

اثر انتقال فاز بر ارتعاشات آزاد و اجباری محرکهای حافظ شکل با مدلسازی تیر تیموشنکو

سید احمد تجلی^۱
استادیار

در این مقاله، ارتعاشات آزاد و اجباری محرک های از جنس آلیاژهای حافظ شکل با در نظر گرفتن اثرات انتقال فاز و اشباع توسط مدل تیر تیموشنکو با شرایط مرزی یکسر گیردار بررسی شده است. پس از استخراج معادلات حرکت از اصل همیلتون، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای گسسته سازی معادلات بکار رفته و به دلیل غیر خطی بودن از الگوریتم نگاشت بازگشتی، روش نیوتن رافسون و روش نیومارک حل زمانی آنها بدست آمده است. نتایج نشان می دهند به دلیل تشکیل حلقه های هیستریزیس ارتعاشات میرا شده و در بسیاری از حالات به ناحیه الاستیک در فاز آستنیت محدود می شوند.

ناهید انتشاری^۲
دانشجوی کارشناسی ارشد

واژه های راهنما: آلیاژهای حافظ شکل، ارتعاشات آزاد و اجباری، تیر تیموشنکو، میرایی هیستریزیس، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

۱- مقدمه

آلیاژهای حافظ شکل که در دسته بندی مواد هوشمند قرار می گیرند، بدلیل خاصیت منحصر بفردشان در بازیابی شکل اولیه خود که با استفاده از حرارت دهی و یا تحت تاثیر خاصیت سوپر الاستیک حاصل می شود، کاربرد ویژه ای در بسیاری از صنایع مهندسی مانند سیستمهای میکروالکترومکانیکی، تجهیزات تنظیم ایرفویل ها، میراگر ارتعاشات، فعال ساز صفحات خورشیدی فضاپیما و همچنین پزشکی مانند ایمپلنت دندان و استنت های قلب و عروق یافته اند [۱-۶]. ساختار مکانیکی این آلیاژها شامل فازهای کریستالی آستنیت با ساختار تقارن مکعبی و مارتنزیت با ساختار دوقلوبی^۳ می باشد. رفتار حافظ شکلی^۴، به توانایی آلیاژ برای بازیابی شکل اولیه خود از طریق گرم شدن پس از تغییر شکل در فاز مارتنزیت اشاره دارد. در حالت سوپر الاستیک، ماده

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد s.a.tajalli@sku.ac.ir

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد enteshari@stu.sku.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۰۵

^۳ Twinned Martensite

^۴ Shape memory effect

بدون نیاز به عملیات حرارتی با باربرداری از حالت مارتنزیت به آستنیت تغییر شکل داده و به حالت اولیه باز می‌گردد. از خواص این مواد می‌توان به مقاومت خستگی بالا، مقاومت الکتریکی زیاد، مقاومت بالا نسبت به خوردگی و نسبت توان به وزن بالا اشاره نمود. این ویژگیها باعث کاربرد وسیع این مواد در ساخت میکرومحرکها با استفاده از روشهای تحریک متفاوت مانند الکترواستاتیک، پیزوالکتریک، الکترومغناطیس و ترموالکتریک شده است [۷].

Mineta و همکاران [۸] با استفاده از فرآیند لایه نشانی الکتروشیمیایی، به ساخت میکرومحرکهای استوانه ای شکل نیتینولی به قطر ۱ میلی‌متر و ضخامت دیواره ۴۰ میکرومتر پرداختند. آنها نشان دادند که با استفاده از تحریک گرمایی این میکرومحرکها توسط جریان الکتریکی ۹۰ میلی آمپر (۲۳ میلی ولت) می‌توان تغییر شکل طولی زیادی به اندازه ۶۰٪ و نیروی طولی ۷۵ میلی نیوتن ایجاد کرد. Sun و همکاران [۹] با استفاده از فرآیند لیتوگرافی لایه نازکی از نیتینول را بر روی بستر آلومینیومی قرار داده و به ساخت میکرومحرکهای بایمورف پرداختند. سپس خواص ترمومکانیکی این ساختارها توسط مدلسازی المان محدود شبیه سازی شده و نتایج آن بصورت آزمایشگاهی توسط این محققان مورد تایید قرار گرفت. Knick و همکاران [۱۰] در تحقیقات خود بیان نمودند که در سیستمهای میکروالکترومکانیکی با توجه به ابعادشان نیاز به استفاده از محرکهایی با فرکانس بالا می‌باشد در حالیکه آلیاژهای حافظ شکل دارای فرکانس ارتعاشی پایین تا حدود ۱۰۰ هرتز هستند. آنها به طراحی میکرومحرک بایمورف با فرکانس ارتعاشی بالا و مصرف توان پایین با استفاده از آلیاژ تیتانیوم-نیکل که لایه نازکی از نیتینول بر روی آن قرار داشت پرداختند که با استفاده از تحریک گرمایی تغییر شکل در آن ایجاد می‌شد. نتایج آزمایشگاهی نشان دادند که ارتعاشات این میکرو محرک با فرکانس ۳۰۰۰ هرتز و مصرف توان ۱ میلی وات صورت گرفته است. de Souza و مارکوئی [۱۱] تاثیرات دینامیکی مربوط به اثرات سوپرالاستیک در فنرهای هلیکال تولید شده از آلیاژهای حافظ شکل که به ایرفویل‌های دو درجه آزادی متصل شده بودند تحت پیش بارهای مختلف مورد بررسی قرار دادند. نتایج تجربی و محاسبات عددی حاکی از خاصیت میرایی و کاربرد این آلیاژها بعنوان برداشت کننده انرژی در فاز مارتنزیت بود. با توجه به خواص مکانیکی ویژه آلیاژهای حافظ، این مواد دارای کاربرد زیادی در ساخت میکروگریپرها، بدلیل ایجاد نیروی زیاد در فک نگه دارنده که برای جابجایی میکروسازه ها از آنها استفاده می‌شود، می‌باشند [۱۲-۱۴]. Kim و همکاران [۱۵] با استفاده از آلیاژهای حافظ شکل نیتینول به طراحی میکروگریپر با تحریک الکترومغناطیس و سنسور نیروی پیزوالکتریک پرداختند. Mohammed Ali و Takahata [۱۶] با روش میکروماشینکاری به ساخت میکروگریپر از جنس آلیاژ حافظ شکل پرداختند. تحریک گرمایی سازه ساخته شده با استفاده از لایه نازک پلی ایمید با ترکیبات مس بود که بصورت کنترل بیسیم با استفاده از میدان مغناطیسی و امواج با فرکانس رادیویی انجام شده است. نتایج نشان دادند تنش برشی ایجاد شده در گیره ها برای نگه داشتن میکرو سازه ها در این گریپر بیشتر از ۴۰ مگا پاسکال می‌باشد.

روشهای برداشت انرژی مبتنی بر ارتعاشات مکانیکی سازه ها (توسط لایه های پیزوالکتریک) که در اثر تحریک خارجی ایجاد می‌شود بعلاوه بازدهی بالا مخصوصا در سیستمهای میکرو بسیار مورد توجه قرار گرفته اند.

Avirovik و همکاران [۱۷] با ترکیب المانهای پیژوالکتریک و آلیاژهای حافظ شکل تجهیزتی تولید نمودند که بعنوان برداشت کننده انرژی و همچنین محرک قابل استفاده بود. Adeodato و همکاران [۱۸] بصورت تجربی و همچنین محاسبات عددی مبتنی بر روش المان محدود، برداشت انرژی ارتعاشی از تیر یکسرگیردار پیژوالکتریک که به انتهای آن فنر هلیکال ساخته شده از آلیاژ حافظ شکل متصل بود را بررسی نمودند. بعلاوه جلوگیری از اثرات خستگی بر عملکرد سازه، تحریک تیر برای ایجاد ارتعاشات در دامنه های نوسان پایین ایجاد شد. سپس، اثرات دما بر میرایی هیستریزیس ایجاد شده در اثر انتقال فاز مورد بررسی قرار گرفت. این تحقیقات نشان داد که آلیاژهای حافظ شکل، ظرفیت سیستم برای برداشت انرژی را افزایش خواهند داد. با توجه به اهمیت بررسی ارتعاشات محرکهای ساخته شده از آلیاژهای حافظ شکل، Razavilar و همکاران [۱۹] به تحلیل دینامیکی رفتار شبه الاستیک تیرهایی با این جنس پرداختند. آنها در محاسباتشان از مدل سوزا و تئوری تیر اویلر-برنولی برای یافتن معادلات دیفرانسیل حرکت تیرهای یکسرگیردار استفاده نموده و با بکارگیری روش گالرکین، اثرات انتقال فاز بر میرایی ارتعاشات آزاد و اجباری این تیرها را بررسی نمودند. نتایج تحقیقات آنها نشان داد که افزایش دما باعث افزایش میزان استهلاک ارتعاشات سازه، به علت تشکیل حلقه های هیستریزیس بزرگتر، خواهد شد. همچنین آنها نشان دادند که با افزایش جابجایی اولیه، سرعت میرایی در ارتعاشات آزاد تیر افزایش می یابد. Mirzaeifar و همکاران [۲۰]، با ارائه فرمولاسیون بازگشتی، به تحلیل خمش شبه الاستیک تیرهای حافظ شکل با ارائه دو تابع متفاوت انتقال فاز پرداختند. آنها برای توزیع تنش در راستای ضخامت تیر، توزیع حجم مارتنزیت و همچنین منحنی انحناء-گشتاور، رابطه ای تحلیلی ارائه کردند. علاوه بر تیرهای تک لایه، تیرهای کامپوزیتی که شامل لایه های ساخته شده از مواد حافظ شکل هستند نیز کاربرد وسیعی در ساخت انواع سازه ها را دارا هستند. بطور نمونه، Damanpack و همکاران [۲۱] به بررسی عددی کمانش تیرهای کامپوزیتی با لایه های حافظ شکل و کنترل تغییر شکل آنها در حالت پسا کمانش پرداختند. با توجه به کاربرد وسیع ساختارهای نانو کامپوزیت در ساخت انواع تجهیزات، مطالعات وسیعی در رابطه با پیش بینی رفتار مکانیکی آنها انجام شده است [۲۲-۲۳]. در این ساختارها بطور نمونه از نانو ذرات و نانو لوله های کربنی به عنوان تقویت کننده استفاده می شود. آلیاژهای حافظ شکل نیز می توانند بصورت ییاف تقویت کننده و یا بصورت لایه ای در ساخت سازه های نانو کامپوزیت مورد استفاده قرار گیرند.

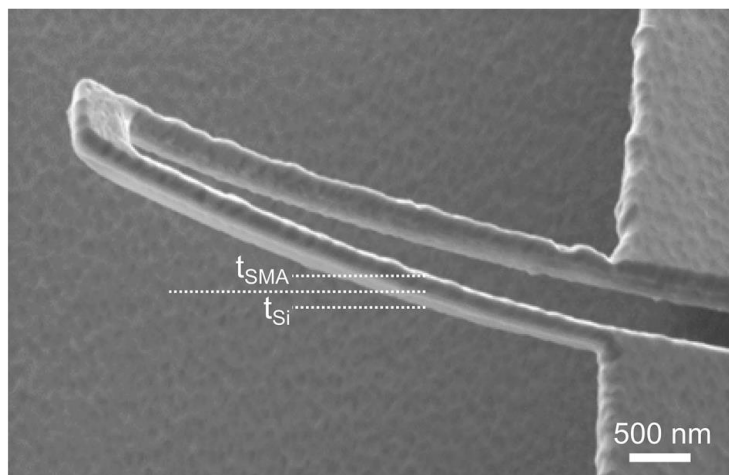
در این مقاله، ارتعاشات آزاد و اجباری محرکها از جنس آلیاژهای حافظ شکل، که بصورت تیر یکسر گیردار در نظر گرفته شده، مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از مدل سوزا، اثرات انتقال فاز آستینیت و مارتنزیت بر تانسور کرنش همچنین اثرات فاز اشباع ماده، که در آن اثر کرنش ناشی از فاز مارتنزیت به حداکثر خود می رسد، در تابع انرژی آزاد هلمهولتز بمنظور استخراج معادلات ساختاری لحاظ شده اند. با توجه به اینکه تحقیقات پیشین محدود به مدلسازی تیر اویلر-برنولی بوده اند برای نخستین بار برای مدلسازی تیرهای نسبتاً ضخیم از جنس آلیاژ حافظ شکل، میدان جابجایی بر اساس مدل تیر تیموشنکو محاسبه شده است. در این راستا، پس از محاسبه انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار بارهای وارد بر تیر، معادلات حرکت از اصل همپلتون توسعه یافته بدست آمده و شرایط مرزی مربوطه استنتاج شده است. پس از آن، از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم

یافته؛ که دارای قابلیت زیادی در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی است، برای گسسته سازی معادلات استفاده شده است. در این روش، مشتقات پاره ای بصورت ترکیب خطی توابع وزن دهی شده چند جمله ای در شبکه نقاط خاصی از مختصات جسم در نظر گرفته می شوند. بدلیل غیر خطی بودن ماهیت معادلات حرکت که در اثر وجود کرنشهای انتقال فاز ایجاد می شود از روش نگاهت بازگشتی، الگوریتم تکرار مبتنی بر روش نیوتن رافسون در فرآیند حل استفاده شده و حل دینامیکی بر اساس روش نیومارک بدست آمده است. نهایتاً اثر میرایی ناشی از تشکیل حلقه های هیستریزیس بر ارتعاشات آزاد و اجباری تیر مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات ساختاری

همانطور که اشاره شد، تیرهای ساخته شده از جنس آلیاژهای حافظ شکل دارای کاربرد وسیعی در انواع تجهیزات صنعتی و همچنین ادوات پزشکی می باشند. این قطعات، بسته به کاربردشان، در طیف گسترده ای از اندازه ها از حدود چند صد نانومتر در نانو محرکهای بایمورف تا ابعاد بزرگ (مانند تقویت کننده بتن) بکار می روند (شکل ۱). لذا، تحلیل تئوریک دقیق رفتار مکانیکی آنها می تواند در فرآیند طراحی بسیار مثمر ثمر باشد. در این بخش به ارائه مدل ساختاری بر اساس رابطه Souza و همکاران [۲۴] پرداخته می شود که در آن اثرات حافظ شکلی و سوپراالاستیسیته در تغییر شکل کوچک مواد با توجه به قوانین ترمودینامیک وارد شده است. تانسور کرنش، \mathcal{E} ، و دمای مطلق، T ، بعنوان متغیر کنترلی در تغییر شکل و تانسور کرنش انتقال فاز، e^{tr} ، بعنوان متغیر داخلی در نظر گرفته می شود. در این حالت، تابع انرژی آزاد هلمهولتز برابر است با:

$$\psi(\theta, \mathbf{e}, T, \mathbf{e}^{tr}) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \frac{h^{tr}}{2}\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \beta(T - T_m)\|\mathbf{e}^{tr}\| + \Gamma_{EL}(\|\mathbf{e}^{tr}\|) + (\bar{u}_0 - T\eta_0) + c\left[(T - T_0) - T\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] \quad (1)$$



شکل ۱- نمای شماتیک از نانومحرک بایمورف از جنس آلیاژ حافظ شکل [۲۵]

¹ Generalized differential quadrature (GDQ)

² Bimorph nanoactuator

در این رابطه h^{tr} پارامتر سخت شوندهگی انتقال فاز، T_m دمای انتقال فاز، T_0 دمای مرجع، β پارامتر مربوط به وابستگی انتقال فاز به دما، C ظرفیت گرمای ویژه، α ، \bar{u}_0 ، η_0 به ترتیب برابر با ضریب انبساط گرمایی، انرژی داخلی و آنتروپی مرجع می باشند. عملگر (*) بخش مثبت توابع را لحاظ کرده و مقادیر منفی را برابر با صفر قرار می دهد. همچنین در این رابطه، عملگر اندازه تانسور برابر با $\|A\| = \sqrt{A:A^T}$ می باشد. تانسور کرنش را می توان به دو بخش حجمی و انحرافی تقسیم نمود. در این رابطه، e تانسور کرنش انحرافی و $\theta = \varepsilon:I$ برابر با کرنش حجمی است. ضریب مدول برشی، $G = E/2(1 + \nu)$ ، و همچنین ضریب مدول حجمی، $K = E/3(1 - 2\nu)$ نیز تابعی از مدول یانگ، E ، و ضریب پواسان، ν ، می باشند. I نیز تانسور همانی است. تقسیم بندی تانسور تنش و کرنش به دو بخش انحرافی و حجمی توسط رابطه (۲) بیان می شود.

$$\varepsilon = e + \frac{\theta}{3}I, \quad \sigma = s + pI \tag{۲}$$

S تانسور تنش انحرافی و $p = \sigma:I/3$ برابر با تنش هیدرواستاتیکی می باشد. همانطور که اشاره گردید، تانسور مرتبه دو e^{tr} نشانگر کرنش انتقال فاز بوده که تغییر شکل ماده از حالت آستنیت به مارتنزیت را نشان می دهد و اندازه (نرم) آن نهایتاً در حالت اشباع به ε_L می رسد. به منظور ارضاء چنین شرطی تابع $\Gamma_{\varepsilon_L}(\|e^{tr}\|)$ ارائه شده است.

$$\Gamma_{\varepsilon_L}(\|e^{tr}\|) = \begin{cases} 0 & \text{if } \|e^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{۳}$$

بمنظور استخراج روابط ساختاری از قانون دوم ترمودینامیک استفاده شده و نیروهای ترمودینامیکی مربوط به هر یک از متغیرها بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} s &= \frac{\partial \psi}{\partial e} = 2G(e - e^{tr}) \\ p &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = K[\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ X &= -\frac{\partial \psi}{\partial e^{tr}} = s - \left[\beta \langle T - T_m \rangle + h^{tr} \|e^{tr}\| + \frac{\partial \Gamma_{\varepsilon_L}}{\partial \|e^{tr}\|} \right] \frac{e^{tr}}{\|e^{tr}\|} \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \eta_0 + 3\alpha K \theta - \beta \|e^{tr}\| \frac{\langle T - T_m \rangle}{|T - T_m|} + c \ln \frac{T}{T_0} \end{aligned} \tag{۴}$$

حین تغییر شکل مواد حافظ شکل از فاز آستنیت به مارتنزیت، قانون جریان مناسب برای محاسبه نمو کرنش مربوط به انتقال فاز (در راستای عمود بر سطح تابع حد F^{tr}) می بایست ارائه گردد. این تابع حد شبیه به معیار ون-میزز در تغییر شکل پلاستیک می باشد.

$$F^{tr}(X) = \|X\| - R = 0 \tag{۵}$$

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F^{tr}}{\partial X} = \dot{\zeta} \frac{X}{\|X\|} \tag{۶}$$

در رابطه (۵)، R برابر با شعاع ناحیه الاستیک می باشد. این پارامتر بطور کلی تابعی از دما بوده و مقدار آن از تست کشش تعیین می شود. در این مقاله، برای سادگی محاسبات، این پارامتر برابر با مقداری ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین تانسور X ، که کار مزدوج تانسور e^{tr} می باشد، بعبارتی بیانگر نیروی راننده برای انتقال فاز است. ضریب لاگرانژ ζ (مشابه با پارامتر ارائه شده در قانون جریان تغییر شکل پلاستیک مستقل از نرخ زمانی) در رابطه (۶) می بایست شرط کان-تاکر را بصورت رابطه (۷) ارضاء نماید.

$$\zeta \geq 0, F^{tr} \leq 0, \zeta F^{tr} = 0 \quad (7)$$

در حالت اشباع، پارامتر γ برای لحاظ نمودن نمو تغییر شکل بصورت رابطه (۸) تعریف می شود. در این حالت، نمو این پارامتر با توجه به تابع سطح F^s مورد بررسی قرار می گیرد.

$$\frac{\partial \Gamma_{\varepsilon_L}}{\partial \|e^{tr}\|} = \begin{cases} 0 & \|e^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ \gamma & \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma \geq 0, F^s \leq 0, \gamma F^s = 0 \quad (9)$$

$$F^s = \|e^{tr}\| - \varepsilon_L = 0 \quad (10)$$

پارامتر ε_L تعیین کننده کرنش نهایی مربوط به فاز مارتنزیت بوده که مقدار آن از منحنی تست کشش تک محوره در حالت مارتنزیت کامل بدست می آید.

۱-۲- الگوریتم حل معادلات

برای حل معادلات (۴) تا (۱۰) لازم است که از روش انتگرالگیری عددی مناسب جهت بروز رسانی متغیرها در معادلات ساختاری استفاده شود. بدین منظور، دامنه حل به بازه های زمانی کوچکی تقسیم شده و در هر بازه از الگوریتم نگاشت بازگشتی و روش انتگرال گیری اویلر پسرو استفاده می شود. در روش نگاشت بازگشتی، پس از اعمال نمو تغییرات بارگذاری، ابتدا با فرض الاستیک بودن تغییر شکل تانسور تنش پیش بینی شده و سپس با وارد کردن اثرات مربوط به تغییرات کرنش انتقال فاز از طریق محاسبه تغییرات $\Delta \zeta = \zeta_{n+1} - \zeta_n$ بین زمان ابتدای بازه، t_n ، و زمان انتهایی بازه، t_{n+1} ، و همچنین بروز رسانی پارامتر اشباع مقادیر تانسور تنش طی الگوریتم تکرار (روش نیوتن-رافسون) اصلاح می شوند. بطور خلاصه، روند حل عددی طی شده بشرح زیر است:

۱- پیش بینی الاستیک برای تغییر شکل در انتهای بازه زمانی $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ با توجه به مقدار ورودی تانسور نمو کرنش و متغیرهای حالت در ابتدای بازه زمانی:

$$\begin{aligned} s_{n+1}^{pr} &= s_n + 2G\Delta e \\ p_{n+1}^{pr} &= p_n + K\Delta \theta \end{aligned} \quad (11)$$

$$X_{n+1}^{pr} = s_{n+1}^{pr} - [\beta \langle T - T_m \rangle + h^{tr} \|e_n^{tr}\| + \gamma_n] \frac{e_n^{tr}}{\|e_n^{tr}\|}$$

۲- ارزیابی امکان انتقال فاز و یا تغییر شکل در حالت اشباع. بطور مثال:

$$\begin{aligned} \text{if } F^{tr} = \|X_{n+1}^{pr}\| - R \leq 0 \\ \text{Then set } (*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{pr} \end{aligned} \quad (12)$$

۳- استفاده از الگوریتم نگاشت بازگشتی برای تصحیح تغییر شکل غیر الاستیک:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_{n+1}^{pr} - 2Ge_{n+1}^{tr} \\ p_{n+1} &= K \theta_{n+1} \\ X_{n+1} &= s_{n+1} - [\beta(T - T_m) + h^{tr}\|e_{n+1}^{tr}\| + \gamma_{n+1}] \frac{e_{n+1}^{tr}}{\|e_{n+1}^{tr}\|} \\ e_{n+1}^{tr} &= e_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X_{n+1}}{\|X_{n+1}\|} \\ , F^{tr}(X_{n+1}) &\leq 0, \Delta\zeta F^{tr}(X_{n+1}) = 0 \Delta\zeta \geq 0 \\ , F^s(e_{n+1}^{tr}) &\leq 0, \gamma_{n+1} F^s(e_{n+1}^{tr}) = 0 \gamma_{n+1} \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

در این مقاله، الگوریتم حل برای بررسی تغییر شکل از حالت الاستیک به غیر الاستیک (شامل حالت انتقال فاز و اشباع) که بر اساس نامساوی کان-تاکر بیان می شود با معادل آن در رابطه فیشر-برمیستر جایگزین شده است [۲۶].

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x - y = 0 \Leftrightarrow x \leq 0, y \geq 0, xy = 0 \quad (14)$$

استفاده از این تابع باعث می شود که نیازی برای جستجوی شرایط گذار از حالت الاستیک به انتقال فاز و یا اشباع وجود نداشته باشد.

$$\begin{aligned} \sqrt{(F^{tr})^2 + (\Delta\zeta)^2 + 2\epsilon^2} + F^{tr} - \Delta\zeta &= 0 \\ \Leftrightarrow F^{tr} \leq 0, \Delta\zeta \geq 0, \Delta\zeta F^{tr} &= -\epsilon^2 \\ \sqrt{(F^s)^2 + (\gamma)^2 + 2\epsilon^2} + F^s - \gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow F^s \leq 0, \gamma \geq 0, \gamma F^s &= -\epsilon^2 \end{aligned} \quad (15)$$

قابل ذکر است که پارامتر تنظیم ϵ بمنظور ایجاد مشتق پذیری در نقاط گذار (حین استفاده از روش نیوتن-رافسون) در نظر گرفته شده است.

۳- معادلات حرکت تیر تیموشنکو

در این مطالعه، رفتار دینامیکی تیرهای یکسر گیردار به طول، عرض و ضخامت h, b, L از جنس آلیاژ حافظه شکل با سطح مقطع مستطیلی با توجه به تئوری ارائه شده در بخش قبل مورد بررسی قرار می گیرد. بمنظور

استخراج روابط حرکت، میدان جابجایی (طولی، عرضی و چرخشی) بر اساس فرضیات تیر تیموشنکو در جابجایی های کوچک (با توجه به مدل سازی Reddy [۲۷]) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\varphi(x, t) \\ u_2(x, z, t) &= 0 \\ u_3(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

در این رابطه، u_0 ، w به ترتیب جابجایی طولی در راستای محور x و عرضی در راستای محور Z برای نقاط تارخشی بوده و φ زاویه چرخش این نقاط حول محور y می باشد. مولفه های تانسور کرنش با توجه به میدان جابجایی توسط رابطه (۱۷) بدست خواهند آمد.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (17)$$

معادلات ساختاری که برای بیان ارتباط تانسور تنش بر حسب کرنش بکار می رود توسط رابطه (۴) بیان می گردند. به منظور یافتن معادلات حرکت، از اصل همیلتون توسعه یافته بر اساس تئوری حساب تغییرات استفاده می شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K_e - \delta \psi + \delta W) dt = 0 \quad (18)$$

در این رابطه، توابع W ، K_e ، ψ به ترتیب بیانگر انرژی پتانسیل آزاد هلمهولتز، انرژی جنبشی و همچنین کار ناشی از نیروهای خارجی وارده بر سیستم هستند. همچنین t_1 و t_2 ابتدا و انتهای بازه زمانی مسیری است که جسم برای تغییر شکل دینامیکی طی می کند. بعلاوه، δ نشانگر عملگر تغییرات می باشد. اگر نیروی خارجی بصورت بار گسترده $f(x, t)$ ، نیروی متمرکز عرضی F در مرزها و گشتاور متمرکز M در مرزها فرض گردد و نمو انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل با استفاده از روش حساب تغییرات (و با بهره گیری از انتگرال جزء به جزء) محاسبه شود، با صرف نظر نمون از اثرات انبساط حجمی ناشی از تغییر دمای و پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta K_e &= \int \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dV \\ &= \int \rho (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + z \dot{u}_0 \delta \dot{\varphi} + z \dot{\varphi} \delta \dot{u}_0 + z^2 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta W = \int_0^L (f \delta w) dx + (F \delta w + M \delta \varphi) \Big|_0^L \quad (20)$$

$$\delta \psi = \int \left[\left(K + \frac{4}{3} G \right) \varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 4G \varepsilon_{xz} \delta \varepsilon_{xz} - 2G e_{xx}^{tr} \delta \varepsilon_{xx} - 4G e_{xz}^{tr} \delta \varepsilon_{xz} + \dots \right] dV \quad (21)$$

قابل ذکر است که در محاسبه نمو انرژی کرنشی فقط عباراتی که در معادله حرکت ظاهر می شوند نشان داده شده است. نهایتاً معادلات تعادل دینامیکی بر حسب پارامترهای جایجایی برابر خواهند بود با:

$$\delta u_0: \rho A \ddot{u}_0 + \rho I_1 \ddot{\phi} - \tilde{E} A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \tilde{E} I_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2Gb \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial e_{xx}^{tr}}{\partial x} dz \quad (22)$$

$$\delta w: \rho A \ddot{w} - GA\kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = f(x, t) - 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial e_{xz}^{tr}}{\partial x} dz \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi: \rho I_2 \ddot{\phi} + \rho I_1 \ddot{u}_0 - \tilde{E} I_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \tilde{E} I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + GA\kappa \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} e_{xz}^{tr} dz - 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial e_{xx}^{tr}}{\partial x} z dz \end{aligned} \quad (24)$$

در این رابطه، K ضریب تصحیح برش بوده که برای مقاطع مستطیلی مقدار آن برابر با $(5 + 5\nu)/(6 + 5\nu)$ در نظر گرفته می شود. همچنین ρ چگالی ماده بوده و $A = bh$ مساحت سطح مقطع تیر می باشد. مقدار بقیه پارامترها از رابطه (۲۵) بدست می آیند.

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (I_1, I_2) = b \int_{-h/2}^{h/2} (z, z^2) dz \quad (25)$$

همچنین، شرایط مرزی هندسی و طبیعی با استفاده از اصل همپلتون توسط روابط (۲۶) تا (۲۸) بیان می شوند.

$$\left[\tilde{E} A \frac{\partial u_0}{\partial x} + \tilde{E} I_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} e_{xx}^{tr} dz \right]_{x=0,L} = 0, \quad [u_0]_{x=0,L} = 0 \quad (26)$$

$$\left[GA\kappa \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} e_{xz}^{tr} dz - F \right]_{x=0,L} = 0, \quad [w]_{x=0,L} = 0 \quad (27)$$

$$\left[\tilde{E} I_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \tilde{E} I_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2Gb \int_{-h/2}^{h/2} e_{xx}^{tr} z dz - M \right]_{x=0,L} = 0, \quad [\phi]_{x=0,L} = 0 \quad (28)$$

برای تیر یکسر گیردار ابتدای تیر بسته بوده بنابراین شرط مرزی هندسی $u_0 = 0$ و $w = 0$ و $\phi = 0$ در نظر گرفته می شود. همچنین انتهای تیر باز است بنابراین بخش مربوط به شرایط مرزی طبیعی در روابط (۲۶)

تا (۲۸) در نظر گرفته می شوند. پس از یافتن معادلات، می بایست روش حل مناسبی ارائه گردد. در تحقیقات انجام شده، الگوریتم حل بر مبنای روش المان محدود و یا روش جمع زنی مدها انجام شده است [۱۹]. در این مقاله از الگوریتم مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته که روشی موثر برای حل معادلات حرکت سازه ای می باشد برای بررسی اثر انتقال فاز بر ارتعاشات تیرها استفاده شده است.

۱-۳- روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، روشی موثر در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی بوده (Tajalli [۲۸]، Tomasiello [۲۹]، Janghorban [۳۰]، Bahrami و همکاران [۳۱]) که می تواند جایگزین مناسبی برای روشهای تفاضل محدود و اجزای محدود باشد. در این روش، مشتقات پاره ای در هر مرتبه ای که باشند بصورت ترکیب خطی توابع وزن دهی شده چند جمله ای در شبکه نقاط خاصی از دامنه حل در نظر گرفته می شوند.

$$\left. \frac{d^m \bar{f}}{dr^m} \right|_{r=r_i} = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(m)} \bar{f}(r_j) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

در این رابطه، ضرایب $C_{ij}^{(m)}$ برابر با ضرایب وزنی همچنین r_i نشانگر مختصات و موقعیت نقاط (گره های) گسسته شبکه بوده که توزیع آن بصورت یکنواخت و یا غیر یکنواخت در دامنه حل در نظر گرفته می شوند. قابل ذکر است که نوع توزیع این نقاط نقش مهمی در سرعت همگرایی، دقت و پایداری روش ایفاء می کند. در این مقاله، توزیع این نقاط بر اساس توزیع غیر یکنواخت چبیشف-گوس-لوباتو بدلیل همگرایی بالای آن مورد استفاده قرار گرفته است.

$$r_i = r_1 + \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right] \frac{r_2 - r_1}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (30)$$

در این معادله، تعداد نقاط برابر با n بوده که در بازه $[r_1, r_2]$ توزیع آنها محاسبه شده اند. ضرایب وزنی در رابطه مربوط به مشتقات با توجه به فرمولاسیون لاگرانژی بصورت روابط (۳۱) و (۳۲) بدست می آیند.

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{1}{r_j - r_i} \prod_{k=1, k \neq i, j}^n \frac{r_i - r_k}{r_j - r_k} \quad i \neq j, \quad C_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

$$C_{ij}^{(m)} = m \left[C_{ii}^{(m-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{r_i - r_j} \right] \quad i \neq j, \quad C_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^{(m)} \quad m > 1 \quad (32)$$

با استفاده از این روش و اعمال روابط (۲۹) تا (۳۲) به معادلات تعادل دینامیکی و گسسته سازی آنها در نقاط شبکه، فرم نهایی معادلات برابر خواهد بود با:

$$\rho A \ddot{u}_{0i} + \rho I_1 \ddot{\varphi}_i - \tilde{E} \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(2)} (A u_{0j} + I_1 \varphi_j) = -2Gb \sum_{k=1}^{n_1} q_k \left(\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} e_{xx}^{tr}(x_j, z_k) \right) \quad (33)$$

$$\rho A \ddot{w}_i - GA \kappa \left(\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} \varphi_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(2)} w_j \right) = f_i - 2Gb \sum_{k=1}^{n_1} q_k \left(\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} e_{xz}^{tr}(x_j, z_k) \right) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \rho I_2 \ddot{\varphi}_i + \rho I_1 \ddot{u}_{0i} - \tilde{E} \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(2)} (I_2 \varphi_j + I_1 u_{0j}) + GA \kappa \left(\varphi_i + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} w_j \right) \\ = 2Gb \sum_{k=1}^{n_1} q_k \left(e_{xz}^{tr}(x_j, z_k) - z_k \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} e_{xx}^{tr}(x_j, z_k) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

روابط انتگرال در معادلات تعادل (که در راستای ضخامت تیر استخراج شده اند) توسط روش گوس گسسته سازی شده است. در این روش انتگرال توابع بصورت ترکیب خطی مقادیر آنها در نقاط شبکه (که تعداد آنها برابر با n_1 در راستای ضخامت تیر در نظر گرفته شده است) با لحاظ نمودن ضرایب وزنی q_i محاسبه می شوند. پارامتر q_i توسط رابطه (۳۶) قابل محاسبه خواهد بود.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}(z) dz = \sum_{i=1}^{n_1} q_i \bar{f}(z_i), \quad q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \prod_{j=1, j \neq i}^{n_1} \frac{z - z_j}{z_i - z_j} dz \quad (36)$$

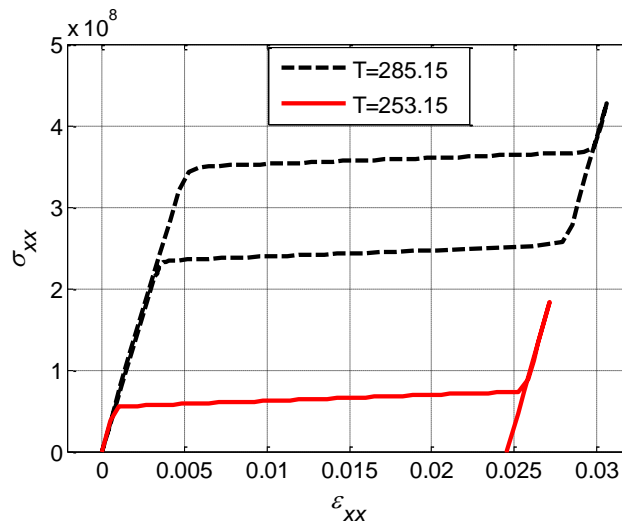
پس از یافتن فرم گسسته معادلات، حل براساس الگوریتم ذکر شده در بخش (۲-۱) بدست آمده و با توجه به وابستگی آنها به زمان از روش نیومارک در روند حل استفاده شده است.

۴- بحث و بررسی نتایج

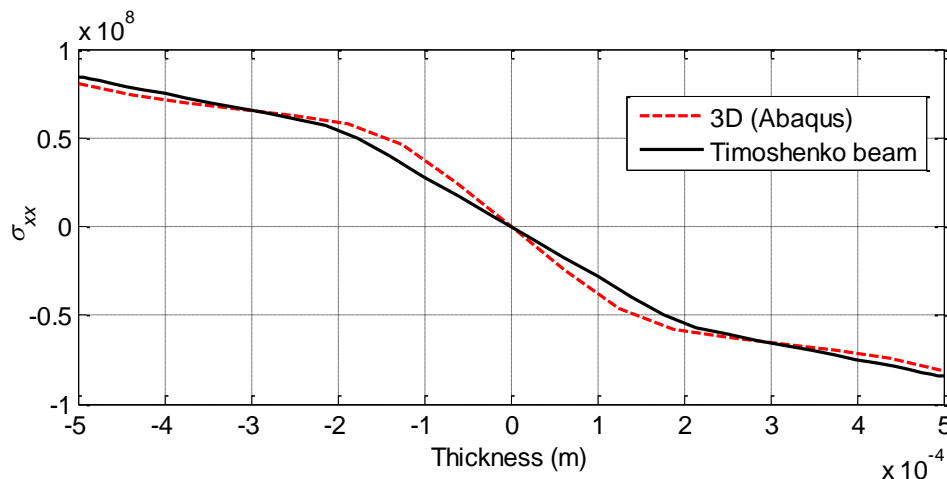
برای اعتبار سنجی نتایج، معادلات آلیاژهای حافظه شکل طبق مدل سوزا در نرم افزار آباکوس بصورت زیرروال UMAT به زبان فرترن و با توجه به الگوریتم ذکر شده در بخشهای قبل وارد گردیده و نهایتاً نتایج آن با نتایج حاصل از تیر تیموشنکو مقایسه شده است. بدین منظور برای اطمینان از صحت برنامه نوشته شده، نتایج تست کشش تک محوره برای ماده ای با خواص $\epsilon_L = 0.03$, $R = 45MPa$, $E = 70GPa$ و چگالی $\rho = 4430 Kg/m^3$ و $T_m = 253.15K$, $\beta = 7.5MPa.K^{-1}$, $h^{tr} = 500MPa$ مقالات مقایسه شده است [۳۲]. پس از مش زنی با المانهای چهار وجهی هشت گره ای C3D8، در شکل (۲) نمودار تنش محوری بر حسب کرنش محوری در حالت بارگذاری تا حد اشباع و سپس باربرداری در دو دمای ۲۸۵/۱۵ و ۲۵۳/۱۵ ترسیم شده است.

در دمای ۲۸۵/۱۵، خاصیت سوپرلاستیسیتیته ماده بخوبی مشهود است بطوریکه پس از بارگذاری و باربرداری، تنش و کرنش به مقادیر اولیه خود باز خواهند گشت ولی در دمای ۲۵۳/۱۵ پس از بار برداری کرنش صفر

نشده و برای حذف آن یا بارگذاری معکوس انجام شده و یا ماده حرارت دهی (با توجه به خاصیت حافظ شکلی) می شود. از این شکل می توان نتیجه گرفت که در دماهای پایینتر، انتقال فاز ماده از حالت آستنیت به مارتنزیت و همچنین حالت اشباع زودتر رخ خواهد داد. همچنین همانطور که از شکل قابل مشاهده است رفتار ماده در حالت اشباع کاملاً بصورت الاستیک می باشد. با توجه به روابط ارائه شده، در صورت بارگذاری فشاری، توزیع تنش بصورت مشابه با حالت کششی خواهد بود. پس از تایید صحت زیرروال UMAT نوشته شده در نرم افزار آباکوس، تحلیل تغییر شکل عرضی تیر یکسر گیردار از جنس مواد حافظ شکل با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو صورت گرفته است. بدین منظور، از روابط ارائه شده در بخشهای (۲) و (۳) و همچنین به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، نتایج مدلسازی انجام شده با نتایج شبیه سازی نرم افزار مورد مقایسه قرار گرفته است. توزیع تنش محوری σ_{xx} در راستای ضخامت در ابتدای تیر وقتی که بار گسترده استاتیکی $f = 1000 \text{ N/m}$ به آن وارد می شود در شکل (۳) ترسیم شده است. ابعاد تیر در این حالت برابر است با: $L = 0.01 \text{ m}$, $b = 0.03 \text{ m}$, $h = 0.001 \text{ m}$. نتایج حاکی از دقت قابل قبول مدل تیر تیموشنکو بوده که در این مقاله برای بررسی ارتعاشات تیر حافظ شکل از آن استفاده شده است.



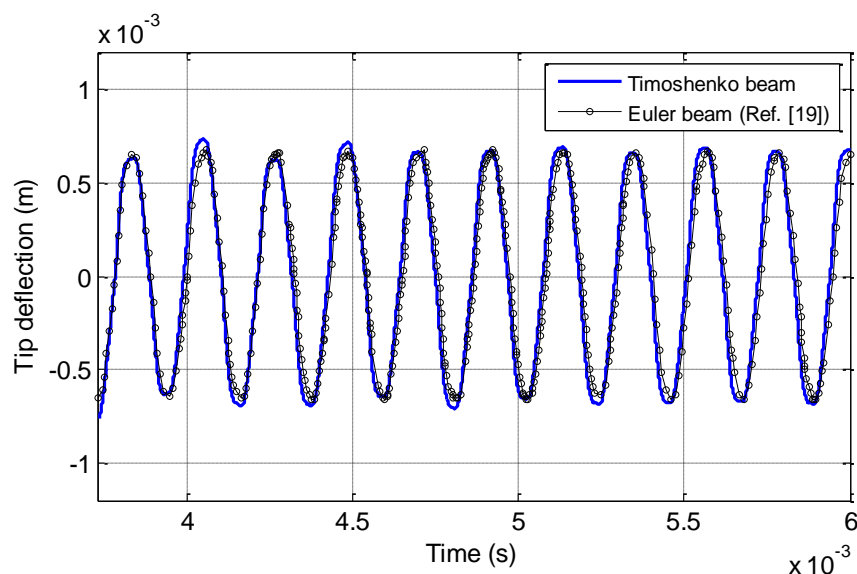
شکل ۲- نمودار تنش بر حسب کرنش تک محوره حین بارگذاری و بار برداری در دماهای مختلف



شکل ۳- نمودار تنش محوری در راستای ضخامت ابتدای تیر (مدلسازی آباکوس و مدل تیر تیموشنکو)

در مدلسازی انجام گرفته، پس از بررسی همگرایی نتایج، در راستای طول و ضخامت تیر به ترتیب ۷۰ و ۴۰ گره در نظر گرفته شده است. در این راستا، توزیع کرنش انتقال فاز در ابتدای تیر با توجه بارگذاری استاتیکی ذکر شده مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، تعداد ۳۰ گره در راستای طولی لحاظ شده و تعداد گره ها در راستای ضخامت برای بررسی همگرایی تغییر داده شده است. نتایج نشانگر حصول همگرایی با تعداد ۴۰ گره در راستای ضخامت می باشد. پس از آن، خیز انتهای آزاد تیر با تغییر تعداد گره ها در راستای طولی بررسی شده است. با لحاظ نمودن ۷۰ گره، همگرایی با دقت بسیار بالایی ایجاد خواهد شد. شایان ذکر است که در بسیاری از مسائل مربوط به تحلیل سازه ای، می توان پاسخ دقیقی را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و با بکارگیری تعداد محدودی گره در محاسبات بدست آورد. در این مقاله، بخاطر ماهیت غیر خطی مساله که در اثر وجود کرنشهای انتقال فاز در برخی از نقاط ایجاد می شود، از تعداد بیشتری گره بمنظور افزایش دقت در محاسبات استفاده شده است. همچنین در راستای صحت سنجی مدلسازی انجام شده، نتایج این مقاله با نتایج شبیه سازی تیر اویلر-برنولی حافظ شکل، که توسط Razavilar و همکاران [۱۹] ارائه شده، مقایسه شده است. آنها با در نظر گرفتن تعداد محدودی از شکل مودهای تیر الاستیک و با استفاده از روش جمع زنی مودها، پاسخ ارتعاشی تیر یکسر گیردار تحت تحریک نیروی متمرکز هارمونیک را بررسی نمودند. فرکانس نیروی هارمونیک که در انتهای آزاد تیر اعمال شده برابر با فرکانس اول تیر اویلر برنولی و دامنه آن بصورت بی بعد برابر با $\bar{F} = F_0 L^2 / EI = 0.1789$ در نظر گرفته شده است. بمنظور محاسبه کرنش انتقال فاز، آنها به گسسته سازی تیر در راستای طولی و ضخامت پرداخته و با استفاده از روش تکرار نیوتن-رافسون این کرنشها را بدست آوردند. با توجه به مشخصات استفاده شده برای ماده حافظ شکل در این مرجع، پاسخ ارتعاشات اجباری (در بازه زمانی که این پاسخ بصورت پایا در آمده است) توسط مدل تیر تیموشنکو و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بدست آمده و با نتایج مرجع (۱۹) مقایسه شده است.

با توجه به اینکه ضخامت تیر مدلسازی شده نسبت به طول آن کوچک در نظر گرفته شده، نتایج دو مدل تا حد زیادی شبیه به یکدیگرند. پس از صحت سنجی مدل، ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیموشنکوی حافظ شکل در دماهای مختلف در بخشهای بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

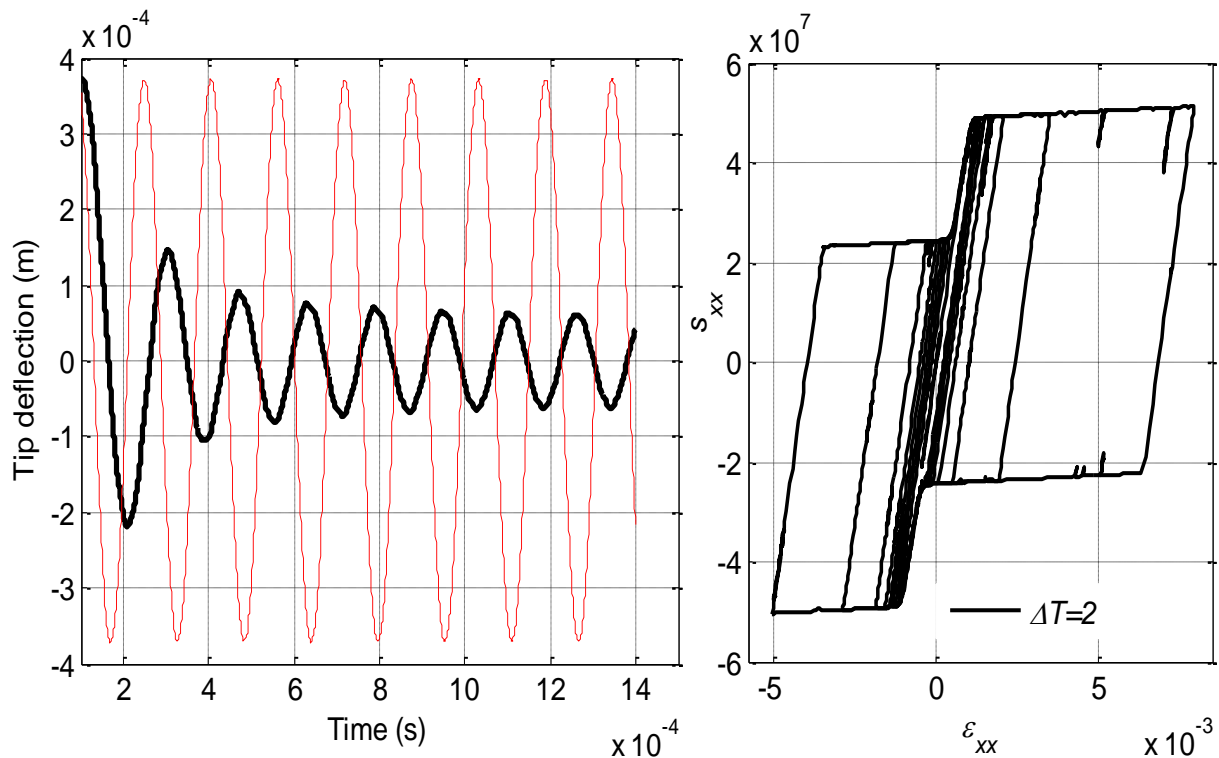


شکل ۴- مقایسه پاسخ ارتعاشی اجباری پایا برای تیر تیموشنکو با مدل تیر اویلر [۱۹]

۴-۱- ارتعاشات آزاد تیر

در تحلیل ارتعاشات آزاد، تیر یکسر گیردار با مشخصات ذکر شده در بخش قبل ($b = 0.03m, L = 0.01m$) پس از قرار گیری تحت جابجایی اولیه، رها می شود تا اثر حافظ شکلی بر رفتار ارتعاشی آن بررسی گردد. قابل ذکر است که در مدلسازی انجام شده، برای ضریب پواسان مقدار کوچکی لحاظ شده است. با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته در راستای طولی تیر ۷۰ گره و در راستای ضخامت تیر ۴۰ گره در نظر گرفته شده است. پس از گسسته سازی، حل معادلات غیر خطی وابسته به زمان با استفاده از الگوریتم نگاشت بازگشتی و روش نیومارک بدست آمده است. پاسخ ارتعاشی انتهای آزاد تیر حافظ شکل با فرض $\Delta T = T - T_m = 2$ در شکل (۵) رسم شده و نتایج آن با تیر الاستیک با خواص مکانیکی مشابه در فاز آستنیست مقایسه شده است.

با توجه به نمودار تنش انحرافی می توان دریافت که تغییر شکل ماده تنها در فاز آستنیست و مارتنزیت بوده و تغییر شکل به حد اشباع نرسیده است. پاسخ ارتعاشی نشان می دهد که اثر میرایی هیستریزس ایجاد شده در آلیاژ حافظ شکل، که در اثر ورود به منطقه انتقال فاز ایجاد می شود، باعث استهلاک انرژی جنبشی می شود تا جاییکه تمام نقاط تیر در منطقه الاستیک ارتعاش کند. در نمودار تنش محوری و یا تنش انحرافی محوری بر حسب کرنش که برای سطح پایینی نقطه ابتدایی تیر رسم شده است دلیل ایجاد این نوع میرایی مشخص می گردد. بخاطر ایجاد حلقه های هیستریزس بخشی از کار انجام شده توسط تنش های بوجود آمده در یک سیکل ارتعاشی بصورت حرارت از بین خواهد رفت. در هر نقطه از ماده کار انجام شده بر واحد حجم برابر با $\oint \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \oint s_{ij} d\epsilon_{ij}$ می باشد. با ادامه ارتعاشات این حلقه ها تنگ تر شده تا جاییکه نهایتاً تیر در محدوده الاستیک به ارتعاشات خود با دامنه ثابت و با فرکانسی برابر با فرکانس تیر الاستیک ادامه خواهد

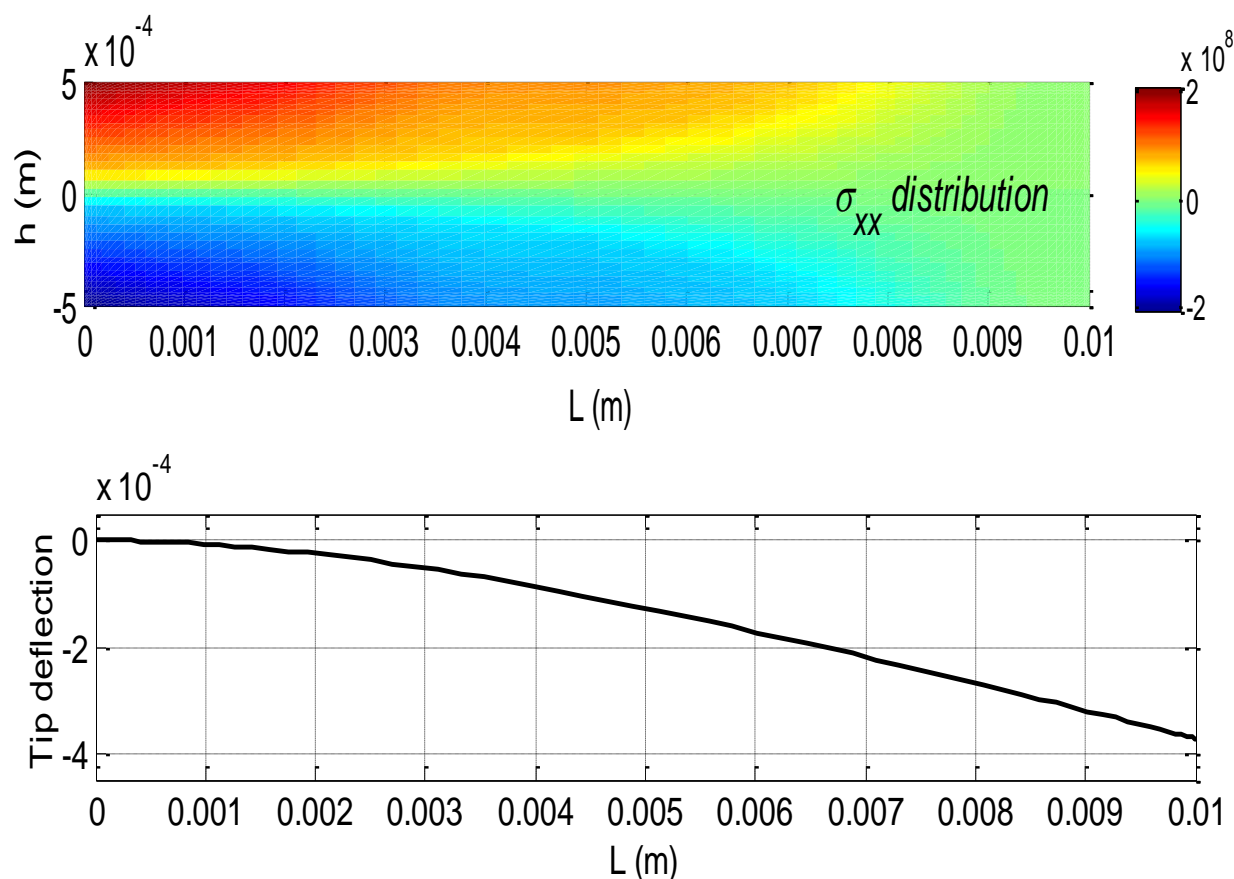


شکل ۵- پاسخ ارتعاشی تیر تیموشنکو و نمودار تنش محوری انحرافی بر حسب کرنش محوری ($\Delta T = 2$)

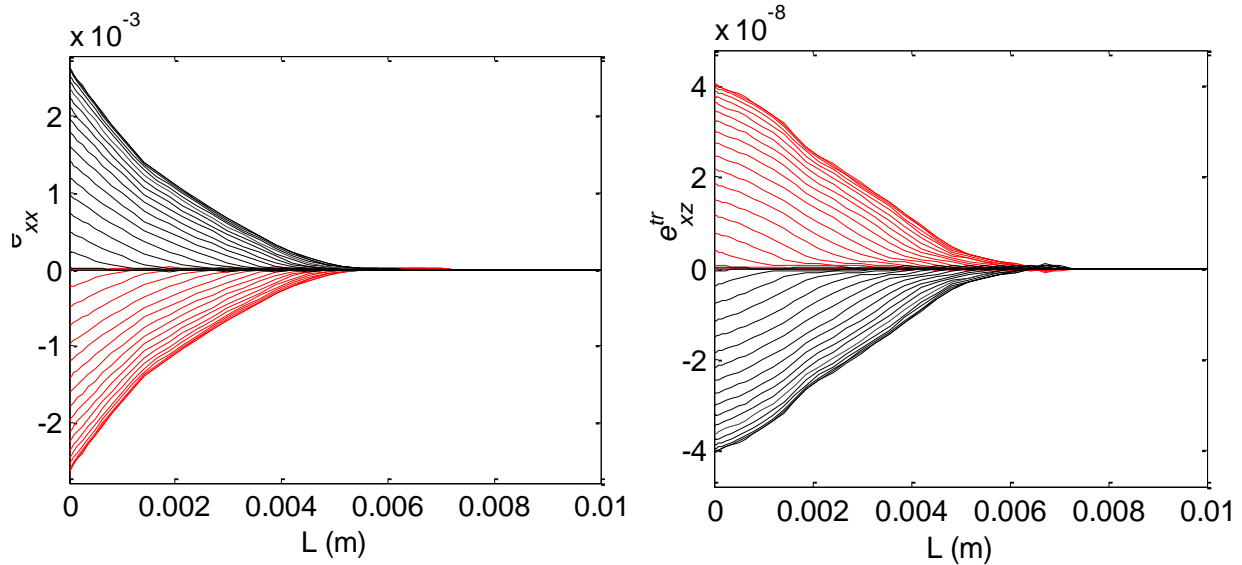
داد. این نمودارها نشان می دهند که از آلیاژهای حافظ شکل بخوبی می توان به عنوان میراگر برای محدود کردن دامنه ارتعاشی در سیستمهای مکانیکی استفاده نمود. در شکل (۶)، نمودار توزیع تنش محوری و خیز تیر در لحظه $t = 2 \times 10^{-4} s$ ترسیم شده است. همانطور که مشخص است، بیشترین مقادیر تنش و تغییرات آن در ابتدای تیر به دلیل بزرگتر بودن کرنش ها بوجود می آید.

نمودار مربوط به به تغییرات کرنش انتقال فاز e_{xx}^{tr} و e_{xz}^{tr} در راستای طولی تیر برای نقاط با فواصل مختلف از تار خنثی در شکل (۷) ترسیم شده است. بدلیل بزرگتر بودن کرنشها در ابتدای تیر و همچنین در سطوح بالاتر نسبت به تار خنثی، انتقال فاز بیشتری صورت گرفته و مقادیر کرنشهای مربوطه بیشتر می باشد. قابل ذکر است که با افزایش طول تیر نسبت به ضخامت آن اثرات مربوط به تنش برشی کاهش یافته و نتایج مدل تیر تیموشنکو بسمت نتایج تیر اویلر-برنولی میل می کند.

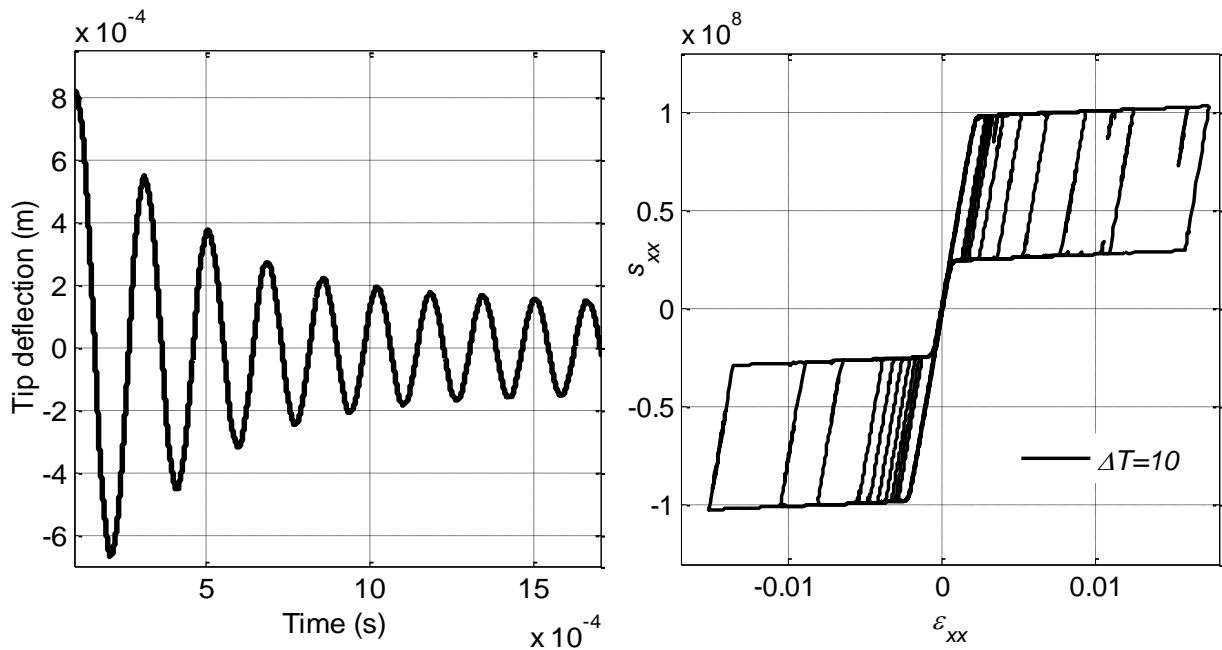
بطور معمول برای نسبتهای کمتر از ۰/۱ از مدل تیموشنکو استفاده می شود. نمودار پاسخ ارتعاشی برای اختلاف دمایی $\Delta T = 10$ در شکل (۸) ترسیم شده است. با توجه به شکل حلقه های هیستریزس، می توان دریافت که به دلیل خاصیت سوپرالاستیسیته ماده حافظ شکل، در انتهای سیکل ارتعاشی مولفه های تنش و کرنش بدون تغییر باقی می ماند با اینحال بخاطر اتلاف انرژی مکانیکی دامنه ارتعاشات کاهش یافته تا اینکه نهایتاً رفتار مکانیکی تیر در محدوده الاستیک (فاز آستنیت) قرار می گیرد. با توجه به شکل، کاهش دامنه تا کمتر از ۲۵٪ مقدار اولیه ادامه می یابد. قابل مشاهده است که با افزایش دما نسبت به حالت قبل، شروع فرآیند انتقال فاز به تاخیر خواهد افتاد.



شکل ۶- نمودار توزیع تنش محوری در کل تیر و خیز آن



شکل ۷- نمودار توزیع کرنشهای انتقال فاز



شکل ۸- پاسخ ارتعاشی تیر تیموشنکو و نمودار تنش محوری انحرافی بر حسب کرنش محوری ($\Delta T = 10$)

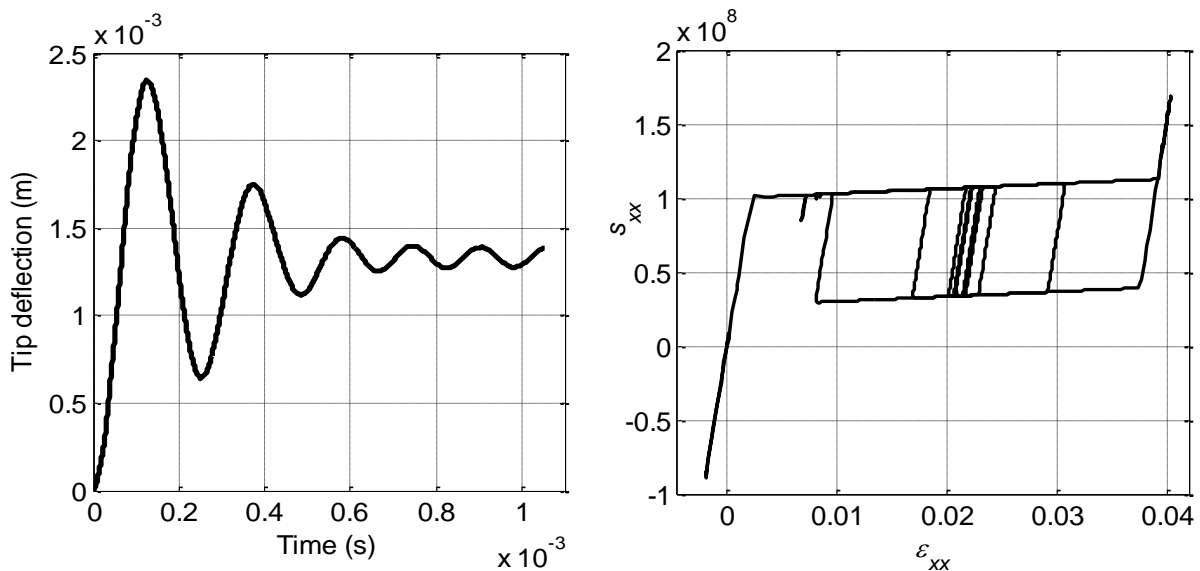
۲-۴- ارتعاشات اجباری تیر

در این بخش اثر انتقال فاز بر ارتعاشات اجباری تیریکسرگیردار تحت نیروی متمرکز ثابت (که بصورت ناگهانی وارد می شود) و نیروی هارمونیک وارد به انتهای تیر مورد بررسی قرار گرفته است. با در نظر گرفتن اختلاف دمایی $\Delta T = 10$ و اعمال نیروی ثابت $F = 30.5N$ به انتهای تیر، نمودار خیز بر حسب زمان همچنین نمودار تنش انحرافی محوری بر حسب کرنش در شکل (۹) ترسیم شده است.

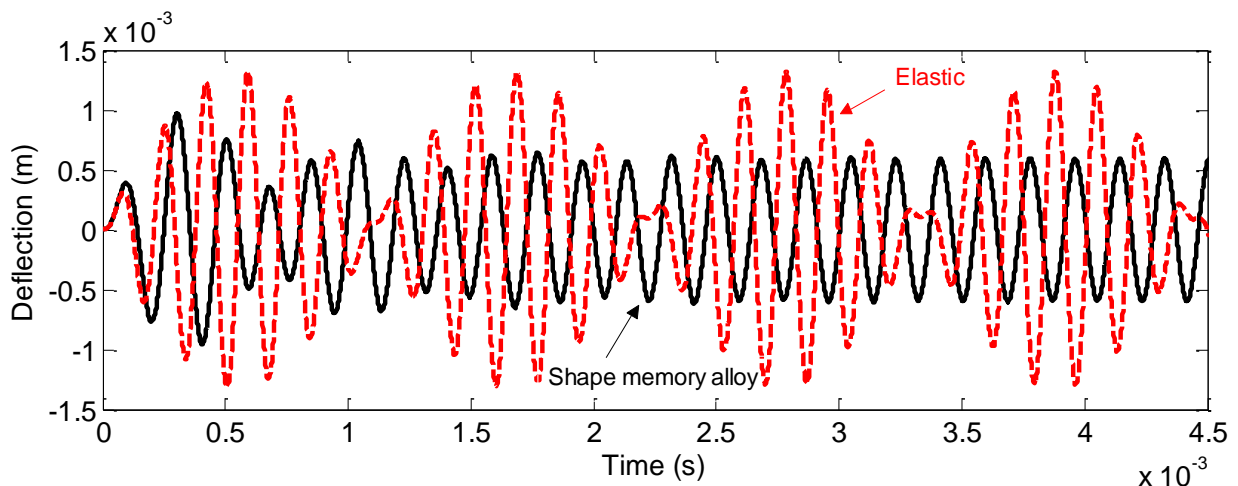
مقدار نیرو بمنظور بررسی رفتار تیر در ناحیه اشباع، بزرگ انتخاب شده است. پس از اعمال نیرو و حرکت دینامیکی تیر، دامنه نوسانی بدلیل تشکیل حلقه های هیستریزیس کاهش یافته و نهایتاً حول نقطه تعادل

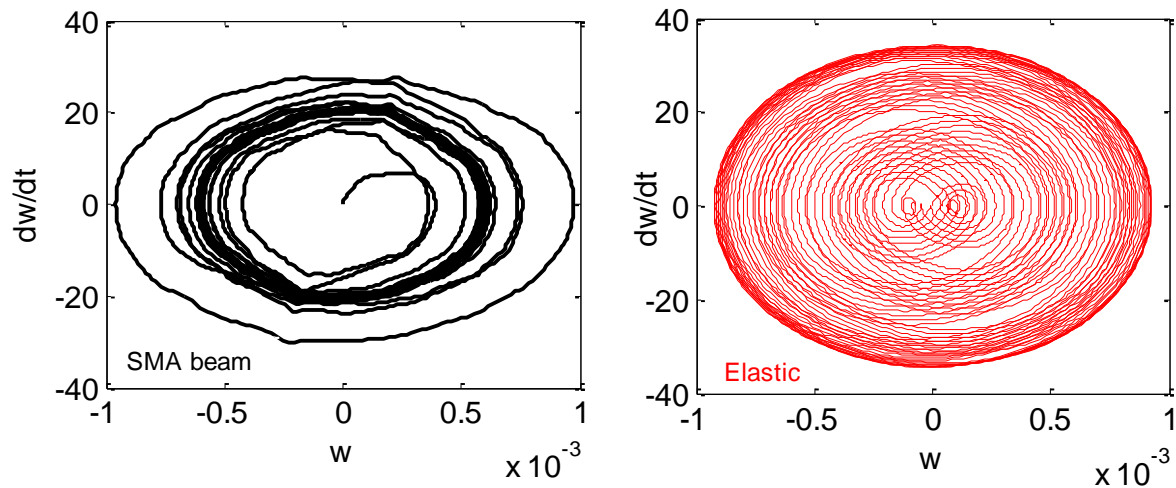
استاتیکی بصورت پایدار با فرکانسی نزدیک به فرکانس اصلی ادامه می یابد. قابل ذکر است که در ناحیه اشباع که مقدار (نرم) تانسور انتقال فاز به حداکثر خود می رسد تغییر شکل تیر بصورت الاستیک بوده و حلقه های هیستریزس تشکیل نخواهد شد. رفتار ارتعاشی تیر تحت نیروی هارمونیک سینوسی با دامنه نوسان 10 و فرکانس $3.44 \times 10^4 \text{ rad/s}$ در شکل (۱۰) بررسی شده است. شایان ذکر است که دامنه و فرکانس تحریک در شکل ارتعاشات تیر بسیار موثر خواهد بود بطوریکه که ممکن است باعث پاسخ دینامیکی در محدوده الاستیک (فاز آستنیت) شده و یا با تشکیل حلقه های هیستریزس انرژی وارد شده بر تیر که توسط نیروی خارجی ایجاد می شود اتلاف گردد.

با توجه به شکل، پس از گذشت بازه زمانی کوتاه، دامنه نوسانی ثابت شده در حالیکه در ماده الاستیک دامنه نوسانی متغیر می باشد. در نمودار مربوط به نقشه پوانکاره نیز مشخص است که برای ماده حافظ شکل سیکل حد تشکیل می شود در حالیکه ماده الاستیک رفتاری آشوبناک دارد. بنابراین می توان دریافت که مواد حافظ شکل علاوه بر خاصیت میرایی، توانایی تنظیم دامنه ارتعاشات و هارمونیک کردن نوسانات ایجاد شده در سیستمهای مکانیکی را دارند. از این ویژگی می توان در برداشت انرژی مکانیکی و تبدیل آن به انرژی الکتریکی استفاده نمود.



شکل ۹- نمودار پاسخ ارتعاشی تیر و نمودار تنش بر حسب کرنش تحت نیروی اجباری ثابت





شکل ۱۰- نمودار پاسخ ارتعاشی تیر و نقشه پوانکاره در حالت ارتعاشات اجباری نوسانی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد و اجباری محرکهای ساخته شده از آلیاژهای حافظ شکل بصورت تیر یکسر گیردار تحلیل شده است. بدین منظور، معادلات ساختاری این نوع مواد با استفاده از مدل سوزا، که در آن اثر سوپر الاستیسیته و حافظ شکلی بوسیله تانسورهای مربوط به انتقال فاز آستنیت به مارتنزیت و فاز اشباع در تابع انرژی آزاد هلمهولتز لحاظ می شود، مدلسازی شده اند. معادلات دینامیکی تیر با استفاده از مدل تیر تیموشنکو پس از محاسبه انرژی کرنشی، جنبشی، و کار بارهای خارجی، از اصل همپلتون توسعه یافته استنتاج شده و توسط روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته گسسته سازی شده اند. معادلات حاصله به دلیل غیر خطی بودن با استفاده از الگوریتم تکرار، روش نیوتن رافسون و روش نیومارک حل شده اند. پس از بررسی اثر اختلاف دما بر حلقه های هیستریزیس که در اثر حرکت نوسانی تیر ایجاد می شود می توان دریافت که در بسیاری از حالات ارتعاشات محدود به ناحیه الاستیک باقی مانده و بطور مثال در ارتعاشات آزاد با فرکانس نزدیک به فرکانس اصلی تیر به حرکت خود ادامه می دهد. کانتور مربوط به توزیع کرنش انتقال فاز نشان می دهد که در نواحی نزدیک به انتهای بسته تیر و در سطوح تیر، کرنشهای بزرگتری ایجاد خواهد شد. همچنین با توجه به شکل پاسخ دینامیکی تیر، که نشانگر ایجاد نوساناتی با دامنه ثابت و فرکانس ثابت است، می توان دریافت که مواد حافظ شکل پتانسیل بالایی برای پدیدار سازی ارتعاشات دارند. علاوه بر این، از این مواد می توان به عنوان میراگر و یا بستری برای برداشت انرژی ارتعاشی توسط لایه های پیزوالکتریک استفاده نمود.

مراجع

- [1] Furuya, Y., and Shimada, H., "Shape Memory Actuators for Robotic Applications", *Materials and Design*, Vol. 12, pp. 21-28, (1991).
- [2] Nohouji, H.S., Hamed, M., and Salehi, M., "Modeling, Validation, and Testing of a Ti-49.8% Ni Shape Memory Actuator", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, pp. 2196-2204, (2015).

- [3] Savi, M.A., De Paula, A.S., and Lagoudas, D.C., "Numerical Investigation of an Adaptive Vibration Absorber using Shape Memory Alloys", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 22, pp. 67-80, (2011).
- [4] Kahn, H., Huff, M. A., and Heuer, A. H., "The TiNi Shape-memory Alloy and its Applications for MEMS", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 8, pp. 213-221, (1998).
- [5] Es-Souni, M., Es-Souni, M., and Fischer-Brandies, H., "Assessing the Biocompatibility of NiTi Shape Memory Alloys used for Medical Applications", *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, Vol. 381, pp. 557-567, (2005).
- [6] Yang, K., and Gu, C. L., "Design, Drive and Control of a Novel SMA-actuated Humanoid Flexible Gripper", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, pp. 895-904, (2008).
- [7] Yang, S., and Xu, Q., "A Review on Actuation and Sensing Techniques for MEMS-based Microgrippers", *Journal of Micro-Bio Robotics*, Vol. 13, pp. 1-14, (2017).
- [8] Mineta, T., Deguchi, T., Makino, E., Kawashima, T., and Shibata, T., "Fabrication of Cylindrical Micro Actuator by Etching of TiNiCu Shape Memory Alloy Tube", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 165, pp. 392-398, (2011).
- [9] Sun, H., Luo, J., Ren, Z., Lu, M., Nykypanchuk, D., Mangla, S., and Shi, Y., "Shape Memory Alloy Bimorph Microactuators by Lift-off Process", *ASME Journal of Micro and Nano-Manufacturing*, Vol. 8, pp. 031003-1, (2020).
- [10] Knick, C. R., Sharar, D. J., Wilson, A. A., Smith, G. L., Morris, C. J., and Bruck, H. A., "High Frequency, Low Power, Electrically Actuated Shape Memory Alloy (SMA) MEMS Bimorph Thermal Actuators", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 29, pp. 075005, (2019).
- [11] De Souza, C. V., and De Marqui, C., "Airfoil-based Piezoelectric Energy Harvesting by Exploiting the Pseudoelastic Hysteresis of Shape Memory Alloy Springs", *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, pp. 125014, (2015).
- [12] Kohl, M., Just, E., Pflöging, W., and Miyazaki, S., "SMA Microgripper with Integrated Antagonism", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 83, pp. 208-213, (2000).
- [13] Tan, J.P., Huang, W.M., Gao, X.Y., Yeo, J.H., and Miao, J.M., "NiTi Shape Memory Alloy Thin Film based Microgripper", *Proceedings of SPIE*, April 6, Melbourne, Australia, pp. 106-113, (2001).
- [14] Roch, I., Bidaud, P., Collard, D., and Buchaillot, L., "Fabrication and Characterization of an SU-8 Gripper Actuated by a Shape Memory Alloy Thin Film", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 13, pp. 330-336, (2003).

- [15] Kim, D.H., Lee, M.G., Kim, B., and Sun, Y., "A Superelastic Alloy Microgripper with Embedded Electromagnetic Actuators and Piezoelectric Force Sensors: a Numerical and Experimental Study", *Smart Materials and Structures*, Vol. 14, pp. 1256, (2005).
- [16] Mohamed Ali, M.S., and Takahata, K., "Frequency-controlled Wireless Shape-memory-alloy Microactuators Integrated using an Electroplating Bonding Process", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 163, pp. 363-372, (2010).
- [17] Avirovik, D., Kumar, A., Bodnar, R. J., and Priya, S., "Remote Light Energy Harvesting and Actuation using Shape Memory Alloy-Piezoelectric Hybrid Transducer", *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, pp. 052001, (2013).
- [18] Adeodato, A., Duarte, B.T., Monteiro, L L. S., Pacheco, P M C.L., and Savi, M.A., "Synergistic use of Piezoelectric and Shape Memory Alloy Elements for Vibration Based Energy Harvesting", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 194, pp. 106206, (2020).
- [19] Razavilar, R., Fathi, A., Dardel, M., and Arghavani, J., "Dynamic Analysis of a Shape Memory Alloy Beam with Pseudoelastic Behavior", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, pp. 1-15, (2018).
- [20] Mirzaeifar, R., DesRoches, R., Yavari, A., and Gall, K., "On Superelastic Bending of Shape Memory Alloy Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, pp. 1664–1680, (2013).
- [21] Damanpack, A., Bodaghi, M., Aghdam, M., and Shakeri, M., "Shape Control of Shape Memory Alloy Composite Beams in the Post-buckling Regime", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 39, pp. 575–587, (2014).
- [22] Heidari, F., Taheri, K., Sheybani, M., and Janghorban, M., "On the Mechanics of Nanocomposites Reinforced by Wavy/Defected/Aggregated Nanotubes", *Steel and Composite Structures*, Vol. 38, pp. 533–545, (2021).
- [23] Heidari, F., Afsari, A., and Janghorban, M., "Several Models for Bending and Buckling Behaviors of FG-CNTRCs with Piezoelectric Layers Including Size Effects", *Advances in Nano Research*, Vol. 9, pp. 193–210, (2020).
- [24] Souza, A.C., Mamiya, E.N., and Zouain, N., "Three-dimensional Model for Solids Undergoing Stress-induced Phase Transformations", *European Journal of Mechanics: A/Solids*, Vol. 17, pp. 789–806, (1998).
- [25] Lambrecht, F., Lay, C., Aseguinolaza, I.R., Chernenko, V., and Kohl, M., "NiMnGa/Si Shape Memory Bimorph Nanoactuation", *Shape Memory and Superelasticity*, Vol. 2, pp. 347–359, (2016).
- [26] Ashrafi, M.J., Arghavani, J., Naghdabadi, R., Sohrabpour, S., and Auricchio, F., "Theoretical and Numerical Modeling of Dense and Porous Shape Memory Alloys Accounting for Coupling Effects of Plasticity and Transformation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 88-89, pp. 248-262, (2016).

- [27] Reddy, J.N., "Microstructure-dependent Couple Stress Theories of Functionally Graded Beams", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 59, pp. 2382–2399, (2011).
- [28] Tajalli, S.A., "A Micro Plasticity Model for Pure Bending Analysis of Curved Beam-like MEMS Devices", *Mechanics of Materials*, Vol. 151, pp. 103606, (2020).
- [29] Tomasiello, S., "Differential Quadrature Method: Application to Initial-boundary-value Problems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 218, pp. 385-414, (1998).
- [30] Janghorban, M., "Two Different Types of Differential Quadrature Methods for Static Analysis of Microbeams Based on Nonlocal Thermal Elasticity Theory in Thermal Environment", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp. 669-675, (2012).
- [31] Bahrami, K., Afsari, A., Janghorban, M., and Karami, B., "Static Analysis of Monoclinic Plates via a Three-dimensional Model using Differential Quadrature Method", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 72, pp. 131–139, (2019).
- [32] Auricchio, F., and Petrini, L., "Improvements and Algorithmical Considerations on a Recent Three-dimensional Model Describing Stress-induced Solid Phase Transformations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, pp. 1255–1284, (2002).

فهرست نمادهای انگلیسی

K	مدول حجمی
G	مدول برشی
E	مدول یانگ
$T, T_m, T_0, \bar{u}_0, c$	پارامترهای دمایی رابطه انرژی آزاد هلمهولتز
p	تنش حجمی
e	تانسور کرنش انحرافی
e^{tr}	تانسور کرنش انتقال فاز
s	تانسور تنش انحرافی
I	تانسور همانی
X	تانسور تنش ترمودینامیکی مربوط به انتقال فاز
F^{tr}	تابع حد مربوط به مرز انتقال فاز
R	شعاع تابع حد الاستیک
F^s	تابع حد مربوط به مرز اشباع
K_e, W	کار بارهای خارجی، انرژی جنبشی
f, F, M	گشتاور متمرکز، نیروی متمرکز، نیروی گسترده

پارامترهای مربوط به میدان جابجایی تیر	w, u_0, u_1, u_2, u_3
طول، عرض، ضخامت تیر	h, b, L
زمان، مختصات طولی و عرضی	z, x, t
ضرایب وزنی مشتق مرتبه m	$C_{ij}^{(m)}$
ضرایب وزنی انتگرال گوس	q_i

نمادهای یونانی

تابع انرژی آزاد هلمهولتز	ψ
ضریب پواسان	ν
پارامترهای رابطه انرژی آزاد هلمهولتز	α, β, η_0
پارامتر سخت شوندگی انتقال فاز	h^{tr}
تانسور تنش	σ
تانسور کرنش	ε
کرنش حد اشباع	ε_L
تابع انرژی اشباع، پارامتر اشباع	$\gamma, \Gamma_{\varepsilon L}$
ضریب لاگرانژ	ζ
پارامتر تنظیم	ε
زاویه چرخش تیر	φ
ضریب تصحیح برش	κ
چگالی	ρ
عملگر حساب تغییرات	δ

Abstract

This article aims at studying the free and forced vibrations of shape memory alloy beam actuators. The constitutive equations are derived based on a three dimensional phenomenological model which accounts for pseudoelastically and shape memory effect by considering phase transformation strains in the formulation. In the present study, the pseudoelastic deformations are studied. Assuming Timoshenko beam model for the structures with moderate thickness, equations of motion are derived through Hamilton principle, and the obtained partial differential equations are discretized by applying the Generalized Differential Quadrature approach and then are solved incrementally using Newmark integration method. The return mapping algorithm, considering Newton-Raphson iteration procedure, is employed to update phase transformation strains and any related parameters during solution in each time steps. Results show that energy dissipation occurs due to hysteric behavior of SMA beams during vibrations for both free and forced cases. In most cases, the reduction in amplitudes continues till the material behaves like the elastic solids within austenite phase where no dissipation is appeared. Also, it can be observed from the results that the amplitude of damped vibrations is constant for SMA structure. Therefore, it exhibits more stable behavior in comparison with elastic beam with similar harmonic actuations. Consequently, it is concluded that the SMA materials can be applicable to adjust response frequency in addition to their various applications such as in dampers.