \leq 1)$ است.

برای در نظر گرفتن برهم کنش‌های بین دو فاز مارتنزیت و آستنیت تابع $f(\xi)$ به عنوان تابع انتقال سخت شونده‌گی^۱ تعریف می‌شود که فرم این تابع به صورت زیر است [۱].

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\rho}{2} b^M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2) \xi > 0 \\ \frac{\rho}{2} b^A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2) \xi < 0 \end{cases} \quad (3)$$

نخستین شرط $(\xi > 0)$ مربوط به انتقال فاز پیشرو (آستنیت به مارتنزیت) و دومین شرط $(\xi < 0)$ مربوط به انتقال فاز پسرو (مارتنزیت به آستنیت) می‌باشد. نماد (\cdot) بیانگر مشتق اول نسبت به زمان است. همچنین b^A, b^M, μ_1 و μ_2 پارامترهای مدل می‌باشند که از روابط زیر بدست می‌آیند [۱].

$$\begin{aligned} b^A &= -\Delta s_0 (A_f - A_s) \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (M_s + A_f) - \rho \Delta u_0 \end{aligned} \quad (4)$$

^۱Transformation hardening function

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \rho \Delta s_0 (A_s - A_f - M_f + M_s) - \rho \Delta u_0$$

اکنون با ترکیب قانون اول و دوم ترمودینامیک نامساوی کلازیوس پلانک بصورت رابطه (۵) حاصل می‌شود [۱].

$$-\rho \dot{G} - \dot{\sigma} : \varepsilon - \rho s \dot{T} \geq 0 \quad (5)$$

که در آن s و ε به ترتیب آنترپی و تانسور کرنش هستند. با جایگذاری مشتق زمانی انرژی آزاد گیبس حاصله از قانون زنجیری مشتق در رابطه (۵) نامساوی کلازیوس پلانک بصورت زیر بدست می‌آید [۱].

$$-\rho \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial T} : \dot{T} + \frac{\partial G}{\partial \xi} : \dot{\xi} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon^t} : \dot{\varepsilon}^t \right) - \dot{\sigma} : \varepsilon - \rho s \dot{T} \geq 0 \quad (6)$$

اکنون با ثابت در نظر گرفتن همه متغیرها به جز T ، از آنجایی که تغییرات دما (\dot{T}) می‌تواند مثبت و یا منفی باشد، برای ارضای معادله باید ضرایب آن صفر شود. همچنین با ثابت در نظر گرفتن تمام متغیرها به جز σ برای ارضای نامساوی، ضرایب آن را برابر صفر قرار می‌دهیم که رابطه آنترپی و کرنش بصورت زیر مشخص می‌شود [۱].

$$s = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad \varepsilon = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (7)$$

سپس با جایگذاری معادلات (۱) در معادلات (۷) روابط آنترپی و تانسور کرنش بصورت زیر بدست می‌آید [۱].

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{\rho} \sigma : \alpha + c \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + s_0 \\ \varepsilon &= s : \sigma + \alpha (T - T_0) + \varepsilon^t \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین با جایگذاری روابط (۷) در رابطه (۶) و استفاده از روابط (۱) نامساوی کلازیوس پلانک به صورت زیر مشخص خواهد شد [۱].

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^t + \left(-\rho \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} \geq 0 \quad (9)$$

تغییرات زمانی کرنش انتقال و کسر حجمی مارتنزیت توسط قانون جریان بصورت رابطه (۱۰) مشخص می‌شود [۱].

$$\dot{\varepsilon}^t = \Lambda \dot{\xi} \quad (10)$$

که در رابطه فوق Λ تانسور انتقال است و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱].

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} H \frac{\dot{\sigma}}{\bar{\sigma}} \dot{\xi} > 0 \\ H \frac{\dot{\varepsilon}^t}{\bar{\varepsilon}^t} \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

در روابط فوق $\bar{\sigma}$ ، $\bar{\varepsilon}^t$ و $\bar{\varepsilon}^t$ به ترتیب بیانگر تانسور تنش انحرافی، تنش مؤثر، کرنش انتقال موجود در نقطه برگشتی از مسیر انتقال، کرنش انتقال مؤثر در نقطه برگشتی و H بیشینه کرنش انتقال است. $\bar{\sigma}$ ، $\bar{\varepsilon}^t$ و $\bar{\varepsilon}^t$ به صورت زیر ارائه می‌شوند [۱].

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)I, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(\dot{\sigma}:\dot{\sigma})} \\ \bar{\varepsilon}^t &= \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon^t:\varepsilon^t)} \end{aligned} \quad (12)$$

که در روابط (۱۲)، I تانسور همانی و نماد tr بیانگر جمع روی قطر اصلی تانسور است. با جایگذاری قانون جریان در رابطه (۹) نامساوی کلازیوس-پلانک بصورت رابطه زیر بازنویسی می‌شود [۱].

$$\left(\sigma:\Lambda - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} = \psi \dot{\xi} \geq 0 \quad (13)$$

که عبارت $\psi \dot{\xi}$ پتانسیل میرایی انتقال^۱ نامیده می‌شود. همچنین ψ نیروی ترمودینامیکی کلی است و به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌گردد [۱].

$$\begin{aligned} \psi(\sigma, T, \xi) &= \sigma:\Lambda + \frac{1}{2} \sigma:\Delta S:\sigma + \sigma:\Delta\alpha(T - T_0) \\ &- \rho\Delta c \left[\left(T - T_0 - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right) \right] + \rho\Delta S_0 T - \rho\Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (14)$$

نامساوی کلازیوس-پلانک برای هردو مسیر انتقال فاز پیشرو و پسرو باید ارضا شود، همچنین انتقال فاز مارتنزیتی زمانی روی می‌دهد که نیروی ترمودینامیکی به مقداری بحرانی برسد. در نتیجه ψ برای انتقال فاز پیشرو ($\dot{\xi} > 0$)، کمیتی مثبت و برای انتقال فاز پسرو ($\dot{\xi} < 0$)، کمیتی منفی خواهد بود. همچنین Y را به عنوان یکی از پارامترهای مدل که بیانگر میزان میرایی داخلی ناشی از تغییرات میکروساختاری هنگام تغییر فاز است بصورت زیر تعریف می‌کنیم [۱].

$$Y = \frac{1}{4} \rho\Delta S_0 (M_s + M_f - A_f - A_s) \quad (15)$$

مقدار بحرانی نیروی ترمودینامیکی برای مسیر پیشرو (Y) و برای مسیر پسرو (-Y) است. همچنین تابع انتقال (ϕ) به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود [۱].

$$\phi = \begin{cases} \psi - Y\dot{\xi} > 0, (A \rightarrow M) \\ -\psi - Y\dot{\xi} < 0, (M \rightarrow A) \end{cases} \quad (16)$$

هنگام انتقال فاز (پیشرو یا پسرو) شرط $\phi = 0$ ارضا می‌شود. همچنین هنگام بارگذاری و باربرداری ترموالاستیک آستنیت خالص و مارتنزیت خالص، که در این مسیرها کسر حجمی مارتنزیت تغییر نمی‌کند ($\dot{\xi} = 0$)، شرط $\phi < 0$ برقرار خواهد بود که به آن شرط کان-تاگر^۲ می‌گویند. هنگام انتقال فاز، تنش و دما باید بر این سطوح باقی بمانند. این شرط تحت عنوان شرط سازگاری به صورت ($\dot{\phi} = 0$) بیان می‌شود.

¹Transformation dissipation potential

²Kuhn-Tucker condition

۲-۲- الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب^۱

کارکرد الگوریتم نگاشت برگشتی بر اساس انتگرال گیری صریح معادلات دیفرانسیل است و متغیرهای کسر حجمی مارتنزیت و تانسور کرنش انتقال را مشخص می کند [۱]. برای این منظور فرم دیفرانسیلی معادلات حاکم بر آلیاژ حافظه دار (رابطه (۸)) به صورت رابطه (۱۷) نوشته می شود.

$$d\varepsilon = d(S:\sigma) + d\alpha\Delta T + \alpha dT + d\varepsilon^t \quad (17)$$

با اعمال قانون جریان و رابطه (۲)، رابطه (۱۷) به صورت رابطه (۱۸) بازنویسی می شود.

$$d\varepsilon = S:d\sigma + \alpha dT + (\Delta S:\sigma + \Delta\alpha\Delta T + \Lambda)d\xi \quad (18)$$

براین اساس، فرم دیفرانسیلی تانسور تنش به صورت رابطه (۱۹) خواهد بود.

$$d\sigma = S^{-1}: [d\varepsilon - \alpha dT - (\Delta S:\sigma + \Delta\alpha\Delta T + \Lambda)d\xi] \quad (19)$$

با مقایسه رابطه (۱۹) با روابط (۱۴) و (۱۶)، رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۰) تعیین می گردد.

$$d\sigma = S^{-1}: \left(d\varepsilon - \alpha dT - d\xi \begin{cases} \partial_\sigma \phi & \xi > 0 \\ -\partial_\sigma \phi & \xi < 0 \end{cases} \right) \quad (20)$$

که در آن $\partial_\sigma \phi$ مشتق جزئی تابع انتقال نسبت به σ است. از سوی دیگر بر اساس شرط سازگاری داریم:

$$d\phi = \partial_\sigma \phi:d\sigma + \partial_T \phi:dT + \partial_\xi \phi:d\xi = 0 \quad (21)$$

که در آن $\partial_T \phi$ و $\partial_\xi \phi$ به ترتیب مشتقات جزئی تابع انتقال نسبت به T و ξ هستند. با جایگذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۲۱)، دیفرانسیل کسر حجمی مارتنزیت به صورت رابطه (۲۲) بدست می آید.

$$d\xi = \begin{cases} \frac{\partial_\sigma \phi:S^{-1}:d\varepsilon + (\partial_T \phi - \partial_\sigma \phi:S^{-1}:\alpha)dT}{\partial_\sigma \phi:S^{-1}:\partial_\sigma \phi - \partial_\xi \phi} \xi > 0 \\ \frac{\partial_\sigma \phi:S^{-1}:d\varepsilon + (\partial_T \phi - \partial_\sigma \phi:S^{-1}:\alpha)dT}{-\partial_\sigma \phi:S^{-1}:\partial_\sigma \phi - \partial_\xi \phi} \xi < 0 \end{cases} \quad (22)$$

همچنین نمو تانسور تنش برای تکرار k به صورت رابطه زیر نوشته می شود.

$$\Delta\sigma_{q+1}^{(k)} = -\Delta\xi_{q+1}^{(k)} S_{q+1}^{-1(k)} \left(\begin{cases} \partial_\sigma \phi_{q+1}^{(k)} \xi > 0 \\ -\partial_\sigma \phi_{q+1}^{(k)} \xi < 0 \end{cases} \right) \quad (23)$$

با خطی سازی تابع انتقال برای تکرار k ام با استفاده از روش تکرار نیوتن - رافسون و اعمال شرط صفر شدن تابع انتقال در انتهای فرآیند تکرار، رابطه (۲۵) را می توان نوشت.

$$\phi_{q+1}^{(k)} + \partial_\sigma \phi_{q+1}^{(k)}:\Delta\sigma_{q+1}^{(k)} + \partial_\xi \phi_{q+1}^{(k)}:\Delta\xi_{q+1}^{(k)} = 0 \quad (24)$$

¹Convex cutting plane return mapping

بنابراین با جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۲۴)، نمو کسر حجمی مارتنزیت به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود.

$$\Delta \xi_{q+1}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\phi_{q+1}^{(k)}}{\partial_{\sigma} \phi_{q+1}^{(k)} \cdot D_{q+1}^{(k)} \cdot \partial_{\sigma} \phi_{q+1}^{(k)} - \partial_{\xi} \phi_{q+1}^{(k)}} \xi > 0 \\ \frac{-\phi_{q+1}^{(k)}}{-\partial_{\sigma} \phi_{q+1}^{(k)} \cdot D_{q+1}^{(k)} \cdot \partial_{\sigma} \phi_{q+1}^{(k)} - \partial_{\xi} \phi_{q+1}^{(k)}} \xi < 0 \end{cases} \quad (25)$$

که در آن $D = S^{-1}$ تانسور سفتی است. همچنین نمو تانسور کرنش انتقال برای تکرار k ام از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta \varepsilon_{q+1}^{t(k)} = \Delta \xi_{q+1}^{(k)} \Lambda_{q+1}^{(k)} \quad (26)$$

در نهایت برای بروزرسانی کرنش انتقال، کسر حجمی مارتنزیت و تانسور تنش از روابط (۲۷) استفاده خواهد شد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q+1}^{t(k+1)} &= \varepsilon_{q+1}^{t(k)} + \Delta \varepsilon_{q+1}^{t(k)} \\ \xi_{q+1}^{t(k+1)} &= \xi_{q+1}^{t(k)} + \Delta \xi_{q+1}^{t(k)} \\ \sigma_{q+1}^{t(k+1)} &= \sigma_{q+1}^{t(k)} + \Delta \sigma_{q+1}^{t(k)} \end{aligned} \quad (27)$$

در طی الگوی الگوریتم نگاشت برگشتی در هر لحظه از بازه مورد بررسی متغیرهای حالت به‌ازای یک دما و تانسور کرنش معلوم به دست می‌آیند. به همین منظور در لحظه مورد بررسی متغیرهای حالت داخلی همگرا شده مربوط به زمان پیشین به عنوان حدس اولیه جهت زمان کنونی استفاده می‌شوند، اگر شرط $\phi \leq 0$ برقرار شود، مقادیر متغیرهای حالت داخلی در زمان حاضر با مقادیر حدس اولیه برابر خواهد بود در غیر اینصورت یعنی زمانی که $\phi > 0$ شود باید تکرار صورت گیرد تا جایی که شرط $\phi \leq 0$ برقرار شود. مراحل الگوریتم نگاشت برگشتی صفحه برنده محدب در شکل (۲) ارائه شده است.

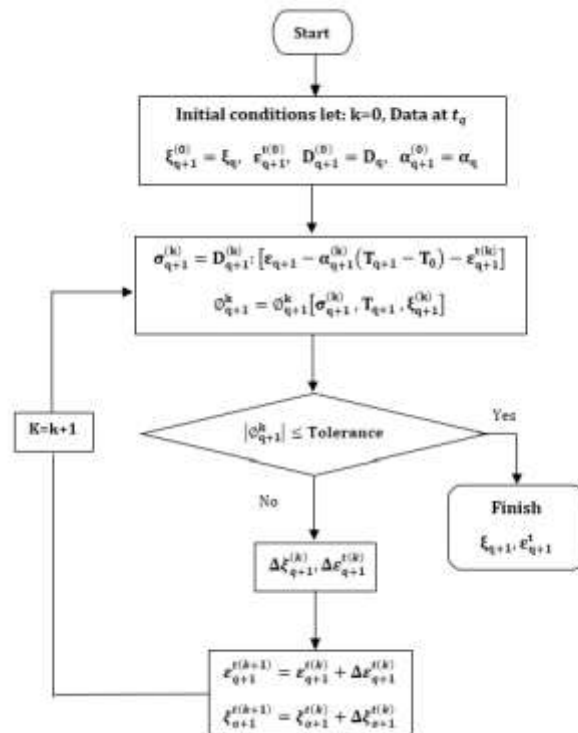
۳- تعریف مسئله

در این پژوهش ارتعاشات اجباری یک ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار با لبه‌های گیردار تحت فشار هارمونیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق دایروی توخالی مورد مطالعه دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و ضخامت h مطابق شکل (۳) می‌باشد.

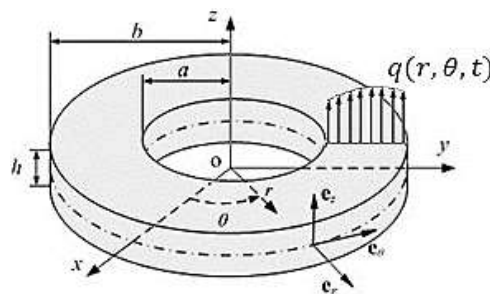
۳-۱- تئوری ورق

مولفه‌های جابه‌جایی هر نقطه در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بصورت رابطه (۲۸) تعریف می‌شود [۱۸].

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= u_0 + z\phi_r(r, \theta) \\ u_{\theta}(r, \theta, z) &= v_0 + z\phi_{\theta}(r, \theta) \\ u_z(r, \theta, z) &= w(r, \theta) \end{aligned} \quad (28)$$



شکل ۲- الگوریتم نگاشت برگشتی برای مدل ساختاری آلیاژحافظه دار [۱].



شکل ۳- هندسه ورق دایروی توخالی آلیاژ حافظه دار و نحوه استقرار محورهای مختصات

که Z فاصله یک نقطه از لایه میانی و u_r, u_θ, u_z به ترتیب جابه جایی ورق در راستای محورهای r, θ و z می باشد. همچنین ϕ_r و ϕ_θ به ترتیب چرخش های حول محور r, θ می باشند. u_0 و v_0 جابجایی صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای r و θ است. روابط کرنش - جابه جایی ورق بصورت زیر است [۱۹].

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \\
 e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \\
 e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\
 e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
 e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

با جایگذاری روابط (۲۸) در روابط (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \phi_r \right) + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

همچنین کار خارجی نیروهای ناپایستار بصورت رابطه (۳۱) خواهد بود که بار گسترده اعمالی می باشد.

$$\delta w_{n.c} = \int_0^{2\pi} \int_a^b (-q(r, \theta, t)) \delta w r dr d\theta \quad (31)$$

ورق تحت فشار خارجی هارمونیک به صورت رابطه (۳۲) قرار می گیرد.

$$q(t) = -P_0 \sin(\Omega t) \quad (32)$$

که در آن P_0 ضریب ثابت، $q(t)$ فشار بصورت زمانی می باشد و Ω فرکانس تحریک است. با اعمال کار نیروهای خارجی طبق رابطه (۳۲) و طبق مرجع [۱۹]، معادلات حاکم بر حرکت ورق مفروض با استفاده از اصل همیلتون به صورت زیر استخراج می گردد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (N_{rr} + N_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + N_{rr,r} &= \rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_r \\ \frac{2}{r} N_{r\theta} + N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} &= \rho_0 \ddot{v}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_\theta \\ \frac{1}{r} (M_{rr} - M_{\theta\theta}) + M_{rr,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} - Q_r &= \rho_2 \ddot{\phi}_r + \rho_1 \ddot{u}_0 \\ \frac{2}{r} M_{r\theta} + M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta} - Q_\theta &= \rho_2 \ddot{\phi}_\theta + \rho_1 \ddot{v}_0 \\ \frac{1}{r} Q_r + Q_{r,r} + \frac{1}{r} Q_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} (r N_{rr} w_{,r})_{,r} + \frac{1}{r^2} (N_{\theta\theta} w_{,\theta})_{,\theta} + \frac{1}{r} (N_{r\theta} w_{,\theta})_{,r} + \frac{1}{r} (N_{r\theta} w_{,r})_{,\theta} &= \rho_0 \ddot{w} - q \end{aligned} \quad (33)$$

با به کار بردن معادلات حاکم برای آلیاژ حافظه دار برای بررسی ارتعاشات اجباری در حالت آستینیت خالص و بدون در نظر گرفتن کرنش انتقال و همچنین صفر در نظر گرفتن کسر حجمی مارتنزیت معادلات بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_r &= \frac{A_1}{r} h(1-v) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{A_1}{r^2} v h u_0 - \frac{A_1}{r} h v \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \\ &- \frac{A_1}{r^2} (1-v) h u_0 + A_1 h(1-v) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{A_1}{r^2} v h u_0 \\ &+ A_1 h v \frac{\partial u_0}{\partial r} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 \ddot{v}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_\theta &= \frac{A_1}{r^2} h(1-2\nu) \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} - v_0 \right) - \frac{A_1}{2r^2} h(1-2\nu) \left(r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + v_0 - r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \\
\rho_2 \ddot{\phi}_r + \rho_1 \ddot{u}_0 &= \frac{A_1 h^3}{12r} (1-\nu) \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{A_1 h^3 \nu}{12r^2} \phi_r - \frac{A_1 h^3 \nu}{12r} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{A_1 h^3 (1-\nu)}{12r^2} \phi_r \\
&+ \frac{A_1 h^3}{12} (1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r^2} + \frac{A_1 \nu h^3}{12r} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{A_1 \nu h^3}{12r^2} \phi_r \\
&- \frac{A_1 h}{2} (1-2\nu) \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\
\rho_2 \ddot{\phi}_\theta + \rho_1 \ddot{v}_0 &= \frac{A_1 h^3}{12r^2} (1-2\nu) \left(r \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \phi_\theta \right) \\
&+ \frac{A_1 h^3}{24r^2} (1-2\nu) \left(r^2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r^2} - r \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \phi_\theta \right) - \frac{A_1 h}{2} (1-2\nu) \phi_\theta \\
\rho_0 \ddot{w} - q &= \frac{A_1 h}{2r} (1-2\nu) \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{A_1 h}{2} (1-2\nu) \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\
&+ \frac{A_1 h}{r} (1-2\nu) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \\
&+ A_1 h (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{A_1 h \nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_0 \\
&+ \frac{A_1 h \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial u_0}{\partial r}
\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از معادلات حاکم بر مواد آلیاژ حافظه‌دار، معادلات حاکم بر ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار، بدون در نظر گرفتن ترم های غیرخطی کرنش، بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_r &= \frac{A_1}{r} h(1-\nu) \frac{\partial u_0}{\partial r} + \left(\frac{A_1}{r} \nu h - \frac{A_1}{r} h(1-\nu) + \frac{\partial A_1}{\partial r} h \nu \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} \right) \\
&- \frac{A_1}{r} h \nu \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{A_1}{r} h (\nu \varepsilon_{rr}^t + (1-\nu) \varepsilon_{\theta\theta}^t + \nu \varepsilon_{zz}^t) + \frac{\partial A_1}{\partial r} h (1-\nu) \frac{\partial u_0}{\partial r} \\
&+ A_1 h (1-\nu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + A_1 \nu h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \\
&- \frac{\partial A_1}{\partial r} h \alpha \Delta T (1+\nu) - \left(\frac{\partial A_1}{\partial r} h + \frac{A_1}{r} h \right) \left((1-\nu) \varepsilon_{rr}^t + \nu \varepsilon_{\theta\theta}^t + \nu \varepsilon_{zz}^t \right) \\
&- A_1 h \left((1-\nu) \frac{\partial \varepsilon_{rr}^t}{\partial r} + \nu \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^t}{\partial r} + \nu \frac{\partial \varepsilon_{zz}^t}{\partial r} \right) \\
&+ \frac{\partial A_1}{\partial \theta} h \frac{(1-2\nu)}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right) \\
&+ A_1 h \frac{(1-2\nu)}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} h (1-2\nu) \varepsilon_{r\theta}^t \\
&- A_1 h (1-2\nu) \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^t}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 \ddot{v}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_\theta &= \left(\frac{A_1 h (1 - 2\nu)}{r} + \frac{\partial A_1 h (1 - 2\nu)}{\partial r} \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right) \\
&- (1 - 2\nu) \varepsilon_{r\theta}^t \left(\frac{2A_1 h}{r} + \frac{\partial A_1 h}{\partial r} \right) \\
&+ \frac{A_1 h (1 - 2\nu)}{2r^2} \left(r \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta} + r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_0 \right) \\
&- A_1 h (1 - 2\nu) \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^t}{\partial r} + \frac{\partial A_1 h \nu}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{A_1 h \nu}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta} \\
&+ \frac{\partial A_1 h (1 - \nu)}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + u_0 \right) + \frac{A_1 h (1 - \nu)}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \\
&- \frac{\alpha \Delta T h (1 + \nu)}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \frac{\partial A_1 h}{\partial \theta} \frac{1}{r} (\nu \varepsilon_{rr}^t + (1 - \nu) \varepsilon_{\theta\theta}^t + \nu \varepsilon_{zz}^t) \\
&- \frac{A_1 h}{r} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon_{rr}^t}{\partial \theta} + (1 - \nu) \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^t}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial \varepsilon_{zz}^t}{\partial \theta} \right) \\
\rho_2 \ddot{\phi}_r + \rho_1 \ddot{u}_0 &= (1 - \nu) \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \left(\frac{A_1 h^3}{12r} + \frac{\partial A_1 h^3}{\partial r} \frac{1}{12r} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \phi_r \right) \left(\frac{A_1 h^3 \nu}{12r^2} - \frac{A_1 h^3 (1 - \nu)}{12r^2} + \frac{\partial A_1 h^3 \nu}{\partial r} \frac{1}{12r} \right) - \frac{A_1 h^3 \nu}{12r} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \\
&+ \frac{A_1 h^3 (1 - \nu)}{12} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r^2} + \frac{A_1 h^3 \nu}{12r} \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right) \\
&- \frac{\partial A_1 h (1 - 2\nu)}{\partial r} \frac{1}{2} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{A_1 h (1 - 2\nu)}{2} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\
&+ \frac{\partial A_1 h (1 - 2\nu)}{\partial r} \varepsilon_{zr}^t + A_1 h (1 - 2\nu) \frac{\partial \varepsilon_{zr}^t}{\partial r} \\
&+ \frac{\partial A_1 h^3}{\partial \theta} \frac{1}{24r^2} (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \phi_\theta \right) \\
&+ \frac{A_1 h^3}{24r^2} (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) \\
\rho_2 \ddot{\phi}_\theta + \rho_1 \ddot{v}_0 &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_r}{r} \right) \left(\frac{A_1 h^3}{12r} (1 - 2\nu) + \frac{\partial A_1 h^3}{\partial r} \frac{1}{24} (1 - 2\nu) \right) \\
&+ \frac{A_1 h^3}{24r^2} (1 - 2\nu) \left(r \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r \partial \theta} + r^2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r^2} - \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \phi_\theta \right) \\
&- \frac{A_1 h (1 - 2\nu)}{2} \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + A_1 h (1 - 2\nu) \varepsilon_{\theta z}^t \\
&+ \frac{\partial A_1 h^3}{\partial \theta} \frac{1}{12r} (1 - \nu) \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{A_1 h^3}{12} \nu \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r \partial \theta} \\
&+ \frac{\partial A_1 h^3}{\partial \theta} \frac{1}{12r^2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \phi_r \right) + \frac{A_1 h^3}{12r^2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{w} - q = & \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{A_1 h}{2r} (1 - 2\nu) + \frac{\partial A_1 h}{\partial r} \frac{1}{2} (1 - 2\nu) \right) - \frac{A_1 h}{r} (1 - 2\nu) \varepsilon_{zr}^t \\ & + \frac{A_1 h}{2} (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial r} h (1 - 2\nu) \varepsilon_{zr}^t \\ & - A_1 h (1 - 2\nu) \frac{\partial \varepsilon_{zr}^t}{\partial r} + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \frac{h}{2r} (1 - 2\nu) \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{A_1 h}{2r} (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \frac{h}{r} (1 - 2\nu) \varepsilon_{\theta z}^t \\ & - \frac{A_1 h}{r} (1 - 2\nu) \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}^t}{\partial \theta} \end{aligned}$$

که ρ_0 ، ρ_1 و ρ_2 به صورت زیر تعریف میگردند:

$$(\rho_0, \rho_1, \rho_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho(r, \theta, z) dz \quad (36)$$

همچنین $A_1 = \frac{E(\xi)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ از کمیت‌های ماده می‌باشد که در آن ν نسبت پواسون است. همچنین E مدول یانگ می‌باشد که از رابطه $E = E^A + \xi(E^M - E^A)$ محاسبه می‌شود [۱].
 ε_{ij}^t مولفه‌های کرنش انتقال است که $i, j = r, \theta$. در این بررسی تنها رفتار سوپراالاستیک ماده آلیاژ حافظه‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است که $T > A_f$ در نظر گرفته شده و $\Delta T = 0$ است. شرایط مرزی ورق دایروی توخالی بصورت تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شده است که به صورت رابطه (۳۷) بیان می‌شود.

$$u_0 = v_0 = w = \phi_r = \phi_\theta = 0 \text{ at } r = a, b \quad (37)$$

۴- روشهای عددی

در این پژوهش برای بررسی ارتعاشات ورق دایروی توخالی از دو روش عددی استفاده شده است. برای حل عددی معادلات حاکم بر حرکت از نظر مکانی، روش تفاضلات مربعی که یک روش سریع و دقیق است، استفاده گردیده است. اولین گام در این مرحله انتخاب یک شبکه مناسب برای دامنه مورد نظر می‌باشد که شامل N_r نقطه در امتداد r و N_θ نقطه در امتداد θ است. در این بررسی از تعداد نقاط مساوی در هر جهت استفاده شده است ($N_r = N_\theta = N$). سپس مشتق جزئی مرتبه n نسبت به r و مشتق جزئی مرتبه s نسبت به θ تابع دلخواه $g(r, \theta)$ در نقطه‌ای از شبکه یاد شده (r_i, θ_j) به صورت رابطه (۳۸) بیان می‌شود. که در آن $g(r, \theta)$ بیانگر $g(r_i, \theta_j)$ است [۲۰].

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n g}{\partial r^n} \Big|_{(r, \theta) = (r_i, \theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_r} B_{ik}^n g_{kj} \\ \frac{\partial^s g}{\partial \theta^s} \Big|_{(r, \theta) = (r_i, \theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_\theta} C_{jk}^s g_{ik} \\ i = 1, \dots, N_r \quad j = 1, \dots, N_\theta & \\ \frac{\partial^{(n+s)} g}{\partial r^n \partial \theta^s} \Big|_{(r, \theta) = (r_i, \theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_r} B_{ik}^n \sum_{l=1}^{N_\theta} C_{jl}^s g_{kl} \end{aligned} \quad (38)$$

همچنین B_{ik}^n و C_{jk}^s به ترتیب ضرایب وزنی در امتداد r و θ هستند که توابع آزمون نامیده می‌شوند. در این مطالعه به هنگام پیاده سازی DQM به دلیل تقارن موجود در هندسه و شرایط بارگذاری مسئله، مشتقات جزئی تمام جملات نسبت به θ در نظر گرفته نشده است. همچنین تابع آزمون چند جمله‌ای برای ضرایب وزنی در امتداد r استفاده شده است که دارای صورت رابطه (۳۹) می‌باشد [۲۰].

$$B_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(r_i)}{(r_i - r_k) \prod(r_k)} \quad i, k = 1, \dots, N_r \text{ \& } k \neq i$$

$$\prod(r_i) = \prod_{m=1, m \neq i}^{N_r} (r_i - r_m), \quad \prod(r_k) = \prod_{m=1, m \neq k}^{N_r} (r_k - r_m)$$

$$B_{ik}^{(n)} = n \left(B_{ii}^{(n-1)} B_{ik}^{(1)} - \frac{B_{ik}^{(n-1)}}{r_i - r_k} \right); \text{ for } (i, k = 1, \dots, N_r), k \neq i, 2 \leq n \leq N_r - 1 \quad (39)$$

$$B_{ii}^{(n)} = - \sum_{m=1, m \neq i}^{N_r} B_{im}^{(n)}; \text{ for } i = 1, 2, \dots, N_r, \quad 1 \leq n \leq N_r - 1$$

همچنین نقاط انتخابی با فاصله مساوی در نظر گرفته شده‌اند که در راستای r به صورت رابطه (۴۰) خواهد بود [۲۱].

$$r_i = \frac{i-1}{N_r-1} (b-a); i = 1, \dots, N_r \quad (40)$$

با اعمال روش تفاضلات مربعی در معادلات (۳۵) معادله ماتریسی (۴۱) به دست می‌آید.

$$M\ddot{\Delta} + k\Delta = F_1 + F_2, \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \{\Delta_b\} \\ \{\Delta_a\} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

که در آن Δ بردار جابجایی (در راستای محور Z) همه نقاط شامل بردارهای Δ_b و Δ_a است که به ترتیب بردار جابجایی مربوط به نقاط مرزی و بردار جابجایی مربوط به سایر نقاط هستند. علامت (') بیانگر مشتق دوم نسبت به زمان است. همچنین M و k به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی هستند که تابع ξ بوده و هنگام تغییر فاز ماده عوض می‌شوند. F_2 بردار فشار خارجی و F_1 بردار ناشی از کرنش انتقال می‌باشد. همچنین روش‌های عددی متفاوتی برای تقریب‌های زمانی معادلات دیفرانسیل در دسترس قرار دارد که به انتگرال‌گیری مستقیم شهرت دارد. رایج‌ترین این روش‌ها عبارتند از روش تفاضل مرکزی، روش ویلسون، روش رانگ-کوتا و روش نیومارک. از آنجایی که در معادلات حرکت مشتق زمانی وجود دارد در این پژوهش از روش نیومارک بهره گرفته شده است.

در این روش بردارهای سرعت و شتاب بصورت زیر تخمین زده می‌شود [۲۲].

$$\vec{\Delta}_{q+1} = a_0(\vec{\Delta}_{q+1} - \vec{\Delta}_q) - a_2\vec{\Delta}_q - a_3\vec{\Delta}_q$$

$$\vec{\Delta}_{q+1} = \vec{\Delta}_q + a_6\vec{\Delta}_q + a_7\vec{\Delta}_{q+1} \quad (42)$$

که $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار جابجایی، $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار سرعت و $\vec{\Delta}_{q+1}$ بردار شتاب می‌باشند. همچنین $t_{q+1} = t_q + \Delta t$ که t_q زمان پیشین و Δt گام زمانی می‌باشد که زیر نویس q معرف گام زمانی q ام است. همچنین ضرایب a_i بصورت رابطه (۴۳) بیان می‌شوند [۲۳].

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \\
 a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{2} - 2 \right) \\
 a_6 &= \Delta t(1 - \delta), & a_7 &= \delta \Delta t
 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

که δ و α پارامترهایی برای کنترل صحت و پایداری روش می‌باشند که به ترتیب طبق [۲۲] برابر $0/5$ و $0/25$ هستند. جایگذاری روابط (۴۲) در رابطه (۴۱) منجر به رابطه (۴۴) می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \vec{K}_{q+1} \vec{\Delta}_{q+1} &= \vec{F}_{q,q+1}, & \vec{K}_{q+1} &= a_0 M_{q+1} + K_{q+1} \\
 \vec{F}_{q,q+1} &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)_{q+1} + M_{q+1} (a_0 \vec{\Delta}_q + a_2 \vec{\Delta}_q + a_3 \vec{\Delta}_q)
 \end{aligned} \tag{۴۴}$$

بر اساس رابطه (۴۴) بردار جابجایی مربوط به زمان حال با مشخص بودن بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب مربوط به زمان قبل محاسبه می‌شود. در این مقاله برای محاسبه بردارهای جابجایی و شتاب در هر لحظه از زمان از یک فرایند تکرار شونده استفاده می‌شود. روند کار بدین صورت است که ابتدا مقادیر کسر حجمی مارتزیت و تانسور کرنش انتقال به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته می‌شود. این حدس برای محاسبه ماتریس های K و M و بردار \vec{F}_1 در زمان مورد بررسی استفاده می‌شود و بردار جابجایی در گام بعدی با استفاده از روش نیومارک محاسبه می‌گردد. سپس با استفاده از معادلات کرنش-جابجایی تانسور کرنش مربوط به بردار جابه‌جایی زمان مورد بررسی بدست خواهد آمد. با مشخص شدن تانسور کرنش با توجه به الگوریتم نگاشت برگشتی ξ و ϵ^t محاسبه می‌گردد. بعد از این مرحله با توجه به محاسبه مقادیر جدید ξ و ϵ^t ماتریس های K و M و بردار \vec{F}_1 بروزرسانی می‌شوند. سپس با توجه به مقادیر بروز رسانی شده، روش نیومارک، بردار جابه‌جایی را در گام بعدی محاسبه می‌کند. با مقایسه جابه‌جایی‌ها در دومین گام و اولین گام اگر تفاوت آنها از مقدار مشخصی کمتر باشد فرآیند تکرار متوقف می‌شود و بردار جابه‌جایی به عنوان پاسخ نهایی در نظر گرفته می‌شود. در غیر اینصورت فرآیند تا زمانی که اختلاف جابجایی‌ها از مقدار تolerانس مشخصی کمتر باشد ادامه می‌یابد.

۵- بحث بر روی نتایج

در این قسمت نتایج عددی ورق دایروی توخالی آلیاژ حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم که خواص آن در جدول (۱) ارائه شده است بررسی می‌شود. ورق ابتدا در فاز آستنیت کامل قرار گرفته است که در این شرایط ورق بدون تنش بوده و دمای آن ۲۵ درجه سانتی‌گراد است که با توجه به خواص ماده بالاتر از A_f است. از آنجا که هیچ نتیجه‌ای برای تحلیل دینامیکی ورق دایروی توخالی از جنس SMA تحت بار خارجی وجود ندارد به همین منظور در ابتدا به منظور تحلیل ارتعاشات اجباری ورق دایروی توخالی با لبه‌های گیردار در فاز آستنیت خالص با در نظر گرفتن ترم های غیرخطی کرنش و بدون در نظر گرفتن کرنش انتقال و قرار دادن $\xi = 0$ برای مقایسه با مرجع [۲۳] از کد DQM و نیومارک استفاده می‌شود.

در مطالعه حاضر به منظور تحلیل ارتعاشات اجباری ورق دایروی توخالی و مطالعه رفتار غیرخطی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ورق از کد SMA، DQM و نیومارک استفاده شده است که توسط نرم افزار MATLAB آماده شده است. همچنین کد SMA مربوط به الگوریتم نگاشت برگشتی بر اساس مدل سه‌بعدی بوید-لاگوداس

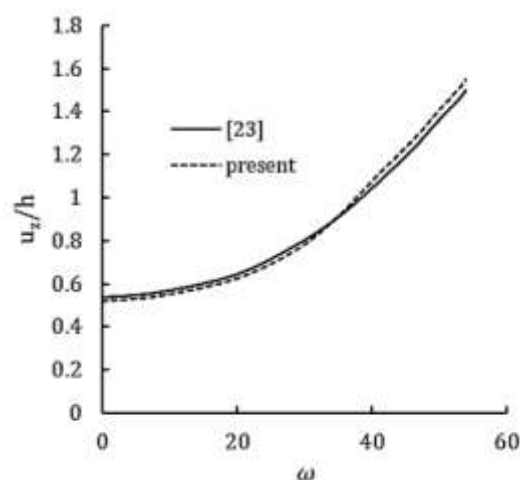
نوشته شده است. تعداد نقاط مناسب در روش تفاضلات مربعی از تست همگرایی پاسخها بدست آمده است که بر اساس آن $N=20$ در تحلیل ارتعاشات اجباری ورق استفاده شده است. مزیت استفاده از روش تفاضلات مربعی نسبت به المان محدود استفاده از گره‌های کمتر و کاهش زمان و هزینه حل می‌باشد.

در شکل (۴) نتایج مربوط به پاسخ هارمونیک اجباری ورق دایروی توخالی در فاز آستنیت خالص با تکیه‌گاه گیردار نشان داده شده است و با مرجع موجود مقایسه گردیده است که، $\omega = \sqrt{12(1-\nu^2)E/\Omega b^2/h}$ (فرکانس بی بعد) با نسبت $a/b = 0.3$ و $h/b = 0.1$ برای مقایسه انتخاب شده است. همچنین ماکزیمم دامنه بی‌بعد u_z/h می‌باشد. با توجه به نمودار، همگرایی خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود.

جدول ۱- خواص آلیاژ حافظه‌دار نیکل-تیتانیوم [۱]

مقدار	خواص ماده (واحد)
H	0.056
$A_s(K)$	270
$A_f(K)$	280
$M_s(K)$	245
$M_f(K)$	230
ν	0.3
$\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	6500
$E^A(GPa)^*$	55
$E^M(GPa)^*$	46
$\alpha \left(\frac{1}{K}\right)$	22E-6
$c^A = c^M = \frac{-\rho \Delta s_0}{H} \left(\frac{J}{kgK}\right)$	7.4E6
Δc	0

*بلا نویس‌های A و M به ترتیب مربوط به فاز آستنیت و مارتنزیت است

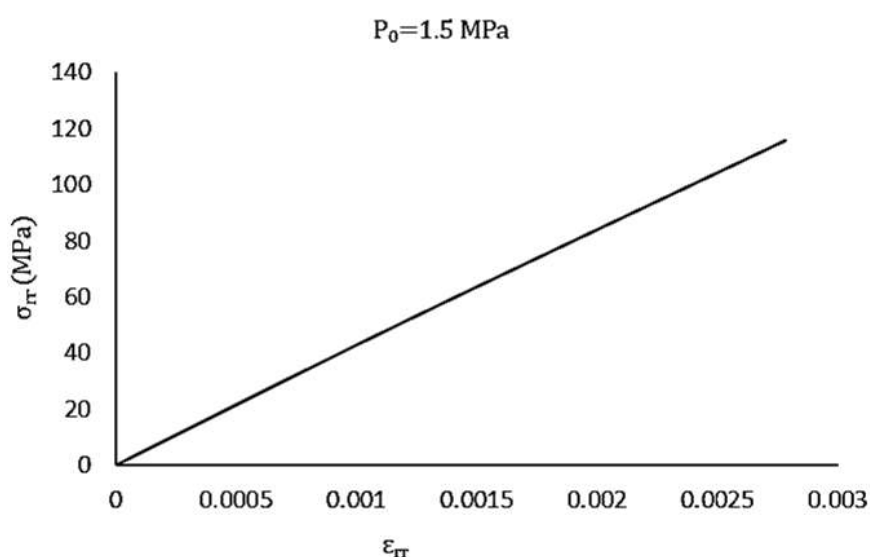


شکل ۴- مقایسه پاسخ هارمونیک اجباری ورق دایروی توخالی آلیاژ حافظه‌دار با تکیه‌گاه گیردار در فاز آستنیت خالص (بدون تغییر فاز) با توزیع یکنواخت بار در اطراف مود اول

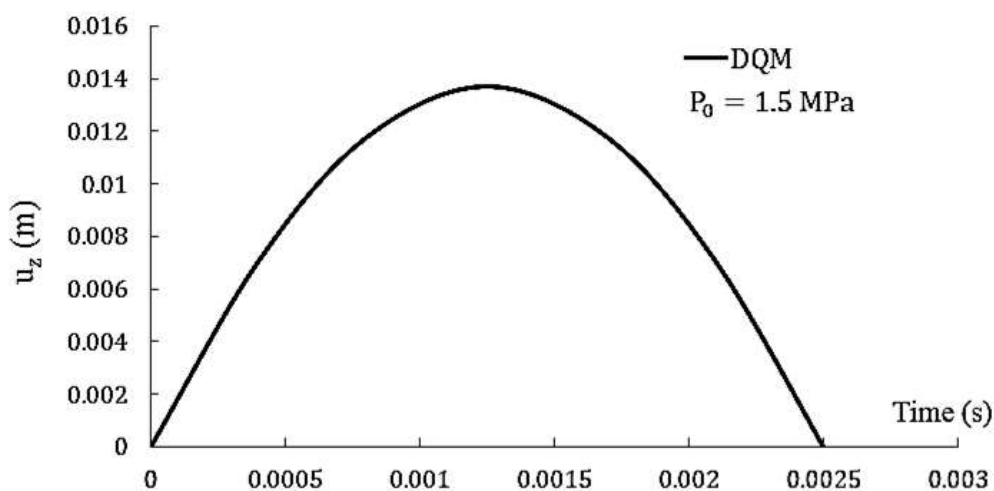
همچنین در شکل (۵) نتایج مربوط به تنش- کرنش شعاعی و جابه‌جایی عرضی-زمان نقطه میانی ورق توخالی آلیاژحافظه‌دار $\bar{r} = (a + b)/2$ تحت فشار خارجی در یک نیم سیکل نشان داده شده است. که در این بررسی دوره تناوب 0.005 ثانیه ضریب $P_0 = 1.5 \text{ MPa}$ می‌باشد.

با توجه به شکل (۵) در ابتدا شدت فشار خارجی انتخاب شده به میزانی می‌باشد که منجر به تغییر فاز در ماده نشده است و ماده همچنان در فاز آستنیت خالص قرار گرفته است.

شکل (۶) الف) نمودار جابجایی- زمان مربوط به نقطه \bar{r} ورق را به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف اعمالی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش مقدار P_0 دامنه ارتعاش افزایش می‌یابد. در شکل (۶) ب) نتایج مربوط به روش تفاضلات مربعی و نرم افزار آباکوس در دوره تناوب 0.005 ثانیه و فشار $P_0 = 2 \text{ MPa}$ مقایسه شده‌اند.

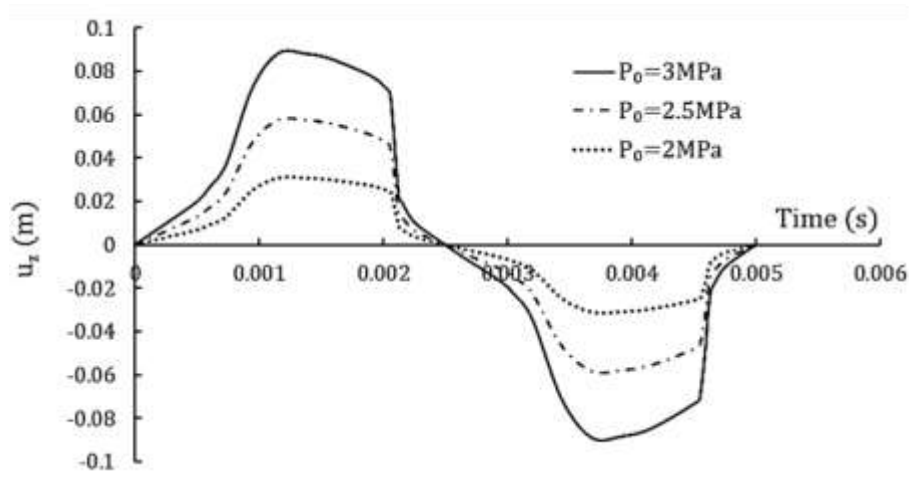


الف- نمودار تنش-کرنش شعاعی

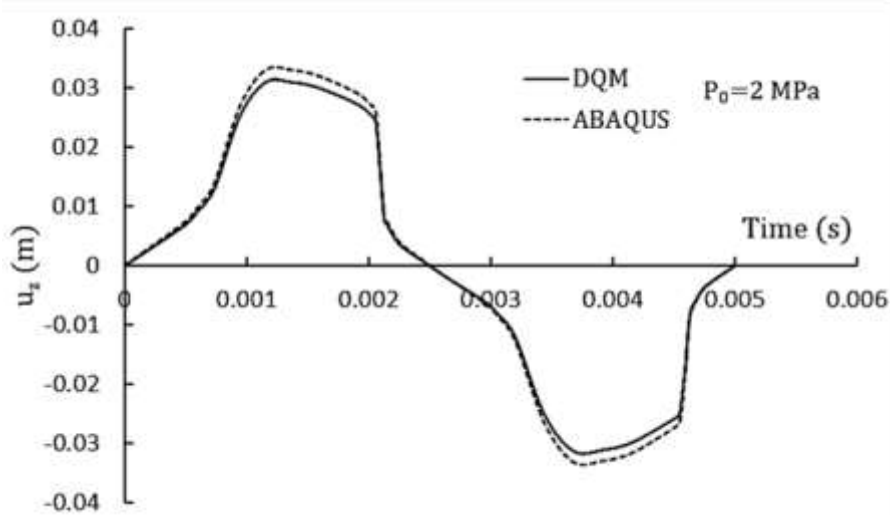


ب- نمودار جابه‌جایی عرضی-زمان

شکل ۵- نمودار نقطه شعاعی میانی تحت فشار خارجی با دوره تناوب 0.005 ثانیه و ضریب $P_0 = 1.5 \text{ MPa}$

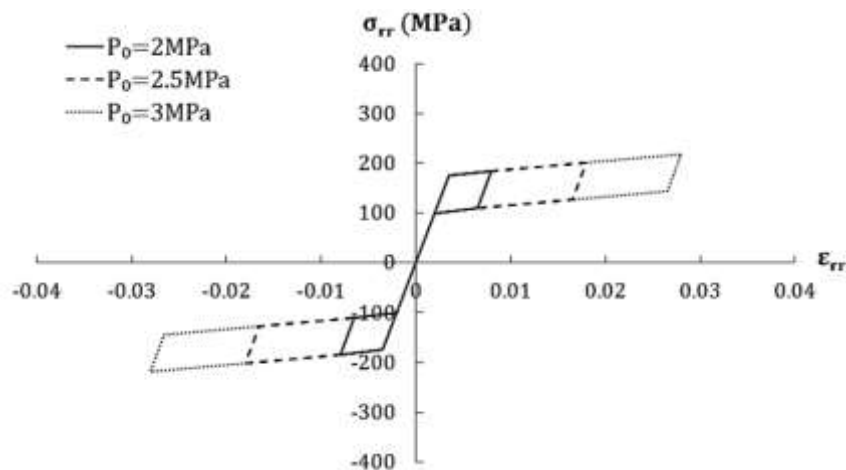


الف- نمودار جابه‌جایی عرضی-زمان



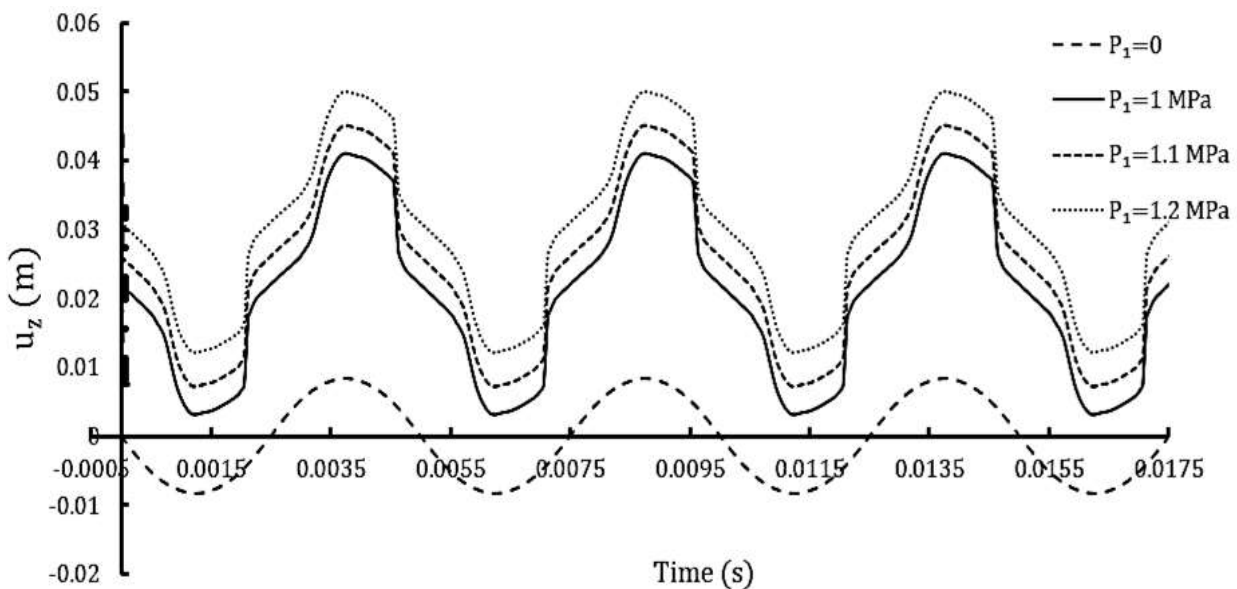
ب- مقایسه نمودار جابه‌جایی عرضی-زمان

شکل ۶- نمودار جابه‌جایی عرضی-زمان نقطه شعاعی میانی ورق به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه (الف) برای مقادیر مختلف P_0 (ب) با ضریب جابجایی $P_0 = 2 \text{ MPa}$ و مقایسه با آباکوس

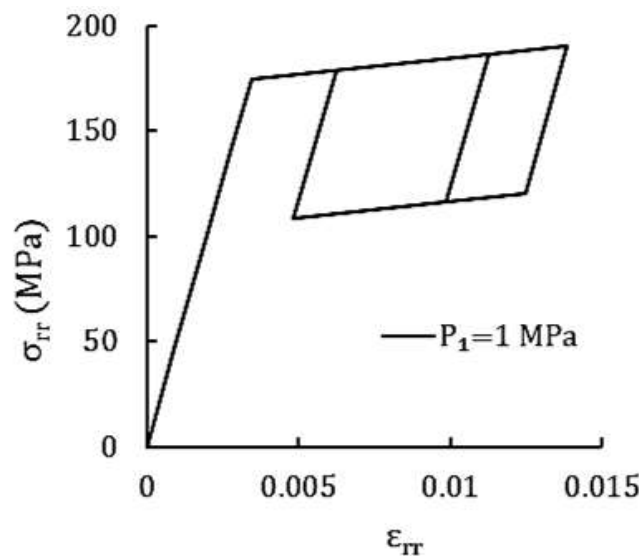
شکل ۷- نمودار تنش- کرنش شعاعی نقطه میانی ورق به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف P_0

شکل (۷) نمودار تنش- کرنش مربوط به نقطه \bar{r} ورق را به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 نشان می‌دهد که با افزایش مقدار P_0 سیکل هیستریزس بزرگتر شده و منجر به افزایش میرایی در ماده می‌شود.

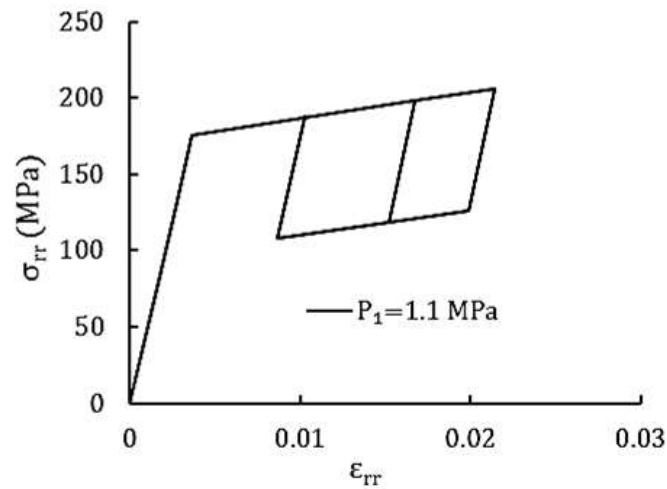
در شکل‌های (۸) و (۹) فشار هارمونیک متغییر با زمان همراه با یک فشار ثابت یعنی $(P_0 \sin(\Omega t) + P_1)$ بررسی شده است. برای این منظور ضریب بخش هارمونیک یعنی P_0 را ثابت نگه داشته و نتایج به ازای P_1 های مختلف ارائه گردیده است. همچنین، فشار P_0 برابر با 1 MPa و فرکانس برابر 200 HZ در نظر گرفته می‌شود. شکل (۸) نمودار جابجایی-زمان و شکل (۹) نمودار تنش-کرنش مربوط به نقطه \bar{r} ورق را نشان می‌دهد.



شکل ۸- نمودار جابه‌جایی عرضی-زمان نقطه شعاعی میانی ورق به ازای فرکانس 200 HZ و $P_0 = 1$ MPa و مقادیر مختلف P_1



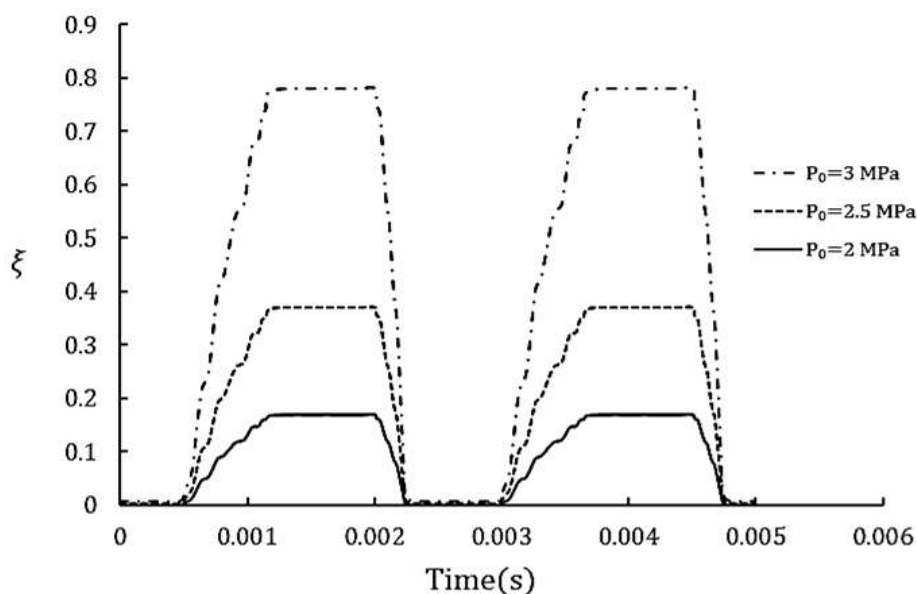
الف- نمودار تنش شعاعی-کرنش شعاعی نقطه میانی ورق به ازای $P_1 = 1$ MPa



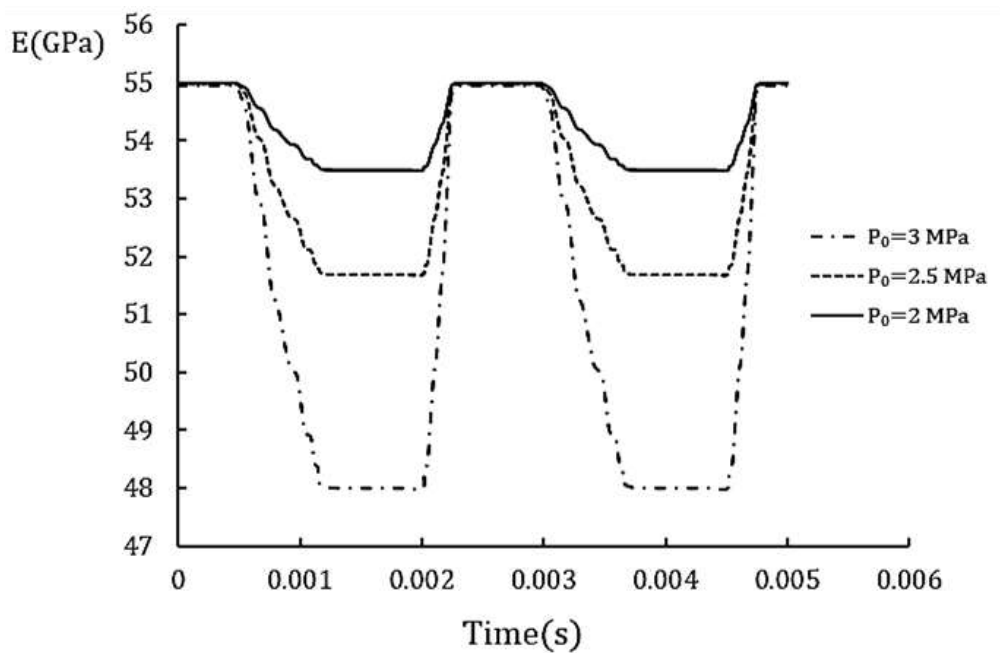
ب- نمودار تنش شعاعی- کرنش شعاعی نقطه میانی ورق به ازای $P_1 = 1.1 \text{ MPa}$

شکل ۹- نمودار تنش شعاعی- کرنش شعاعی نقطه میانی ورق به ازای فرکانس 200 HZ و $P_0 = 1 \text{ MPa}$ و مقادیر مختلف P_1

همان طور که در شکل (۸) مشاهده می شود وجود فشار ثابت باعث شیفت در مقادیر جابجایی شده است که در نتیجه ارتعاش حول یک مقدار متوسط غیر صفر انجام می شود. با افزایش P_1 ، مقدار متوسط مذکور افزایش می یابد. همچنین به واسطه اعمال فشار ثابت P_1 در سیکل اول یک رفتار گذرا مشاهده شده است که دامنه ارتعاش طی سیکل مذکور به دلیل وجود میرایی ناشی از تغییر فاز در ماده کاهش یافته و سپس به مقدار ثابتی می رسد. شکل (۹) به خوبی بروز تغییر فاز در ماده طی سیکل رفت و برگشت اول و نیز کاهش سیکل هیستریزس را نشان می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود افزایش P_1 منجر به بزرگتر شدن سیکل هیستریزس اولیه در ماده شده است و به ازای هر مقدار فشار ثابت، سطح سیکل هیستریزس و در نتیجه سطح میرایی در ماده پس از طی سیکل اول به مقدار ثابتی می رسد.



شکل ۱۰- نمودار ξ -زمان نقطه میانی شعاعی ورق به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف P_0

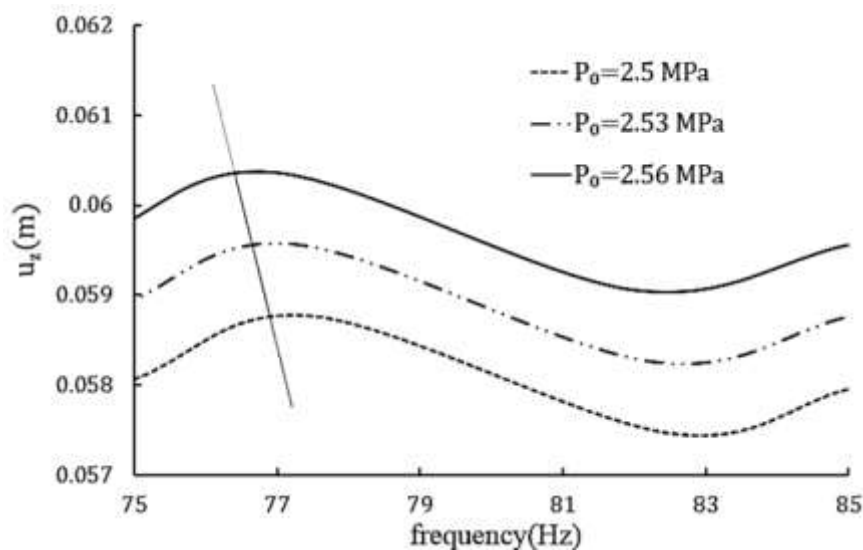


شکل ۱۱- نمودار مدول یانگ-زمان نقطه میانی شعاعی ورق به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف P_0

شکل (۱۰) نمودار کسر حجمی مارتنزیت-زمان مربوط به نقطه \bar{r} ورق را به ازای دوره تناوب 0.005 ثانیه و مقادیر مختلف P_0 را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش مقدار P_0 منجر به افزایش کسر حجمی مارتنزیت می‌شود و این امر منجر به نرم شدن ماده خواهد شد.

شکل (۱۱) نمودار مدول یانگ-زمان مربوط به نقطه میانی ورق دایروی توخالی را نشان می‌دهد مشاهده می‌شود که افزایش شدت فشار منجر به کاهش مدول یانگ می‌شود که این امر سبب کاهش استحکام در ماده می‌شود.

شکل (۱۲) پاسخ فرکانسی نقطه میانی ورق دایروی در بازه فرکانسی ۷۵-۸۵ هرتز که شامل یک فرکانس طبیعی ورق توخالی در فاز آستنیت خالص یعنی ۷۹/۱ هرتز استرا نشان می‌دهد.



شکل ۱۲- پاسخ فرکانسی نقطه شعاعی میانی ورق به ازای مقادیر مختلف P_0

در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود نقاط ماکزیمم در اطراف فرکانس طبیعی ورق در فاز آستنیت خالص با افزایش P_0 افزایش یافته و به سمت چپ جابه‌جا می‌شود در واقع در سیستم یک رفتار نرم شونده به واسطه تغییر فاز در ماده بوجود آمده است.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش پاسخ ارتعاشی ورق دایروی توخالی از جنس آلیاژ حافظه‌دار با لبه‌های گیردار تحت فشار هارمونیک مورد مطالعه قرار گرفت. شدت فشارهای متفاوتی بر ورق دایروی اعمال گردید و تاثیرات آن بر کسر حجمی مارتنزیت و مدول یانگ مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین روند تغییر فاز و استحکام ماده و رفتار ارتعاشی سیستم مورد بررسی قرار گرفت.

نتایج نشان داد که انتقال فاز زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار فشار به اندازه کافی افزایش داشته باشد که در این حالت مقدار کسر حجمی مارتنزیت مخالف صفر می‌شود. از طرف دیگر افزایش مقدار فشار منجر به افزایش مقدار دامنه ارتعاشات واداشته و کاهش مدول یانگ و استحکام ماده می‌شود. با افزایش کسر حجمی مارتنزیت ماده رفتار غیر همگن از خود نشان می‌دهد. زمانی که شدت فشار سبب تغییر فاز در ماده می‌شود در ماده رفتار نرم شوندگی مشاهده می‌گردد.

علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد که فرمولاسیون و روشهای حل عددی ارائه شده دارای صحت و سرعت بالایی بوده و به خوبی رفتار ارتعاشاتی چنین ورق‌هایی را با در نظر گرفتن تاثیرات غیرخطی ماده ناشی از انتقال فاز هنگام حرکت پیش‌بینی می‌کند. همچنین با توجه به مدل کردن ورق در نرم افزار المان محدود آباکوس صحت و دقت استفاده از سابروتین یومت و نزدیکی پاسخ نتایج، به نتایج عددی مشخص می‌گردد.

با توجه به نمودارهای استخراج شده مشاهده می‌گردد که در نقطه مورد بررسی شبکه ورق، با افزایش مقدار نیرو، کسر حجمی مارتنزیت افزایش می‌یابد که با توجه به این شرایط مدول یانگ کاهش می‌یابد و به عبارتی استحکام ماده کم می‌شود و ماده رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد که این امر سبب افزایش جابه‌جایی می‌شود.

مراجع

- [1] Lagoudas, D.C., Editor, "*Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications*", Springer, New York, (2008).
- [2] Stoeckel, D., "Nitinol Medical Devices and Implants", *Minimally Invasive Therapy & Allied Technologies*, Vol. 9(2), pp. 81-88, (2000).
- [3] Seelecke, S., "Modeling the Dynamic Behavior of Shape Memory Alloys", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 37(8), pp. 1363-1374, (2002).

- [4] Raparelli, T., Zobel, P.B., and Durante, F., "Design of a Parallel Robot Actuated by Shape Memory Alloy Wires", *Materials Transactions*, Vol. 43(5), pp. 1015-1022, (2002).
- [5] Du, X.W., Sun, G., and Sun, S.S., "A Study on the Deflection of Shape Memory Alloy (SMA) Reinforced Thermo-viscoelastic Beam", *Composites Science and Technology*, Vol. 64(9), pp. 1375-1381, (2004).
- [6] Roh, J.H., Han, J.H., and Lee, I., "Nonlinear Finite Element Simulation of Shape Adaptive Structures with SMA Strip Actuator", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 17(11), pp. 1007-1022, (2006).
- [7] Zhang, R.X., Ni, Q.Q., Masuda, A., Yamamura, T., and Iwamoto, M., "Vibration Characteristics of Laminated Composite Plates with Embedded Shape Memory Alloys". *Composite Structures*, Vol. 74(4), pp. 389-398, (2006).
- [8] Sadjadpour, A., and Bhattacharya, K., "A Micromechanics-inspired Constitutive Model for Shape-memory Alloys", *Smart Materials and Structures*, Vol. 16(5), pp.1751, (2007).
- [9] Chen, Y., Jiang, H.C., Liu, S.W., Rong, L. J., and Zhao, X.Q., "Damping Capacity of TiNi-based Shape Memory Alloys", *Journal of Alloys and Compounds*, Vol. 482(1-2), pp. 151-154, (2009).
- [10] Hartl, D.J., and Lagoudas, D.C., "Constitutive Modeling and Structural Analysis Considering Simultaneous Phase Transformation and Plastic Yield in Shape Memory Alloys". *Smart Materials and Structures*, Vol. 18(10), pp. 104017, (2009).
- [11] Mirzaeifar, R., Shakeri, M., and Sadighi, M., "Nonlinear Finite Element Formulation for Analyzing Shape Memory Alloy Cylindrical Panels", *Smart Materials and Structures*, Vol. 18(3), pp. 035002, (2009).
- [12] Zbiciak, A., "Dynamic Analysis of Pseudoelastic SMA Beam". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52(1), pp. 56-64, (2010).
- [13] Shiau, L.C., Kuo, S.Y., and Chang, S.Y., "Free Vibration of Buckled SMA Reinforced Composite Laminates", *Composite Structures*, Vol. 93(11), pp. 2678-2684, (2011).
- [14] Tobushi, H., Pieczyska, E., Miyamoto, K., and Mitsui, K., "Torsional Deformation Characteristics of TiNi SMA Tape and Application to Rotary Actuator", *Journal of Alloys and Compounds*, Vol. 577, pp. 745-748, (2013).
- [15] Forouzesh, F., and Jafari, A.A., "Radial Vibration Analysis of Pseudoelastic Shape Memory Alloy Thin Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 93, pp.158-168, (2015).
- [16] Shakki, S., and Zakerzadeh, M.R., "Modeling and Control of a Shape Memory Alloy Actuator Using Fuzzy Sliding Mode Controller", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16(7), pp. 353-360, (2016).
- [17] Gandhi, Y., Pirondi, A., and Collini, L., "Optimal Design of Shape Memory Alloy Composite under Deflection Constraint", *Materials*, Vol. 12(11), pp. 1733, (2019).

- [18] Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., and Atashipour, S.R., "An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates", *Materials & Design*, Vol. 30(9), pp. 3679-3685, (2009).
- [19] Hejripour, F., and Saidi, A.R., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates Using Differential Quadrature Method", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 226(2), pp. 485-497, (2012).
- [20] Bert, C.W., and Malik, M., "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics", *A Review*, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49(1), pp. 1-28, (1996).
- [21] Shu, C., "*Differential Quadrature and its Application in Engineering*", Springer Science and Business Media, Dec 6, London, (2012).
- [22] Reddy, J.N., "*An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*", with Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Solid Mechanics. Oxford University Press, USA, (2015).
- [23] Amini, M.H., Soleimani, M., Altafi, A., and Rastgoo, A., "Effects of Geometric Nonlinearity on Free and Forced Vibration Analysis of Moderately Thick Annular Functionally Graded Plate", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 20(9), pp. 709-720, (2013).

فهرست نمادهای انگلیسی

dA	المان سطح
A_f	دمای پایان آستنیت
A_s	دمای شروع آستنیت
b^A	پارامتر مدل
b^M	پارامتر مدل
B_{ik}	ضریب وزنی در راستای طولی
c	گرمای ویژه
c_{jk}	ضرایب وزنی در راستای محیطی
D	تانسور سفتی
E	مدول یانگ
$f(\xi)$	تابع انتقال سخت شوندگی
\vec{F}_1	بردار کرنش انتقال
\vec{F}_2	بردار فشار روی ورق
G	انرژی آزاد گیبس

H	ماکزیمم کرنش انتقال
I	تانسور همانی
ρ_i	اینرسی های جرمی
K	ماتریس سختی
δk	انرژی جنبشی مجازی
L	طول
M	ماتریس جرم
M_{ij}	برآیندهای ممان های خمشی
M_f	دمای پایان مارتنزیت
M_s	دمای شروع مارتنزیت
N	تعداد نقاط
N_{ij}	برآیندهای نیروی غشایی
N_r, N_θ	تعداد نقاط در راستای r و θ
P_0	ضریب ثابت فشار
ϕ_r	چرخش حول محور r
ϕ_θ	چرخش حول محور θ
$q(t)$	تابع زمانی فشار
\bar{r}	نقطه میانی ورق توخالی
S, S_0	آنتروپی ویژه در حالت مبنا و آنتروپی ویژه
S	تانسور نرمی
t	زمان
T, T_0	دمای مبنا
u	جابجایی طولی
u_0	انرژی داخلی ویژه در حالت مبنا
δu	انرژی کرنشی مجازی
v	جابجایی محیطی
dv	المان حجم
δv	انرژی پتانسیل مجازی
W	جابجایی شعاعی
W_{ext}	کار نیروهای خارجی
(r, θ, z)	مختصات

نمادهای یونانی

A تانسور ضریب انبساط حرارتی

δ	پارامتر ثابت در روش نیومارک
α	پارامتر ثابت در روش نیومارک
Δ	نماد تغییرات
$\Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}$	بردارهای جابه جایی سرعت و شتاب
ε_{ij}	تانسور کرنش
ε^t	تانسور کرنش انتقال
$\bar{\varepsilon}^t$	کرنش انتقال مؤثر
θ	مختصات زاویه ای
Λ	تانسور انتقال
μ_1, μ_2	پارامترهای مدل
ξ	کسر حجمی مارتنزیت
ρ	دانسیته
σ	تانسور تنش
$\acute{\sigma}$	تانسور تنش انحرافی
ν	نسبت پواسون
Y	پارامتر مدل
ω	فرکانس بی بعد
Ω	فرکانس تحریک
ϕ	تابع انتقال
ψ	نیروی ترمودینامیکی
∂	مشتق جزئی

بالا نویس ها

A	فاز آستنیت
M	فاز مارتنزیت

زیر نویس ها

f	پایان
q	شمارنده گام زمانی
s	شروع

Abstract

In this study, the forced vibrations of an annular circular plate with clamped edges under harmonic load is investigated. Analysis of circular plate is based on First-order Shear Deformation Theory (FSDT). The pseudoelastic behavior is simulated by Boyd-Lagoudas constitutive model. The Hamilton's principle is used to obtain the equations of motion. Differential Quadrature, Newmark methods, and convex cutting plane mapping algorithm are utilized to get the time and frequency responses of the plate. The phase transformation effects are studied on the time and frequency responses of the plate. Also, the natural frequencies of the circular plate are obtained for the case of pure austenitic Phase to compare the frequency response of the present nonlinear system (phase transformation-induced material nonlinearity) with the linear one around them. Then, the results of this research in the limit case are compared and validated with the results of other researches and finite element model (ABAQUS software). The results indicate that the alloy phase transformation leads to reduced material strength and the nonlinear behavior of the alloy.