

## بررسی تحلیلی، عددی و تجربی خمش سه نقطه ای تیر های ساندویچی ساخته شده با چاپگر سه بعدی

حسین گرامی زاده<sup>۱</sup>

کارشناسی ارشد

ستار جداری سلامی<sup>۲</sup>

دانشیار

این تحقیق روی ارزیابی تیر های ساندویچی تحت خمش سه نقطه ای تمرکز دارد. سه تیر ساندویچی متشکل از هسته های هانی کامب، بتا و آلفا با ضخامت رویه یکسان چاپ سه بعدی شده اند. تئوری مرتبه بالا توسعه یافته تیر ساندویچی در راستای تحلیل استاتیکی خمش سه نقطه ای تیر ها مذکور برای اولین بار توسط این پژوهش بکار گرفته شده است. به منظور مقایسه نتایج تئوری، شبیه سازی عددی در نرم افزار آباکوس و آزمایشات تجربی انجام شد. نتایج تئوری با خطای کمتر از ۵ درصد از آزمایشات تجربی پیروی می کند. دستاورد های بدست آمده از این مطالعه دقیق بینشی جدید را در راستای پیش بینی رفتار الاستیک تیر های ساندویچی چاپ سه بعدی شده ارائه می دهد.

واژه های راهنما: تئوری مرتبه بالا توسعه یافته تیر ساندویچی، آزمایش تجربی خمش سه نقطه، اجزاء محدود، آباکوس، چاپگر سه بعدی

### ۱- مقدمه

مدتها قبل از ساختن سازه ها توسط انسان، مفهوم پانل ساندویچی هانی کامب توسط طبیعت ایجاد شد [۱]. کندوی زنبور عسل نمونه اولیه یک پانل ساندویچی است. برای اولین بار، مدل اولیه از یک تیر سه لایه در قاب های لوکوموتیو استفنسون [۲] در سال ۱۸۳۰ استفاده شد، که با یک قاب سفت و سخت از چوب مقطع مستطیل شکل بین صفحات آهنی به علاوه زیر قاب های فرعی آهنی ساخته شده بود. این ترکیب مؤثر استحکام توأم با انعطاف پذیری قابل توجهی را به ارمغان آورد و همچنین، به عنوان ساختار کاربردی یک نمونه اولیه تیر ساندویچ برای مدت طولانی شناخته شده است [۳].

سازه ساندویچی، ساختاری است که از سه لایه اصلی ساخته شده باشد [۴-۶]. این ساختار ها از دو رویه محکم و نازک اما سفت تشکیل شده است که به یک هسته سلولی ضخیم اما سبک وزن متصل شده اند که به طور

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکزی، تهران، ایران

hos.geramizadeh.eng@iauctb.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

sattar.salami@aut.ac.ir

کلی می توان آنها را در دسته ساختارهای ساندویچی صفحه ای، خارج از صفحه ای و پیچیده (ترکیبی از صفحه ای و خارج از صفحه ای) به دلیل موقعیت قرارگیری هسته آنها طبقه بندی کرد [۷-۱۱].

سازه های ساندویچی خارج از صفحه ای (عرضی) که معمولاً با اکستروژد پیکربندی های دو بعدی ساخته می شوند، از یک هسته مشبک سلولی تک یا چند ردیفی ساخته شده اند [۱۲-۱۵]. هسته در مسائل خاصی مانند چگالش، میرایی نیرو و به ویژه مقاومت برشی نقش کلیدی ایفا می کند [۱۶-۱۸]. از سوی دیگر، رویه های توپر به طور خاص برای سفت تر کردن یک تیر ساندویچی استفاده می شوند، با در نظر گرفتن این حقیقت که سفتی به اندازه استحکام ضروری است. علاوه بر این، این سه لایه اصلی ادغام شده اند تا در مجموع به چگالی جذب انرژی و سفتی خمشی بالاتری برای کل ساختار ساندویچ برسند [۱۹-۲۱]. تیرهای ساندویچی شامل طیف وسیعی از اشکال مختلف با ساختارهای معمولی (با نسبت پوآسون مثبت) تا فوق مواد (با نسبت پوآسون صفر یا منفی) هستند و به دلیل خواص چند منظوره مانند مقاومت در برابر خستگی عالی، چگالی نسبی مطلوب و نسبت سختی و استحکام به وزن بالا در صنایع پیشرفته مانند هوافضا، خودرو و ایمپلنت های پزشکی استفاده می شوند [۲۲-۲۴]. هسته این تیرها معمولاً از هندسه های متنوع سه بعدی مانند هانی کامب افقی و عمودی، آکستیک، مکعبی، اکتت و ایزومکس تشکیل می شوند.

بررسی رفتار مکانیکی خطی و غیر خطی تیر های ساندویچی تحت خمش سه و چهار نقطه ای یکی از مسائل اصلی حوزه مهندسی است که از اوایل قرن هجدهم تا به حال مورد توجه محققان می باشد و همچنین تئوری های معتبری در این زمینه ارائه شده است. تئوری تیر تیموشنکو یکی از معروف ترین آن ها است که توسط استفان تیموشنکو در اوایل قرن بیستم معرفی شده است [۲۵]. این تئوری تغییر شکل های برشی را در نظر می گیرد و آن را برای ارزیابی رفتار تیرهای ضخیم مناسب می کند، در حالی که تئوری تیر اویلر-برنولی (تئوری تیر کلاسیک) آن ها را نادیده می گیرد [۲۶]. اگر مدول برشی ماده تیر به بی نهایت نزدیک شود، تیر در برش صلب می شود و تنها در این حالت است که تئوری تیر تیموشنکو به سمت اویلر-برنولی همگرا می شود. بنابراین، تئوری تیر اویلر-برنولی یک حالت خاص از تیر تیموشنکو است. علاوه بر این، تئوری تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن همزمان تغییر شکل برشی و ممان پیچشی به عنوان تئوری ای مطلوب برای تحلیل رفتار تیرهای ساندویچی شناخته می شود.

از سوی دیگر، تئوری تیر تیموشنکو تاثیر کرنش های برشی را در نظر گرفته ولی توزیع کرنش برشی در راستای ضخامت تیر را ثابت فرض می شود، از این رو قادر به برآورده کردن شرایط مرزی تنش برشی صفر در سطوح بالا و پایین تیر نمی باشد. با در نظر گرفتن این موضوع، تئوری های مراتب بالاتر [۲۷-۲۸] و مثلثاتی در راستای بررسی دقیق تر عملکرد تیر های مذکور معرفی شده اند که به عنوان تئوری های اصلاح شده معروف می باشند. تئوری مرتبه بالا تیر ساندویچی یکی از تئوری های چند لایه مبتنی بر روش جمع آثار برای تیر با هسته انعطاف پذیر عرضی می باشد که در دهه نود میلادی توسط فراستیگ و همکاران ارائه شده است [۲۹]. در این مدل، رویه و هسته به صورت بخش هایی مجزا در نظر گرفته شده، به نحوی که تئوری تیر تیموشنکو و الاستیسیته دو بعدی به ترتیب برای رویه ها و هسته بکار گرفته شده است. در بیشتر مقالاتی که از تئوری مرتبه بالا تیر ساندویچی استفاده شده است، نادیده گرفتن تنش های طولی در هسته یک فرض رایج است که دلیل آن مدول الاستیک و سفتی خمشی پایین هسته نرم در مقایسه با مقادیر متناظر برای رویه های می

باشد. اخیراً، کارلسون و کاردومنز تئوری مرتبه بالا تیر ساندویچی را برای دستیابی به نتایج دقیق تر در همه شرایط به ویژه برای هسته هایی با سفتی بالاتر ارتقاء داده و تئوری مرتبه بالا توسعه یافته تیر ساندویچی را معرفی کرده اند [۳۰]. این تئوری شامل سفتی درون صفحه ای هسته است و می تواند توزیع تنش های نرمال و برش درون صفحه ای در هسته را پیش بینی کند. در این رویکرد، سه مختصات کلی در هسته متشکل از تغییر شکل درون صفحه ای و عرضی، همچنین دوران تار خنثی هسته در نظر گرفته شده است. به علاوه، این تئوری به ترتیب دارای توابع چند جمله ای مربعی و مکعبی برای تغییر مکان های عرضی و درون صفحه ای در ضخامت هسته است.

این مطالعه قصد دارد با استفاده از تئوری مرتبه بالای توسعه یافته تیر ساندویچی پیش بینی دقیقی از رفتار الاستیک تیر های ساندویچی که توسط چاپگر سه بعدی ساخته شده اند، ارائه دهد که تا کنون در هیچ مرجع علمی معرفی نشده است. از آنجاکه هسته و رویه این گونه از تیر ها به صورت یکپارچه از یک پلیمر ساخته می شوند، از این رو دارای هسته ای به مراتب با سفتی خمشی و برشی بالاتر نسبت به سازه های ساندویچی کامپوزیتی می باشند. تحلیل عملکرد سه تیر ساندویچی با هسته های متفاوت هانی کامب، بتا و آلفا تحت خمش سه نقطه ای، هدف اصلی پژوهش پیشرو می باشد. دلیل عمده این انتخاب، بررسی دقت تئوری مذکور در تحلیل خمش سه نقطه ای تیر های ساندویچی چاپ سه بعدی شده با سفتی هسته بالا می باشد. این تحقیق، رویکرد جدیدی در راستای تحلیل تئوری رفتار مکانیکی تیر های مورد بحث با خطای کمتر از ۶/۳ و ۵ درصد به ترتیب بین نتایج عددی با تجربی و تئوری با تجربی ارائه می دهد.

## ۲- مواد و روش ها

### ۲-۱- خواص مکانیکی پلیمر استفاده شده

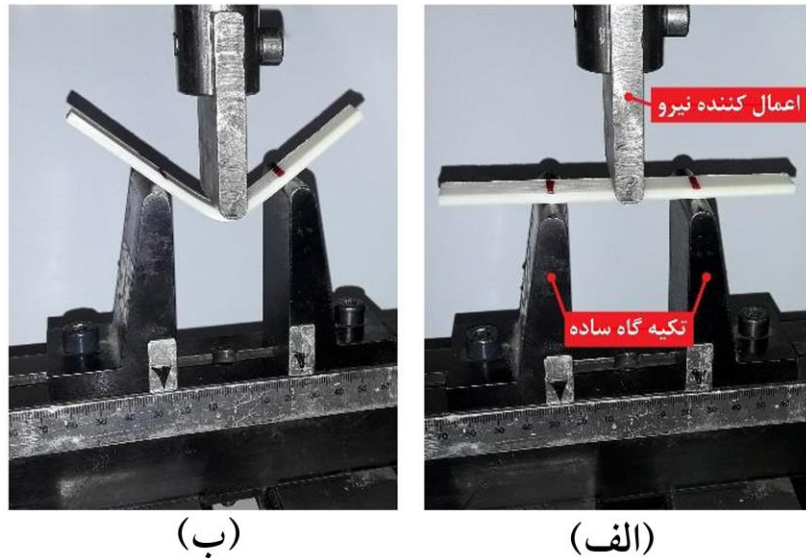
هدف اصلی این پژوهش، تحلیل رفتار مکانیکی سازه های ساندویچی چاپ سه بعدی شده به صورت تئوری، عددی و تجربی است. از این رو محاسبه خواص مکانیکی پلیمر مورد استفاده به منظور اجرای تحلیل عددی، ضروری می باشد. در راستای استخراج خواص مکانیکی غیر خطی ماده پلیمری مذکور، آزمون خمش سه نقطه شبه استاتیکی روی نمونه تیر چاپ سه بعدی شده بر اساس استاندارد ASTM D790-15 به صورت تجربی انجام شد. اجزای دستگاه تست به همراه نمونه در شکل (۱) نشان داده شده است و برای دستیابی به نتایج معتبر، تست روی سه نمونه انجام شده است که نتایج آن به صورت منحنی های تنش- کرنش در شکل (۲) قابل مشاهده می باشد. خواص مکانیکی شامل مدول یانگ ( $E$ ) و ضریب پواسون ( $\nu$ ) در جدول (۱) نشان داده شده است.

### ۲-۲- تیر های ساندویچی چاپ سه بعدی شده

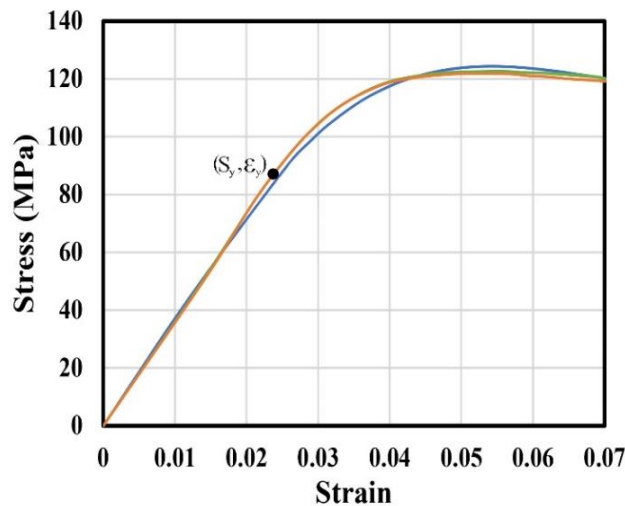
#### ۲-۲-۱- ابعاد کلی تیر های خارج از صفحه

یک تیر ساندویچی خارج از صفحه از سه لایه اصلی ساخته شده است که شامل یک هسته مشبک سلولی تکرار شونده و دو رویه یکسان می باشد. موقعیت قرارگیری این هسته (هسته باز) موازی جهت رویه های می باشد. در این پژوهش، تیر های ساندویچی خارج از صفحه با هسته هانی کامب، بتا و آلفا با تعداد سلول یکسان به

ترتیب ۱۸ و ۶ عدد در راستای محورهای  $x$  و  $z$  می باشد. ابعاد کلی این سه تیر ساندویچی در شکل (۳) به صورت گرافیکی نشان داده شده است. این ابعاد شامل ضخامت هسته ( $t_c$ )، ضخامت رویه ( $t_f$ )، طول تیر ( $L$ ) و عرض تیر ( $B$ ) می باشد که مقادیر آن ها در جدول (۲) ذکر شده است. دستگاه مختصات ( $x, y, z$ ) در لبه ی سمت چپ هر تیر ساندویچی قرار گرفته است.



شکل ۱- آزمون خمش سه نقطه نمونه تیر نازک چاپ سه بعدی شده: (الف) قبل از بارگذاری و (ب) بعد از انجام آزمایش



شکل ۲- منحنی های تنش- کرنش آزمون خمش سه نقطه

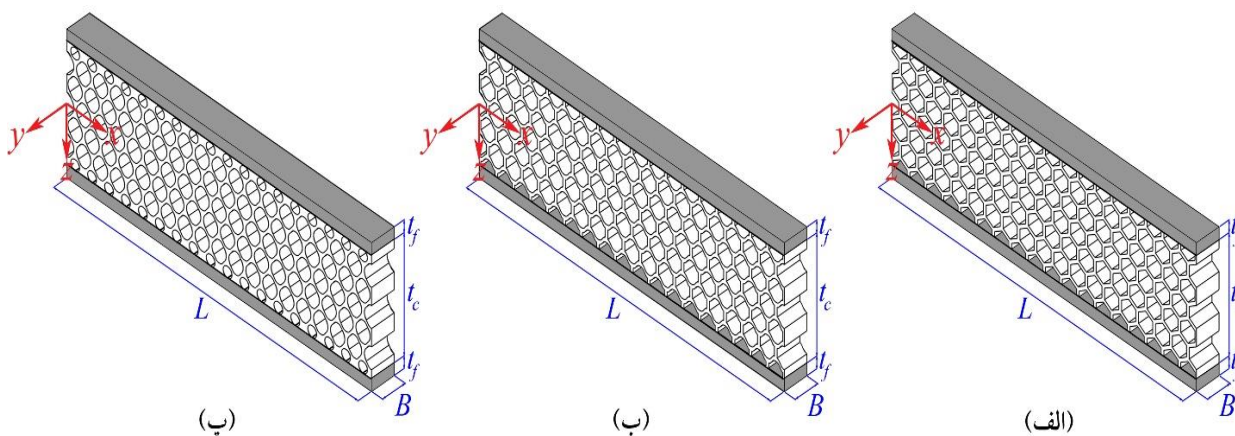
جدول ۱- خواص مکانیکی ماده پلیمر ABS

آزمون	مدول یانگ (GPa)	تنش تسلیم (MPa)	کرنش تسلیم
خمش سه نقطه	$3/67 \pm 0/03$	$87/5 \pm 0/1$	$0/023 \pm 0/001$

ضریب پواسون بعد از شکست محاسبه شده و برابر  $0/35$  می باشد.

### ۲-۲-۲- ابعاد داخلی واحد سلول ها

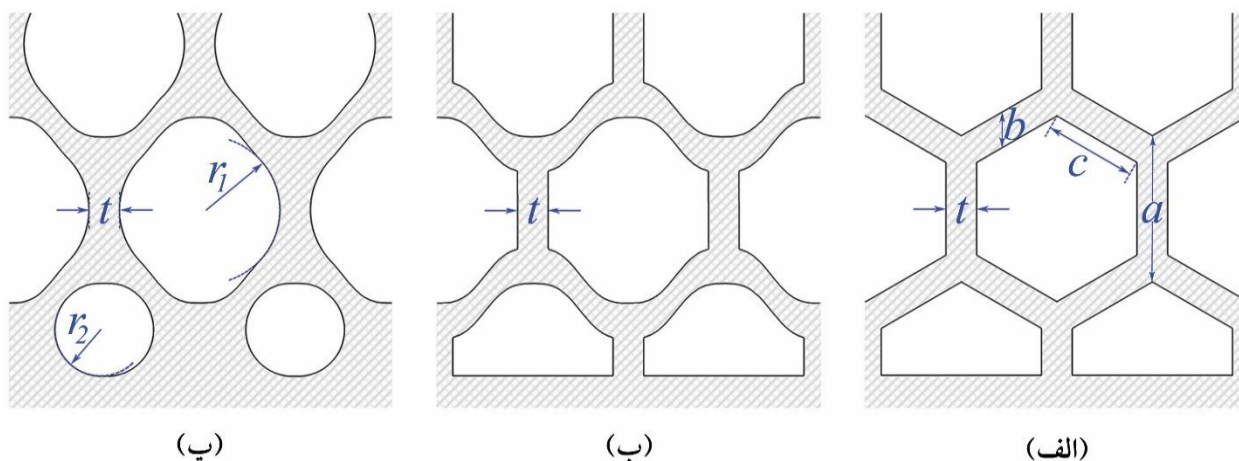
هندسه های یک واحد سلولی هانی کامب، بتا و آلفا به صورت شماتیک در شکل (۴) به تصویر کشیده شده است. همانطور که در این طرح ها نشان داده شده، حروف انگلیسی نشان دهنده ضخامت دیواره  $(t)$ ، طول داخلی دیواره عمودی  $(a)$ ، فاصله عمودی بین دو دیواره مورب  $(b)$ ، طول داخلی دیواره مورب  $(c)$ ، و شعاع های انحنا  $(r_1)$  و  $(r_2)$  می باشند. ابعاد داخلی این سلول های در جدول (۳) نشان داده شده است.



شکل ۳- تیرهای ساندویچی: (الف) هانی کامب، (ب) بتا و (پ) آلفا

جدول ۲- ابعاد کلی تیرهای ساندویچی چاپ سه بعدی شده (mm)

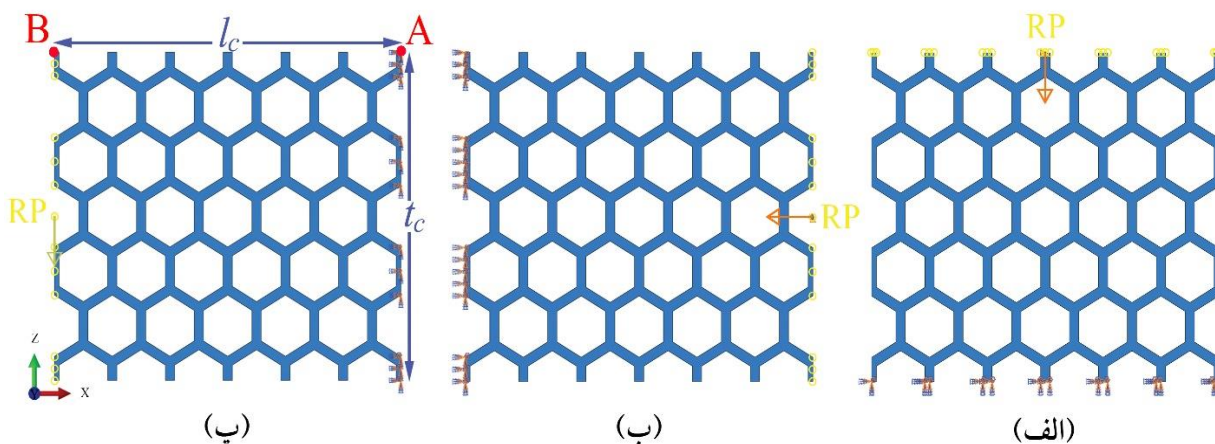
عرض	طول	ضخامت رویه	ضخامت هسته	تعداد ردیف	تیر ساندویچی
۱۰	۱۳۴/۲۸۶	۴	۳۸/۷۶۶	۱۸ در ۶	هانی کامب
۱۰	۱۳۴/۲۸۶	۴	۳۸/۷۶۶	۱۸ در ۶	بتا
۱۰	۱۳۴/۲۸۶	۴	۳۸/۷۶۶	۱۸ در ۶	آلفا



شکل ۴- نمای کلی واحد سلول: (الف) هانی کامب، (ب) بتا و (پ) آلفا

جدول ۳- پارامتر های هندسی واحد سلول های (mm)

هسته	$a$	$b$	$c$	$r_1$	$r_2$	$t$
هانی کامب	۱۰	۱/۳۸۵	۳/۶۱۴	-	-	۱/۲
بتا	-	-	-	-	-	۱/۲
آلفا	-	-	-	۲/۸۸۸°	۱/۸۰۵°	۱/۲



شکل ۵- هسته دو بعدی هانی کامب و شرایط مرزی: (الف) فشار تک محوری در راستای  $z$ ، (ب) فشار تک محوری در راستای  $x$  و (پ) نیروی برشی در راستای  $z$

### ۲-۳- خواص مکانیکی هسته ها

#### ۲-۳-۱- مدل سازی هسته ها

رفتار مکانیکی سه هسته هانی کامب، بتا و آلفا که به ترتیب شامل ۶ در ۶ عدد ردیف سلول در راستای  $x$  و  $z$  می باشند به صورت عددی تحلیل شد. عملکرد هر مدل در سه حالت (شرایط مرزی) مورد بررسی قرار گرفت. یک نقطه مجازی به عنوان نقطه مرجع تعریف و به لبه های مشخص شده با رنگ زرد در شکل (۵) اختصاص داده شد، همچنین در این شکل، جهت های اعمال تغییر مکان، بارگذاری و تکیه گاه گیردار برای هسته هانی کامب نشان داده شده است.

#### ۲-۳-۲- محاسبه مدول الاستیک، مدول برشی و ضریب پواسون

به منظور محاسبه خواص مکانیکی هسته ها، هر سه مدل (هانی کامب، بتا و آلفا) تحت جابجایی فشاری تک محوری در راستای محور  $z$ ، در راستای محور  $x$  بر اساس استاندارد ASTM D1621-16 و نیروی برشی در راستای محور  $z$  بر اساس استاندارد ASTM C273-00 به ترتیب برای بدست آوردن مدول های الاستیک طولی و عرضی ( $E_{11}$  و  $E_{33}$ ) و مدول برشی عرضی ( $G_{13}$ ) هسته ها، قرار گرفتند. علاوه بر این، مقادیر ضریب پواسون ( $\nu_{13}$ ) برای هر سه هسته مطابق دستورالعمل ارائه شده در کتاب مکانیک مواد کامپوزیت جونز، تعیین شدند [۳۱]. معادلات (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب برای محاسبه مدول الاستیک عرضی، مدول الاستیک طولی، مدول برشی عرضی و ضریب پواسون هسته بکار گرفته می شوند.

$$E_{33} = \frac{P_z t_c}{A_h D_z} \quad (۱)$$

$$E_{11} = \frac{P_x l_c}{A_v D_x} \quad (۲)$$

$$G_{13} = \frac{F_z l_c}{A_v L_z} \quad (۳)$$

$$\nu_{13} = \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (۴)$$

$$\nu_{31} = \frac{\nu_{13} E_{33}}{E_{11}} \quad (۵)$$

که  $P_z$  و  $P_x$  نیروهای عکس العمل طولی و عرضی هسته،  $D_x$  و  $D_z$  تغییر شکل های متناظر می باشند.  $A_h$  و  $A_v$  به ترتیب کمترین مساحت مقطع عرضی افقی و عمودی هسته است که از  $A_h = 6tW$  و  $A_v = 6bW$  قابل محاسبه می باشند.  $F_z$  و  $L_z$  به ترتیب نیروی برشی اعمالی و تغییر مکان عرضی نقطه نسبت B به A می باشد (شکل (۵-پ) مشاهده شود). همچنین،  $\varepsilon_{xx} = D_x / l_c$  و  $\varepsilon_{zz} = D_z / t_c$  می باشد. خواص مکانیکی استخراج شده در جدول (۴) قابل مشاهده است.

## ۲-۴- فرایند چاپ سه بعدی

در سال های اخیر روش چاپ سه بعدی به عنوان یک تکنیک دقیق برای ساخت هر سازه ای، حتی هندسه های پیچیده در نظر گرفته می شود. در این پژوهش، نمونه ها توسط دستگاه Prusa i3 به صورت سه بعدی چاپ شده اند که نازل اکسترو در آن دارای قطر ۰/۳ میلی متر می باشد. همه نمونه ها با رشته آکریلونیتریل بوتادین استایرن<sup>۱</sup> با قطر ۱/۷۵ میلی متر از طریق مدل سازی رسوب ذوب شده<sup>۲</sup> ساخته شده اند. به منظور

جدول ۴- خواص مکانیکی هسته های مشبک سلولی (MPa)

$\nu_{13}$	$G_{13}$	$E_{33}$	$E_{11}$	هسته
$0.1843 \pm 0.001$	$36.6 \pm 0.2$	$9.07 \pm 0.5$	$686 \pm 5$	هانی کامب
$0.1680 \pm 0.001$	$46.1 \pm 0.2$	$10.96 \pm 0.5$	$559 \pm 5$	بتا
$0.1599 \pm 0.001$	$71.7 \pm 0.2$	$1721 \pm 0.5$	$673 \pm 5$	آلفا

<sup>1</sup> Acrylonitrile butadiene styrene (ABS)

<sup>2</sup> Fused deposition modeling (FDM)

کاهش هرچه بیشتر فضاهای خالی برای نزدیک تر شدن خواص نمونه های چاپ شده به ماده ایزوتروپیک، ارتفاع هر لایه، زاویه چاپ و درصد چگالی به ترتیب ۰/۱ میلی متر، ۴۵ درجه و ۱۰۰ درصد انتخاب شد. سرعت چاپ، سرعت حرکت، دمای نازل و دمای بستر به ترتیب ۵۰ میلی متر بر ثانیه، ۷۰ میلی متر بر ثانیه، ۲۳۰ درجه سلسیوس و ۷۰ درجه سلسیوس تنظیم شد.

## ۲-۵- تحلیل اجزاء محدود

در این بخش، تجزیه و تحلیل اجزاء محدود برای پیش بینی رفتار تیرهای ساندویچ تحت شرایط مرزی خمش سه نقطه در نرم افزار تجاری آباکوس انجام شد. مدل تغییر شکل پذیر تیرهای ساندویچی (هانی کامب، بتا و آلفا) به دلیل پیکربندی اکستروود شده و شرایط بارگذاری صفحه ای در یک سیستم مختصات دو بعدی شبیه سازی شدند که توسط عناصر چهار ضلعی تنش صفحه ای، دو خطی چهار گره ای، ادغامی کاهش یافته و کنترل ساعت شنی (CPS4R) با اندازه کلی مش ۰/۳ میلی متر، المان بندی شدند. سه منحنی دایره ای با قطر ۱۰ میلی متر به عنوان یک دماغه بارگذاری و دو تکیه گاه ساده ایجاد شدند و نقاط مرجع به آنها اختصاص داده شد. حالت استاتیکی/عمومی به عنوان روش حل انتخاب شد، بعلاوه، اثر هندسی غیر خطی (NLGEOM) به عنوان وسیله ای برای مشاهده تغییر شکل های بزرگ فعال شد. در بخش تعامل، تماس سطح به سطح بین سر بارگذاری و تکیه گاه ها با مدل و بین لبه های داخلی مدل برقرار شد. همچنین، مقدار ضریب اصطکاک ۰/۸ در نظر گرفته شد. یک تغییر مکان محدود در راستای مثبت محور  $z$  به نقطه مرجع دماغه بارگذاری اعمال شد و دو نقطه مرجع دیگر با انتخاب شرایط مرزی گیردار (ENCASTRE)، ثابت شدند.

## ۲-۶- آزمایش خمش سه نقطه شبه استاتیکی

آزمون خمش به عنوان یک آزمایش مناسب برای ارزیابی عملکرد تیر های تحت بار تک محوره شبه استاتیکی شناخته شده است. در این پژوهش، رفتار مکانیکی تیرهای ساندویچی چاپ سه بعدی شده تحت آزمون خمش سه نقطه مطابق استاندارد ASTM C393 مورد بررسی قرار گرفت. ازدستگاه تست یونیورسال (STM 150) با سنسور اندازگیری نیرو با قابلیت تشخیص ۱۰ کیلو نیوتن استفاده شد. دماغه اعمال کننده نیرو با سرعت ۵ میلی متر بر دقیقه در راستای مثبت محور  $z$  جابه جا شد و دو فیکسچر صلب به عنوان تکیه گاه های ساده با قطر ۱۰ میلی متر سفت و محکم شدند. فاصله دو تکیه گاه برابر ۹۰ میلی متر قرار داده شد.

## ۲-۷- مطالعه تئوری

### ۲-۷-۱- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای رویه ها

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)، مولفه های تغییر مکان رویه های بالا و پایین به شرح زیر توصیف می شوند.

$$u^i(x, z) = u_0^i(x) + z_i \phi^i(x) \quad (6)$$



$$w^i(x, z) = w_0^i(x) \quad (7)$$

که بالانویشت  $i$  به رویه های بالا و پایین اشاره می کند،  $w_0^i$  و  $u_0^i$  به ترتیب مولفه های تغییر مکان در جهت های  $x$  و  $z$  هستند،  $\phi^i$  زاویه چرخش خط عرضی در صفحه میانی را نشان می دهد. با توجه به میدان های تغییر مکان، کرنش ها به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\varepsilon_{xx}^i(x, z) = u_{,x}^i(x, z) = u_{0,x}^i(x) + z\phi_{,x}^i(x) \quad (8)$$

$$\gamma_{xz}^i(x, z) = u_{,z}^i(x, z) + w_{,x}^i(x, z) = \phi^i(x) + w_{0,x}^i(x) \quad (9)$$

از آنجا که رویه های بالا و پایین به صورت ایزوتروپیک فرض شده اند، روابط تنش-کرنش برای آن ها براساس رفتار الاستیک خطی به این صورت تعریف می گردد.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^i &= E\varepsilon_{xx}^i \\ \tau_{xz}^i &= G\gamma_{xz}^i \end{aligned} \quad (10)$$

که  $E$  و  $G$  به ترتیب مدول های الاستیک (جدول (۱) مشاهده شود) و برشی و  $(G = E / 2(1 + \nu))$  برشی ها می باشند. گشتاور خمشی و نیروی برشی حاصل از رویه ها بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بر اساس ادغام مؤلفه های تنش خمشی و برشی بر روی ضخامت به شرح زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} M_{xxi} &= \int_{-h_i/2}^{+h_i/2} z\sigma_{xx}^i dz \\ Q_{xxi} &= K_s \int_{-h_i/2}^{+h_i/2} \tau_{xz}^i dz \end{aligned} \quad (11)$$

که  $K_s$  ضریب تصحیح برشی است و به صورت  $K_s = 5/6$  در نظر گرفته شده است.

## ۲-۷-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای هسته

توزیع تغییر مکان طولی و عمودی هسته به صورت چند جمله ای درجه دوم و مکعبی در جهت عرضی تقریب شده است.

$$w^c(x, z) = w_0^c(x) + w_1^c(x)z_c + w_2^c(x)z_c^2 \quad (12)$$

$$u^c(x, z) = u_0^c(x) + \phi_0^c(x)z_c + u_2^c(x)z_c^2 + u_3^c(x)z_c^3 \quad (13)$$

که در آن  $w_0^c(x)$  و  $u_0^c(x)$  به ترتیب تغییر مکان های عرضی و صفحه ای،  $\phi_0^c(x)$  شیب در صفحه میانی هسته است. در تئوری تیر ساندویچی کنونی، هسته به طور کامل به رویه ها متصل است. بنابراین، شرایط سازگاری عرضی و صفحه ای در رابط های بالا ( $z = -c/2$ ) و پایین ( $z = c/2$ ) باید به صورت زیر اقلان شوند.

$$w^c(x, -\frac{c}{2}) = w^t(x) \quad (14)$$

$$u^c(x, -\frac{c}{2}) = u_0^t(x) + \frac{h_t}{2}\phi^t(x) \quad (15)$$

$$w^c(x, \frac{c}{2}) = w^b(x) \quad (16)$$

$$u^c(x, \frac{c}{2}) = u^b(x) - \frac{h_b}{2}\phi^b(x) \quad (17)$$

با استفاده از معادلات (۶) و (۷) و (۱۲ تا ۱۷)،  $w_1^c(x)$ ،  $w_2^c(x)$ ،  $u_2^c(x)$ ،  $u_3^c(x)$  به صورت تحلیلی بر حسب مولفه های تغییر مکان رویه ها، مولفه های تغییر مکان صفحه میانی ( $u_0^c(x)$  و  $w_0^c(x)$ ) شیب در صفحه میانی هسته ( $\phi_0^c(x)$ ) به شرح زیر است.

$$w^c(x, z) = w_0^c(x) + \frac{1}{c} [w_0^b(x) - w_0^t(x)] z_c + \frac{2}{c^2} [w_0^t(x) + w_0^b(x) - 2w_0^c(x)] z_c^2 \quad (18)$$

$$u^c(x, z) = u_0^c(x) + \phi_0^c(x)z_c + \left[ \frac{2}{c^2} \left( u_0^t(x) + u_0^b(x) - 2u_0^c(x) + \frac{h_t}{2}\phi^t(x) - \frac{h_b}{2}\phi^b(x) \right) \right] z_c^2 + \left[ \frac{4}{c^3} \left( -u_0^t(x) - \frac{h_t}{2}\phi^t(x) + u_0^b(x) - \frac{h_b}{2}\phi^b(x) - c\phi_0^c(x) \right) \right] z_c^3 \quad (19)$$

مولفه های کرنش هسته بر اساس روابط تغییر مکان کرنش خطی به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^c(x, z) &= u_{,x}^c(x, z) \\ \gamma_{xz}^c(x, z) &= u_{,z}^c(x, z) + w_{,x}^c(x, z) \\ \varepsilon_{zz}^c(x, z) &= w_{,z}^c(x, z)\end{aligned}\quad (20)$$

پس از جایگزینی معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۲۰) و انجام محاسبات جبری روابط تغییر مکان-کرنش بر اساس متغیرهای مستقل را می توان این طور بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{zz}^c \\ \tau_{xz}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{13}^c & 0 \\ C_{31}^c & C_{33}^c & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{zz}^c \\ \gamma_{xz}^c \end{bmatrix}\quad (21)$$

که  $C_{ij}^c (i, j = 1, 3, 5)$  ضرایب سختی برای مواد ارتوتروپیک است و از روابط زیر قابل محاسبه می باشند.

$$\begin{aligned}C_{11}^c &= \frac{E_{11}}{1 - (\nu_{13}\nu_{31})} \\ C_{13}^c = C_{31}^c &= \frac{\nu_{13}E_{33}}{1 - (\nu_{13}\nu_{31})} \\ C_{33}^c &= \frac{E_{33}}{1 - (\nu_{13}\nu_{31})} \\ C_{55}^c &= G_{13}\end{aligned}\quad (22)$$

روابط تغییر مکان تنش را می توان با درج روابط تغییر مکان-کرنش در معادله (۲۱) بیان کرد. از این رو، تمامی مؤلفه های کرنش و تنش بر حسب تغییر مکان بدست می آیند.

## ۲-۷-۳- معادلات حاکم

روش Ritz برای استخراج معادلات حاکم بر تعادل از تابع انرژی پتانسیل کل تیر ساندویچی اتخاذ شده است. انرژی پتانسیل کلی ( $\Pi$ ) شامل انرژی کرنشی ( $U$ ) و پتانسیل نیروهای خارجی ( $W$ ) است.

$$\Pi = U + W \quad (۲۳)$$

انرژی کرنش شامل دو بخش است: انرژی کرنشی رویه ها ( $U_f$ ) و انرژی کرنشی هسته ( $U_c$ ) که به شرح زیر تعریف می شود [۳۲].

$$U = U_f + U_c \quad (۲۴)$$

انرژی کرنش تیر ساندویچی که متشکل از حاصل ضرب تنش ها در کرنش های رویه ها و هسته است، که به صورت زیر بیان می شوند.

$$U_f = \int_{V_t} \left( \int \sigma_{xx}^t d\varepsilon_{xx}^t + K_s \int \tau_{xz}^t d\gamma_{xz}^t \right) dv_t + \int_{V_b} \left( \int \sigma_{xx}^b d\varepsilon_{xx}^b + K_s \int \tau_{xz}^b d\gamma_{xz}^b \right) dv_b \quad (۲۵ \text{ الف})$$

$$U_c = \int_{V_c} \left( \int \sigma_{xx}^c d\varepsilon_{xx}^c + \int \sigma_{zz}^c d\varepsilon_{zz}^c + \int \tau_{xz}^c d\gamma_{xz}^c \right) dv_c \quad (۲۵ \text{ ب})$$

انرژی کرنش الاستیک برای رویه ها و هسته را می توان با جایگزین کردن معادلات (۱۰) و (۲۱) در معادلات (۲۵) بدست آورد و سپس با در نظر گرفتن شرایط کرنش، ادغام کرد. روابط حاصل را می توان به صورت زیر توصیف کرد.

$$U_f = \int_{V_t} \left( \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^t (\varepsilon_{xx}^t)^2 + \frac{1}{2} K_s \bar{C}_{55}^t (\gamma_{xz}^t)^2 \right) dv_t + \int_{V_b} \left( \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^b (\varepsilon_{xx}^b)^2 + \frac{1}{2} K_s \bar{C}_{55}^b (\gamma_{xz}^b)^2 \right) dv_b \quad (۲۶)$$

$$U_c = \int_{V_c} \left( \frac{1}{2} C_{11}^c (\varepsilon_{xx}^c)^2 + \frac{1}{2} C_{33}^c (\varepsilon_{zz}^c)^2 + C_{13}^c \varepsilon_{xx}^c \varepsilon_{zz}^c + \frac{1}{2} G^c (\gamma_{xz}^c)^2 \right) dv_c$$

که  $V_t$ ،  $V_b$  و  $V_c$  به ترتیب به ناحیه های حجمی رویه های بالا و پایین و هسته اشاره دارد. پس از درج روابط تغییر مکان کرنش در معادلات (۲۶)، انرژی کرنش الاستیک بر اساس اجزای تغییر مکان اینطور به دست می آید.

$$\begin{aligned}
U^f &= \int_{V_t} \left( \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^t (u_{0,x}^t(x) + z \phi_{,x}^t(x))^2 + \frac{1}{2} K_s \bar{C}_{55}^t (\phi^t(x) + w_{0,x}^t(x))^2 \right) dv_t + \\
&+ \int_{V_b} \left( \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^b (u_{0,x}^b(x) + z \phi_{,x}^b(x))^2 + \frac{1}{2} K_s \bar{C}_{55}^b (\phi^b(x) + w_{0,x}^b(x))^2 \right) dv_b \\
U_c &= \int_{V_c} \left( \frac{1}{2} C_{11}^c (u_{0,x}^c(x) + \varphi_{0,x}^c(x) + \left[ \frac{2}{c^2} \left( u_{0,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - 2u_{0,x}^c(x) + \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) \right) \right] z_c^2 + \right. \\
&\left. \left[ \frac{4}{c^3} \left( -u_{0,x}^t(x) - \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) - c \varphi_{0,x}^c(x) \right) \right] z_c^3 + \right. \\
&\left. \frac{1}{2} C_{33}^c \left( \frac{1}{c} [w_0^b(x) - w_0^t(x)] + \frac{4}{c^2} [w_0^t(x) + w_0^b(x) - 2w_0^c(x)] z_c \right)^2 \right. \\
&+ C_{13}^c (u_{0,x}^c(x) + \varphi_{0,x}^c(x) z_c + \left[ \frac{2}{c^2} \left( u_{0,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - 2u_{0,x}^c(x) + \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) \right) \right] z_c^2 + \quad (27) \\
&\left. \left[ \frac{4}{c^3} \left( -u_{0,x}^t(x) - \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) - c \varphi_{0,x}^c(x) \right) \right] z_c^3) \left( \frac{1}{c} [w_0^b(x) - w_0^t(x)] + \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{4}{c^2} [w_0^t(x) + w_0^b(x) - 2w_0^c(x)] z_c \right) + \frac{1}{2} C_{55}^c (\varphi_0^c(x) + \right. \\
&\left. \left[ \frac{4}{c^2} \left( u_{0,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - 2u_{0,x}^c(x) + \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) \right) \right] z_c + \right. \\
&\left. \left[ \frac{12}{c^3} \left( -u_{0,x}^t(x) - \frac{h_t}{2} \phi_{,x}^t(x) + u_{0,x}^b(x) - \frac{h_b}{2} \phi_{,x}^b(x) - c \varphi_{0,x}^c(x) \right) \right] z_c^2 + w_{0,x}^c(x) + \right. \\
&\left. \left. \frac{1}{c} [w_{0,x}^b(x) - w_{0,x}^t(x)] z_c + \frac{2}{c^2} [w_{0,x}^t(x) + w_{0,x}^b(x) - 2w_{0,x}^c(x)] z_c^2 \right)^2 \right) dv_c
\end{aligned}$$

انرژی پتانسیل کار نیروهای خارجی برابر است با:

$$\begin{aligned}
W &= - \int_0^L (n_x^t u_0^t + p_z^t w_0^t + m_{xz}^t \phi^t + n_x^b u_0^b + p_z^b w_0^b + m_{xz}^b \phi^b) dx \\
&- \int_0^L \left( \sum_{k=1}^{KLT} (N_{xk}^t u_0^t + P_{zk}^t w_0^t + M_{xzk}^t \phi^t) \delta_d(x - x_k) \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{KLB} (N_{xk}^b u_0^b + P_{zk}^b w_0^b + M_{xzk}^b \phi^b) \delta_d(x - x_k) \right) dx \quad (28)
\end{aligned}$$

که در آن  $n_x$ ،  $p_z$  و  $m_{xz}$  به ترتیب بارهای گسترده درون صفحه ای و عمودی خارجی و گشتاورهای خمشی گسترده اعمال شده بر روی رویه های هستند.  $N_x$ ،  $P_z$  و  $M_{xz}$  به ترتیب بارهای متمرکز درون صفحه ای، عمودی خارجی و گشتاورهای خمشی متمرکز اعمال شده بر روی رویه های در نقطه  $x = x_k$  هستند.

$KLB$  و  $KLT$  تعداد بارهای متمرکز روی رویه های بالا و پایین هستند و  $\delta_d(x - x_k)$  توابع دلتای Dirac در مکان بارهای متمرکز هستند. بر اساس روش Ritz، توابع تغییر مکان باید بر اساس ارضای شرایط مرزی ضروری، فرض شوند و می توان آنها را بر اساس توابع مثلثاتی متعامد [۳۳] برای مؤلفه های تغییر مکان و دوران در رویه های بالا، پایین و هسته به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} u_0^i(x) &= \sum_{j=1}^M U_j^i \cos((2j-1)\pi x / l) \\ w_0^i(x) &= \sum_{j=1}^M W_j^i \sin((2j-1)\pi x / l) \\ \phi_0^i(x) &= \sum_{j=1}^M \Phi_j^i \cos((2j-1)\pi x / l) \end{aligned} \quad (29)$$

$$i = t, b, c$$

شرایط مرزی در لبه های تیر ( $x=0, l$ ) به صورت زیر در نظر گرفته می شوند.

$$B.C.: \begin{cases} w_0^i(0) = w_0^i(l) = 0 \\ u_0^i(0) = u_0^i(l) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$i = t, c, b$$

با توجه به شرایط مرزی خمش سه نقطه ای، مؤلفه های تغییر مکان طولی و عرضی در دو انتهای تیر ( $w_0^i$  و  $u_0^i$ ) برابر صفر بوده که نشان دهنده تکیه گاه ساده می باشد. علاوه بر این،  $M$  تعداد شرایط تغییر مکان مجهول رویه ها و هسته ای است که باید برای اطمینان از همگرایی توابع سری انتخاب شود و مقدار آن بسته به نوع شرایط مرزی متغیر است. مطالعه همگرایی بر روی انحراف عرضی رویه بالایی انجام شده است [۳۴] که نشان می دهد، نتایج زمانی همگرا می شوند که  $M$  برابر با ۹ و ۷ برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده و گیر دار می باشد. پس می توان اینطور استنباط کرد که انرژی پتانسیل کلی به شرح زیر است [۳۵].

$$\Pi = U_c + U_f + W \quad (31)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل کلی را می توان به عنوان تابعی از ضرایب تغییر مکان مجهول رویه و هسته به دست آورد. علاوه بر این، وابستگی متغیرهای مجهول به مختصات مکانی در معادلات به دست آمده حذف می شود.

در نهایت با درج معادله (۳۱) در معادلات لاگرانژ تعمیم یافته، معادلات حاکم بر تحلیل الاستیک را می توان به صورت زیر استخراج کرد [۳۵].

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_j^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_c}{\partial Q_j^i} + \frac{\partial U_f}{\partial Q_j^i} + \frac{\partial W}{\partial Q_j^i} = 0 \quad (32)$$

$$\{Q_j^i\} = \left\{ \begin{array}{l} \{U_{0j}^t\}, \{\Phi_j^t\}, \{W_{0j}^t\}, \{U_{0j}^b\}, \{\Phi_j^b\}, \{W_{0j}^b\}, \\ \{U_{0j}^c\}, \{\Phi_{0j}^c\}, \{W_{0j}^c\} \end{array} \right\}, j = 1, \dots, M$$

معادلات به دست آمده از (۳۲) سیستمی از معادلات  $9M$  است. مجموعه معادلات ماتریسی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$[K] \{Q^i\} = [F] \quad (33)$$

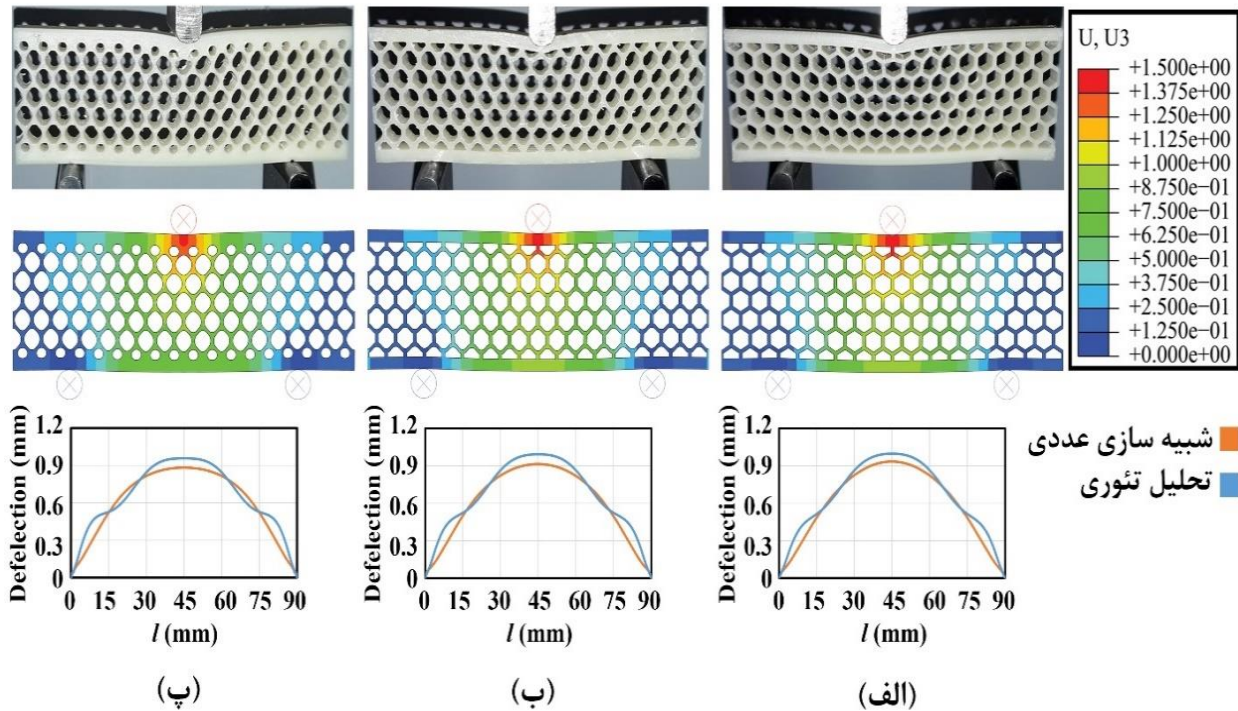
که  $[K]$  ماتریس ضریب (یا ماتریس سختی) و  $[F]$  بردار نیرو است. تعاریف کامل  $[K]$  و  $[F]$  در پیوست ذکر شده است [۳۵]. ضرایب تغییر مکان از طریق حل مجموعه معادلات (۳۳) تعیین می شود. بنابراین، جایگزینی این ضرایب در معادله (۲۹)، تغییر مکان های عمودی و طولی رویه ها و هسته را نشان می دهد. مولفه های تنش و کرنش برای هر قسمت از تیر ساندویچی را می توان بر اساس روابط متناظر تنش-کرنش تشکیل شده، بدست آورد.

### ۳- بحث و نتایج

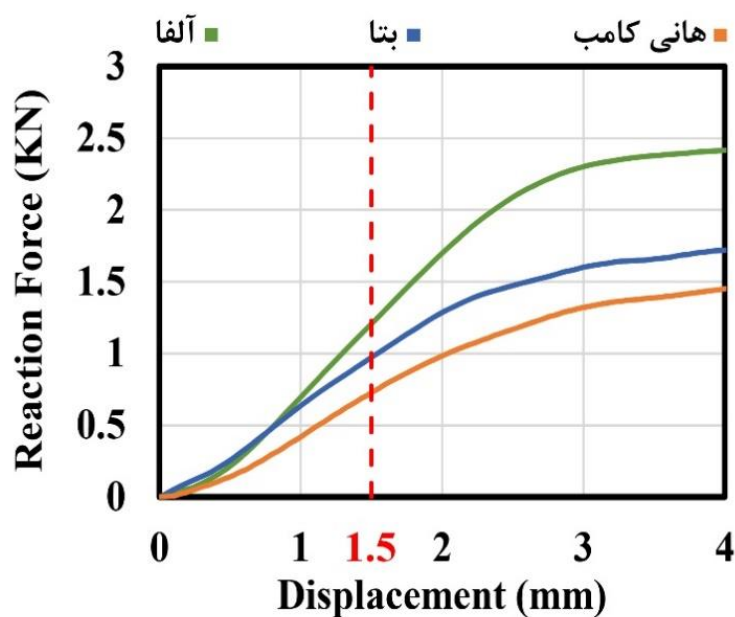
#### ۳-۱- مطالعه مقایسه ای

در این بخش، مطالعه مقایسه ای بین نتایج تئوری، عددی و تجربی انجام می شود. تیر های ساندویچی چاپ سه بعدی شده با سه هسته متفاوت (هانی کامب، بتا و آلفا) و ضخامت رویه یکسان به منظور بررسی تاثیر خواص مکانیکی هسته بر رفتار تیرها تحت خمش سه نقطه ای مورد تحلیل قرار گرفته اند. تغییر شکل تیر های ساندویچی تحت آزمایش تجربی و شبیه سازی عددی، علاوه بر این، تغییر مکان عرضی محاسبه شده توسط حل عددی و تحلیل تئوری برای رویه پایینی در جابه جایی  $1/5$  میلی متر دماغه بارگذاری در شکل (۶)

نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است، با توجه به منحنی های نیروی عکس العمل-تغییر مکان بدست آمده از آزمایشات تجربی خمش سه نقطه ای (شکل ۷) مشاهده شود، سه تیر ساندویچی مذکور در ناحیه الاستیک در نظر گرفته شده اند. علاوه بر این، مقادیر سفتی خمشی تیر ها در جدول (۵) مقایسه شده است.



شکل ۶- مقایسه نتایج تجربی، عددی و تئوری: (الف) هانی کامب، (ب) بتا و (پ) آلفا



شکل ۷- منحنی های نیروی عکس العمل- تغییر مکان تجربی برای سه تیر ساندویچی



## جدول ۵- مقایسه مقادیر سفتی خمشی برای تیرهای ساندویچی

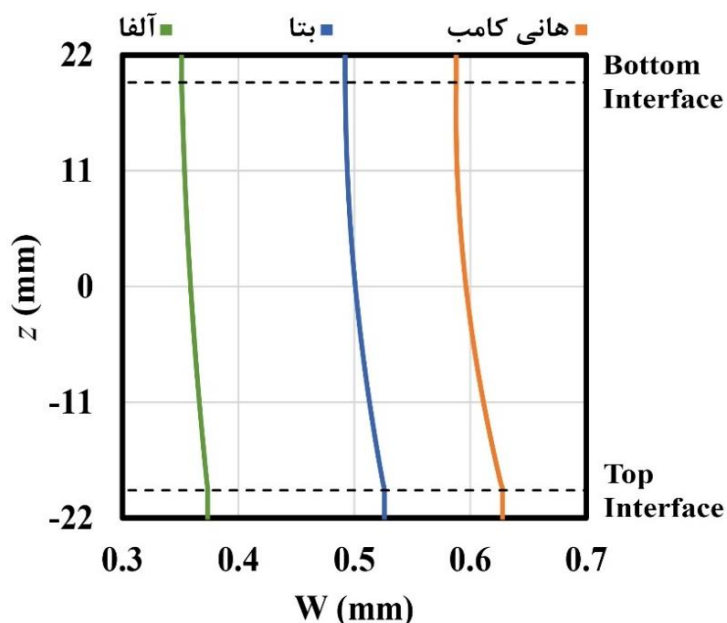
تیر ساندویچی	تجربی (KN/mm)	عددی (KN/mm)	اختلاف عددی و تجربی (%)	تئوری (KN/mm)	اختلاف تئوری و تجربی (%)
هانی کامب	۰/۶۲۱	۰/۶۴	۳/۱	۰/۶۳۷	۲/۶
بتا	۰/۷۲۵	۰/۷۴۸	۳/۲	۰/۷۶۱	۵
آلفا	۱/۰۲۸	۱/۰۹۳	۶/۳	۱/۰۷۲	۴/۳

همانطور که در شبیه سازی های عددی و منحنی های تغییر شکل عرضی رویه پایینی در شکل (۶) مشاهده می شود، مطابق معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک تغییر مکان عرضی تیر، افزایش بیشینه مقدار تغییر مکان عرضی برای رویه پایینی رابطه عکس با افزایش مدول الاستیک هسته در جهت اعمال بارگذاری دارد. همچنین، با مشاهده مقایسه انجام شده در جدول (۵)، انطباق عالی با خطای کمتر از ۶/۳ و ۵ درصد به ترتیب بین نتایج عددی با تجربی و تئوری با تجربی مشاهده می شود که دلالت بر تحلیل عددی منطبق با آزمایشات تجربی و مهم تر از آن بکارگیری مناسب و دقیق تئوری مرتبه بالا توسعه یافته تیر ساندویچی برای پیش بینی رفتار مکانیکی تیر های ساندویچی با هسته های چند ردیفه نرم که چاپ سه بعدی شده اند، در محدوده الاستیک دارد. با این وجود، باید توجه داشت که تفاوت های جزئی بین نتایج ناشی از برخی عوامل تأثیرگذار بوده که به شرح زیر تفسیر می شوند:

- نمونه ها از ماده پلیمری (ABS) با خواص مکانیکی وابسته به زمان ساخته شده اند [۳۶]. از آنجا که تیرهای ساندویچی به طور همزمان چاپ سه بعدی نشده اند، تفاوت های جزئی بین نتایج تئوری، عددی و تجربی قابل مشاهده است.
- مدل ها در شبیه سازی ها به صورت ایزوتروپیک در نظر گرفته شدند. درحالیکه، آنها به دلیل تداخل بین لایه های چاپ شده همگن (ایزوتروپیک) نبودند. این شکاف های کوچک با کاهش ارتفاع لایه و افزایش درصد چگالی به ترتیب تا ۰/۱ میلی متر و ۱۰۰ درصد، به میزان قابل توجهی کاهش یافتند.
- شرایط محیطی مانند رطوبت و دما تأثیرات قابل ملاحظه ای بر خواص مکانیکی سازه های چاپ سه بعدی شده دارند که در این تحقیق تا حد ممکن به حداقل رسیدند [۳۷].

## ۳-۲- تغییر مکان عرضی در راستای ضخامت تیر

تأثیر تغییر خواص مکانیکی هسته بر تغییر مکان عرضی در تیر های ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفت. منحنی های تغییر مکان عرضی در راستای ضخامت تیر با اعمال بار متمرکز ۴۰۰ نیوتن در وسط تیر، در شکل (۸) نمایش داده شده است. در نگاه اول می توان این موضوع را متوجه شد که بیشترین مقادیر تغییر مکان عرضی متعلق به تیر هانی کامب، بتا و سپس آلفا می باشد که نشان می دهد به ترتیب دارای هسته های با سفتی بالاتر می باشند. میزان تغییر مکان عرضی در نواحی پایینی هسته و رویه پایینی تقریباً برابر بوده که از موازی شدن شیب منحنی تغییر مکان با خط عمودی در محل اتصال هسته به رویه پایینی، قابل استنباط است.



شکل ۸- منحنی ها و خطوط تغییر مکان عرضی در راستای ضخامت تیر

### ۳-۳- منته‌های نیروی برشی و گشتاور خمشی

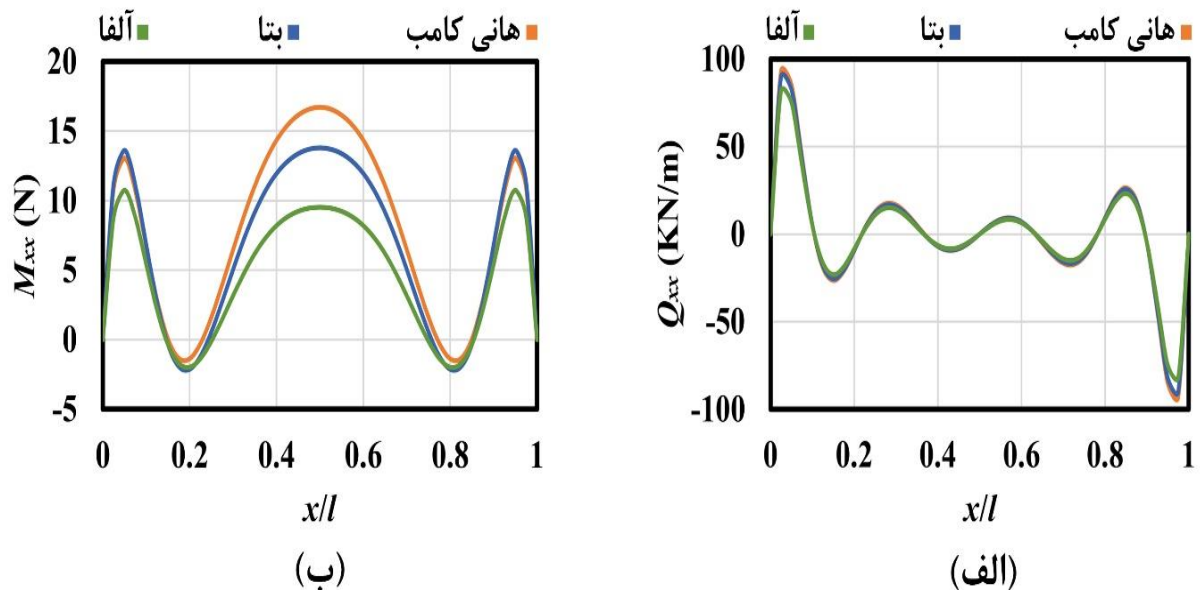
منحنی منته‌های نیروی برشی و گشتاور خمشی بر حسب فاصله نسبی بین دو تکیه گاه ( $x/l$ ) در محل اتصال هسته به رویه پایینی برای هر سه تیر ساندویچی (هانی کامب، بتا و آلفا) در شکل (۹) نمایش داده شده است. همانطور که در نمودار منته‌های نیروی برشی مشاهده می‌شود، بیشترین مقادیر این منته‌ها به ترتیب متعلق به تیرهای هانی کامب، بتا و آلفا می‌باشد و مقادیر حداکثر این منته‌ها برای تیر هانی کامب تقریباً  $13/9$  درصد نسبت به آلفا بیشتر می‌باشد که به دقت تاثیر سفتی بالاتر هسته آلفا نسبت به دو هسته دیگر را نشان می‌دهد.

همچنین، ذکر این نکته حائز اهمیت است که مقادیر منته‌های نیروی برشی در تکیه گاه‌ها ( $x/l = 0, 1$ ) برابر صفر است که گویای ارضای شرایط مرزی می‌باشد. علاوه بر این، به دلیل تقارن در بارگذاری و شرایط مرزی، مقادیر این منته‌ها در وسط تیر ( $x/l = 0.5$ ) نیز در تمامی تیرها برابر صفر می‌باشد. افزایش مدول الاستیک هسته تاثیر به سزایی در کاهش حدوداً ۴۳ درصدی منته‌های گشتاور خمشی در هسته آلفا نسبت به هانی کامب دارد که با مشاهده کاهش مقدار حداکثر منته‌های گشتاور خمشی در وسط تیر قابل تفهیم می‌باشد. با توجه به منحنی‌های منته‌های نیروی برشی و گشتاور خمشی، توزیع بار گسترده غیر یکنواخت در رویه پایینی استنباط می‌شود.

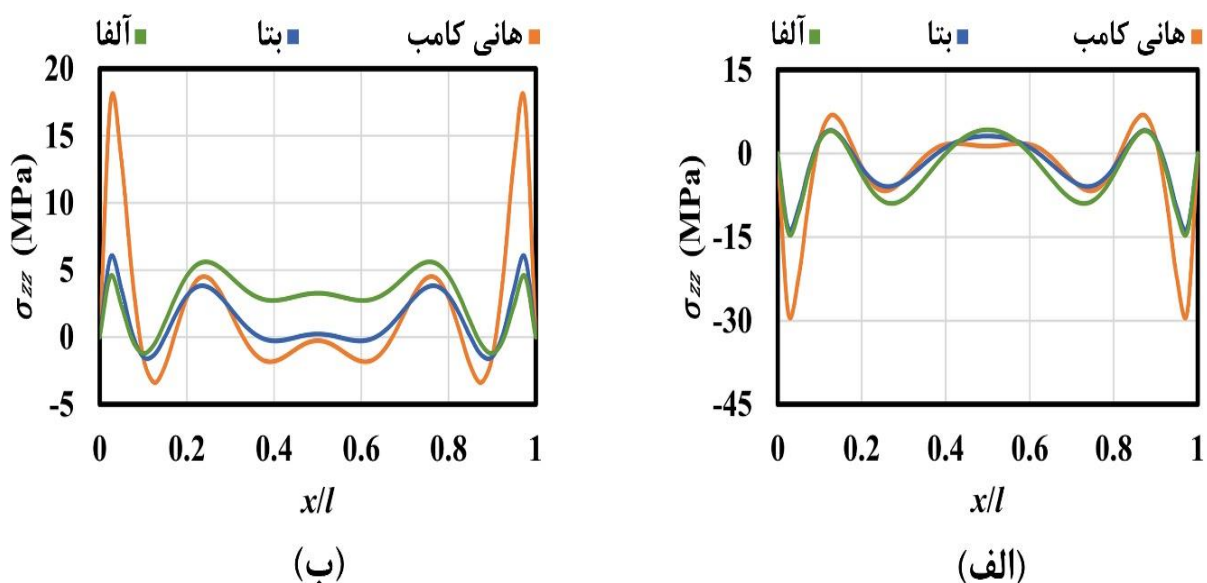
### ۳-۴- مؤلفه تنش نرمال عرضی در محل اتصال رویه‌ها به هسته

مؤلفه تنش نرمال عرضی در لبه پایین رویه‌های بالایی و لبه بالای رویه پایینی (محل اتصال رویه به هسته) در شکل (۱۰) نشان داده شده است. مقادیر مؤلفه تنش نرمال عرضی در محل اتصال رویه بالایی به هسته در وسط تیر به ترتیب برابر  $2/17$ ،  $6/29$  و  $12/39$  مگا پاسکال برای هانی کامب، بتا و آلفا می‌باشد که به وضوح رابطه مستقیم این مؤلفه را با افزایش مدول الاستیک عرضی هسته تبیین می‌کند.

همانطور که در شکل (۱۰) مشاهده می شود، توزیع تنش متعادل تری را در محل اتصال رویه پایینی به هسته برای تیرهای بتا و مخصوصاً آلفا نسبت به هانی کامب می توان مشاهده کرد که به واسطه نزدیکتر شدن مقادیر حداکثر و حداقل نسبی مؤلفه تنش نرمال عرضی و کاهش قابل ملاحظه شیب منحنی این مؤلفه در نواحی اطراف مرکز تیر، به ویژه در محل اتصال رویه پایینی به هسته، قابل تفهیم است. همچنین این نکته قابل ذکر است که مقادیر مؤلفه تنش نرمال عرضی در دو تکیه گاه ( $x/l = 0,1$ ) برابر صفر می باشد که نشانگر اقلان شرایط مرزی است.



شکل ۹- نمودار منتجه های نیروی برشی و گشتاور خمشی در محل اتصال هسته به رویه پایینی: (الف) منحنی منتجه های نیروی برشی- فاصله نسبی بین دو تکیه گاه و (ب) منحنی منتجه های گشتاور خمشی- فاصله نسبی بین دو تکیه گاه



شکل ۱۰- منحنی های مؤلفه تنش نرمال عرضی در محدوده فاصله نسبی بین دو تکیه گاه: (الف) محل اتصال رویه بالایی به هسته و (ب) محل اتصال رویه پایینی به هسته

#### ۴- نتیجه گیری

امروزه، تیر های ساندویچی چاپ سه بعدی شده که شامل طیف وسیعی از انواع هسته های عرضی هستند به واسطه خواص چندگانه ای (نسبت سفتی و استحکام به وزن بالا، چگالی نسبی بهینه شده و قابلیت جذب انرژی مناسب) که دارند، در صنایع مهم مانند هوافضا، مهندسی پزشکی و اتومبیل سازی به صورت گسترده مورد استفاده قرار می گیرند. از این رو، تحلیل رفتار مکانیکی این سازه ها تحت بارگذاری های استاتیکی بسیار با اهمیت می باشد. این پژوهش برای اولین بار از تئوری مرتبه بالا توسعه یافته تیر ساندویچی برای پیش بینی دقیق عملکرد سه تیر ساندویچی با هسته های متفاوت (هانی کامب، بتا و آلفا) تحت شرایط بارگذاری خمش سه نقطه ای، استفاده کرده است. علاوه بر این، نتایج بدست آمده از این تئوری با شبیه سازی اجزاء محدود در نرم افزار آباکوس و آزمایشات تجربی مقایسه شده است. دستاورد های استخراج شده از این تحقیق دقیق به صورت زیر شرح داده می شود:

- تطابق بسیار خوب با خطای کمتر از  $6/3\%$  و  $5\%$  درصد به ترتیب بین نتایج عددی با تجربی و تئوری با تجربی دیده می شود.
- در منحنی های تغییر مکان عرضی در راستای ضخامت تیر، افزایش مدول های الاستیک عرضی و برشی هسته منجر به کاهش چشمگیر مقدار تغییر مکان عرضی در وسط تیر شده است.
- میزان تغییر مکان عرضی در راستای ضخامت هسته از محل اتصال هسته به رویه بالایی تا رویه پایینی در هسته آلفا تقریباً  $6/3\%$  درصد نسبت هسته هانی کامب کاهش داشته که تاثیر افزایش مدول الاستیک عرضی هسته بر کاهش تغییر مکان عرضی را نشان می دهد.
- مقدار حداکثر منتهج نیروی برشی برای تیر هانی کامب، بتا و آلفا به ترتیب برابر  $93$ ،  $90$  و  $82$  کیلو نیوتن بر متر می باشد که به وضوح تاثیر سفتی بالاتر هسته آلفا نسبت به بتا و هانی کامب نشان می دهد.
- با استفاده از تئوری مرتبه بالای توسعه یافته تیر ساندویچی، نمودار های دقیق برای منتهج های نیروی برشی و گشتاور خمشی ارائه شده است.
- مقادیر مؤلفه تنش نرمال عرضی در محل اتصال رویه بالایی به هسته در وسط تیر به ترتیب برابر  $2/17$ ،  $6/29$  و  $12/39$  مگا پاسکال برای هانی کامب، بتا و آلفا می باشد که تاثیر مستقیم افزایش مدول الاستیک عرضی هسته بر این کمیت را نشان می دهد.
- مقادیر منتهج های نیروی برشی، گشتاور خمشی و مؤلفه تنش نرمال عرضی در دو سر تیر برابر صفر بوده و همچنین مقادیر منتهج نیروی برشی در وسط هر سه تیر نیز برابر صفر می باشد که به درستی نشانگر اقناع شرایط مرزی می باشد.

#### مراجع

[1] Soltani, A., Noroozi, R., Bodaghi, M., Zolfagharian, A., and Hedayati, R., "3D Printing On-water Sports Boards with Bio-inspired Core Designs", *Polymers*, Vol. 12(1), pp. 250, (2020).

[2] Pridmore, A., "*The Life of George Stephenson*", 1st Edition, Teaching History, London, pp. 16-18, (1979).

- [3] Smiles, S., "*Lives of the Engineers: The Locomotive: George and Robert Stephenson*", 5th Edition, John Murray, London, pp. 125, (1879).
- [4] Alshaer, A.W., and Harland, D.J., "An Investigation of the Strength and Stiffness of Weight-saving Sandwich Beams with CFRP Face Sheets and Seven 3D Printed Cores", *Composite Structures*, Vol. 257, Article Number. 113391, (2021).
- [5] Smardzewski, J., and Wojciechowski, K.W., "Response of Wood-based Sandwich Beams with Three-dimensional Lattice Core", *Composite Structures*, Vol. 216, pp. 340-349, (2019).
- [6] Li, T., and Wang, L., "Bending Behavior of Sandwich Composite Structures with Tunable 3D-printed Core Materials", *Composite Structures*, Vol. 175, pp. 46-57, (2017).
- [7] Sarvestani, H.Y., Akbarzadeh, A.H., Niknam, H., and Hermenean, K., "3D Printed Architected Polymeric Sandwich Panels: Energy Absorption and Structural Performance", *Composite Structures*, Vol. 200, pp. 886–909, (2018).
- [8] Sun, S., Liu, D., Sheng, Y., Feng, S., Zhu, H., and Lu, T.J., "Out-of-plane Compression of a Novel Hybrid Corrugated Core Sandwich Panel", *Composite Structures*, Vol. 272, Article Number. 114222, (2021).
- [9] Spahic, M., Di Cesare, N., Le Duigou, A., and Keryvin, V., "Multi-scale Analysis of the Flexural Behaviour of 3D Printed Cellular Polymer Materials: Comparison between Morphing and Sandwich Beams", *Composite Structures*, Vol. 273, Article Number. 114249, (2021).
- [10] Khan, M.K., Baig, T., and Mirza, S., "Experimental Investigation of In-plane and Out-of-plane Crushing of Aluminum Honeycomb", *Materials Science and Engineering*, Vol. 539, pp. 135-142, (2012).
- [11] Harland, D., Alshaer, A.W., and Brooks, H., "An Experimental and Numerical Investigation of a Novel 3D Printed Sandwich Material for Motorsport Applications", *Procedia Manufacturing*, Vol. 36, pp. 11–18, (2019).
- [12] Zaharia, S.M., Enescu, L.A., and Pop, M.A., "Mechanical Performances of Lightweight Sandwich Structures Produced by Material Extrusion-based Additive Manufacturing", *Polymers*, Vol. 12, pp. 1740, (2020).
- [13] Indreş, A.I., Constantinescu, D.M., and Mocian, O.A., "Bending Behavior of 3D Printed Sandwich Beams with Different Core Topologies", *Material Design and Processing Communications*, Vol. 3, pp. 1-8, (2021).
- [14] Zhang, Z., Lei, H., Xu, M., Hua, J., Li, C., and Fang, D., "Out-of-plane Compressive Performance and Energy Absorption of Multi-layer Graded Sinusoidal Corrugated Sandwich Panels", *Materials and Design*, Vol. 178, Article Number. 107858, (2019).
- [15] Geramizadeh, H., Dariushi, S., and Jedari Salami, S., "Optimal Face Sheet Thickness of 3D Printed Polymeric Hexagonal and Re-entrant Honeycomb Sandwich Beams Subjected to Three-point Bending", *Composite Structures*, Vol. 291, Article Number. 115618, (2022).
- [16] Ghazlan, A., Nguyen, T., Ngo, T., and Linforth, S., "Performance of a 3D Printed Cellular

Structure Inspired by Bone", *Thin-walled Structures*, Vol. 151, Article Number. 106713, (2020).

[17] Ge, C., Cormier, D., and Rice, B., "Damping and Cushioning Characteristics of Polyjet 3D Printed Photopolymer with Kelvin Model", *Journal of Cellular Plastics*, Vol. 57, pp. 517-534, (2021).

[18] Jin, S., Korkolis, Y.P., and Li, Y., "Shear Resistance of an Auxetic Chiral Mechanical Metamaterial", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 174, pp. 28-37, (2019).

[19] Geramizadeh, H., Dariushi, S., and Jedari Salami, S., "Numerical and Experimental Investigation for Enhancing the Energy Absorption Capacity of the Novel Three-dimensional Printed Sandwich Structures", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 235(7), pp. 1622-1634, (2021).

[20] Unlusoy, C., and Melenka, G.W., "Flexural Testing of Cellulose Fiber Braided Composites using Three Dimensional Digital Image Correlation", *Composite Structures*, Vol. 230, Article Number. 111538, (2019).

[21] Sarvestani, H.Y., Akbarzadeh, A.H., Mirbolghasemi, A., and Hermenean, K., "3D Printed Meta-sandwich Structures: Failure Mechanism, Energy Absorption and Multi-hit Capability", *Materials and Design*, Vol. 160, pp. 179–193, (2018).

[22] Ghavidelnia, N., Jedari Salami, S., and Hedayati, R., "Analytical Relationships for Yield Stress of Five Mechanical Meta-biomaterials", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 50(10), pp. 3452-3474, (2020).

[23] Hedayati, R., Jedari Salami, S., Li, Y., Sadighi, M., and Zadpoor, A.A., "Semianalytical Geometry-property Relationships for Some Generalized Classes of Pentamodelike Additively Manufactured Mechanical Metamaterials", *Physical Review Applied*, Vol. 11(3), pp. 034057, (2019).

[24] Shang, X., Liu, L., Rafsanjani, A., and Pasini, D., "Durable Bistable Auxetics Made of Rigid Solids", *Journal of Materials Research*, Vol. 33(3), pp. 300-308, (2018).

[25] Timoshenko, S.P., "X. on the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-section", *the London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 41(253), pp. 744–746, (1922).

[26] Timoshenko, S., and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity*", 1st Edition, McGraw-Hill, New York, pp. 35, (1951).

[27] Babaei, M., Asemi, K., and Safarpour, P., "Buckling and Static Analyses of Functionally Graded Saturated Porous Thick Beam Resting on Elastic Foundation Based on Higher Order Beam Theory", *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 20(1), pp. 94–112, (2019).

[28] Babaei, M., Asemi, K., and Safarpour, P., "Natural Frequency and Dynamic Analyses of Functionally Graded Saturated Porous Beam Resting on Viscoelastic Foundation Based on Higher Order Beam Theory", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 11(3), pp. 615–634, (2019).

- [29] Frostig, Y.B.M.V.O.S.I., Baruch, M., Vilnay, O., and Sheinman, I., "High-order Theory for Sandwich-beam Behavior with Transversely Flexible Core", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118 (5), pp. 1026–1043, (1992).
- [30] Carlsson, L.A., and Kardomateas, G.A., "*Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites*", 1st Edition, Springer Science and Business Media, Berlin, pp. 145, (2011).
- [31] Jones, R.M., "*Mechanics of Composite Materials*", 2nd Edition, Taylor and Francis, Philadelphia, pp. 132, (1999).
- [32] Jedari Salami, S., Sadighi, M., and Shakeri, M., "Improved Extended High Order Analysis of Sandwich Beams with a Bilinear Core Shear Behavior", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 16(6), pp. 633–668, (2014).
- [33] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", 2nd Edition, CRC Press, Florida, pp. 671, (2003).
- [34] Jedari Salami, S., "Extended High Order Sandwich Panel Theory for Bending Analysis of Sandwich Beams with Carbon Nanotube Reinforced Face Sheets", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 76, pp. 187–197, (2016).
- [35] Song, Y.S., and Youn, J.R., "Modeling of Effective Elastic Properties for Polymer Based Carbon Nanotube Composites", *Polymer*, Vol. 47(5), pp. 1741–1748, (2006).
- [36] Salazar-Martín, A.G., Pérez, M.A., García-Granada, A.A., Reyes, G., and Puigoriol-Forcada, J.M., "A Study of Creep in Polycarbonate Fused Deposition Modelling Parts", *Materials and Design*, Vol. 141, pp. 414–425, (2018).
- [37] Khosravani, M.R., Zolfagharian, A., Jennings, M., and Reinicke, T., "Structural Performance of 3D-printed Composites under Various Loads and Environmental Conditions", *Polymer Testing*, Vol. 91, Article Number. 106770, (2020).

## فهرست نمادهای انگلیسی

ضریب سختی	$C_{ij}$
مدول الاستیک پلیمر	$E$
مدول الاستیک طولی هسته	$E_{11}$
مدول الاستیک عرضی هسته	$E_{33}$
مدول برشی هسته	$G_{13}$
ضریب تصحیح برشی	$K_s$
فاصله بین دو تکیه گاه	$l$
گشتاور خمشی در رویه	$M_{xxi}$

گشتاور خمشی متمرکز	$M_{xz}$
گشتاور خمشی گسترده	$m_{xz}$
بار متمرکز درون صفحه ای	$N_x$
بار گسترده درون صفحه ای	$n_x$
بار متمرکز عمودی خارجی	$P_z$
بار گسترده عمودی خارجی	$p_z$
ضریب مجهول	$Q_j^i$
نیروی برشی در رویه	$Q_{xxi}$
تنش تسلیم پلیمر	$S_y$
انرژی کرنشی	$U$
مؤلفه تغییر مکان عرضی	$u$
ناحیه حجمی	$V$
انرژی پتانسیل نیروهای خارجی	$W$
مؤلفه تغییر مکان طولی	$w$

### نمادهای یونانی

انرژی پتانسیل کلی	$\Pi$
مؤلفه کرنش برشی	$\gamma_{xz}$
مؤلفه کرنش طولی	$\epsilon_{xx}$
کرنش تسلیم	$\epsilon_y$
مؤلفه کرنش عرضی	$\epsilon_{zz}$
مؤلفه تنش نرمال طولی	$\sigma_{xx}$
مؤلفه تنش برشی	$\tau_{xz}$
ضریب پواسون	$\nu$
زاویه چرخش خط عرضی در صفحه میانی	$\phi$



## پیوست ها

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial U_{0(1..M)}^t}, i=1..9M, j=1..M, K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial \Phi_{(1..M)}^t}, i=1..9M, j=M+1..2M,$$

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial W_{0(1..M)}^t}, i=1..9M, j=2M+1..3M, K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial U_{0(1..M)}^b}, i=1..9M, j=3M+1..4M,$$

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial \Phi_{(1..M)}^b}, i=1..9M, j=4M+1..5M, K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial W_{0(1..M)}^b}, i=1..9M, j=5M+1..6M,$$

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial U_{0(1..M)}^c}, i=1..9M, j=6M+1..7M, K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial \Phi_{0(1..M)}^c}, i=1..9M, j=7M+1..8M,$$

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial W_{0(1..M)}^c}, i=1..9M, j=8M+1..9M$$

بردار  $R_i$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$R_{1..M} = \frac{\partial \Pi}{\partial U_{0(1..M)}^t}, R_{M+1..2M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_{(1..M)}^t}, R_{2M+1..3M} = \frac{\partial \Pi}{\partial W_{0(1..M)}^t},$$

$$R_{3M+1..4M} = \frac{\partial \Pi}{\partial U_{0(1..M)}^b}, R_{4M+1..5M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_{(1..M)}^b}, R_{5M+1..6M} = \frac{\partial \Pi}{\partial W_{0(1..M)}^b},$$

$$R_{6M+1..7M} = \frac{\partial \Pi}{\partial U_{0(1..M)}^c}, R_{7M+1..8M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_{0(1..M)}^c}, R_{8M+1..9M} = \frac{\partial \Pi}{\partial W_{0(1..M)}^c}$$

و همچنین بردار نیرو به صورت زیر تعریف می شود.

$$F_{1..M} = -\frac{\partial W}{\partial U_{0(1..M)}^t}, F_{M+1..2M} = -\frac{\partial W}{\partial \Phi_{(1..M)}^t}, F_{2M+1..3M} = -\frac{\partial W}{\partial W_{0(1..M)}^t},$$

$$F_{3M+1..4M} = -\frac{\partial W}{\partial U_{0(1..M)}^b}, F_{4M+1..5M} = -\frac{\partial W}{\partial \Phi_{(1..M)}^b}, F_{5M+1..6M} = -\frac{\partial W}{\partial W_{0(1..M)}^b},$$

$$F_{6M+1..7M} = -\frac{\partial W}{\partial U_{0(1..M)}^c}, F_{7M+1..8M} = -\frac{\partial W}{\partial \Phi_{0(1..M)}^c}, F_{8M+1..9M} = -\frac{\partial W}{\partial W_{0(1..M)}^c}$$

**Abstract**

This study focuses on evaluating the performance of sandwich beams under three-point bending test. Three sandwich beams consisting of transverse cores of Honeycomb, Beta, and Alpha with the same face sheets thickness are fabricated by employing a 3D printer. The extended high order sandwich beam theory has been used to carry out the static analysis of three-point bending behavior of the beams for the first time by this work. In order to compare the theoretical results, numerical simulations were implemented in ABAQUS software and experimental tests were performed. The theoretical results with less than 5% error follow the experimental ones. The tremendous achievements of the current investigation provide a novel insight into prognosticating the performance of the 3D printed sandwich beams.