

بررسی کمانش میکرو-ورق تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک

در این مقاله کمانش میکرو-ورق مدرج تابعی تقویت شده با صفحات کوچک گرافن با لایه های پیزوالکتریک بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات درجه حرارت به صورت یکنواخت و میدان الکتریکی خارجی ثابتی در راستای ضخامت، بر میکرو-ورق اعمال شده است. نیروی مکانیکی درون صفحه‌ای خارجی به صورت یکنواخت بر روی لبه های میکرو-ورق توزیع شده است. خواص هر لایه کامپوزیت تقویت شده با صفحات کوچک گرافن، با استفاده از مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای محاسبه گردیده است. اثر پارامترهای مختلف هندسی و کسر وزنی گرافن بر کمانش میکرو-ورق مدل شده مورد بررسی قرار گرفته است.

فاطمه عباس‌پور^۱

دکتر

هادی آروین بروجنی^۲

دانشیار

واژه‌های راهنما: تئوری تنش کوپل اصلاح شده، گرافن، کمانش حرارتی، کمانش مکانیکی، اثر پیزوالکتریک

۱- مقدمه

اخیرا میکرو-سازه‌ها از جمله میکرو-تشدیدکننده‌ها و میکرو-عملگرها تنها موضوعی برای تحقیقات نیستند بلکه در صنایع مختلف مانند صنعت هوافضا به صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از سوی دیگر، گرافن یک ماده تقویت کننده است که برای بهبود بخشیدن به خواص مهندسی سازه‌ها، جهت کارآمدتر نمودن سازه میزبان از نظر ویژگی‌های حرارتی و مکانیکی به کار گرفته می‌شود. بنابراین به دلیل کاربرد وسیع این سازه‌ها در صنایع مختلف، در این مقاله به بررسی رفتار کمانش میکرو-ورق پیزوالکتریک تقویت شده با صفحات گرافن پرداخته می‌شود. در ادامه مروری بر پژوهش‌های پیشین در این زمینه صورت گرفته است.

لیو و همکاران [۱] به بررسی پس کمانش حرارتی-الکترومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی با در نظر گرفتن یک میدان الکتریکی ثابت در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک پرداختند. ایشان نشان دادند که ولتاژ منفی سازه را نرم‌تر کرده و متعاقبا اختلاف دمای بحرانی را افزایش می‌دهد. ماتسونگا [۲] کمانش حرارتی ورق مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا دو بعدی مورد مطالعه قرار داد. او نشان داد که مدل توسعه یافته دقیقا اختلاف دمای بحرانی، توزیع میدان جابجایی و مولفه‌های تانسور تنش ورق هدفمند را

^۱ دکترا، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد abbaspour@stu.sku.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد hadi.arvin@sku.ac.ir

محاسبه می‌کند. میرزاوند و اسلامی [۳] کماتش حرارتی ورق مدرج تابعی با لایه‌های پیژوالکتریک را تحلیل کردند. در نتایج ارائه شده اثرات شاخص کسر حجمی مواد مدرج تابعی، ولتاژ عملگر و ابعاد ورق بر رفتار کماتش ورق نشان داده شد. کیانی و همکاران [۴] رفتار کماتش حرارتی-مکانیکی ورق ساندویچی با رویه‌های مدرج تابعی بر بستر الاستیک پسترناک را مورد بررسی قرار دادند. ایشان نشان دادند که رفتار کماتش ورق ساندویچی متأثر از ابعاد ورق، پارامترهای بستر الاستیک و شاخص قانون توان است. کی و همکاران [۵] کماتش، خمش و ارتعاشات آزاد میکرو-ورق دایره‌ای مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان دریافتند هنگامی که نسبت ضخامت میکرو-ورق به پارامتر اثر اندازه کمتر از ۱۰ است، اثر اندازه بر رفتار کماتشی و ارتعاشاتی میکرو-ورق قابل توجه است. کماتش حرارتی ورق ساندویچی مدرج تابعی توسط کتاف و همکاران [۶] با به کارگیری یک مدل جابجایی برشی هایپربولیک جدید، مورد بحث و بررسی قرار گرفت. ایشان اثر کسر حجمی، نوع بارگذاری و ضخامت لایه‌های مدرج تابعی بر رفتار کماتش حرارتی ورق ساندویچی مدرج تابعی را بررسی کردند. کماتش حرارتی میکرو-ورق مدرج تابعی مستطیلی میندلین بر اساس تئوری گرادیان کرنش توسط انصاری و همکاران [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. اثرات پارامتر اثر اندازه و شرایط مرزی بر اختلاف دمای بحرانی کماتش مورد بررسی قرار گرفت. یعقوبی و همکاران [۸] کماتش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی با لایه‌های پیژوالکتریک با خواص وابسته به دما، را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان اثر نسبت منطری، نسبت ضخامت لایه‌های پیژوالکتریک به ضخامت لایه مدرج تابعی، شاخص قانون توان و ولتاژ عملگر را بر اختلاف دمای بحرانی کماتش مورد بررسی قرار دادند. محمدی و ماهانی [۹] حلی عددی جهت تحلیل کماتش وابسته به اندازه میکرو-ورق مستطیلی بر اساس تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده ارائه دادند. ایشان اثر حالت‌های بارگذاری، ابعاد و پارامتر اثر اندازه را بر رفتار کماتش ورق مورد بررسی قرار دادند. انصاری و همکاران [۱۰] تحلیل کماتش، خمش و ارتعاشات آزاد میکرو-ورق مدرج تابعی میندلین را بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش ارائه دادند. ایشان دریافتند که با نزدیک شدن ضخامت میکرو-ورق به پارامتر اثر اندازه، اثرات وابسته به اندازه مشهود تر است. وو و همکاران [۱۱] کماتش و پس کماتش حرارتی ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با گرافن را بر اساس مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای مورد مطالعه قرار دادند. ایشان اهمیت نحوه توزیع گرافن در کماتش و پس کماتش حرارتی را نشان دادند. شن و همکاران [۱۲] کماتش و پس کماتش ورق‌های کامپوزیتی چندلایه تقویت شده با گرافن را بررسی کردند. نتایج نشان داد که نیروی بحرانی کماتش و استحکام پس کماتش ورق‌های تقویت شده با گرافن تحت تاثیر نحوه توزیع گرافن هستند. براتی و همکاران [۱۳] رفتار پس کماتش تیر متخلخل ناقص هندسی تقویت شده با گرافن و قرار داده شده بر بستری با سفتی غیرخطی مورد مطالعه قرار دادند. ایشان اثر ضریب تخلخل، توزیع تخلخل، توزیع گرافن، کسر حجمی گرافن، عیوب هندسی و پارامترهای بستر را بر رفتار کماتش تیر متخلخل بررسی کردند. یانگ و همکاران [۱۴] به بررسی کماتش و ارتعاشات آزاد نانورق کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با گرافن مدرج تابعی پرداختند. ایشان نشان دادند که افزایش نسبت ضخامت، بار بحرانی کماتش و فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد. آقازاده و همکاران [۱۵] ارتعاشات آزاد و کماتش حرارتی میکرو-ورق مدرج تابعی را با به کارگیری تئوری گرادیان کرنش مورد بررسی قرار دادند. نتایج حاصل نشان داد که اثر اندازه، زمانی که ضخامت ورق نسبت به پارامتر اثر اندازه کوچکتر است، نقش مهم‌تری ایفا می‌کند. اثر ترک ماتریس بر تحلیل کماتش ورق‌های کامپوزیتی چندلایه مدرج

تابعی تقویت شده با نانولوله کربنی، توسط لی و ژانگ [۱۶] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار گرفت. اثرات شرایط مرزی و نحوه توزیع نانولوله کربنی بر رفتار کمانش بررسی شد. چودری و جانا [۱۷] موقعیت برش بر روی ورق اورتوتروپیک با تکیه‌گاه ساده در معرض نیروهای درون صفحه‌ای در لبه‌ها را جهت پیشینه کردن بار بحرانی کمانش، بهینه ساختند. نتایج حاصل نشان داد که موقعیت بهینه برش نه تنها به خواص مادی، بلکه به شکل هندسی و لایه چینی بستگی دارد. جیانگ و همکاران [۱۸] کمانش، پس کمانش و ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های دوزنقه‌ای کامپوزیتی در محیط حرارتی را با استفاده از المان محدود تحلیل کردند. در این پژوهش، اثرات درجه حرارت و زاویه الیاف بر نتایج حاصل مورد بررسی قرار گرفت. سانگ و همکاران [۱۹] خمش و کمانش ورق‌های گرافن را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل نشان داد که با تقویت فاز ماتریس با مقدار کمی گرافن، بار بحرانی کمانش به صورت چشم‌گیری افزایش یافته و در نتیجه خمش کمتری رخ خواهد داد. جوانی و همکاران [۲۰] رفتار کمانش نانو ورق کامپوزیتی تقویت شده با گرافن را بررسی کردند. نتایج عددی نشان داد که افزایش درصد حجمی گرافن سبب افزایش بار کمانش خواهد شد. شاهوردی و همکاران [۲۱] به بررسی پس کمانش پانل‌های ساندویچی با هسته لانه زنبوری کامل/ ناقص هندسی و رویه‌های تقویت شده با گرافن پرداختند. پس از حل تحلیلی معادلات حاکم و استخراج نیروی پس کمانش، نشان داده شد که بار پس کمانش متأثر از ضخامت هسته، ضخامت رویه، نحوه توزیع گرافن در رویه‌ها، نقص هندسی و ضخامت دیواره سلولی هسته است. میرجوادی و همکاران [۲۲] پاسخ دینامیکی پوسته‌های تقویت شده با گرافن مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج حاصل نشان داد که افزایش درصد گرافن سبب افزایش فرکانس تشدید پوسته خواهد شد. براتی و شاهوردی [۲۳] ارتعاشات آزاد تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده با گرافن در محیط حرارتی را بررسی کردند. نتایج عددی حاصل از روش المان محدود نشان داد که انحراف دینامیکی به طور قابل توجهی متأثر از تغییرات دما، نحوه توزیع گرافن، بستر الاستیک، کسر وزنی گرافن و فرکانس تحریک است.

با توجه به پیشینه تحقیق ارائه شده، رفتار میکرو-ورق‌های تقویت شده با صفحات کوچک گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک، هنوز مورد مطالعه و بررسی قرار نگرفته است. از این رو در این مقاله به بررسی و تحلیل کمانش مکانیکی و حرارتی-الکتریکی این نوع میکرو-ورق‌ها پرداخته خواهد شد. معادلات حاکم بر پایه فرضیات تئوری ورق کیرشهف و تئوری تنش کوپل اصلاح شده هستند. مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای به منظور تعیین خواص لایه‌های کامپوزیتی میکرو-ورق تقویت شده با گرافن به کار گرفته می‌شود. همچنین تابع پتانسیل الکتریکی به صورت یک توزیع کسینوسی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک در نظر گرفته می‌شود در حالی که به صورت نامشخص به جهت‌های درون صفحه‌ای نیز وابسته است. لایه‌های پیزوالکتریک در معرض یک میدان الکتریکی خارجی ثابت قرار می‌گیرند. تغییرات دما در راستای ضخامت ورق، یکنواخت فرض می‌شود. نیروهای درون صفحه‌ای اعمالی خارجی در راستای لبه‌های میکرو-ورق به صورت یکنواخت توزیع شده اند. اصل همیلتون بر انرژی‌های کرنش و جنبشی به منظور دستیابی به معادلات حرکت اعمال می‌شود. بعلاوه روش ناویر برای استخراج نتایج عددی تحلیل کمانش میکرو-ورق مدرج تابعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده استفاده می‌شود. به منظور تعدیل توزیع لایه‌های گرافن مدرج تابعی، یک تحلیل عددی انجام می‌شود تا تعداد مورد نیاز لایه‌های گرافن برای داشتن یک توزیع پیوسته از خواص مکانیکی در

راستای ضخامت میکرو-ورق را نشان دهد. در نهایت، اثر الگوی توزیع گرافن، کسر حجمی گرافن، نسبت ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت لایه مدرج تابعی میزبان و نسبت پارامتر اثر اندازه به ضخامت لایه میزبان مدرج تابعی بر رفتار کمانش مکانیکی و حرارتی-الکتریکی میکرو-ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- مقدمات

در این پژوهش تئوری تنش کوپل اصلاح شده به منظور لحاظ کردن اثرات اندازه در معادلات حاکم استفاده می‌شود. بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل متقارن، به صورت رابطه (۱) تعیین می‌شود. [۲۴]

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (1)$$

که l ، μ و χ_{ij} به ترتیب نشان دهنده پارامتر اثر اندازه، مدول برشی و تانسور انحنای متقارن هستند. تانسور انحنای متقارن به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود. [۲۴]

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (2)$$

که در آن θ_i بیانگر بردار چرخش بوده و به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود. [۲۴]

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (3)$$

که u_k نشان دهنده مولفه‌های میدان جابجایی و e_{ijk} تانسور جایگشت است. انرژی کرنش برای میکرو-سازه‌هایی شامل اثرات پیزوالکتریک که دارای حجم V هستند، به صورت رابطه (۴) قابل بیان است. [۲۴، ۲۵]

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij} - D_i E_i) dV \quad (4)$$

که σ_{ij} ، ε_{ij} و D_i به ترتیب بیانگر مولفه‌های تانسور تنش، تانسور کرنش، بردار جابجایی الکتریکی و بردار میدان الکتریکی هستند. با فرض شرط تنش صفحه‌ای، مولفه‌های تانسور تنش برای لایه‌های پیزوالکتریک را می‌توان به صورت رابطه (۵) بیان نمود. [۲۵]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \Delta T \\ \alpha_{22} \Delta T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

که در آن e_{31} و e_{32} ثوابت پیزوالکتریک هستند. همچنین Q_{ij} نشان دهنده ثوابت الاستیک اصلاح شده سازگار با شرط تنش صفحه‌ای هستند که در پیوست تعریف شده اند. α_{11} و α_{22} بیانگر ضرایب انبساط حرارتی بوده و ΔT نشان دهنده تغییرات دما است. با به کار گیری روابط کرنش جابجایی گرین-لاگرانژ، مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (۶) تعیین می‌شوند. [۲۵]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}] \quad (۶)$$

بردار جابجایی الکتریکی نیز به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود. [۲۴]

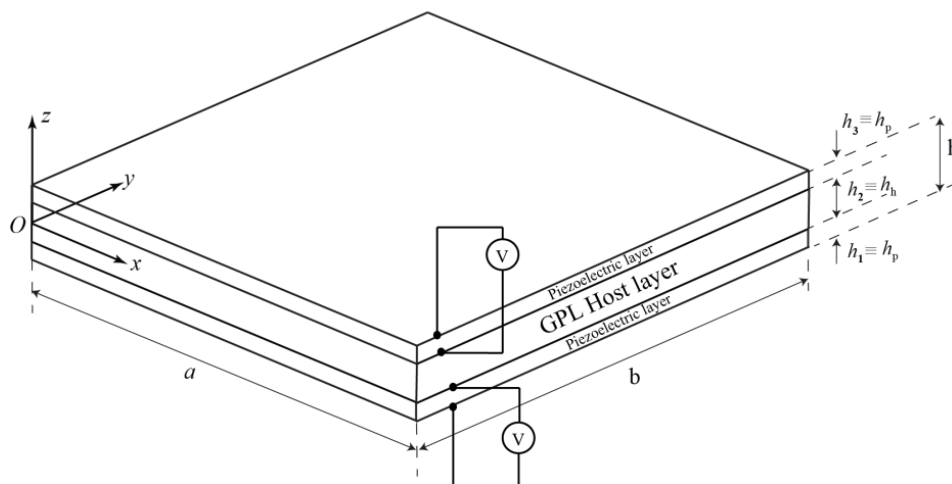
$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \Delta T \quad (۷)$$

که در آن p_i ها ضرایب پیروالکتریک و k_{ii} ها ثابت گذردهی دی الکتریک هستند. همچنین بردار میدان الکتریکی مربوط به پتانسیل الکتریکی را می‌توان به صورت رابطه (۸) بیان کرد. [۲۵]

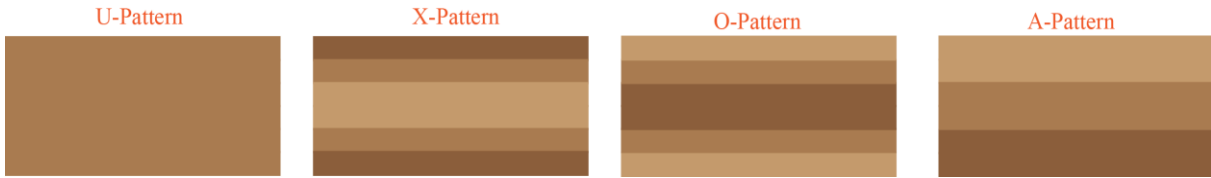
$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (۸)$$

۲-۲- خواص مکانیکی موثر میکرو-ورق مدرج تابعی تقویت شده با گرافن

یک میکرو-ورق نازک مستطیلی سه لایه به طول a ، عرض b و ضخامت کلی h در معرض ولتاژ اعمالی خارجی V در لایه‌های پیروالکتریک، در شکل (۱) نشان داده شده است. قابل ذکر است که لایه میزبان یک لایه مدرج تابعی تقویت شده با صفحات کوچک گرافن است. محورهای x و y به ترتیب در راستای طول و عرض میکرو-ورق قرار داده شده‌اند در حالی که محور z در امتداد ضخامت میکرو-ورق است. مبدا سیستم مختصات $O, (x, y, z)$ در گوشه صفحه میانی میکرو-ورق قرار داده شده است. ضخامت لایه‌های پیروالکتریک بالا و پایین به ترتیب h_3 و h_1 هستند. لایه میزبان از جنس اپوکسی ساخته شده که با صفحات کوچک گرافن به صورت مدرج تابعی تقویت شده است. لازم به ذکر است که به دلیل محدودیت‌های ساخت، لایه گرافن مدرج تابعی قابل دستیابی نیست. از این رو به صورت یک هسته چند لایه با کسر وزنی‌های متفاوت گرافن در هر لایه، تقریب زده می‌شود. پس از آن با افزایش تعداد لایه‌های گرافن، دقیقاً به صورت یک لایه گرافن مدرج تابعی عمل می‌کند. تحلیل عددی نشان داده شده در بخش ۴-۲-۱، به منظور دستیابی به تعداد لایه‌های مورد نیاز برای داشتن یک هسته چند لایه، معادل یک هسته گرافن مدرج تابعی پیوسته انجام گرفته است.



شکل ۱- هندسه میکرو-ورق مدرج تابعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیروالکتریک



شکل ۲- الگوی توزیع مدرج تابعی برای هسته چند لایه تقویت شده با گرافن

در تحلیل مورد نظر، چهار الگوی توزیع متفاوت برای لایه‌های گرافن مدرج تابعی فرض شده که در شکل (۲) نشان داده شده است.

همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است، لایه‌های گرافن با کسر وزنی‌های متفاوت یک هسته مدرج تابعی از گرافن را تشکیل می‌دهند (لایه با رنگ تیره‌تر دارای کسر وزنی گرافن بالاتری است). کسر وزنی گرافن در لایه k ام، $V_{GPL}^{(k)}$ ، برای الگوهای توزیع متفاوت به صورت روابط (۹)–(۱۲) تعیین می‌شوند. [۲۶، ۱۱]

$$U - Pattern: V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* \quad (9)$$

$$X - Pattern: V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* |2k - N_L - 1| / N_L \quad (10)$$

$$O - Pattern: V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* (1 - |2k - N_L - 1| / N_L) \quad (11)$$

$$A - Pattern: V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* (|2k - 1| / N_L) \quad (12)$$

که N_L تعداد کل لایه‌های ورق میانی و V_{GPL}^* کسر وزنی کلی گرافن در ورق میانی است و به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود. [۱۱]

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + \left(\frac{\rho^{GPL}}{\rho^m}\right) (1 - W_{GPL})} \quad (13)$$

که در آن W_{GPL} ، ρ^{GPL} و ρ^m به ترتیب کسر وزنی گرافن، چگالی جرمی گرافن و چگالی جرمی ماتریس هستند.

از سوی دیگر، کسر وزنی ماتریس به صورت رابطه (۱۴) با کسر وزنی گرافن مرتبط است. [۱۱]

$$V_{GPL} + V_m = 1 \quad (14)$$

بر اساس قانون مخلوط‌ها، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی گرافن به ترتیب به صورت روابط (۱۵) و (۱۶) تعریف می‌شوند [۱۱]

$$\nu = V_{GPL} \nu^{GPL} + V_m \nu^m \quad (15)$$

$$\alpha = V_{GPL} \alpha^{GPL} + V_m \alpha^m \quad (16)$$

که در آن ν^{GPL} ، ν^m ، α^{GPL} و α^m به ترتیب بیانگر ضریب پواسون گرافن و ماتریس و ضریب انبساط حرارتی گرافن و ماتریس هستند.

مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای جهت تعیین مدول یانگ موثر لایه‌های گرافن به صورت رابطه (۱۷) می‌باشد [۱۱]

$$E = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}}{1 - \eta_T V_{GPL}} E_m \quad (17)$$

که در آن E_{GPL} و E_m به ترتیب مدول یانگ گرافن و ماتریس هستند و سایر ضرایب نیز به صورت رابطه (۱۸) بدست می‌آیند.

$$\xi_L = 2 \frac{a_{GPL}}{t_{GPL}}, \xi_T = 2 \frac{b_{GPL}}{t_{GPL}} \quad (18)$$

$$\eta_L = \frac{E_{GPL}/E_m - 1}{E_{GPL}/E_m + \xi_L}, \eta_T = \frac{E_{GPL}/E_m - 1}{E_{GPL}/E_m + \xi_T}$$

که در این رابطه a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب معرف طول، عرض و ضخامت گرافن هستند.

۲-۳- استخراج معادلات حاکم

پس از معرفی روش محاسباتی به کار گرفته شده برای خواص مکانیکی لایه‌های گرافن، در این بخش به استخراج معادلات حرکت پرداخته می‌شود. با در نظر گرفتن فرضیات تئوری ورق کیرشهف برای ورق‌های کلاسیک، میدان جابجایی به صورت رابطه (۱۹) قابل بیان است. [۲۵]

$$u_1 = u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$u_2 = v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (19)$$

$$u_3 = w(x, y)$$

که u_0 ، v_0 و w به ترتیب بیانگر جابجایی‌های درون صفحه ای در راستای محورهای x و y و جابجایی عرضی صفحه میانی میکرو-ورق هستند. با جایگذاری روابط میدان جابجایی، رابطه (۱۹)، در رابطه کرنش گرین-لاگرانژ، رابطه (۶)، و با فرض کرنش‌های کوچک و چرخش‌های متوسط (فرضیات کرنش جابجایی فون-کارمن) [۲۵]، مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (۲۰) بدست می‌آیند.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + z\varepsilon_{xy}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

که در این رابطه‌ها صفر و یک به ترتیب معرف انحنا و کرنش غشایی هستند. مولفه‌های بردار چرخش از جایگذاری روابط میدان جابجایی، رابطه (۱۹)، در رابطه (۳) به صورت رابطه (۲۱) استخراج می‌گردد.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (21)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۲۱)، مولفه‌های تانسور انحنای متقارن به صورت رابطه (۲۲) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_{xy} = \chi_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \chi_{xz} = \chi_{zx} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \chi_{yz} = \chi_{zy} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right), \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

در نهایت بر اساس رابطه (۴)، انرژی کرنشی برای میکرو-ورق تقویت شده با صفحات کوچک گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک، می‌تواند به صورت رابطه (۲۳) بازنویسی شود.

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + m_{xx} \chi_{xx} + m_{yy} \chi_{yy} + 2m_{xy} \chi_{xy} \\ + 2m_{yz} \chi_{yz} + 2m_{xz} \chi_{xz} - D_{1x} E_{1x} - D_{1y} E_{1y} - D_{1z} E_{1z} - D_{3x} E_{3x} \\ - D_{3y} E_{3y} - D_{3z} E_{3z}) dV \end{aligned} \quad (23)$$

رابطه میدان الکتریکی برای لایه‌های پیزوالکتریک در معرض ولتاژ خارجی، به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) در نظر گرفته می‌شود. [۲۷]

$$\varphi_1(x, y, z) = \phi_1(z) \psi_1(x, y) + V f_1(z) \quad (24)$$

$$\varphi_3(x, y, z) = \phi_3(z) \psi_3(x, y) + V f_3(z) \quad (25)$$

که V ولتاژ اعمالی خارجی است و $\phi_1(z)$ ، $\phi_3(z)$ ، $f_1(z)$ و $f_3(z)$ به ترتیب معرف توزیع پتانسیل الکتریکی و ولتاژ خارجی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک پایین و بالا هستند. با در نظر گرفتن یک پتانسیل الکتریکی خارجی خطی در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک، به منظور ارضای معادله ماکسول و با فرض پتانسیل الکتریکی صفر در لایه میانی، سطوح میانی و آزاد لایه‌های پیزوالکتریک، این پارامترها به صورت $f_3(z) =$ و $f_1(z) = \frac{(2z+h_2)}{2h_1}$ ، $\phi_3(z) = -\cos\left(\pi\left(\frac{2z-h_2-h_3}{2h_3}\right)\right)$ ، $\phi_1(z) = -\cos\left(\pi\left(\frac{2z+h_2+h_1}{2h_1}\right)\right)$ تعریف می‌شوند. همچنین $\psi_1(x, y)$ و $\psi_3(x, y)$ به ترتیب نمایانگر توزیع درون صفحه‌ای پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک پایین و بالا هستند.

اصل همیلتون ([۲۸]) در غیاب کار خارجی و انرژی جنبشی به صورت $\int_{t_1}^{t_2} (\delta U) dt = 0$ منجر به استخراج معادلات حرکت غیرخطی ورق به صورت معادلات (۲۶) - (۳۰) خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zy}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zx}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zy}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zx}}{\partial x^2} = 0 \quad (28)$$

$$\int_{z_3}^{z_4} \left(-\phi_3^2 \left(k_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + k_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \right) + k_{33}^{(3)} \phi_{3,z} \left(\phi_{3,z} \psi_3 + V f_3'(z) \right) - p_3^{(3)} \phi_{3,z} \Delta T \right) dz - \frac{1}{2} \left(E_{31}^{(3)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + E_{32}^{(3)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (29)$$

$$- \left(E_{31}^{(3)} \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_{32}^{(3)} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \left(E_{31}^{(3)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{32}^{(3)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(-\phi_1^2 \left(k_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + k_{33}^{(1)} \phi_{1,z} \left(\phi_{1,z} \psi_1 + V f_1'(z) \right) - p_3^{(1)} \phi_{1,z} \Delta T \right) dz - \frac{1}{2} \left(E_{31}^{(1)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + E_{32}^{(1)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (30)$$

$$- \left(E_{31}^{(1)} \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_{32}^{(1)} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \left(E_{31}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{32}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

که در آن $z_4 = \frac{h_2}{2} + h_3$ و $z_3 = \frac{h_2}{2}$ ، $z_2 = -\frac{h_2}{2}$ ، $z_1 = -\frac{h_2}{2} - h_1$ است. M_{ij} و N_{ij} به ترتیب معرف منتجهای نیروی محوری و گشتاور هستند. همچنین نشان دهنده منتجهای گشتاور مرتبه بالا بوده که در پیوست تعریف شده‌اند. بالانویس‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب بیانگر پارامترهای منتسب به لایه‌ها پایین، میانی و بالایی هستند. $E_{3i}^{(j)}$ و $E_{3i}^{(j)}$ ثوابت مرتبط با لایه‌های پیزوالکتریک بوده که به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شوند.

$$\left(E_{3i}^{(j)}, E_{3i}^{(j)} \right) = \int_{z_3}^{z_4} e_{3i}^{(j)}(1, z) \phi_{j,z} dz \quad (31)$$

۳- حل معادلات با روش ناولر

۳-۱- معادلات پایداری

تجزیه و تحلیل پایداری بر اساس بررسی معادلات پایداری صورت می‌گیرد. معادلات پایداری مورد نیاز با به کار گیری معیار تعادل همسایگی استخراج می‌گردد [۴]. بنابراین مولفه‌های جابجایی و متغیرهای پتانسیل الکتریکی درون صفحه‌ای به صورت رابطه (۳۲) در نظر گرفته می‌شوند. [۴]

$$u_0 \rightarrow u_0^0 + u_0^1, v_0 \rightarrow v_0^0 + v_0^1, w \rightarrow w^0 + w^1, \psi_1 \rightarrow \psi_1^0 + \psi_1^1, \psi_3 \rightarrow \psi_3^0 + \psi_3^1 \quad (32)$$

بالانویس صفر مربوط به حالت تعادل و بالانویس یک مربوط به شرایط پایداری است. با جایگذاری رابطه (۳۲) در معادلات حاکم، معادلات (۲۶)-(۳۰)، و خطی سازی معادلات نهایی، معادلات پایداری به صورت معادلات (۳۳)-(۳۷) بدست می آیند.

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^1}{\partial x \partial y} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xx}^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_{yy}^1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xy}^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_{xy}^1}{\partial x^2} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial N_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zy}^1}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zx}^1}{\partial x \partial y} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial N_{yy}^1}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zy}^1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{zx}^1}{\partial x^2} = 0 \quad (35)$$

$$\int_{z_3}^{z_4} \left(-\phi_3^2 \left(k_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \psi_3^1}{\partial x^2} + k_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \psi_3^1}{\partial y^2} \right) + k_{33}^{(3)} \phi_{3,z} \left(\phi_{3,z} \psi_3^1 + V f_3'(z) \right) - p_3^{(3)} \phi_{3,z} \Delta T \right) dz - \left(E_{31}^{(3)} \frac{\partial u_0^1}{\partial x} + E_{32}^{(3)} \frac{\partial v_0^1}{\partial y} \right) \quad (36)$$

$$+ \left(\mathbb{E}_{31}^{(3)} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \mathbb{E}_{32}^{(3)} \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(-\phi_1^2 \left(k_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial x^2} + k_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial y^2} \right) + k_{33}^{(1)} \phi_{1,z} \left(\phi_{1,z} \psi_1^1 + V f_1'(z) \right) - p_3^{(1)} \phi_{1,z} \Delta T \right) dz - \left(E_{31}^{(1)} \frac{\partial u_0^1}{\partial x} + E_{32}^{(1)} \frac{\partial v_0^1}{\partial y} \right) + \left(\mathbb{E}_{31}^{(1)} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \mathbb{E}_{32}^{(1)} \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (37)$$

که در آن N_{xx}^0, N_{yy}^0 و N_{xy}^0 نمایانگر نیروهای پیش کمانش هستند و برای تحلیل کمانش حرارتی با توجه به معادله (پ-۱) در پیوست، به صورت رابطه (۳۸) بیان می شوند.

$$N_{xx}^0 = -N_{xx}^T + V \left(\hat{E}_{31}^{(1)} + \hat{E}_{31}^{(3)} \right), N_{yy}^0 = -N_{yy}^T + V \left(\hat{E}_{32}^{(1)} + \hat{E}_{32}^{(3)} \right), N_{xy}^0 = 0 \quad (38)$$

که در این رابطه N_{xx}^T و N_{yy}^T منتجهای نیروی حرارتی هستند که در فرم گسترده به صورت رابطه (۳۹) تعریف می شوند.

$$N_{xx}^T = \int_{z_1}^{z_2} (1 + \nu^{(1)}) Q_{11}^{(1)} \alpha^{(1)} \Delta T dz + \int_{z_2}^{z_3} (1 + \nu^{(2)}(z)) Q_{11}^{(2)}(z) \alpha^{(2)}(z) \Delta T dz + \int_{z_3}^{z_4} (1 + \nu^{(3)}) Q_{11}^{(3)} \alpha^{(3)} \Delta T dz, \quad (39)$$

$$N_{yy}^T = \int_{z_1}^{z_2} (1 + \nu^{(1)}) Q_{22}^{(1)} \alpha^{(1)} \Delta T dz + \int_{z_2}^{z_3} (1 + \nu^{(2)}(z)) Q_{22}^{(2)}(z) \alpha^{(2)}(z) \Delta T dz + \int_{z_3}^{z_4} (1 + \nu^{(3)}) Q_{22}^{(3)} \alpha^{(3)} \Delta T dz$$

و همچنین

$$\left(\widehat{E}_{3i}^{(j)}, \widehat{E}_{3i}^{(j)}\right) = \int_{z_3}^{z_4} e_{3i}^{(j)}(1, z) f_j'(z) dz \quad (40)$$

برای تحلیل کمانش مکانیکی $N_{xx}^0 = -N_0$ و $N_{yy}^0 = -N_0$ است که در آن نیروی درون صفحه‌ای اعمالی خارجی بر واحد طول بوده که به صورت یکنواخت در امتداد لبه‌های میکرو-ورق گسترده شده است. همچنین شرایط مرزی استخراج شده، در پیوست ارائه شده است.

۲-۳- اعمال روش ناویر

به منظور استخراج نتایج عددی کمانش مکانیکی و حرارتی-الکتریکی برای یک میکرو-ورق مدرج تابعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک از روش حل ناویر استفاده می‌شود. در تحلیل کمانش حرارتی-الکتریکی ارائه شده، شرایط مرزی به صورت ثابت و تنها الگوی توزیع متقارن گرافن در نظر گرفته می‌شود. بعلاوه، نیروی محوری خارجی صفر فرض خواهد شد. از سوی دیگر، در تحلیل کمانش مکانیکی، شرایط مرزی متحرک و هیچ محدودیتی در الگوی توزیع در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین تغییرات دما و ولتاژ اعمالی صفر فرض خواهد شد.

۱-۲-۳- تحلیل کمانش حرارتی-الکتریکی

در این حالت بر اساس فرم کلی شرایط مرزی ارائه شده در پیوست، به منظور اعمال عدم تحرک در شرایط مرزی، مولفه‌های میدان جابجایی و توزیع پتانسیل الکتریکی درون صفحه‌ای ψ_1 و ψ_3 به صورت روابط (۴۱)-(۴۵) قابل تعریف هستند.

$$u_0(x, y) = \sum_n \sum_m U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (41)$$

$$v_0(x, y) = \sum_n \sum_m V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (42)$$

$$w(x, y) = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (43)$$

$$\psi_1(x, y) = \sum_n \sum_m \Psi_{1mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (44)$$

$$\psi_3(x, y) = \sum_n \sum_m \Psi_{3mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (45)$$

که در روابط فوق، U_{mn} ، V_{mn} ، W_{mn} ، Ψ_{1mn} و Ψ_{3mn} به ترتیب معرف دامنه جابجایی‌های درون صفحه‌ای و عرضی و دامنه توزیع پتانسیل الکتریکی درون صفحه‌ای هستند.

با جایگذاری رابطه‌های (۴۱)–(۴۵) در معادلات (۳۳)–(۳۷) و اعمال روش ناپیر، مساله مقدار ویژه‌ای که اختلاف دمای بحرانی کمانش را ارائه می‌دهد به صورت رابطه (۴۶) حاصل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\psi} \\ K_{\psi u} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \end{pmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} K_{uu}^G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \end{pmatrix} \quad (46)$$

که $u = (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn})^T$ و $\psi = (\psi_{1mn}, \psi_{3mn})^T$ است. همچنین نشان دهنده ماتریس سفتی هندسی حاصل از فرضیات روابط فون-کارمن است. علاوه بر این، K_{uu} ماتریس الاستیک، $K_{u\psi}$ ماتریس پیزوالکتریک، که $K_{\psi u} = K_{u\psi}^T$ و $K_{\psi\psi}$ ماتریس گذردهی است.

جهت بررسی اثرات شرایط مرزی الکتریکی، دو حالت مدار باز و مدار بسته در نظر گرفته می‌شوند. در حالت مدار باز، در ابتدا دامنه پتانسیل الکتریکی از سطر دوم معادله (۴۶) به صورت $\psi = -K_{\psi\psi}^{-1} \times K_{\psi u} u$ استخراج می‌گردد. با جایگذاری دامنه پتانسیل الکتریکی حاصل در سطر اول معادله (۴۶)، مساله مقدار ویژه مذکور به رابطه (۴۷) تبدیل می‌شود.

$$(K_{uu} - K_{u\psi} K_{\psi\psi}^{-1} K_{\psi u}) u = \Delta T K_{uu}^G u \quad (47)$$

که اختلاف دمای بحرانی کمانش حرارتی در حالت مدار باز را نتیجه می‌دهد. شرط مرزی مدار بسته، ناشی از اتصال کوتاه سطح لایه‌های پیزوالکتریک است. بر این اساس، پتانسیل الکتریکی سطح لایه‌های پیزوالکتریک صفر می‌شود. در نتیجه معادله (۴۶) به صورت معادله (۴۸) قابل بازنویسی است:

$$K_{uu} u = \Delta T K_{uu}^G u \quad (48)$$

که اختلاف دمای بحرانی کمانش حرارتی در حالت مدار بسته را حاصل می‌کند.

۲-۲-۳- تحلیل کمانش مکانیکی

در این حالت، به منظور اعمال شرط تحرک، مولفه‌های میدان جابجایی درون صفحه‌ای به صورت معادلات (۴۹) و (۵۰) در نظر گرفته می‌شوند.

$$u_0(x, y) = \sum_n \sum_m U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (49)$$

$$v_0(x, y) = \sum_n \sum_m V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (50)$$

در حالی که جابجایی عرضی و توزیع پتانسیل الکتریکی درون صفحه‌ای، مانند بخش کمانش حرارتی در نظر گرفته می‌شوند. بار بحرانی کمانش مکانیکی از روش مشابه ارائه شده جهت محاسبه تغییرات دمای بحرانی حاصل می‌شود.

۴- بحث و نتایج

نتایج کمانش در این بخش ارائه می‌شود. در ابتدا نتایج عددی فعلی با نتایج موجود در مراجع مرتبط صحت سنجی می‌شود. پس از آن، چند نمونه مطالعه موردی جهت نشان دادن تأثیر کسر وزنی و نوع توزیع گرافن، ویژگی‌های هندسی میکرو-ورق و همچنین اثر ولتاژ خارجی بر تغییرات دمای بحرانی کمانش و بار مکانیکی بحرانی کمانش ارائه شده است.

۴-۱- صحت سنجی نتایج

به منظور صحت سنجی نتایج کمانش حرارتی، یک ورق مربعی کامپوزیتی چند لایه تقویت شده با گرافن با شرط مرزی تکیه گاه ساده ثابت که بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش غیرخطی فون-کارمن مدل سازی شده است، در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. نتایج ارائه شده در مرجع [۱۱] برای تغییرات دمای بحرانی کمانش بر اساس به کار گیری روش مربعات دیفرانسیلی است. ماتریس کامپوزیت از جنس اپوکسی ساخته و با گرافن تقویت شده است. تعداد لایه‌ها برابر $N_L = 10$ در نظر گرفته شده است. مدول یانگ، چگالی جرمی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی ماتریس به ترتیب برابر 3 (GPa) ، $1200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، 0.34 و $60 \times 10^{-6} \text{ (1/K)}$ است. همچنین مدول یانگ، چگالی جرمی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی گرافن به ترتیب برابر 1010 (GPa) ، $1062.5 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، 0.186 و $5 \times 10^{-6} \text{ (1/K)}$ است. داده‌های هندسی ورق مطابق شکل (۱)، به صورت $a = b$ ، $a/h = 25$ تا 45 و $h = 0.01 \text{ (m)}$ فرض می‌شوند. خواص گرافن به صورت $a_{GPL} = 2.5 \text{ (}\mu\text{m)}$ ، $b_{GPL} = 1.5 \text{ (}\mu\text{m)}$ و $t_{GPL} = 1.5 \text{ (nm)}$ و $W_{GPL} = 0.3\%$ است. نتایج تغییرات دمای بحرانی کمانش فعلی در مقایسه با نتایج مرجع [۱۱]، برای سه توزیع متفاوت گرافن در جدول (۱) ارائه شده است. حتی با وجود این که مدل سازی حاضر بر اساس تئوری ورق کیرشهف است، نتایج از مطابقت خوبی برخوردار هستند و با افزایش a/h برای همه الگوهای توزیع گرافن، درصد اختلاف از 0.35 کمتر است.

جدول ۱- مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش برای یک ورق مربعی تقویت شده با گرافن با مقادیر معادل گزارش شده در مرجع [۱۱] (K)

		$a/h = 25$	$a/h = 35$	$a/h = 45$
X-الگو	پژوهش حاضر	40.738	20.785	12.574
	مرجع [۱۱]	40.261	20.660	12.528
	درصد اختلاف	1.18	0.6	0.35
U-الگو	پژوهش حاضر	32.849	16.760	10.138
	مرجع [۱۱]	32.539	16.679	10.109
	درصد اختلاف	0.95	0.48	0.28
O-الگو	پژوهش حاضر	24.997	12.753	7.715
	مرجع [۱۱]	24.817	12.707	7.698
	درصد اختلاف	0.72	0.36	0.22

اعتبار سنجی دیگر برای یک ورق چهار لایه با هسته مدرج تابعی دو لایه ساخته شده از $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ است که لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین سازه از جنس $PZT - 5A$ قرار داده شده‌اند [۸]. در مرجع [۸] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به همراه رابطه کرنش غیرخطی فون-کارمن برای توسعه معادلات حاکم به کار گرفته شده‌اند و حل لوی به منظور دستیابی به اختلاف دمای بحرانی کماتش اعمال شده است. خواص مادی ZrO_2 و $Ti - 6Al - 4V$ به صورت رابطه $P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3)$ وابسته به دما هستند که در این رابطه T بر حسب کلونین بوده و ضرایب P_i در جدول (۲) ارائه شده‌اند. از سوی دیگر، خواص $PZT - 5A$ توابع خطی از اختلاف دما نسبت به دمای مرجع هستند به گونه‌ای که دمای مرجع، $E_{110} = 63$ (GPa) ، $\alpha(z) = \alpha_{110}(1 + \alpha_{111}\Delta T)$ ، $E(z) = E_{110}(1 + E_{111}\Delta T)$ ، $T_0 = 300$ (K) ، $E_{111} = -0.0005$ (1/K) و $\alpha_{110} = 0.9 \times 10^{-6}$ (1/K) و $\alpha_{111} = 0.0005$ (1/K) است. ضریب پواسون برای هسته مدرج تابعی و لایه‌های پیزوالکتریک ثابت و به ترتیب برابر 0.29 و 0.3 در نظر گرفته می‌شوند. مشخصات هندسی ورق به صورت $a = b$ ، $b/h = 20$ ، $h_p = 0.0001$ (m) و $h_h = 0.001$ (m) هستند. شاخص قانون توان برای هسته مدرج تابعی برابر یک در نظر گرفته می‌شود. ورق در معرض سه اختلاف پتانسیل متفاوت $V = -500$ (Volt) ، $V = 0$ (Volt) و $V = 500$ (Volt) است. نتایج حاضر با نتایج گزارش شده از مرجع [۸] برای حالت مستقل از دما (TID) و وابسته به دما (TD)، در جدول (۳) مقایسه شده‌اند. با توجه به جدول (۳)، و درصد اختلاف کمتر از ۱/۴ درصد، تطابق بسیار خوبی قابل مشاهده است.

جدول ۲- ضرایب ترموالاستیک وابسته به دما برای ZrO_2 و $Ti - 6Al - 4V$ [۸]

ماده		P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
ZrO_2	E (Pa)	244.27e + 9	0	-1.371e - 3	1.214e - 6	-3.681e - 10
	α (1/K)	12.766e - 6	0	-1.491e - 3	1.006e - 5	-6.778e - 11
$Ti - 6Al - 4V$	E (Pa)	122.56e + 9	0	-4.586e - 4	0	0
	α (1/K)	7.5788e - 6	0	6.638e - 4	-0.3147e - 6	0

جدول ۳- مقایسه تغییرات دمای بحرانی کماتش با نتایج مرتبط گزارش شده در مرجع [۸] برای یک ورق مربعی با هسته دو لایه مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک (K)

ولتاژ (ولت)		وابسته به دما (TD)	مستقل از دما (TID)
-500	پژوهش حاضر	160.452	240.260
	مرجع [۸]	159.0321	236.9330
	درصد اختلاف	0.89	1.4
0	پژوهش حاضر	158.371	236.068
	مرجع [۸]	156.9634	232.8218
	درصد اختلاف	0.89	1.39
500	پژوهش حاضر	156.271	231.876
	مرجع [۸]	154.8778	228.7106
	درصد اختلاف	0.9	1.38

۲-۴- مطالعه پارامتری و بحث

۱-۲-۴- بررسی همگرایی

در این بخش، چند مطالعه موردی برای یک میکرو-ورق کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. از این پس، به جز مواردی که دقیقاً ذکر شده نتایج ارائه شده مربوط به حالت مدار بسته است، به منظور مشاهده اثر پیزوالکتریک در تحلیل کمانش حرارتی نتایج حاضر برای حالت مدار باز ارائه شده است. پارامتر اثر اندازه و مشخصات هندسی میکرو-ورق مورد بررسی به صورت $l_1 = l_2 = l$ می‌شوند. لایه میزبان متشکل از ماتریس اپوکسی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک از جنس PZT - 5A در سطوح بالا و پایین است. مدول یانگ، چگالی جرمی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی اپوکسی به ترتیب به صورت (GPa) 3، $1200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، 0.34 و $(1/K) 60 \times 10^{-6}$ است [۱۱]. همچنین مدول یانگ، چگالی جرمی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی گرافن به ترتیب به صورت (GPa) 1010، $1062.5 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، 0.186 و $(1/K) 5 \times 10^{-6}$ است [۱۱]. ویژگی‌های هندسی گرافن نیز به صورت $a_{GPL} = 2.5 \text{ (}\mu\text{m)}$ ، $b_{GPL} = 1.5 \text{ (}\mu\text{m)}$ و $t_{GPL} = 1.5 \text{ (nm)}$ است [۱۱]. همچنین کسر وزنی گرافن به صورت $W_{GPL} = 0.3\%$ در نظر گرفته شده است [۱۱]. مدول‌های برشی برای لایه میزبان به صورت $G_{12}^{(2)} = G_{13}^{(2)} = G_{23}^{(2)} = \frac{E^{(2)}}{2(1+\nu^{(2)})}$ فرض می‌شوند [۱۱]. مدول یانگ، مدول برشی، چگالی جرمی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی PZT - 5A به ترتیب به صورت (GPa) 63، 24.2 (GPa) ، $7600 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، 0.35 و $(1/K) 0.9 \times 10^{-6}$ در نظر گرفته می‌شوند [۲۹]. ضرایب پیزوالکتریک نیز به صورت $e_{31} = e_{32} = -7.209 \text{ (C/m}^2\text{)}$ ، $e_{24} = e_{15} = 12.322 \text{ (C/m}^2\text{)}$ ، $k_{11} = k_{22} = 1.53 \times 10^{-8} \text{ (W/mK)}$ و $k_{33} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ (W/mK)}$ هستند [۲۹].

تجزیه و تحلیل عددی، با بررسی همگرایی در تعداد لایه‌های گرافن به کار رفته در لایه میزبان جهت دستیابی به میکرو-ورق میزبان تقویت شده با گرافن مدرج تابعی، آغاز می‌شود. اختلاف دمایی بحرانی کمانش برای یک میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک در شرایط مدار باز و مدار بسته در جدول (۴) بر اساس تعداد لایه‌های میکرو-ورق میزبان ارائه شده است. به راحتی می‌توان دریافت که هنگامی که تعداد لایه‌ها از ۶ به ۱۰ افزایش می‌یابد، تغییرات نتایج به اندازه کافی کوچک است و بنابراین با $N_L = 10$ همگرایی مورد نیاز برای داشتن یک میکرو-ورق میزبان مدرج تابعی هموار قابل دستیابی است. بنابراین، از این پس نتایج ارائه شده مربوط به میکرو-ورق پیزوالکتریک با هسته ده لایه‌ای گرافن است.

همچنین مشاهده می‌گردد که هنگامی که ولتاژ اعمالی خارجی منفی باشد، $V = -50 \text{ (Volt)}$ ، در همه الگوهای توزیع مدرج تابعی، شرط مدار باز منجر به اختلاف دمایی بحرانی بیشتری می‌شود. قابل ذکر است که در شرط مرزی مدار بسته، ولتاژ اعمالی خارجی برابر صفر است. از سوی دیگر با کاهش ولتاژ اعمالی خارجی، اختلاف دمایی بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. علت این امر نیروی محوری حاصل از ولتاژ خارجی است. میدان الکتریکی خارجی اعمالی، برای مقادیر منفی (مثبت) ولتاژ خارجی، بر اساس رابطه (۳۸) و علامت e_{31} و e_{32} که در اینجا منفی هستند، یک نیروی کششی (فشاری) تولید می‌کند که متعاقباً منجر به افزایش (کاهش) اختلاف دمایی بحرانی می‌شود. نتایج در مورد اثر الگوی توزیع مدرج تابعی بر اختلاف دمایی بحرانی، نشان می‌دهد که کمترین تا بیشترین اختلاف دمایی بحرانی کمانش به ترتیب متعلق به الگوهای توزیع U ، O و X است.

جدول ۴- تغییرات دمای بحرانی کماتش برای یک میکرو-ورق مربعی با هسته مدرج تابعی تقویت شده با گرافن با لایه‌های پیزوالکتریک (K)

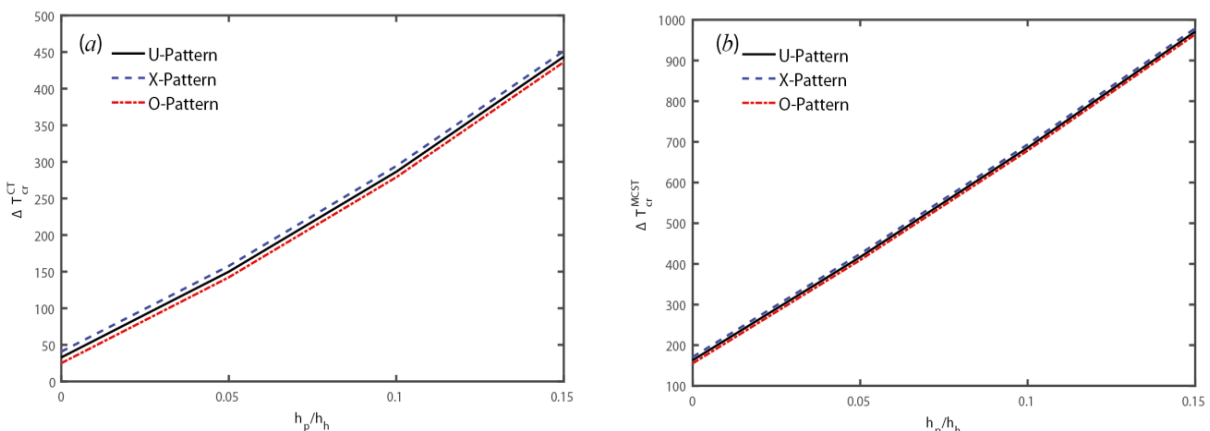
الگوی مدرج تابعی	حالت مدار	$N_L = 2$			$N_L = 6$			$N_L = 10$		
		$V = 50$ (Volt)	$V = 0$ (Volt)	$V = -50$ (Volt)	$V = 50$ (Volt)	$V = 0$ (Volt)	$V = -50$ (Volt)	$V = 50$ (Volt)	$V = 0$ (Volt)	$V = -50$ (Volt)
U	مدار باز	745.956	818.566	891.176	745.956	818.566	891.176	745.956	818.566	891.176
	مدار بسته	818.566			818.566			818.566		
X	مدار باز	745.956	818.566	891.176	753.346	825.992	898.637	753.938	826.586	899.235
	مدار بسته	818.566			825.992			826.586		
O	مدار باز	745.956	818.566	891.176	739.336	811.981	884.627	738.806	811.454	884.103
	مدار بسته	818.566			811.981			811.454		

۲-۲-۴- ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک

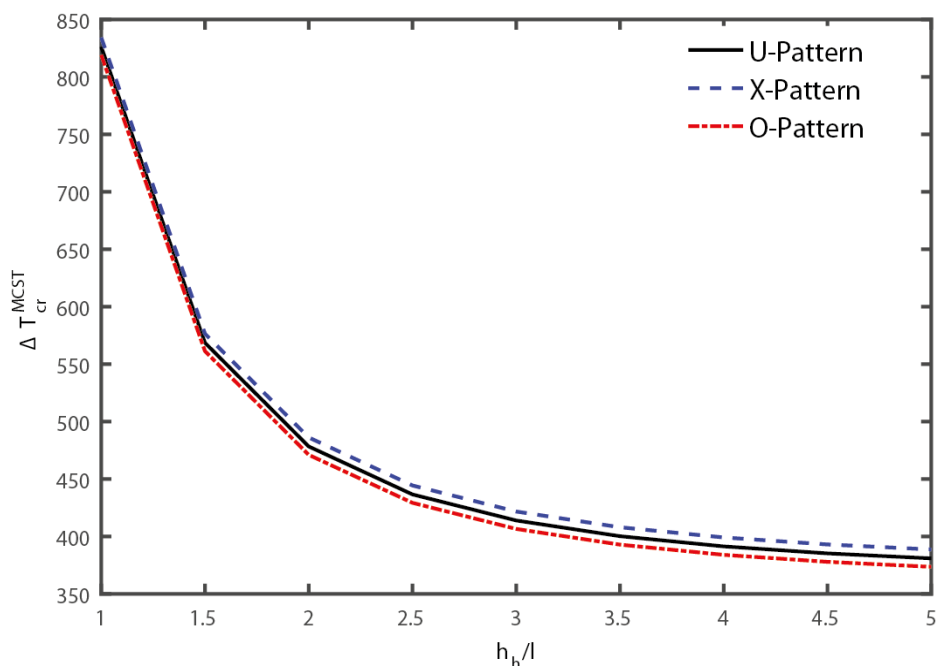
اختلاف دمای بحرانی کماتش بر اساس تئوری کلاسیک (ΔT_{cr}^{CT}) و تئوری تنش کوپل اصلاح شده (ΔT_{cr}^{MCST}) بر حسب h_p/h_n به ترتیب در شکل‌های (۳-الف) و (۳-ب) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که به دلیل اثر سفت‌کنندگی افزایش ضخامت پیزوالکتریک، اختلاف دمای بحرانی کماتش افزایش می‌یابد. از طرفی نتایج به طور قابل توجهی تحت تاثیر پارامتر اثر اندازه بوده و نتایج تئوری کلاسیک دیگر کاربرد ندارند. بعلاوه، اثر الگوی توزیع گرافن مدرج تابعی به کار گرفته شده در نتایج تئوری کلاسیک بیشتر قابل توجه است.

۳-۲-۴- پارامتر اثر اندازه

اثر نسبت ضخامت هسته به پارامتر اثر اندازه بر اختلاف دمای بحرانی کماتش تئوری تنش کوپل اصلاح شده (ΔT_{cr}^{MCST})، در شکل (۴) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت h_n/l ، اختلاف دمای بحرانی کماتش به دلیل اثر استحکام بخشی پارامتر اثر اندازه در سازه، کاهش می‌یابد. بعلاوه با افزایش این نسبت و متعاقباً تضعیف سازه، تمایز بین نتایج الگوهای توزیع گرافن مدرج تابعی به کار گرفته شده بیشتر می‌شود.



شکل ۳- اختلاف دمای بحرانی کماتش بر حسب نسبت ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت لایه میانی، h_p/h_n ، بر اساس الف- تئوری کلاسیک و ب- تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک (K)



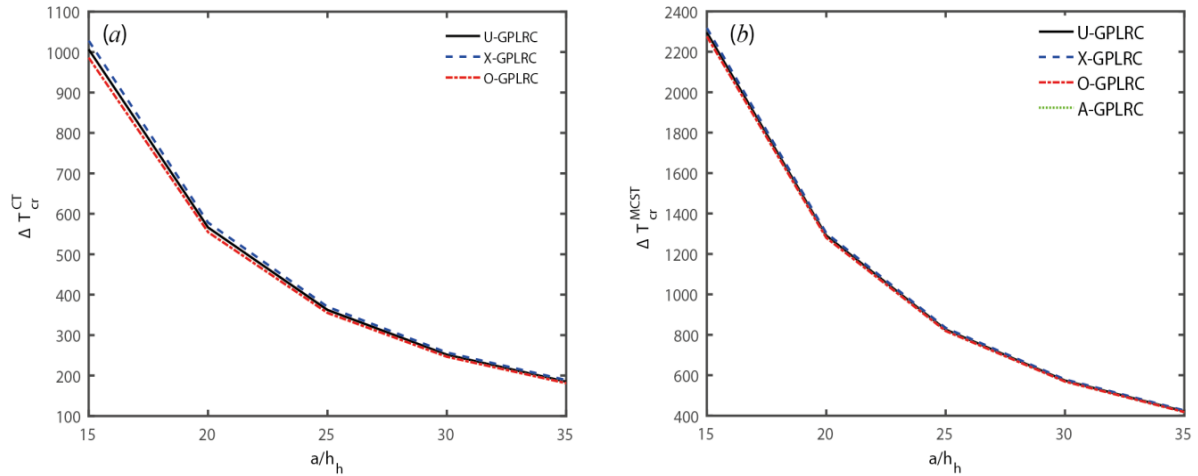
شکل ۴- اختلاف دمای بحرانی کمانش بر حسب نسبت ضخامت لایه میانی به پارامتر اثر اندازه، h_h/l ، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای یک میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیژوالکتریک (K)

۴-۲-۴- نسبت طول ورق به ضخامت لایه میانی

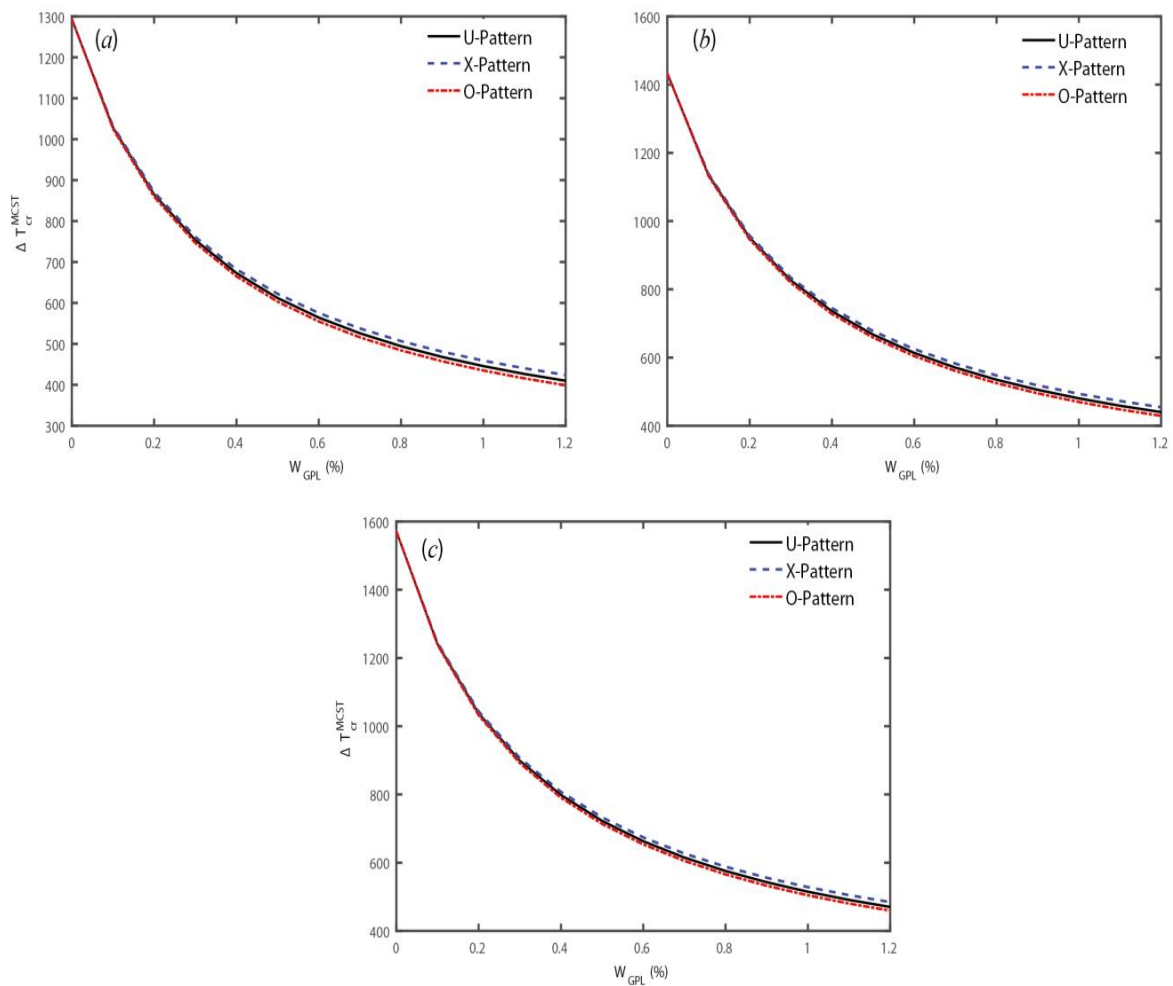
اثر نسبت طول ورق به ضخامت لایه میانی، بر اختلاف دمای بحرانی کمانش برای تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به ترتیب در شکل‌های (۵-الف) و (۵-ب) نشان داده شده است. افزایش نسبت a/h_h که با افت سفتی سازه همراه است، که نتیجتاً منجر به کاهش اختلاف دمای بحرانی شده است. اگر چه تاثیر الگوی توزیع گرافن مدرج تابعی در نتایج تئوری تنش کوپل اصلاح شده قابل تشخیص نیست، در نتایج تئوری کلاسیک خصوصاً در نسبت‌های a/h_h کم، بیشتر قابل مشاهده است.

۴-۲-۵- کسر وزنی گرافن

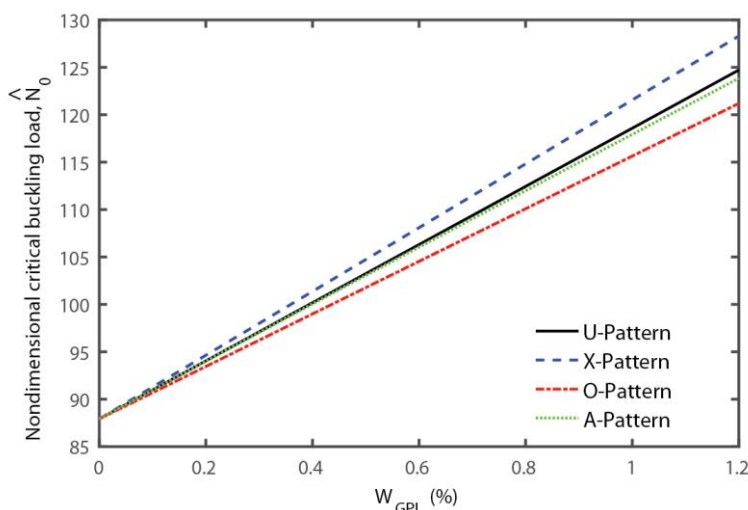
اثر کسر وزنی گرافن، W_{GPL} ، بر اختلاف دمای بحرانی کمانش در شکل (۶) نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد افزایش W_{GPL} ، با کاهش اختلاف دمای بحرانی کمانش (ΔT_{cr}^{MCST}) همراه است. دلیل این امر این است که اگر چه لایه میانی با افزایش W_{GPL} ، سفت‌تر می‌شود، ولی نیروهای حرارتی محوری N_{xx}^T و N_{yy}^T افزایش یافته (با توجه به معادله (۳۹)) و به پیروی از آن بار بحرانی کمانش حرارتی کاهش می‌یابد. به بیان دیگر استحکام کمانش حرارتی کاهش می‌یابد. بعلاوه، همان‌طور که انتظار می‌رود، سهم الگوی توزیع گرافن با افزایش کسر وزنی، مشهودتر است. از سوی دیگر، اختلاف بین نتایج الگوهای توزیع متفاوت گرافن در یک کسر وزنی مشخص، مستقل از مقدار ولتاژ اعمالی خارجی، ثابت باقی می‌ماند. اثر کسر وزنی گرافن بر بار مکانیکی بحرانی کمانش بی بعد، $\bar{N}_0 = \frac{N_0 a^2}{E_m h_h^3}$ ، در شکل (۷) نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش کسر وزنی به دلیل اثر سفت‌کنندگی کسر وزنی، بار بحرانی مکانیکی کمانش افزایش می‌یابد.



شکل ۵- اختلاف دمایی بحرانی کمانش بر حسب نسبت طول میکرو-ورق به ضخامت لایه میانی، a/h_h ، بر اساس الف- تئوری کلاسیک و ب-تئوری تنش کوپل اصلاح شده، برای میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک (K)



شکل ۶- اختلاف دمایی بحرانی کمانش بر حسب کسر وزنی گرافن، W_{GPL} ، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک الف- $V = 50$ (Volt)، ب- $V = 0$ (Volt) و ج- $V = -50$ (Volt) (K)



شکل ۷- بار مکانیکی بحرانی کمانش بی بعد بر حسب کسر وزنی گرافن، W_{GPL} ، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک $V = 0$ (Volt)

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش کمانش مکانیکی و حرارتی-الکتریکی یک میکرو-ورق مربعی تقویت شده با گرافن مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم و شرایط مرزی بر اساس فرضیات تئوری ورق کیرشلف و تئوری تنش کوپل اصلاح شده، با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردید. روش حل ناویر جهت دستیابی به نتایج، برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده به کار گرفته شد. نتایج بدست آمده از پژوهش حاضر با نتایج موجود در مقالات مشابه اعتبارسنجی گردید و همخوانی مناسبی در نتایج مشاهده شد. اثر پارامترهایی نظیر ضخامت پیزوالکتریک، نسبت ضخامت لایه میزبان به پارامتر اثر اندازه، نسبت طول ورق به ضخامت لایه میزبان و کسر وزنی گرافن بر اختلاف دمای بحرانی کمانش و بار مکانیکی بحرانی کمانش مورد ارزیابی قرار گرفت. یافته‌های حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت موارد زیر بیان کرد:

- با افزایش نسبت ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت لایه میانی، اختلاف دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.
- اختلاف دمای بحرانی کمانش، با نسبت ضخامت لایه میانی به طول ورق ارتباط مستقیمی دارد.
- اختلاف دمای بحرانی کمانش با کاهش ولتاژ اعمالی خارجی افزایش می‌یابد.
- افزایش نسبت ضخامت لایه میانی به پارامتر اثر اندازه، سبب کاهش اختلاف دمای بحرانی کمانش خواهد شد.
- مقدار ولتاژ اعمالی خارجی بر نقش الگوی توزیع گرافن مدرج تابعی در نتایج کمانش حرارتی، اثری ندارد.
- اثر الگوی توزیع گرافن مدرج تابعی بر نتایج کمانش حرارتی در حالت استفاده از تئوری کلاسیک و نسبت ضخامت لایه میانی به پارامتر اثر اندازه بالاتر، مشهودتر است.
- اختلاف دمای بحرانی کمانش با افزایش کسر وزنی گرافن، کاهش می‌یابد در حالی که بار مکانیکی بحرانی افزایش می‌یابد.
- با افزایش کسر وزنی گرافن، اثر الگوی توزیع گرافن مدرج تابعی بر نتایج ارائه شده بیشتر مشهود است.

- در پایان می‌توان بیان نمود که اگر چه استفاده از تقویت کننده‌هایی نظیر گرافن سبب سفت شونده‌گی سازه و متعاقباً بهبود پتانسیل حمل بار مکانیکی می‌شود، از سوی دیگر منجر به کاهش استحکام کمانش حرارتی خواهد شد.

مراجع

- [1] Liew, K.M., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Postbuckling of Piezoelectric FGM Plates Subject to Thermo-electro-mechanical Loading ", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3869-3892, (2003).
- [2] Matsunaga, H., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a 2D Higher-order Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol. 90, No. 1, pp. 76-86, (2009).
- [3] Mirzavand, B., and Eslami, M.R., "A Closed-form Solution for Thermal Buckling of Piezoelectric FGM Rectangular Plates with Temperature-dependent Properties", *Acta Mechanica*, Vol. 218, No. 1, pp. 87-101, (2011).
- [4] Kiani, Y., Bagherizadeh, E., and Eslami, M.R., "Thermal and Mechanical Buckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets Resting on the Pasternak Elastic Foundation", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 226, No. 1, pp. 32-41, (2012).
- [5] Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S., and Bradford, M.A., "Bending, Buckling and Vibration of Size-dependent Functionally Graded Annular Microplates", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 11, pp. 3250-3257, (2012).
- [6] Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., and Tounsi, A., "Thermal Buckling of Functionally Graded Sandwich Plates using a New Hyperbolic Shear Displacement Model", *Steel and Composite Structures*, Vol. 15, No. 4, pp. 399-423, (2013).
- [7] Ansari, R., Gholami, R., Faghieh Shojaei, M., Mohammadi, V., and Darabi, M.A., "Thermal Buckling Analysis of a Mindlin Rectangular FGM Microplate Based on the Strain Gradient Theory", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 5, pp. 446-465, (2013).
- [8] Yaghoobi, H., Fereidoon, A., Khaksari Nouri, M., and Mareishi, S., "Thermal Buckling Analysis of Piezoelectric Functionally Graded Plates with Temperature-dependent Properties", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 10, pp. 864-875, (2015).
- [9] Mohammadi, M., and Mahani, M.F., "An Analytical Solution for Buckling Analysis of Size-dependent Rectangular Micro-plates According to the Modified Strain Gradient and Couple Stress Theories", *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 10, pp. 3477-3493, (2015).
- [10] Ansari, R.E.Z.A., Hasrati, E.M.A.D., Faghieh Shojaei, M., Gholami, R.A.H.E.B., Mohammadi, V.A.H.I.D., and Shahabodini, A.B.O.L.F.A.Z.L., "Size-dependent

- Bending, Buckling and Free Vibration Analyses of Microscale Functionally Graded Mindlin Plates Based on the Strain Gradient Elasticity Theory", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, No. 4, pp. 632-664, (2016).
- [11] Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J., "Thermal Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Graphene Nanocomposite Plates", *Materials and Design*, Vol. 132, pp. 430-441, (2017).
- [12] Shen, H.S., Xiang, Y., Lin, F., and Hui, D., "Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Graphene-reinforced Composite Laminated Plates in Thermal Environments", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 119, pp. 67-78, (2017).
- [13] Barati, M.R., and Zenkour, A.M., "Post-buckling Analysis of Refined Shear Deformable Graphene Platelet Reinforced Beams with Porosities and Geometrical Imperfection", *Composite Structures*, Vol. 181, pp. 194-202, (2017).
- [14] Yang, J., Chen, D., and Kitipornchai, S., "Buckling and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Plates Based on Chebyshev-ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 193, pp. 281-294, (2018).
- [15] Aghazadeh, R., Dag, S., and Cigeroglu, E., "Modelling of Graded Rectangular Microplates with Variable Length Scale Parameters", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 65, No. 5, pp. 573-585, (2018).
- [16] Lei, Z., and Zhang, Y., "Characterizing Buckling Behavior of Matrix-cracked Hybrid Plates Containing CNTR-FG Layers", *Steel and Composite Structures*, Vol. 28, No. 4, pp. 495-508, (2018).
- [17] Choudhary, P.K., and Jana, P., "Position Optimization of Circular/elliptical Cutout within an Orthotropic Rectangular Plate for Maximum Buckling Load", *Steel and Composite Structures*, Vol. 29, No. 1, pp. 39-51, (2018).
- [18] Jiang, G., Li, F., and Zhang, C., "Postbuckling and Nonlinear Vibration of Composite Laminated Trapezoidal Plates", *Steel and Composite Structures*, Vol. 26, No. 1, pp. 17-29, (2018).
- [19] Song, M., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Bending and Buckling Analyses of Functionally Graded Polymer Composite Plates Reinforced with Graphene Nanoplatelets", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 134, pp. 106-113, (2018).
- [20] Javani, R., Bidgoli, M.R., and Kolahchi, R., "Buckling Analysis of Plates Reinforced by Graphene Platelet Based on Halpin-Tsai and Reddy Theories", *Steel and Composite Structures*, Vol. 31, No. 4, pp. 419-426, (2019).
- [21] Shahverdi, H., Barati, M.R., and Hakimelahi, B., "Post-buckling Analysis of Honeycomb Core Sandwich Panels with Geometrical Imperfection and Graphene Reinforced Nano-composite Face Sheets", *Materials Research Express*, Vol. 6, No. 9, pp. 095017, (2019).

- [22] Mirjavadi, S.S., Forsat, M., Hamouda, A.M.S., and Barati, M.R., "Dynamic Response of Functionally Graded Graphene Nanoplatelet Reinforced Shells with Porosity Distributions under Transverse Dynamic Loads", *Materials Research Express*, Vol. 6, No. 7, pp. 075045, (2019).
- [23] Barati, M.R., and Shahverdi, H., "Finite Element Forced Vibration Analysis of Refined Shear Deformable Nanocomposite Graphene Platelet-reinforced Beams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 33, (2020).
- [24] Arvin, H., "The Flapwise Bending Free Vibration Analysis of Micro-rotating Timoshenko Beams using the Differential Transform Method", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 24, No. 20, pp. 4868-4884, (2018).
- [25] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", Second Edition, Florida, CRC Press, (2003).
- [26] Huang, Y., Yang, Z., Liu, A., and Fu, J., "Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Shallow Arches with Elastic Rotational Constraints under Uniform Radial Load", *Materials*, Vol. 11, No. 6, pp. 910, (2018).
- [27] Wang, Q., "On Buckling of Column Structures with a Pair of Piezoelectric Layers", *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 199-205, (2002).
- [28] Meirovitch, L., "*Principles and Techniques of Vibrations*", New York, McGraw Hill, (1997).
- [29] Shariyat, M., "Dynamic Buckling of Imperfect Laminated Plates with Piezoelectric Sensors and Actuators Subjected to Thermo-electro-mechanical Loadings, Considering the Temperature-dependency of the Material Properties", *Composite Structures*, Vol. 88, No. 2, pp. 228-239, (2009).

فهرست نمادهای انگلیسی

h_1 : ضخامت لایه اول

h_2 : ضخامت لایه دوم

h_3 : ضخامت لایه سوم

a : طول ورق

b : عرض ورق

U : انرژی کرنشی

σ_{ij} : تانسور تنش

ε_{ij} : تانسور کرنش

m_{ij} : بخش عرضی تانسور تنش کوپل

χ_{ij} : تانسور متقارن انحنا

- D_i : جابجایی الکتریکی
 E_i : میدان الکتریکی
 θ_i : مولفه‌های بردار دوران
 e_{ijk} : تانسور جایگشت
 u_k : مولفه‌های جابجایی
 μ : مدول برشی
 l : پارامتر اثر اندازه
 u_0 : جابجایی درون صفحه‌ای در راستای X
 v_0 : جابجایی درون صفحه‌ای در راستای Y
 w : جابجایی درون صفحه‌ای در راستای Z
 φ_1 : پتانسیل الکتریکی لایه اول
 φ_3 : پتانسیل الکتریکی لایه سوم
 e_{ij} : ثوابت دی الکتریک
 k_{ij} : ثوابت تنش پیزوالکتریک
 p_i : ضرایب پایروالکتریک
 α_{ij} : ضریب انبساط حرارتی
 ΔT : تغییرات دما
 Q_{ij} : ضرایب سفتی کاهش یافته
 k : شمارنده لایه‌های ورق
 ρ : چگالی ورق
 $V_{GPL}^{(k)}$: کسر حجمی هر لایه گرافن
 N_L : تعداد لایه‌های گرافن
 v^m : ضریب پواسون ماتریس
 v^{GPL} : ضریب پواسون گرافن
 V_m : کسر حجمی ماتریس
 V_{GPL} : کسر حجمی گرافن
 E_m : مدول یانگ ماتریس
 E_{GPL} : مدول یانگ گرافن
 a_{GPL} : طول گرافن
 b_{GPL} : عرض گرافن
 t_{GPL} : ضخامت گرافن
 M_{uu} : ماتریس جرم
 K_{uu} : ماتریس الاستیک

$K_{u\psi}$: ماتریس پیزوالکتریک
 $K_{\psi\psi}$: ماتریس گذردهی
 K_{uu}^G : ماتریس سفتی هندسی
 N^{cr} : بار بحرانی کمانش

پیوست

منتجه‌های نیرو و ممان به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (۱-پ) \\ &+ \begin{Bmatrix} \widehat{E}_{31}^{(1)} + \widehat{E}_{31}^{(3)} \\ \widehat{E}_{32}^{(1)} + \widehat{E}_{32}^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} V + \begin{Bmatrix} E_{31}^{(1)}\psi_1 + E_{31}^{(3)}\psi_3 \\ E_{32}^{(1)}\psi_1 + E_{32}^{(3)}\psi_3 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} z dz \\ &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (۲-پ) \\ &+ \begin{Bmatrix} \widehat{E}_{31}^{(1)} + \widehat{E}_{31}^{(3)} \\ \widehat{E}_{32}^{(1)} + \widehat{E}_{32}^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} V + \begin{Bmatrix} E_{31}^{(1)}\psi_1 + E_{31}^{(3)}\psi_3 \\ E_{32}^{(1)}\psi_1 + E_{32}^{(3)}\psi_3 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

در روابط فوق $E_{3i}^{(j)}$, $\mathbb{E}_{3i}^{(j)}$ و $\widehat{E}_{3i}^{(j)}$ در معادلات (۳۱) و (۴۰) تعریف شده‌اند. همچنین سایر ضرایب به فرم زیر قابل بیان هستند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (۳-پ)$$

که در آن

$$Q_{11}^{(1),(3)} = Q_{22}^{(1),(3)} = \frac{E^{(1),(3)}}{1-(\nu^{(1),(3)})^2}, Q_{12}^{(1),(3)} = \nu^{(1),(3)} \frac{E^{(1),(3)}}{1-(\nu^{(1),(3)})^2}, Q_{66}^{b,t} = \frac{E^{(1),(3)}}{2(1+\nu^{(1),(3)})} \quad (۴-پ)$$

$$Q_{11}^{(2)}(z) = Q_{22}^{(2)}(z) = \frac{E^{(2)}(z)}{1 - (v^{(2)}(z))^2}, Q_{12}^{(2)}(z) = v^{(2)}(z) \frac{E^{(2)}(z)}{1 - (v^{(2)}(z))^2}, Q_{66}^{(2)}(z) = \frac{E^{(2)}(z)}{2(1 + v^{(2)}(z))}$$

منتجه‌های ممان مرتبه بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} Y_{xx} \\ Y_{yy} \\ Y_{xy} \\ Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} m_{xx}^{(k)} \\ m_{yy}^{(k)} \\ m_{xy}^{(k)} \\ m_{xz}^{(k)} \\ m_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} dz \quad (۵-پ)$$

که به فرم زیر قابل بازنویسی هستند.

$$Y_{xx} = C_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad Y_{yy} = -C_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad Y_{xy} = \frac{1}{2} C_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad Y_{yz} = \frac{1}{4} C_1 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right), \quad Y_{xz} = \frac{1}{4} C_1 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (۶-پ)$$

که در رابطه فوق داریم

$$C_1 = 2 \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mu_k(z) l_k^2 dz \quad (۷-پ)$$

شرایط مرزی در لبه‌های $x = 0, a$ از ورق به صورت زیر استخراج گردید.

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xx}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w = 0 \quad (۸-پ)$$

$$-N_{xx} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta u_0 = 0 \quad (۹-پ)$$

$$-N_{xy} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta v_0 = 0 \quad (۱۰-پ)$$

$$\int_{z_3}^{z_4} \left(k_{11}^{(3)} \phi_3^2 \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) - p_1^{(3)} \phi_3 \Delta T \right) dz \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \psi_3 = 0 \quad (۱۱-پ)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(k_{11}^{(1)} \phi_1^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - p_1^{(1)} \phi_1 \Delta T \right) dz \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \psi_1 = 0 \quad (۱۲-پ)$$

$$M_{xx} + Y_{xy} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (۱۳-پ)$$

$$M_{xy} - \frac{1}{2} Y_{xx} + \frac{1}{2} Y_{yy} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۱۴-پ)$$

$$Y_{xz} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad (۱۵-پ)$$

$$Y_{yz} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (۱۶-پ)$$

$$Y_{xz} \Big|_{x=0, a} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad (۱۷-پ)$$

شرایط مرزی در لبه‌های $y = 0, b$ از ورق به صورت زیر استخراج گردید.

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial x} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta w \quad (۱۸-پ)$$

$$= 0$$

$$-N_{xy} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta u_0 = 0 \quad (۱۹-پ)$$

$$-N_{yy} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta v_0 = 0 \quad (۲۰-پ)$$

$$\int_{z_3}^{z_4} \left(k_{22}^{(3)} \phi_3^2 \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) - p_2^{(3)} \phi_3 \Delta T \right) dz \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \psi_3 = 0 \quad (۲۱-پ)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(k_{22}^{(1)} \phi_1^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) - p_2^{(1)} \phi_1 \Delta T \right) dz \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \psi_1 = 0 \quad (۲۲-پ)$$

$$M_{yy} - Y_{xy} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۲۳-پ)$$

$$M_{xy} - \frac{1}{2} Y_{xx} + \frac{1}{2} Y_{yy} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (۲۴-پ)$$

$$Y_{xz} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (۲۵-پ)$$

$$Y_{yz} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad (۲۶-پ)$$

$$Y_{yz} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad \delta \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad (۲۷-پ)$$

Abstract

In this study, buckling analysis of functionally graded micro plates reinforced with graphene platelets integrated with piezoelectric layers, is investigated. Governing equations are derived based on the modified couple stress theory employing the Hamilton's principle. A uniform temperature change and a constant external electric field along thickness are applied to the micro plate. An external uniform in-plane mechanical load is distributed along the micro plate edges. The Halpin–tsai micromechanical model is utilized to evaluate the material properties of each composite layer reinforced with graphene platelets in the micro plate. The effects of the material length scale parameter, the external applied voltage, the thickness of the piezoelectric layers, and the weight fraction of the graphene platelets as well as the graphene platelets distribution pattern on the critical buckling temperature change and the critical buckling in-plane load are investigated. The reinforcing effect leads to a reduction in thermal buckling strength and a growth in mechanical load carrying potential.