

مقایسه کارآمدی تابع هزینه خطی در مقابل تابع هزینه دو مجذوری در حل تحلیلی افزونگی عملگر در ربات کابلی

علی حیدر فعله گری^۱
کارشناسی ارشد

سید جواد احمدی^۲
استادیار

در اغلب مسائل ربات های موازی کابلی افزونه نرم انرژی بردار ورودی کنترل بهینه سازی شده است لیکن با وجود جنبه های مثبت آن مانند همواری و مشتق پذیری، در مساله ربات کابلی افزونه حاضر که ساختار کابل فقط در محدوده مثبت، مفهوم فیزیکی دارد، استفاده از تابع هزینه خطی از جنبه مدلسازی ریاضیاتی کافی می باشد. با این جایگزینی، بدون ایجاد خدشه در برقراری تحذب، مساله بهینه سازی روی ربات مذکور با حد پایین کشش و حد بالای گسیختگی و قید مساوی نیروی کشش کابل ها و پلتفرم متحرک حل شده است. نتایج شبیه سازی بیانگر این است که درحالی که جایگزینی مذکور در تابع هزینه تاثیر محسوسی در زمان حل مساله بهینه سازی با روش های عددی ندارد، کاهش در میانگین زمان صرف شده جهت دستیابی به پاسخ بهینه، حدود ۳ برابر نسبت به روش تحلیلی با تابع هزینه دو مجذوری و به میزان حداقل ۸۰ برابر نسبت به روش های عددی حاصل می شود.

واژه های راهنما: ربات موازی، ربات کابلی، ربات موازی افزونه، تحلیل افزونگی، حل تحلیلی

۱- مقدمه

ربات های موازی کابلی در کنار هزینه های نصب و راه اندازی کم تر، سادگی در طرح و ... کاهش اینرسی و جرم سیستم را به همراه دارند. اما به دلیل ساختار فیزیکی کابل یعنی عدم تحمل نیروی فشاری برای محاسبه نیروی عملگرهای ربات که همان نیروی کشش کابل ها می باشد. با یک مساله مساله افزونگی مواجه هستیم که لازم است این مساله بهینه سازی بدون نیاز به پردازنده های گران قیمت، در زمان کوتاهی به جواب برسد. جمشیدی فر و همکاران [۱]، برای تنظیم و حذف ارتعاشات نامطلوب ربات، یک مدل ارتعاشی عمومی ارائه

^۱ کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، مربی سازمان آموزش فنی و حرفه ای کشور، تهران، ایران felegari.2013@gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ sjahmadedu@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۰

نموده‌اند و با استفاده از آن چند پیکربندی مختلف عملگر را تحلیل نموده‌اند. خواجه‌پور و همکاران [۲]، برای حل مساله موده‌های غیر قابل کنترل در ربات‌های موازی کابلی صفحه‌ای، با افزودن دو عملگر اینرسی - چرخشی نامتعادل به مجری نهایی راه‌حلی پیدا کرده‌اند. به گونه‌ای که ارتعاشات مجری نهایی را به طور موثر تنظیم نموده‌اند. تقی راد و همکاران [۳]، برای تطبیق عدم قطعیت‌های ساختاری سیستم یک ربات کابلی موازی یک توپولوژی کنترل مناسب بر اساس ساختار آبخاری، پیشنهاد داده‌اند که در آن حلقه داخلی ساختار نیروهای کابل را کنترل می‌کند و حلقه خارجی موقعیت دقیق مجری نهایی را ردیابی می‌کند. همچنین یک کنترل کننده مود لغزشی مقاوم^۲ با یک تحلیل پایداری بر اساس روش مستقیم لیپانوف برای طراحی کنترل کننده حلقه‌ی خارجی، ارائه نموده‌اند. عباس‌نژاد و همکاران [۴]، برای متعادل کردن نیروها و گشتاورهای خارجی بر روی اندام هدف در ربات موازی صفحه‌ای افزونه قابل پیکربندی مجدد با مسیر حرکت بهینه، از کابل‌ها برای تمام حالت‌های عضو، در چرخه‌ی راه رفتن استفاده نموده‌اند.

جمشیدی فر و همکاران [۵]، کنترل کننده‌هایی بر پایه‌ی روش‌های خطی قرارگیری قطب و همچنین روش درجه دوم خطی LQR، به منظور کمینه‌سازی ارتعاشات نامطلوب ناشی از صلبیت پایین مکانیزم ربات‌های موازی کابلی افزونه، بهبود عملکرد و عدم قطعیت اینرسی آن‌ها، طراحی نموده‌اند. لاموری و گوتفارد [۶]، یک الگوریتم توزیع تنش با قابلیت زمان واقعی برای ربات‌های موازی کابلی با دو درجه افزونگی بر اساس فصل مشترک بین مجموعه قیده‌های نامساوی بر روی مقادیر کشش کابل و فضای آفین، راه‌حل‌های کششی به پلتفرم متحرک، در تعادل استاتیکی یا دینامیکی، پیشنهاد نموده‌اند.

تقی راد و همکاران [۷]، برای کنترل ربات صفحه‌ای با در نظر گرفتن نامعینی‌های ساختاری و پارامتری، الگوریتم کنترلی تناسبی، مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر مقاوم پیاده‌سازی کرده‌اند. ژائوکان ژانگ و همکاران [۸]، به منظور طراحی یک ربات دارای فضای کاری بزرگ با قابلیت شتاب بالا از ۳ جفت کابل موازی جهت تحریک آن و یک فنر منفعل که پارامترهای آن با در نظر گرفتن شتاب و نیروی کابل معین می‌شود، جهت در کشش نگهداشتن آن استفاده نموده‌اند. یائو و همکاران [۹]، برای برآورده کردن نیاز فضای کاری و شرایط محدودیت‌ها از نظر کشش و سختی کابل، به بهینه‌سازی ابعادی ربات موازی کابلی جهت تلسکوپ رادیویی با دیافراگم ۵۰۰ متر پرداخته‌اند و برای تنظیم معادلات تعادل کشش کابل از ساده‌سازی زنجیری^۳ و برای تحلیل سختی و بدست آوردن مقدار سفتی از یک روش تجربی با استفاده از قضیه باکینگهام استفاده کرده‌اند.

صباغ نوین و همکاران [۱۱]، یک مساله برنامه‌ریزی حرکت برای ربات‌های موازی در حضور موانع استاتیک و دینامیک، مورد بررسی قرار داده‌اند و با استفاده از کوتاه‌ترین مسیر به عنوان تابع هدف، الگوریتمی پیشنهاد داده‌اند که دارای مزایایی مانند عدم افتادن در نقاط بهینه محلی و سرعت بالای محاسباتی می‌باشد. تقی‌راد و همکاران [۱۲]، به طراحی و اجرای کنترل تطبیقی بر روی یک ربات موازی کابلی با عدم قطعیت در پارامترهای دینامیکی و سینماتیکی، می‌پردازند و برای توسعه این ایده، ابتدا تطبیق بر روی پارامترهای دینامیکی و سپس هم بر روی پارامترهای دینامیکی و هم سینماتیکی انجام می‌شود. کنترلر پیشنهادی در تحقیق مذکور علاوه بر در کشش نگهداشتن کابل‌ها، از نظر محاسباتی ساده است و نیازی به اندازه‌گیری شتاب مجری نهایی ندارد.

¹ Unbalanced-rotational-inertia

² Robust sliding mode controller

³ Catenary

بوسچر [۱۳]، روشی تحلیلی بر مبنای مرزهای فضای امکان پذیر پیچش کابل ارائه نمود. بارت و گوسلین [۱۵]، نشان دادند تحلیل افزونگی در ربات‌های موازی کابلی به عنوان یک مساله بهینه‌سازی با قیدهای مساوی و نامساوی می‌تواند مورد بررسی قرارگیرد. مندز [۱۶]، برای کاربردهایی که نیاز به سرعت بالا در مقیاس بزرگ دارند یک ربات موازی کابلی کاملاً مقید طراحی نموده و در آن روشی برای تجزیه و تحلیل تنش کابل، سفتی، فضای کاری و مساله کنترل برای حل افزونگی با شرط تنش مثبت همه کابل‌ها، ارائه می‌نماید.

حسن و خواجه پور [۱۷]، توزیع نیروی عملگرها در یک ربات کابلی را بعنوان یک مساله مسیریابی با ارائه دو راه حل، مینیمم کردن نرم دوم نیروها را در تنها کابل‌ها یا کابل‌ها و عضوهای اضافی مطالعه کردند. ژویو کوی و همکاران [۱۸]، برای تعیین چند ضلعی تنش کابل‌ها در الگوریتم پیشنهادی خود جهت بهینه‌سازی توزیع تنش در یک ربات موازی کابلی با دو درجه افزونگی، از روش اسکن گراهام استفاده نموده‌اند. ژینیو ژنگ و همکاران [۱۹]، برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تنش‌ها به صورت تحلیلی، یک نشانگر اندازه‌گیری جدید با استفاده از الگوریتم نگاشت ابر کره پیشنهاد نموده‌اند که برای صحت‌گذاری آن از برنامه‌ی درجه دوم نرم دوم نیروها، استفاده کرده‌اند.

بهزادی پور و خواجه‌پور [۲۰]، برای بیان ماتریس‌های سفتی ربات موازی افزونه یک مدل، معادل چهار فنر پیشنهاد دادند. لائو و همکاران [۲۱]، با استفاده از ماتریس مسیریابی یک مدل‌سازی عمومی از ربات‌های چند عضوی با مسیریابی اختیاری، توسعه داده‌اند که این مدل روی هر عضو متحرک، توسط کابل اعمال شده‌است. اوه و آگراوال در [۲۲]، الگوریتمی عددی برای تحلیل افزونگی پیشنهاد داده‌اند که در آن ورودی‌ها با استفاده از توزیع فضای پوچی جواب عملی مثبت می‌شوند و به صورت نیروی کششی در نرم مینیمم قابل اعمال به ربات هستند.

تقی‌راد و بدوستانی در [۲۳] به جای روش‌های عددی از روشی تحلیلی - تکرار بر پایه تئوری KKT^۱ استفاده نموده و بهبود قابل توجهی در سرعت دستیابی به جواب مساله بهینه‌سازی که محاسبه نیروی عملگرها می‌باشد، بوجود آوردند. احمدی و فعله‌گری [۲۵]، با در نظر گرفتن حد پایین برای در کشش ماندن کابل‌ها و حد بالای اشباع عملگرها (حد گسیختگی کابل‌ها یا حداکثر گشتاور قابل تولید توسط موتورها)، یک الگوریتم ارائه، طراحی و شبیه‌سازی نموده‌اند. در مراجع [۲۲، ۲۳ و ۲۵] قیود مساوی که رابطه بین نیروی کشش کابل‌ها و نیروهای وارد شده به پلتفرم متحرک را بیان می‌کند، با استفاده از فضای پوچی ماتریس ترانزاده ژاکوبین ربات حذف شده‌است.

در این مقاله، یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب، بر روی ربات موازی کابلی صفحه‌ای با بکارگیری تئوری KKT^۲ و روش تحلیلی - تکرار، جهت دستیابی به کمینه بردار نیرویی عملگرها که زمان و حجم محاسباتی کمتری داشته‌باشد، فرموله‌بندی شده‌است که در آن حدود پایین و بالای متغیرهای بهینه‌سازی به ترتیب، برای اطمینان از در کشش ماندن کابل‌ها و در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها یا حد گسیختگی کابل‌ها (هر کدام کمتر باشد)، اعمال شده‌است. در بیشتر تحقیقات صورت گرفته در زمینه ربات‌های موازی کابلی از نرم انرژی^۳ ورودی کنترل (با تابع هزینه دو مجذوری) که به روش حداقل مربعات نیز شناخته می‌شود به طور گسترده استفاده می‌شود

¹ Hypersphere

² Karush-Kuhn-Tucker

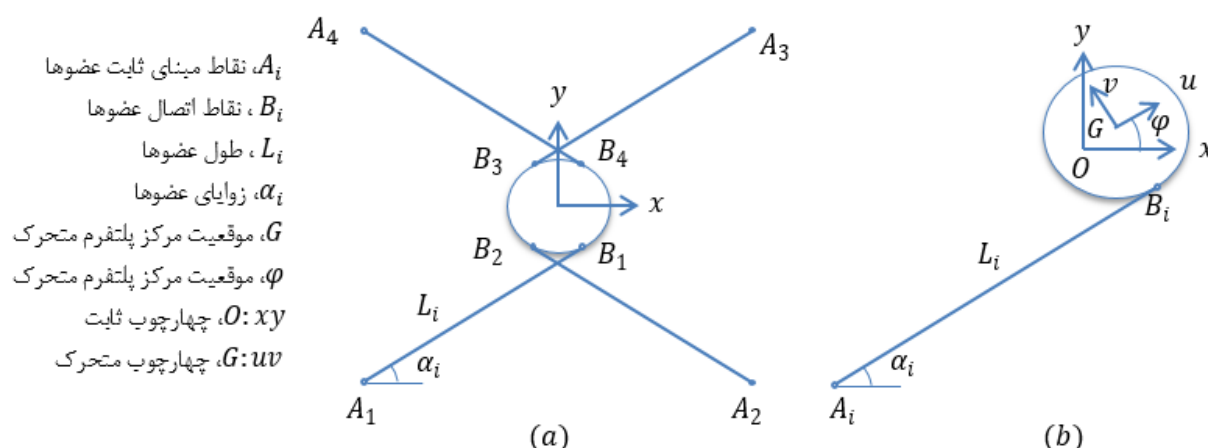
³ Energy-norm

[۲۲، ۲۳ و ۲۵]، اما در کنار مزایای این روش مانند صاف و هموار و مشتق پذیر بودن، در مساله ربات کابلی افزونه حاضر که ساختار کابل فقط در محدوده مثبت، مفهوم فیزیکی دارد استفاده از مجموع نیروی کشش کابل‌ها به عنوان تابع هزینه کفایت می‌کند. در این مقاله یک روش تحلیلی با بکارگیری تابع هزینه مجموع بردار نیروی کشش کابل‌ها به عنوان بردار ورودی کنترلی مساله‌ی بهینه‌سازی محدب، با قیود نامساوی (به منظور اطمینان از در کشش ماندن کابل‌ها و عدم تجاوز از حد گسیختگی کابل‌ها) و قیود مساوی (برای بیان رابطه بین نیروی کشش کابل‌ها و پلتفرم متحرک)، به کمک تئوری KKT پیشنهاد گردیده‌است. در حقیقت این مقاله توسعه‌ای به مراجع [۲۲، ۲۳ و ۲۵] می‌باشد با این تفاوت که در حل تحلیلی ارائه شده، به جای تابع هزینه دو مجذوری (نرم-۲ نیروی کشش کابل‌ها) تابع هزینه خطی (مجموع نیروی کابل‌ها) به کار گرفته شده‌است. نتایج شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب کاهش حدود ۳ برابری در میانگین زمان صرف شده جهت دستیابی به پاسخ بهینه، در روش تحلیلی پیشنهادی نسبت به روش تحلیلی با تابع هزینه دو مجذوری، را نشان می‌دهد در حالی که این میزان نسبت به روش‌های عددی حداقل ۸۰ برابر می‌باشد. اما تفاوت زیادی در زمان حل مساله با تابع هزینه خطی و دو مجذوری در روش‌های عددی وجود ندارد.

ساختار کلی مقاله حاضر به این صورت است که پس از بخش حاضر (مقدمه)، در بخش دوم به تشریح مکانیزم ربات کابلی صفحه‌ای مورد بررسی در این تحقیق و عناصر تشکیل‌دهنده آن پرداخته شده‌است. در بخش سوم رهیافت ارائه‌شده جهت حل مساله افزونگی ربات کابلی مورد بررسی، تشریح گردیده‌است که در قسمت ابتدایی این بخش، فرمول‌بندی مساله بر اساس ماتریس ژاکوبین جهت بیان روابط سینماتیکی و دینامیکی بین مجری نهایی و مفاصل، سپس تابع هزینه بر مبنای مجموع نیروی کابل‌ها ارائه می‌گردد. در ادامه این بخش شرایط تئوری KKT بر تابع هزینه اعمال و الگوریتم تحلیلی - تکرار پیشنهادشده در این مقاله برای حل مساله، ارائه و تشریح می‌گردد. در قسمت انتهایی این بخش هم وجود شرط کافی برای بهینگی فراگیر، از طریق اثبات محدب بودن تابع لاگرانژ مساله بررسی می‌گردد. بخش چهارم به پیاده‌سازی نتایج شبیه‌سازی اختصاص دارد که شامل بلوک دیاگرام کنترل، نمودار ردیابی مسیرهای شبیه‌سازی، نمودار نیروهای عملگرها و پلتفرم متحرک و در نهایت نمودار و جدول مقایسه میانگین زمان صرف شده جهت اجرای حل افزونگی تحلیلی ارائه‌شده در مقایسه با چند روش بهینه‌سازی عددی و تحلیلی می‌پردازد. بخش پنجم و پایانی به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نتایج اختصاص دارد.

۲- عناصر سیستم و تشریح مکانیزم

شکل (۱) شماتیک مدل مورد بررسی را نشان می‌دهد که یک ربات موازی کابلی صفحه ای 4RPR با چهار عضو با زنجیره‌ی سینماتیکی کاملاً یکسان است [۲۴]. هر مفصل کشویی جهت مدل‌سازی هر یک از اعضا به صورت سیلندر - پیستون و بعنوان محرک کابل به کار می‌رود. به منظور جلوگیری از تکیه‌گی در موقعیت مرکز ربات، اعضا به صورت ضربدری قرار می‌گیرند [۲۴]. درجات آزادی سیستم به صورت سه درجه آزادی $X = [x_G, y_G, \varphi]$ به همراه یک درجه اضافی در عملگرها می‌باشد. در این آنالیز بردار گرانش در جهت Z در نظر گرفته شده است. مقدار پارامترهای هندسی و جرمی مورد استفاده در شبیه‌سازی عددی در جدول (۱) آورده شده‌است.



شکل ۱- منیپولیاتور موازی صفحه ای $4RPR$ (a) طرح شماتیک مدل (b) پیکربندی سینماتیکی (۲۴)

جدول ۱- پارامترهای هندسی و جرمی مورد استفاده در ربات موازی $4RPR$

واحد	مقدار	توصیف	پارامتر
m	500	شعاع نقاط مبنای ثابت A_i	R_A
m	6	شعاع نقاط پلتفرم متحرک B_i	R_B
deg	$[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$	زوایای نقاط مبنای ثابت A_i	θ_{A_i}
deg	$[-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$	زوایای نقاط پلتفرم متحرک B_i	θ_{B_i}
kg	1800	جرم پلتفرم متحرک	M
$kg.m^2$	2.25×10^5	ممان اینرسی پلتفرم متحرک	I_m
kg/m	0.215	چگالی کابل بر طول	ρ_m

۳- تحلیل افزونگی

معمولاً در ربات‌های موازی کابلی، از افزونگی در عملگرها جهت حل مشکل تکینگی و کنترل سیستم استفاده می‌شود. ورودی کنترلی در اغلب ربات‌های موازی کابلی کشش کابل‌ها یا همان نیروی عملگرها می‌باشد. با توجه به این موضوع که کابل‌ها تنها می‌توانند تحت کشش قرار گیرند، الگوریتم تحلیل افزونگی باید امکان محاسبه بهینه‌ترین توزیع نیروی کششی در کابل‌ها را داشته‌باشد. در این مقاله مجموع بردار کشش کابل‌ها به عنوان تابع هزینه بهینه‌سازی شده‌است.

۳-۱- فرمول بندی مساله

ماتریس ژاکوبین علاوه بر اینکه ارتباط بین سرعت مجری نهایی و سرعت مفاصل را بیان می‌کند. رابطه بین نیروهای عملگرها (τ) و نیروهای پلتفرم متحرک را به صورت معادله (۱) بیان می‌کند [۲۴].

$$\dot{q} = JX, \quad F = J^T \tau \quad (1)$$

در رابطه (۱) متغیرهای $q \in \mathbb{R}^m$ و $\tau \in \mathbb{R}^n$ به ترتیب نشان‌دهنده حرکت و نیرو در فضای مفصلی، و $X \in \mathbb{R}^m$ و $F \in \mathbb{R}^n$ حرکت و نیرو در فضای کاری و J ماتریس ژاکوبین ربات هستند. با توجه به مکانیزم مورد بررسی در این مقاله $m = 4$ (تعداد عملگرها) و $n = 3$ (تعداد درجات آزادی سیستم) می‌باشد. بنابراین ماتریس ژاکوبین غیر مربعی است.

با توجه به ساختار فیزیکی کابل‌ها چالش اصلی در این مساله، کمینه کردن اندازه بردار نیروهای عملگر با تضمین در کشش ماندن کابل‌ها است. زیرا شل شدن کابل و از مدار خارج شدن آن موجب عدم کنترل پذیری و از دست رفتن درجات آزادی ربات می‌شود. مساله‌ی حل افزونگی طبق معادله‌ی (۲) یک مساله‌ی بهینه‌سازی که شامل سه دسته قید می‌باشد، که دسته‌ی اول قیود مساوی متأثر از دینامیک مطلوب ربات، دسته‌ی دوم قیود نامساوی جهت تضمین در کشش ماندن کابل‌ها و دسته‌ی سوم قیود نامساوی جهت در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها یا حدگسیختگی کابل‌ها است. با این توضیحات تابع هزینه حل مساله افزونگی بر مبنای مجموع نیروی کابل‌ها و قیود بیان شده، طبق معادله (۲) جهت بهینه‌سازی تشکیل می‌گردد.

$$\min \sum_{i=1}^m \tau_i \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} F = J^T \tau \\ \tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max} \end{cases} \quad (2)$$

چندین روش عددی (به صورت تکرار بر مبنای گرادیان مانند مجموعه فعال^۱، نقطه داخلی^۲، sqp و ...) و روش تحلیلی متداول بر مبنای تابع هزینه دو مجذوری ورودی کنترل (نرم انرژی) جهت بهینه‌سازی این قبیل مسائل با قیده‌های مساوی و نامساوی توسعه داده شده‌است. لیکن در مساله ربات کابلی حاضر یک روش تحلیلی - تکرار بر مبنای مجموع نیروی کشش کابل‌ها بعنوان ورودی کنترلی ارائه و حل شده‌است و نتایج شبیه‌سازی با روش‌های عددی و روش‌های تحلیلی بر مبنای نرم انرژی نیروی کشش کابل‌ها مقایسه گردیده‌است. طرح‌های تحلیل افزونه توزیع نیرو را در یک بلوک حلقه - بسته اجرا می‌کنند. برای استفاده از این تکنیک‌ها در یک حلقه بسته، لازم است که جریان بهینه‌سازی در مدت زمان ثابت و کوتاهی به جواب همگرا شود. برای دستیابی به این هدف در این مقاله جهت آنالیز مساله بهینه‌سازی و دستیابی به جواب‌های تحلیلی ممکن از تئوری KKT استفاده شده‌است. سپس از یک الگوریتم تکرارکننده و قابل ردیابی برای دستیابی به جواب استفاده شده‌است. فرموله‌بندی مساله بهینه‌سازی با لحاظ نمودن همه‌ی قیود مساوی و نامساوی انجام شده‌است. با توجه به محدب بودن مساله که در بخش‌های بعدی اثبات آن آورده شده‌است، این نتایج گرفته می‌شود، شرایط KKT علاوه بر شرط لازم، شرط کافی برای بهینگی را هم دارا می‌باشند و از حل معادلات مربوطه نقطه‌ی بهینه بدست می‌آید، همچنین بهینگی نقطه‌ی بدست آمده از نوع نقطه‌ی بهینه‌ی فراگیر می‌باشد.

¹ Active set

² Interior - point

³ Convexity

۳-۲- اعمال شرایط KKT

مجموعه همه جواب‌هایی که معادله (۲) را ارضا می‌کند به صورت معادله (۳) بیان می‌شود.

$$\min f(\tau) = \sum_{i=1}^m \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \quad (3)$$

$$\text{subject to } \begin{cases} h(\tau) = J^T \tau - F = 0 \\ g(\tau) = \tau_{\min} - \tau \leq 0 \\ w(\tau) = \tau - \tau_{\max} \leq 0 \end{cases}$$

جهت اعمال شرایط KKT به منظور پیدا کردن جواب بهینه‌ی معادله‌ی (۳)، تابع لاگرانژ $L(\tau)$ به صورت معادله (۴) تشکیل می‌شود. در این معادله $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_m]^T$ و $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T$ به ترتیب ضرایب لاگرانژ مرزهای پایین و بالا هستند که همواره باید نامنفی باشند و $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ ضرایب قیود مساوی می‌باشند. همچنین m تعداد عملگرها یا همان تعداد کابل‌ها و n تعداد درجات آزادی سیستم می‌باشند که در ربات مورد بررسی در این مقاله $m = 4$ و $n = 3$ می‌باشند.

$$L(\tau) = f(\tau) + v^T h(\tau) + \mu^T g(\tau) + \lambda^T w(\tau)$$

$$= \sum_{i=1}^m \tau_i + \sum_{j=1}^n v_j \left\{ \left(\sum_{i=1}^m J_{ij} \tau_i \right) - F_j \right\} + \sum_{i=1}^m \mu_i (\tau_{\min_i} - \tau_i) \quad (4)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \lambda_i (\tau_i - \tau_{\max_i})$$

با اعمال شرایط لازم KKT معادلات (۵) و (۶) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 1 + \sum_{j=1}^n J_{ij} v_j - \mu_i + \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

(Gradient Conditions)

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^m J_{ij} \tau_i - F_j = 0 \quad , \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Equality Constraints}) \quad (6)$$

معادلات (۵) و (۶) جمعاً شامل هفت معادله اسکالر خطی با ۱۵ مجهول می‌باشد. که با نوشتن شرط دوم ۸ مجهول حذف و دستگاه معادلات قابل حل خواهد شد. بعلاوه، شرط دوم از شرایط لازم KKT (شرط مکمل) به صورت معادله‌ی (۷) می‌باشد که شامل ۸ معادله‌ی اسکالر غیرخطی است.

$$\mu_i g_i(\tau_i) = 0 \quad \text{و} \quad \lambda_i w_i(\tau_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \lambda_i \geq 0 \quad \mu_i \geq 0 \quad (7)$$

(Switching Conditions)

بنابراین با استفاده از معادله (۷) از مجهولات ۸ عدد کاسته شده و دستگاه معادلات خطی با ۷ معادله و ۷ مجهول قابل حل خواهد شد. هر یک از معادلات مستخرج از معادله (۷) دو حالت دارد که در هر حالت، یا باید مقدار قید نامساوی صفر باشد (یعنی قید فعال و روی مرز جواب عملی باشد)، یا ضریب قید نامساوی (μ_i) یا (λ_i) صفر باشد (یعنی قید داخل مرز ناحیه جواب عملی باشد).

$$\begin{cases} \mu_i = 0 & \text{برای } g_i(\tau_i) < 0 \\ \mu_i \geq 0 & \text{برای } g_i(\tau_i) = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{برای } w_i(\tau_i) < 0 \\ \lambda_i \geq 0 & \text{برای } w_i(\tau_i) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

با این استدلال در هر حالت ۸ مجهول از معادلات خطی کاسته خواهد شد. تمام وضعیت‌ها و ترکیب‌های حاصل از آن، همچنین بررسی امکان تحقق آنها در جدول (۲) به ترتیب، از ایده آل ترین حالت، که همه نیروها روی مرز پایین واقع شوند، تا بدترین حالت، که همه نیروها روی مرز بالا قرار گیرند، بررسی شده است. با توجه به محدب بودن مساله که در بخش بعدی بررسی و اثبات می‌شود در هر حالت که به یک پاسخ بهینه رسیدیم. این جواب بهینه فراگیر نیز می‌باشد و بلافاصله برنامه خاتمه می‌یابد بنابراین نیازی به بررسی سایر وضعیت‌ها نیست. سه نقطه‌ی کاری برای هر یک از عملگرها بصورت روی حد پایین، ما بین حد پایین و بالا و روی حد بالا در نظر می‌گیریم. بر این اساس، تعداد وضعیت‌های ممکن از لحاظ تعداد عملگرهایی که در سه نقطه‌ی کاری مذکور می‌توانند قرارگیرند در جدول (۲) آمده است که برای ربات کابلی صفحه‌ای مورد مطالعه ۱۵ وضعیت خواهد شد که تمام $3^4 = 81$ حالت ممکن را پوشش می‌دهد. وضعیت‌های مندرج در جدول (۲) را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود.

- دسته‌ی نخست وضعیت‌هایی که هر چهار نیروی عملگر همزمان روی حدهای اشباع بالا یا پایین (یا ترکیبی از این دو) هستند (وضعیت‌های ۱، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۵). در این حالت‌ها چون مقدار هر چهار نیرو معلوم است، در صورت برقراری معادلات قیود مساوی (معادله (۳))، نیروهای مفروض جواب بهینه است.
- دسته‌ی دوم نخست (وضعیت‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۱۳ و ۱۴)، شامل حالت‌هایی است که در معادله قیود مساوی (معادله (۸))، تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر می‌باشند. بنابراین تنها در صورتی دارای جواب می‌باشند که رتبه‌ی ماتریس ضرایب $[J^T]$ و رتبه‌ی ماتریس افزوده $[J^T: F]$ ، در معادله (۸)، برابر باشند ($rank([J^T]) = rank([J^T: F])$) که در شبیه‌سازی صورت گرفته در این مقاله، این

¹ Feasible region

² Rank deficiency

وضعیت‌ها اتفاق نیفتاده است. (از آنجا که F و J هر دو وابسته به تراژکتوری ربات هستند شاید نتوان ادعا کرد که این وضعیت‌ها همیشه دستگاه معادلات ناسازگار نتیجه می‌دهند و فاقد پاسخ هستند.)

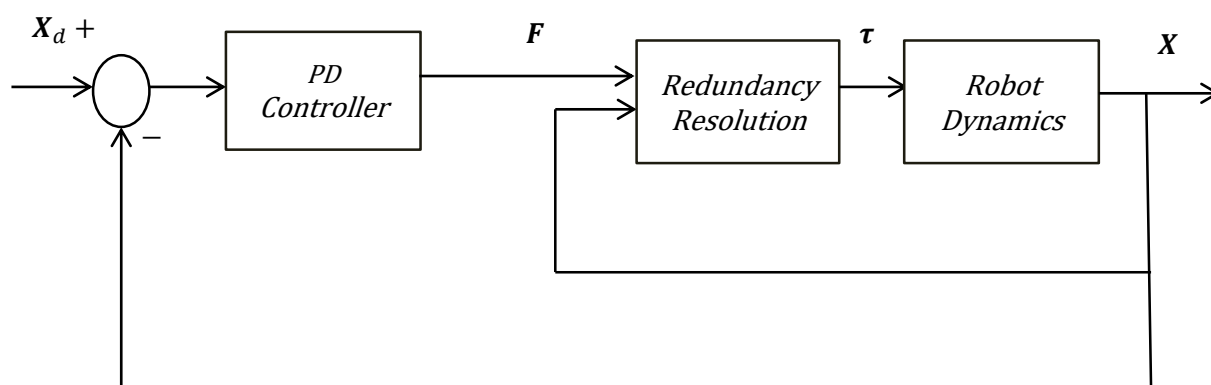
• اما دسته‌ی سوم (وضعیت‌های ۴، ۸ و ۱۲)، که در آنها تعداد معادلات و مجهولات برابر است. بنابراین می‌توان با تشکیل دستگاه معادلات خطی مربوطه و حل آنها به محاسبه‌ی نیروها و ضرایب لاگرانژ مجهول اقدام نمود. در صورتی که نیروهای بدست‌آمده از حل دستگاه در محدوده‌ی مجاز از نظر ماکزیمم و مینیمم قرارداشتند و ضرایب قیده‌های نامساوی بدست آمده، نامنفی شدند، قابل قبول خواهند بود. در غیر این صورت، تکرارها تا آخرین مرحله‌ی تکرار ادامه می‌یابد.

۳-۳- بررسی شرط کافی برای بهینگی فراگیر (محدب بودن تابع لاگرانژ)

قسمت اول معادله (۷) $(\frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 0)$ شرط لازم برای نقاط مینیمم محلی است. اما در صورتی که هسیان تابع لاگرانژ $H(\tau^*) = [\frac{\partial^2 L}{\partial \tau_i \partial \tau_j}]_{(m \times m)}$ نیمه معین مثبت یا معین مثبت باشد. تابع لاگرانژ محدب می‌باشد و شرط کافی برای مینیمم فراگیر^۴ فراهم می‌نماید. در مساله بیان شده در این مقاله چون تابع لاگرانژ خطی می‌باشد بنابراین $H = 0$ می‌شود که واضح است نیمه معین مثبت می‌باشد. بنابراین تابع لاگرانژ محدب می‌باشد و در هر مرحله‌ای که یک مقدار بهینه بدست‌آمد. این مقدار بهینه فراگیر بوده و نیاز به ادامه حل نمی‌باشد.

۴- پیاده‌سازی نتایج

در این قسمت نتایج شبیه سازی بر روی مدل ربات موازی صفحه ای $ARPR$ که جزئیات آن در بخش (۲) بیان گردید، انجام شده است و عملکرد آن در سیستم کنترل حلقه - بسته ارزیابی می‌شود.



شکل ۲ - بلوک دیاگرام جانمایی (توپولوژی) کنترل حلقه - بسته

¹ Hessian matrix

² Positive semidefinite

³ Positive definite

⁴ Global minimum

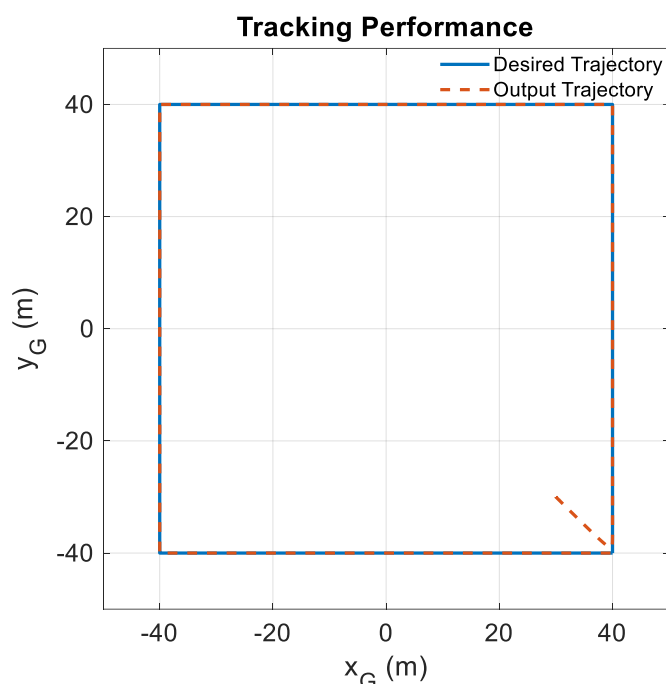
جدول ۲- تعداد وضعیت‌ها و مراحل تکرار روش تحلیلی- تکرار ارائه شده

امکان پذیری	تعدد حالت های تکرار در هر وضعیت	تعداد قیدهای			شماره وضعیت
		فعال روی مرز بالا	داخل مرز	فعال روی مرز پایین	
به شرط برقراری قید مساوی $F = J^T \tau$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{4} = 1$	۰	۰	۴	(۱)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{3} = 4$	۰	۱	۳	(۲)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{2} = 4$	۰	۲	۲	(۳)
با جاگذاری نیروی فعال روی مرز پایین در دستگاه معادلات قیدهای مساوی $F = J^T \tau$ ، در صورتیکه نیروهای بدست آمده از حل دستگاه در محدوده مجاز باشند پذیرفتنی می‌باشد.	$\binom{4}{1} = 4$	۰	۳	۱	(۴)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = 12$	۱	۱	۲	(۵)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 12$	۱	۲	۱	(۶)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$	۲	۱	۱	(۷)
در این حالت همه ضرایب قیدهای نامساوی صفر شده و دستگاه معادلات خطی، شامل ۷ معادله و ۷ مجهول تشکیل می‌شود که با حل آن، در صورتی که نیروهای بدست آمده از حل دستگاه در محدوده مجاز و ضرایب قیدهای نامساوی، نامنفی باشند، پذیرفتنی می‌باشد.	$\binom{4}{4} = 1$	۰	۴	۰	(۸)
به شرط برقراری قید مساوی $F = J^T \tau$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{3} = 4$	۱	۰	۳	(۹)
به شرط برقراری قید مساوی $F = J^T \tau$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{2} = 6$	۲	۰	۲	(۱۰)
به شرط برقراری قید مساوی $F = J^T \tau$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{1} = 4$	۳	۰	۱	(۱۱)
با جاگذاری نیروی فعال روی مرز بالا در دستگاه معادلات قیدهای مساوی $F = J^T \tau$ ، در صورتیکه نیروهای بدست آمده از حل دستگاه در محدوده مجاز باشند پذیرفتنی می‌باشد.	$\binom{4}{3} = 4$	۱	۳	۰	(۱۲)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{2} = 6$	۲	۲	۰	(۱۳)
به شرط برقراری $rank([J^T]) = rank([J^T: F])$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{1} = 4$	۳	۱	۰	(۱۴)
به شرط برقراری قید مساوی $F = J^T \tau$ ، این حالت پاسخ مساله است.	$\binom{4}{4} = 1$	۴	۰	۰	(۱۵)

بلوک دیاگرام حلقه - بسته در شکل (۲) نشان داده شده است. که در آن یک کنترلر مشتق گیر - تناسبی^۱ نامتمرکز برای سیستم حلقه - بسته لحاظ شده است.

برای دستیابی به ردیابی مسیر مجری نهایی، بردار موقعیت مرکز جرم مجری نهایی که در مختصات مبنای ثابت زمین بیان شده است. $(X = [x_G, y_G, \phi])$ باید از مقدار مطلوب پیروی کند. جهت دستیابی به این هدف سه نیروی تعمیم یافته آموثر بر مجری نهایی، با یک قانون کنترل مشتق گیر - تناسبی PD نامتمرکز محاسبه می‌شوند.

جهت مقایسه روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله (بر اساس مجموع نیروی کشش کابل‌ها) با طرح‌های افزونگی مختلف، این روش با سه روش عددی مجموعه فعال^۴، نقطه داخلی^۵ و برنامه‌ی درجه دوم متوالی (sqp)^۶، همچنین یک روش تحلیلی (بر اساس نرم‌انرژی نیروی کشش کابل‌ها) مقایسه شده است. شبیه‌سازی‌های انجام شده با نرم افزار MATLAB نسخه R2017a و در رایانه‌ای با پردازنده Core(TM) i3-6100 (3.70GHz) و Ram-8GB انجام شده است. به منظور بهینه‌سازی در هر سه روش عددی از تابع fmincon در محیط MATLAB استفاده شده است. جهت شبیه‌سازی یک مسیر مربع شکل و یک مسیر سینوسی برای ربات در نظر گرفته شده است. در مسیر شبیه‌سازی اول، مربعی به طول ۸۰ متر در مختصات دکارتی و تغییرات زاویه‌ای حدود ۴۵ درجه در ۲۰۰ ثانیه برای ربات جهت شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است. ردیابی مسیر مطلوب حرکت ربات در حلقه بسته در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۳- ردیابی مسیر مربعی مطلوب ربات موازی صفحه‌ای

¹ PD

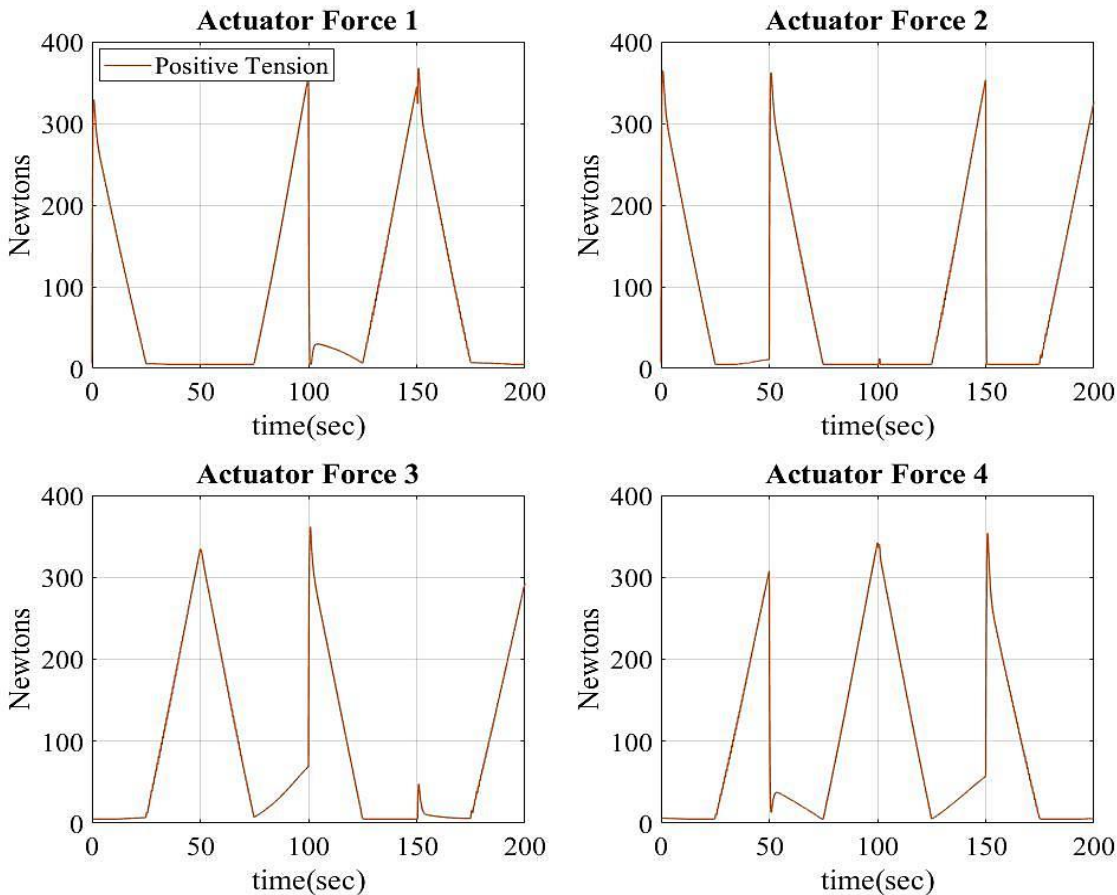
² Desired Value

³ Generalized forces

⁴ active-set

⁵ interior-point

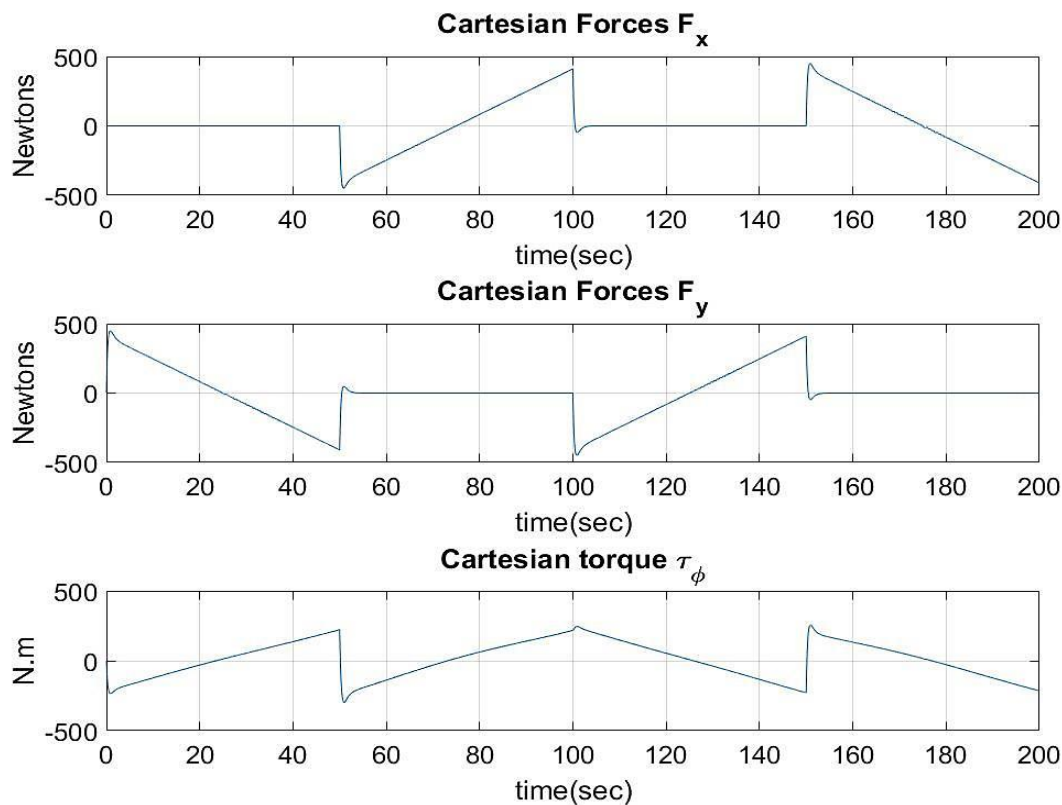
⁶ Sequential quadratic programing



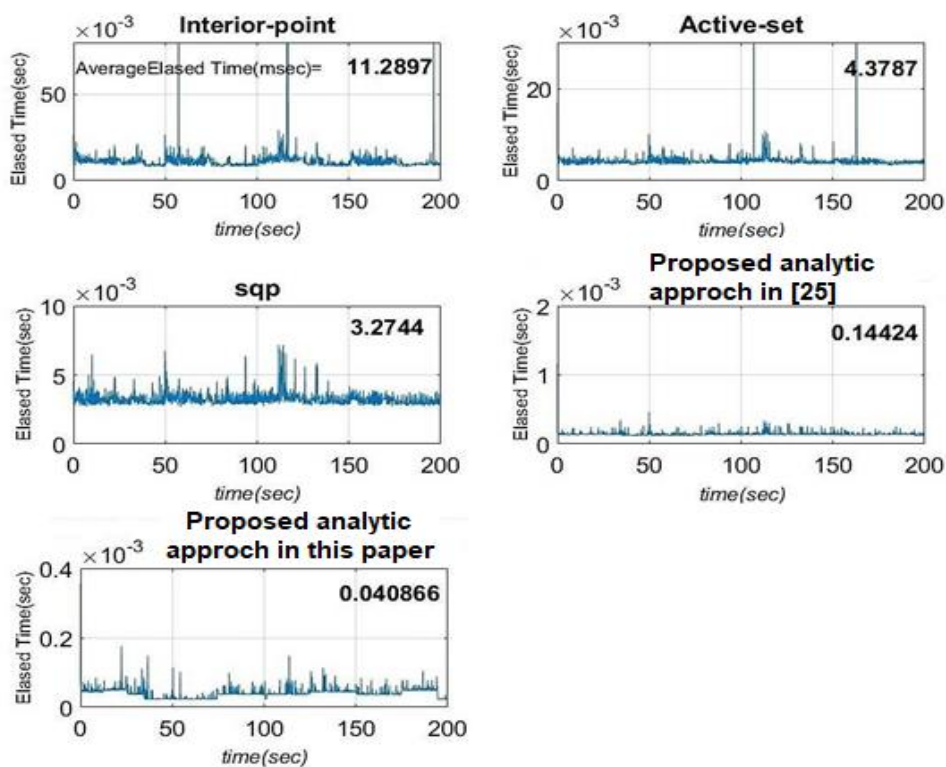
شکل ۴- نیروهای عملگرها (کشش در کابل‌ها) جهت ردیابی مسیر مربعی

نمودار شبیه‌سازی نیروی عملگرها (نیروی کابل‌ها)، جهت طی مسیر مربعی در شکل (۴) نشان داده شده‌است. بردار نیروهای کمینه و بیشینه در نظر گرفته‌شده برای عملگرها، در شبیه‌سازی‌های فرایند بهینه‌سازی به ترتیب برابر $\tau_{min} = [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T$ و $\tau_{max} = [380 \ 380 \ 380 \ 380]^T$ نیوتن می‌باشد. همان‌گونه که در نمودارها دیده می‌شود همه نیروها در محدوده تعیین شده قرار دارند و کابل‌ها در کشش باقی می‌مانند و شکل (۵) نیروها و گشتاورهای وارد به پلتفرم متحرک را نشان می‌دهد. بنابراین روشن است که روش تحلیل افزونگی پیشنهادی توانایی تصویر نیروهای دکارتی به نیروهای کشش در کابل‌ها را دار می‌باشد.

شکل (۶) مقایسه زمان صرف شده جهت محاسبه طرح حل افزونگی ارائه‌شده در این مقاله که توسط کمینه‌کردن مجموع نیروی کابل‌ها عمل می‌کند، با روش‌های مختلف عددی و تحلیلی را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، بدترین زمان صرف شده در مراحل تکرار روش پیشنهادی این مقاله $0.17ms$ است. که به مراتب از روش‌های دیگر کمتر می‌باشد. همچنین میانگین زمان صرف شده که برای اجرای روش پیشنهادی در هر مرحله لازم است بسیار بهتر از سایر روش‌هاست. میانگین زمان صرف شده که در روش‌های تحلیل افزونگی مختلف استفاده شده‌است در جدول (۳) داده شده‌است. برای دنبال کردن مسیر مطلوب در زمان 200 ثانیه، میانگین زمان صرف شده در روش پیشنهادی این مقاله $0.041ms$ است، که 80 برابر از روش sqp و 276 برابر از روش Interior-point سریع‌تر عمل می‌کند. همچنین این روش در مقایسه با روش تحلیلی که بر اساس نرم انرژی نیروی کابل‌ها عمل می‌کند، $3/5$ برابر سریع‌تر به جواب بهینه همگرا می‌باشد.



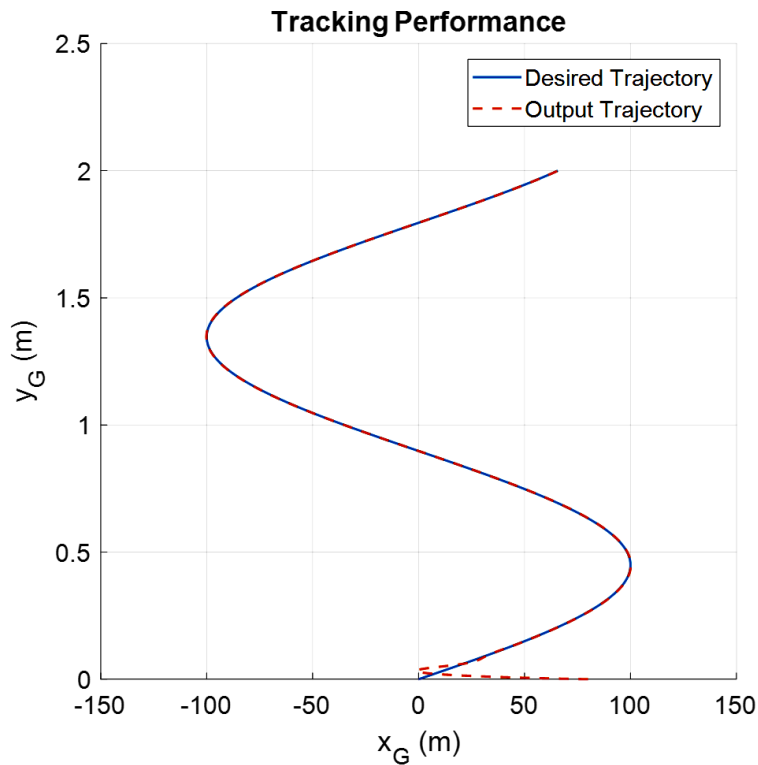
شکل ۵- نیروها و گشتاورهای وارد شده به پلتفرم متحرک جهت ردیابی مسیر مربعی



شکل ۶- کل زمان صرف شده برای محاسبه نیروهای بهینه در روش حل افزونگی تحلیلی ارائه شده و سایر روش‌های بهینه‌سازی در تمامی مراحل تکرار جهت ردیابی مسیر مربعی

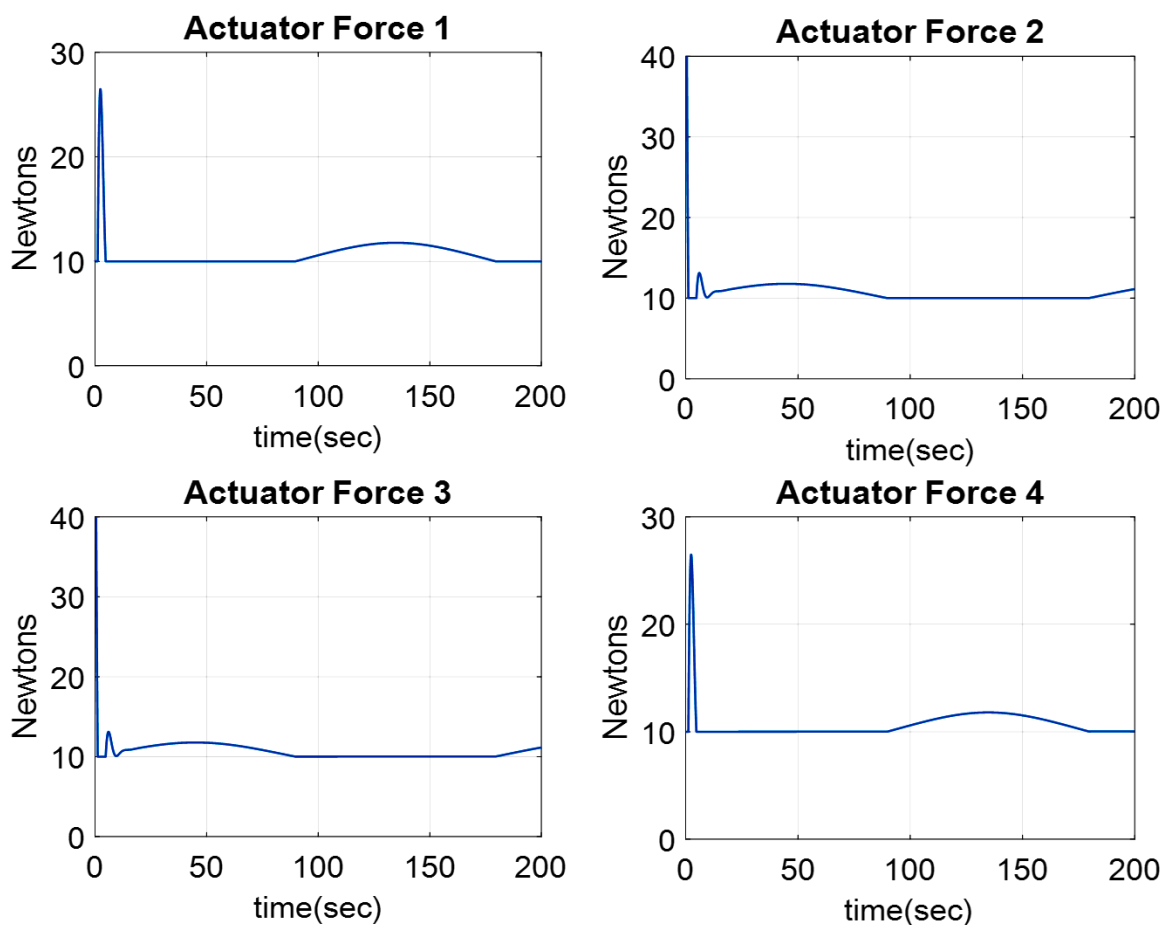
جدول ۳- مقایسه میانگین زمان صرف شده در هر تکرار (میلی ثانیه) در این مقاله با چند روش بهینه‌سازی عددی و تحلیلی جهت ردیابی مسیر مربعی

مقایسه سرعت	میانگین زمان صرف شده در هر تکرار (میلی ثانیه)	الگوریتم
۱	۰/۰۴۰۸۶۶	روش تحلیلی پیشنهادی در این مقاله بر مبنای کمینه‌کردن مجموع نیروی کابل‌ها
۳/۵	۰/۱۴۴۲۴	روش تحلیلی بر مبنای کمینه‌کردن نرم انرژی نیروی کابل‌ها مرجع [۲۵]
۸۰	۳/۲۷۴۴	روش عددی sqp
۱۰۷	۴/۳۷۸۷	روش عددی Active - set
۲۷۶	۱۱/۲۸۹۷	روش عددی Interior - point



شکل ۷- ردیابی مسیر سینوسی مطلوب ربات موازی صفحه‌ای

مسیر شبیه‌سازی شده دوم برای حرکت ربات، یک مسیر سینوسی می‌باشد. حرکت ربات در حلقه‌ی بسته با مسیر مطلوب قابل ردیابی است. شکل (۷) ردیابی مسیر مطلوب ربات در این مسیر را نشان می‌دهد. شکل (۸) نمودار شبیه‌سازی نیروی عملگرها (نیروی کابل‌ها)، جهت طی مسیر سینوسی را نشان می‌دهد. بردار نیروهای کمینه و بیشینه در نظر گرفته‌شده برای عملگرها، در شبیه‌سازی‌های این مسیر به ترتیب برابر $\tau_{min} = [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T$ و $\tau_{max} = [50 \ 50 \ 50 \ 50]^T$ نیوتن می‌باشد. نمودارها در کشش ماندن کابل‌ها همچنین در محدوده مجاز قرار داشتن نیروها را نشان می‌دهد.



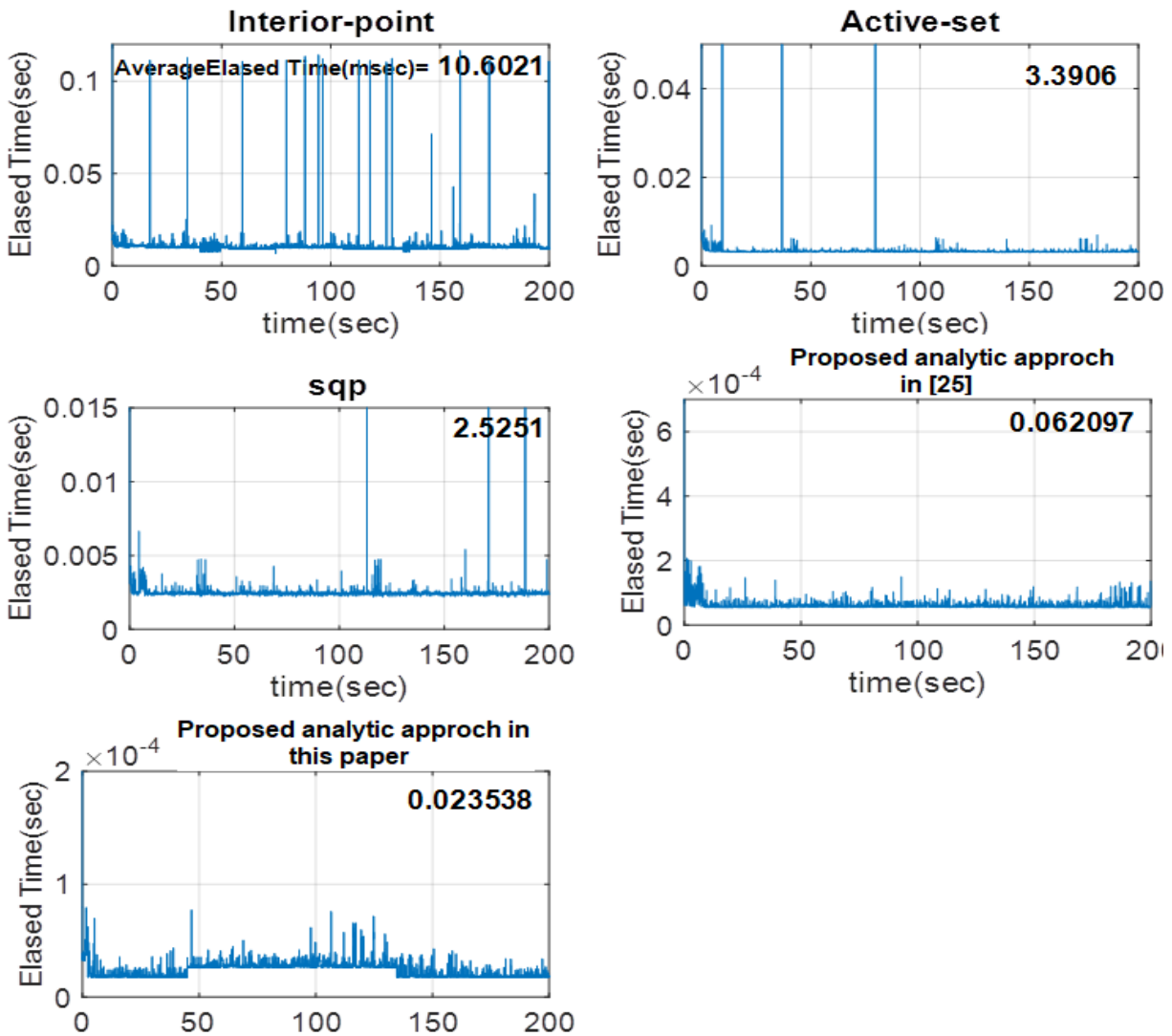
شکل ۸- نیروهای عملگرها (کشش در کابل‌ها) جهت ردیابی مسیر سینوسی

نمودارهای شکل (۹) زمان صرف شده برای طی این مسیر سینوسی، جهت محاسبه‌ی طرح حل افزونگی از طریق روش‌های مختلف عددی و تحلیلی را نشان می‌دهد. بیشترین زمان صرف شده در این مسیر با روش پیشنهادی این مقاله حدود 0.21 ms است، که به مراتب کمتر از سایر روش‌ها می‌باشد و جدول (۴) میانگین زمان صرف شده برای این طی این مسیر را نشان می‌دهد. برای طی این مسیر در زمان 200 ثانیه، میانگین زمان صرف شده در روش پیشنهادی مقاله حاضر 0.24 ms گردید، که برابر کوتاه‌تر از روش برنامه‌ی درجه دوم متوالی (SQP)، بعنوان سریع‌ترین روش در میان روش‌های شبیه‌سازی عددی و 450 برابر سریع‌تر از روش نقطه داخلی بعنوان کندترین روش شبیه‌سازی عددی عمل می‌کند. همچنین این روش در مقایسه با روش تحلیلی که بر اساس نرم‌انرژی نیروی کابل‌ها عمل می‌کند، $2/6$ برابر سریع‌تر به جواب بهینه همگرا می‌باشد.

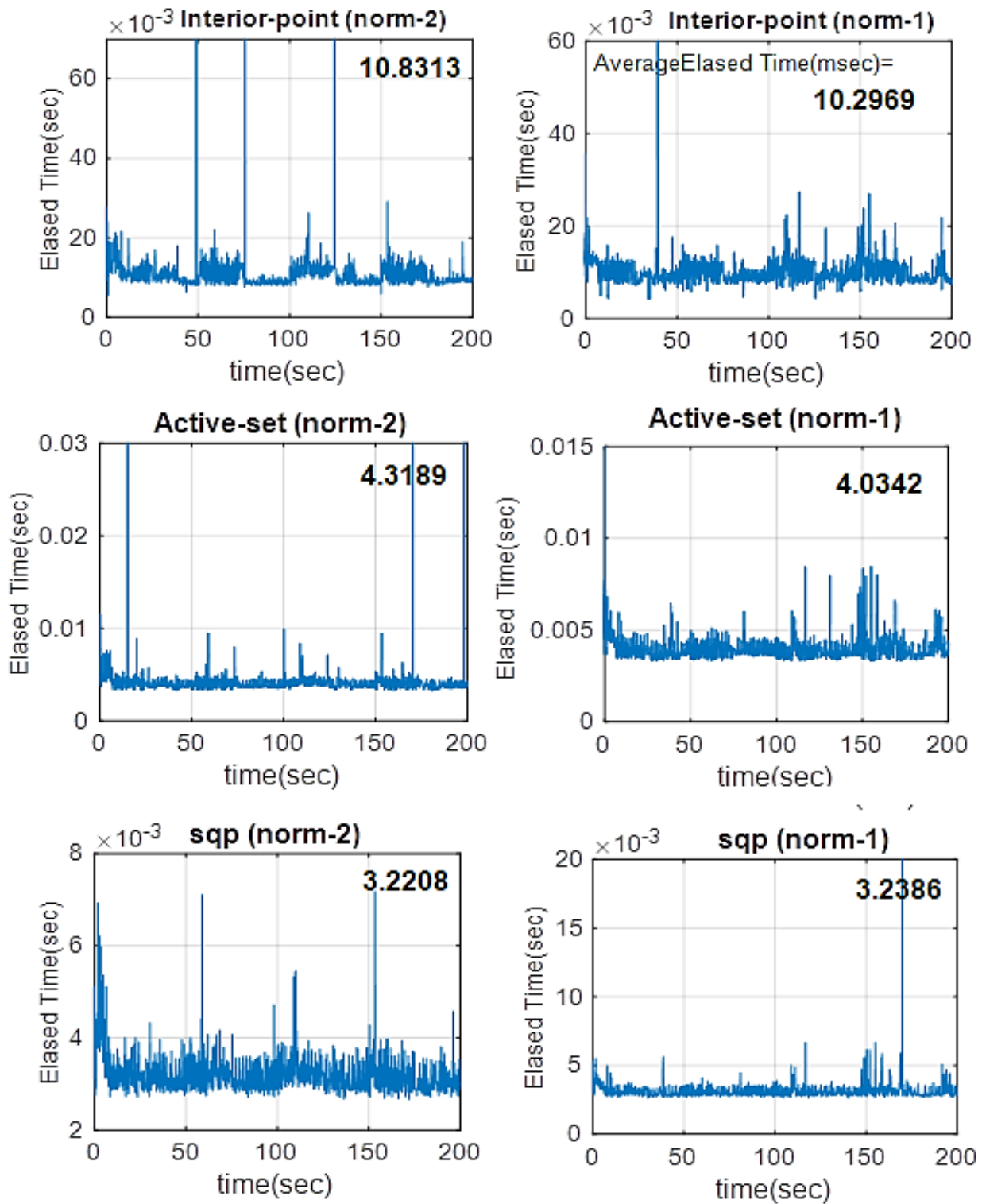
نمودارهای شکل (۱۰) زمان طی شده جهت حل مساله افزونگی در همه‌ی مراحل تکرار، با تابع هزینه خطی و تابع هزینه دو مجذوری، در روش‌های مختلف عددی را با هم مقایسه می‌کند. همان‌گونه که از نمودارها پیداست تفاوت محسوس در زمان حل مساله بهینه‌سازی با روش‌های عددی بین تابع هزینه خطی و دو مجذوری وجود ندارد. در حالی که از نمودارهای شکل‌های (۶ و ۹) و جدول‌های (۳ و ۴) مشاهده می‌شود حل تحلیلی با تابع هزینه خطی حدود سه برابر سریع‌تر از تابع هزینه دو مجذوری به جواب بهینه همگرا می‌گردد.

جدول ۴ - مقایسه میانگین زمان صرف شده جهت اجرای حل تحلیلی در این مقاله با چند روش بهینه‌سازی عددی و تحلیلی جهت ردیابی مسیر سینوسی

مقایسه سرعت	میانگین زمان صرف شده در هر تکرار (میلی ثانیه)	الگوریتم
۱	۰/۰۲۳۵۳۸	روش تحلیلی پیشنهادی در این مقاله بر مبنای کمینه کردن مجموع نیروی کابل‌ها
۲/۶	۰/۰۶۲۰۹۷	روش تحلیلی بر مبنای کمینه کردن نرم انرژی نیروی کابل‌ها مرجع [۲۵]
۱۰۷	۲/۵۲۵۱	روش عددی sqp
۱۴۴	۳/۳۹۰۶	روش عددی Active - set
۴۵۰	۱۰/۶۰۲۱	روش عددی Interior - point



شکل ۹ - کل زمان صرف شده برای محاسبه نیروهای بهینه در روش حل افزونگی تحلیلی ارائه شده و سایر روش‌های بهینه‌سازی در تمامی مراحل تکرار جهت ردیابی مسیر سینوسی



شکل ۱۰- کل زمان صرف شده برای محاسبه نیروهای بهینه در روش‌های بهینه‌سازی عددی در تمامی مراحل تکرار، بین تابع هزینه دو مجذوری و خطی

۵- نتیجه گیری

روش نرم انرژی که به روش حداقل مربعات نیز شناخته می‌شود به طور گسترده در مسائل بهینه‌سازی ربات‌های موازی کابلی استفاده می‌شود که مزایای قابل توجهی از قبیل صاف و هموار بودن و مشتق‌پذیری را دارند اما

در این مقاله به جای نرم انرژی نیروی کابل‌ها، مجموع بردار نیروی کابل‌ها به عنوان تابع هزینه در نظر گرفته شده‌است و یک روش تحلیلی برای حل مساله افزونگی بر روی ربات کابلی صفحه‌ای افزونه پیشنهاد گردیده و روی ربات کابلی افزونه با جزئیات اجرا و نتایج شبیه‌سازی استخراج گردیده‌است. این امر روی یک مساله بهینه‌سازی با قیدهای مساوی (رابطه بین نیروی عملگرها و پلتفرم متحرک) و نیز قیدهای نامساوی روی حد اشباع پایین و بالای نیروی کشش کابل‌ها (جهت اطمینان از شل نشدن کابل‌ها و در نظر گرفتن حد تحمل کابل‌ها) فرمول‌بندی شده‌است. تکنیک‌های برنامه‌نویسی غیرخطی بخصوص تئوری KKT برای آنالیز و دستیابی به پاسخ تحلیلی استفاده شده‌است. متعاقب آن یک الگوریتم جستجوی مناسب جهت بررسی شرایط تا دستیابی به جواب پیشنهاد شده‌است. هدف از انجام این تحقیق توسعه و بهبود روش‌های حل مساله افزونگی ربات‌های موازی کابلی می‌باشد عمدتاً در تحقیقات گذشته از روش‌های عددی برای حل مساله بهینه‌سازی استفاده شده‌است در سنوات اخیر هم چندین روش تحلیلی در این زمینه ارائه شده‌است که عمدتاً از تابع هزینه دو مجذوری بهره گرفته‌اند اما در این مقاله مجموع نیروی کابل‌ها (نیروی عملگرها)، به عنوان تابع هزینه در نظر گرفته شده‌است که علاوه بر سهولت انجام محاسبات، بهبود سرعت همگرایی را به همراه دارد. با استخراج نتایج شبیه‌سازی در دو مسیر مجزا (مربع شکل و سینوسی) نشان داده‌شد که روش تحلیلی پیشنهادی توانایی تصویر نیروهای دکارتی به نیروهای کشش در کابل‌ها را داراست بعلاوه میانگین زمان صرف‌شده جهت دستیابی به پاسخ بهینه در روش تحلیلی مطرح شده، برای هر دو مسیر در ساختار حلقه - بسته حداقل ۸۰ برابر کمتر از سایر روش‌های بهینه‌سازی عددی و حدود ۳ برابر کمتر از روش تحلیلی پیشنهاد شده در مرجع [۲۵]، با تابع هزینه دو مجذوری است و برای کاربردهای آنلاین می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد.

مراجع

- [1] Jamshidifar, H., Khajepour, A., Fidan, B., and Rushton, M., "Vibration Regulation of Kinematically Constrained Cable-driven Parallel Robots with Minimum Number of Actuators", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 25, No. 1, pp. 21-31, (2020).
- [2] Rushton, M., Jamshidifar, H., and Khajepour, A., "Multiaxis Reaction System (MARS) for Vibration Control of Planar Cable-driven Parallel Robots", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 35, No. 4, pp. 1039 -1046, (2019).
- [3] Khalilpour, S., Khorrambakht, R., Taghirad, H., and Cardou, P., "Robust Cascade Control of a Deployable Cable-driven Robot", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 127, pp. 513–530, (2019).
- [4] Abbasnejad, G., Yoon, J., and Lee, H., "Optimum Kinematic Design of a Planar Cable-driven Parallel Robot with Wrench-closure Gait Trajectory", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 99, pp. 1-18, (2016).
- [5] Jamshidifar, H., Fidan, B., Gungor, G., and Khajepour, A., "Adaptive Vibration Control of a Flexible Cable Driven Parallel Robot", *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 48, No. 3, pp. 1302-1307, (2015).

- [6] Lamaury, J., and Gouttefarde, M., "A Tension Distribution Method with Improved Computational Efficiency," *Mechanisms and Machine Science*, Vol. 12, pp. 71-85, (2013).
- [7] Khosravi, M.A., and Taghirad, H.D., "Robust PID Control of Fully-constrained Cable Driven Parallel Robots", *Mechatronics*, Vol. 24, No. 2, pp. 87-97, (2014).
- [8] Zhang, Z., Shao, Z., and Wang, L., "Optimization and Implementation of a High-speed 3-dofs Translational Cable-driven Parallel Robot", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 145, pp. 103693, (2020).
- [9] Yao, R., Tang, X., Wang, J., and Huang, P., "Dimensional Optimization Design of the Four-cable-driven Parallel Manipulator in Fast", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 15, No. 6, pp. 932-941, (2009).
- [10] Arora, J.S., "*Introduction to Optimum Design*", 3rd Edition, Academic Press is an Imprint of Elsevier, Waltham, USA, (2012).
- [11] Sabbagh Novin, R., Karimi, A., Yazdani, M., and Tale Masouleh, M., "Optimal Motion Planning for Parallel Robots via Convex Optimization and Receding Horizon", *Advanced Robotics*, Vol. 30, pp. 1145-1163, (2016).
- [12] Babaghasabha, R., Khosravi, M.A., and Taghirad, H.D., "Adaptive Control of KNTU Planar Cable-driven Parallel Robot with Uncertainties in Dynamic and Kinematic Parameters", *Mechanisms and Machine Science*, Vol. 32, pp. 145–159, (2014).
- [13] Bosscher, P., Riechel, A.T., and Ebert-Uphoff, I., "Wrench-feasible Workspace Generation for Cable-driven Robots", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, No. 5, pp. 890–902, (2006).
- [14] Bolboli, J., Khosravi, M.A., and Abdollahi, F., "Stiffness Feasible Workspace of Cable-driven Parallel Robots with Application to Optimal Design of a Planar Cable Robot", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 114, pp. 19-28, (2019).
- [15] Barrette, G., and Gosselin, C.M., "Determination of the Dynamic Workspace of Cable-driven Planar Parallel Mechanisms", *Journal of Mechanical Design (JMD)*, Vol. 127, No. 2, pp. 242–248, (2005).
- [16] Torres Mendez, S.J., "Low Mobility Cable Robot with Application to Robotic Warehousing", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, (2014).
- [17] Hassan, M., and Khajepour, A., "Optimization of Actuator Forces in Cablebased Parallel Manipulators using Convex Analysis", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 24, No. 3, pp. 736–740, (2008).
- [18] Cui, Z., Tang, X., Hou, S., and Sun, H., "Non-iterative Geometric Method for Cable-tension Optimization of Cable-driven Parallel Robots with 2 Redundant Cables", *Mechatronics*, Vol. 59, pp. 49–60, (2019).
- [19] Geng, X., Li, M., Liu, Y., Li, Y., Zheng, W., and Li, Z., "Analytical Tension-distribution Computation for Cable-driven Parallel Robots using Hypersphere Mapping Algorithm", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 145, Article Number. 103692, (2020).

- [20] Behzadipour, S., and Khajepour, A., "Stiffness of Cable-based Parallel Manipulators with Application to Stability Analysis", *ASME Journal of Mechanical Design (JMD)*, Vol. 128, No. 1, pp. 303-310, (2006).
- [21] Lau, D., Oetomo, D., and Halgamuge, S.K., "Generalized Modeling of Multilink Cable-driven Manipulators with Arbitrary Routing using the Cable-routing Matrix", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 29, No. 5, pp. 1102-1113, (2013).
- [22] Oh, S.-R., and Agrawal, S.K., "Cable Suspended Planar Robots with Redundant Cables: Controllers with Positive Tensions", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, No. 3, pp. 457–465, (2005).
- [23] Taghirad, H.D., and Bedoustani, Y.B., "An Analytic-iterative Redundancy Resolution Scheme Forcable-driven Redundant Parallel Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 27, pp. 1137–1143, (2011).
- [25] Felegari, A.H., and Ahmadi, S.J., "Actuators Redundancy Resolution Scheme with Computational Time Reduction Purpose for Parallel Cable Robots with Considering the Rupture Limits of the Cables", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 53, No. 6, pp. 3479–3498, (2020).

Abstract

In most research on parallel cable robots, control input energy norm (with two-squared cost function), also known as the least-squares method is widely used, but in addition to the advantages of this method, such as smoothness and differentiable, in the case of the current cable robot, where the cable structure has a physical meaning only in the positive range, using the linear cost function is sufficient in terms of mathematical modeling. With this replacement, without compromising the convexity, the optimization problem on the robot is solved with the low tensile limit and the high rupture limit, and the equal constraint tensile strength of the cables and the moving platform. The simulation results show that while the mentioned the alternative in the cost function does not have a significant effect on solving the optimization problem with numerical methods, the reduction in the average elapsed time to achieve the optimal solution is about 3 times, compared to the analytical method with the two-squared cost function, and is obtained at least 80 times that of numerical methods.