

## اعمال مدل تحلیلی برای سفتی درگیری در مطالعه ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای

مدل‌سازی ارتعاشی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای برای مدت طولانی بر اساس تئوری ارتعاشات خطی انجام می‌گرفته است ولی در دهه‌های اخیر اهمیت منظور کردن عوامل غیرخطی مانند لقی و اصطکاک و عوامل متغیر با زمان مانند خطای انتقال و سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها و سایر عوامل بیش از پیش مشخص شده است. هدف از انجام این تحقیق، بررسی ارتعاشات غیرخطی یک جفت چرخ‌دنده ساده درگیر در حضور لقی و خطای انتقال استاتیکی می‌باشد. بدین منظور ابتدا سفتی درگیری متغیر با زمان دندانه‌ها به صورت تحلیلی محاسبه شده است. سپس معادلات حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن عوامل مذکور استخراج و با استفاده از روش رانگ-کوتا حل شده و تاثیر پارامترهای سیستم بر ارتعاشات غیرخطی آن بررسی شده است.

موسی رضائی<sup>۱</sup>

دانشیار

فرزاد فلاحی<sup>۲</sup>

کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما: چرخ‌دنده ساده، سفتی متغیر با زمان، لقی، ارتعاشات غیرخطی، آشوب

### ۱- مقدمه

تاکنون تحقیقات وسیعی در زمینه مطالعه رفتار دینامیکی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای صورت گرفته است. اهداف عمده محققان از انجام چنین تحقیقاتی شامل بررسی ارتعاشات سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای، مطالعه تاثیر بارهای دینامیکی اعمالی بر قسمت‌های مختلف سیستم به خصوص یاتاقان‌ها، استخراج فرکانس‌های طبیعی، تحلیل پایداری دینامیکی، تاثیر انواع عیوب بر رفتار دینامیکی چرخ‌دنده‌ها، بازده انتقال، سر و صدای تولید شده، قابلیت اعتماد و عمر قطعات می‌باشد. تحقیقات تئوری بر روی بارهای دینامیکی اعمالی به چرخ‌دنده‌ها از قرن (۱۸) شروع شد ولی اولین کارهای منظم در این زمینه در دهه (۱۹۲۰) و اوایل دهه (۱۹۳۰) صورت پذیرفت. موضوع این تحقیقات، اندازه‌گیری بارهای اعمالی بر دندانه‌ها با استفاده از روش‌های تحلیلی و تجربی بود. در دهه (۱۹۵۰) اولین مدل جرم و فنر برای مدل‌سازی این سیستم‌ها ارائه گردید. مدل‌های پیچیده‌تری که شامل سفتی سه‌بعدی دندانه‌ها، میرایی، اصطکاک بین دندانه‌ها و سایر عوامل غیرخطی بودند در دهه‌های (۱۹۷۰) و (۱۹۸۰) ارائه شدند.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

تاریخ دریافت: ۹۳/۰۴/۰۲، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۴/۲۲

در این تحقیقات، از مدل‌های ارتعاشات عرضی، پیچشی، محوری و نیز از مدل‌های ارتعاشی صفحات به منظور بدست آوردن پاسخ گذرا و ماندگار سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای معیوب استفاده شده است.

اوزگوان و هاوسر [۱] مرور کاملی بر کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات خطی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای انجام داده‌اند. در سی سال اخیر به تدریج محققان به این نتیجه رسیده‌اند که باید از مدل‌های غیرخطی برای مدل‌سازی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای استفاده کنند و عواملی مانند لقی، سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها، اصطکاک بین دندانه‌ها، خطای انتقال، سفتی متغیر با زمان یا تاقان‌ها و ... را مدنظر قرار دهند.

وانگ و همکاران [۲] پیشرفت‌های انجام شده در طی سال‌های (۱۹۷۰) تا (۲۰۰۱) در زمینه دینامیک غیرخطی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای به ویژه رفتار دینامیکی چرخ‌دنده‌ها با در نظر گرفتن اثر لقی و سفتی درگیری متغیر با زمان دندانه‌ها را معرفی کرده‌اند. کاهرامان و الشیاب [۳] با استفاده از روش حل نیمه تحلیلی بالانس هارمونیک به بررسی رفتار غیرخطی سیستم‌های انتقال قدرت چند مرحله‌ای پرداخته و پاسخ فرکانسی سیستم را برای محدوده فرکانسی مشخصی بدست آورده‌اند. آنها در مطالعات خود به پدیده‌های غیرخطی متعددی مانند پدیده پرش، آشوب، دوشاخگی، ایجاد فروهارمونیک‌ها و فراهارمونیک‌ها پی بردند و نشان دادند که صرف‌نظر کردن از عامل غیرخطی لقی درگیری، خطای زیادی را در پاسخ سیستم در نزدیکی نواحی تشدید ایجاد می‌کند در حالی که در نواحی فرکانسی دورتر از محدوده تشدید، صرف‌نظر کردن از لقی تفاوت محسوسی در پاسخ ایجاد نمی‌کند.

آنها برای مدل‌سازی سفتی درگیری، از بسط فوریه با سه جمله و با فرکانس اصلی معادل فرکانس درگیری دندانه‌ها استفاده کرده‌اند. همین محققان در تحقیق دیگری [۴] به بررسی رفتار غیرخطی سیستم‌های انتقال قدرت چند مرحله‌ای پرداخته و تشدیدهای فروهارمونیک را به صورت دقیق‌تر بررسی کردند. شن و همکاران [۵] نیز با استفاده از روش بالانس هارمونیک نموی<sup>۳</sup> به مطالعه رفتار غیرخطی سیستم انتقال قدرت تک‌مرحله‌ای پرداخته و نتایج کاهرامان و الشیاب را تأیید کردند.

پارکر و همکاران [۶] دینامیک سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کرده و به این نتیجه رسیدند که برخلاف تصور قبلی، حتی در چرخ‌دنده‌های دقیق با خطاهای تولید پایین نیز پدیده جدایش دندانه‌ها غیر قابل صرف‌نظر کردن است. چانگ ژیان و چانگ [۷] با مدل‌سازی یک جفت چرخ‌دنده ساده به صورت یک سیستم یک درجه آزادی، اثر تعلیق غیرخطی بر رفتار دینامیکی سیستم را بررسی کردند. آنها برای این منظور نمودار دوشاخگی<sup>۴</sup> را برای پارامترهای ضریب میرایی و فرکانس بی‌بعد رسم کردند. در تحقیق مذکور مناطق آشوبناک بوسیله نمودارهای پوانکاره، فاز و دوشاخگی شناسایی شد و فروهارمونیک‌ها و فراهارمونیک‌ها نیز در پاسخ مشاهده گردید. جان لوژکو [۸] ارتعاشات آشوبناک در سیستم چرخ‌دنده‌ای را مورد بررسی قرار داد و از یک مدل چهار درجه آزادی با در نظر گرفتن لقی بین دندانه‌ها و سفتی متغیر با زمان برای شبیه‌سازی استفاده کرد.

<sup>1</sup> Subharmonic

<sup>2</sup> Superharmonic

<sup>3</sup> Incremental Harmonic Balance

<sup>4</sup> Bifurcation

او برای حل معادله حاکم از روش انتگرال گیری عددی و آنالیز طیفی استفاده نمود و تاثیر پارامترهای دخیل در ارتعاشات سیستم را بررسی کرد. چانگ ژیان [۹] به بررسی رفتار دینامیکی سیستم چرخ دنده‌ای با در نظر گرفتن تعلیق غیرخطی و یاتاقان ژورنال طولیل پرداخت. او در این تحقیق اثر تعلیق غیرخطی، نیروی غیرخطی ناشی از فیلم روغن و نیروی غیرخطی ناشی از تماس دندانه‌های چرخ دنده‌ها را بررسی کرد و از پارامترهای بی بعد میرایی و سرعت دورانی به عنوان پارامتر کنترل برای رسم نمودارهای دوشاخگی استفاده نمود و محدوده‌های عملکرد مناسب برای سیستم را استخراج کرد. لساد والها و همکاران [۱۰] دینامیک غیرخطی یک سیستم انتقال قدرت دو مرحله‌ای را با در نظر گرفتن سفتی متغیر با زمان، یاتاقان‌های منعطف و لقی بین دندانه‌ها بررسی کردند. آنها از یک مدل دوازده درجه آزادی استفاده و معادلات حاکم را با استفاده از روش خطی سازی حل نمودند. نتیجه تحقیق آنان حاکی از ایجاد جدایش دندانه‌ها در برخی از بازه‌های فرکانسی است. جورجیو بونوری و فرانسیسکو پلیکانو [۱۱] ارتعاشات غیرخطی سیستم چرخ دنده‌ای در حضور خطاهای تولید را بررسی کردند. آنها خطاهای تولید را به صورت داده‌های اتفاقی در مدل وارد کرده و رفتار دینامیکی سیستم بررسی نمودند.

کانگ و لین [۱۲] با استفاده از روش‌های تئوری به بررسی رفتار دینامیکی سیستم چرخ دنده‌ای ساده با در نظر گرفتن سفتی متغیر با زمان و خطاهای پروفیل دندانه پرداختند. گانگ لیو [۱۳] در پایان نامه دکتری خود به بررسی دینامیک غیرخطی یک سیستم چرخ دنده‌ای زنجیره‌ای پرداخته است. او پدیده‌های مختلف موجود در سیستم، از جمله جدایش دندانه‌ها پاسخ پایدار سیستم و ... را مورد بررسی قرار داده و اثر پارامترها بر رفتار دینامیکی سیستم را بررسی نمود. ایان هوارد و همکاران [۱۴] از یک مدل ساده برای بررسی تاثیر اصطکاک خشک و وجود ترک دندانه بر ارتعاشات سیستم چرخ دنده‌ای استفاده نمودند. پیماریا داولی و همکاران [۱۵] به بررسی دلایل ایجاد صدا در سیستم‌های چرخ دنده‌ای پرداختند. آنها خطای انتقال را به عنوان مهم ترین عامل ایجاد صدا در سیستم معرفی نموده و اثر آن بر سر و صدای ایجاد شده در سیستم را بررسی نمودند. فرشیدیان فر و سقفی [۱۶] در مقاله‌ای به بررسی پدیده دوشاخگی و گذر به حالت آشوب با استفاده از روش تحلیلی ملینکو پرداختند. آنها از یک مدل غیرخطی متغیر با زمان برای مدل سازی سیستم چرخ دنده‌ای استفاده نموده و مقادیر بحرانی پارامترهای کنترلی برای وقوع دوشاخگی و آشوب را پیش بینی کردند. لی و کاهرامان [۱۷] به بررسی ارتعاشات یک جفت چرخ دنده ساده با در نظر گرفتن اثر همزمان الاستوهیدرودینامیک روغن و ارتعاشات پیچشی چرخ دنده‌ها پرداختند.

شن و شائو [۱۸] سفتی درگیری یک جفت دندانه درگیر را با در نظر گرفتن اصلاحات پروفیل دندانه و ترک ریشه شبیه سازی نمودند. چاری و همکاران [۱۹] اثر ترک ریشه دندانه بر کاهش سفتی درگیری را مورد بررسی قرار دادند و یک روش تحلیلی برای محاسبه سفتی درگیری یک جفت چرخ دنده درگیر ارائه نمودند و نتایج خود را با نتایج حاصل از روش اجزا محدود مقایسه کردند. همچنانکه که اشاره شد در مطالعات انجام شده بر روی ارتعاشات چرخ دنده‌ها، سفتی درگیری متغیر با زمان به صورت جملات محدودی از سری فوریه و یا با استفاده از روش اجزا محدود در مدل وارد شده است. استفاده از سری فوریه با جملات محدود، تقریبی غیر دقیق از سفتی درگیری را ارائه می دهد. از طرف دیگر، روش اجزا محدود نیز علیرغم اینکه به نتایج دقیق تری منجر می شود روشی زمان بر می باشد.

اصلی‌ترین تفاوت مدل به کار رفته در مقاله حاضر با مدل‌های مورد استفاده در مطالعات قبلی در زمینه مطالعه رفتار ارتعاشی سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای، نحوه وارد کردن سفتی درگیری در معادلات است. در مقاله حاضر، ابتدا سفتی درگیری به صورت تحلیلی و با استفاده از روش ارائه شده در منبع [۱۹] محاسبه شده و سپس به فرم ماتریسی در معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی سیستم چرخ‌دنده‌ای وارد می‌شود. عامل شدیداً غیرخطی لقی بین دندانه‌ها بوسیله تابع جابجایی سه‌تکه‌ای در مدل وارد شده است. همچنین خطای انتقال استاتیکی به صورت سه جمله از سری فوریه در نظر گرفته شده است. مدل مورد نظر در نهایت به یک مدل یک درجه آزادی تبدیل می‌گردد که با استفاده از روش رانگ-کوتا حل می‌شود. برای بررسی تاثیر پارامترهای سیستم بر پاسخ آن، نمودارهای پاسخ فرکانسی، دوشاخگی و پوانکاره استخراج شدند. نتایج نشان می‌دهد که کم بودن بار انتقالی توسط سیستم چرخ‌دنده‌ای می‌تواند موجب ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم شود طوری که افزایش میرایی سیستم نیز نمی‌تواند تغییری در رفتار سیستم ایجاد کند.

## ۲- مدل سازی

هدف از این بخش ایجاد یک مدل غیرخطی برای ارتعاشات پیچشی یک جفت چرخ‌دنده ساده درگیر است. اصلی‌ترین تفاوت مدل به کار رفته در مقاله حاضر با مدل‌های مورد استفاده در مطالعات پیشین، نحوه وارد کردن سفتی درگیری در معادلات است. در تحقیق حاضر به جای استفاده از سری فوریه یا روش اجزا محدود، سفتی درگیری به صورت ماتریسی در معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم چرخ‌دنده‌ای وارد شده است. علاوه بر آن، اثر لقی و تحریک در اثر خطای پروفیل چرخ‌دنده‌ها نیز در معادلات اعمال شده است.

### ۲-۱- محاسبه تحلیلی سفتی درگیری دندانه‌ها

برای محاسبه سفتی درگیری تحلیلی دو چرخ‌دنده درگیر از روش ارائه شده در منبع [۱۹] استفاده شده است. سفتی درگیری دو چرخ‌دنده با تغییر محل تماس دندانه‌ها و تعداد دندانه‌های درگیر نسبت به زمان تغییر می‌یابد. بعلاوه، سفتی درگیری تابعی از هندسه دندانه‌ها، محل تماس دندانه‌ها، تغییرشکل و اعوجاج دندانه‌ها، خطای پروفیل دندانه‌ها و عیوب دندانه‌های درگیر است. سفتی یک دندانه از محاسبه تغییرشکل‌های خمشی<sup>۱</sup>  $\delta_b$ ، تغییرشکل بستر دندانه<sup>۲</sup>  $\delta_f$  و تغییرشکل تماسی دندانه<sup>۳</sup>  $\delta_h$  بدست می‌آید. در مدل‌سازی سفتی درگیری از اعوجاج دندانه صرف‌نظر شده است.

#### ۲-۱-۱- تغییر شکل خمشی

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است تغییرشکل خمشی یک دندانه از مدل‌سازی آن به صورت یک تیر یکسرگیردار با سطح مقطع متغیر و با طول موثر  $L_e$  که به  $n$  قسمت مساوی تقسیم شده است بدست می‌آید. برای این منظور ابتدا انرژی کرنشی تیر محاسبه و با کار انجام شده توسط نیروی خارجی

<sup>1</sup> Bending deflection

<sup>2</sup> Fillet-Foundation deflection

<sup>3</sup> Contact deflection

مساوی قرار داده شده می‌شود که پس از ساده‌سازی، تغییرشکل خمشی  $\delta_b$  در راستای  $\vec{j}$  و در محل تماس از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۹]:

$$\delta_b = F \cos^2 \alpha_m \sum_{i=1}^n e_i \left\{ \frac{(d_i - e_i d_i + \frac{1}{3} e_i^2)}{E' \bar{I}_i} + \frac{1}{s_h G \bar{A}_i} + \frac{\tan^2 \alpha_m}{\bar{A}_i E'} \right\} \quad (1)$$

که در آن  $F$  نیروی اعمالی به دندان،  $\alpha_m$  زاویه فشار،  $G$  مدول برشی و  $s_h$  ضریب شکل برشی<sup>۱</sup> است و  $e_i$  و  $d_i$  در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.  $E'$ ،  $\bar{I}_i$  و  $\bar{A}_i$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

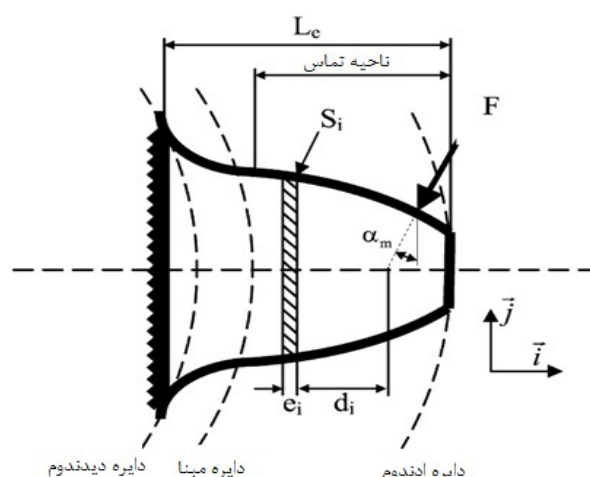
$$E' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\bar{I}_i} = \frac{\left(\frac{1}{I_i} + \frac{1}{I_{i+1}}\right)}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\bar{A}_i} = \frac{\left(\frac{1}{A_i} + \frac{1}{A_{i+1}}\right)}{2} \quad (4)$$

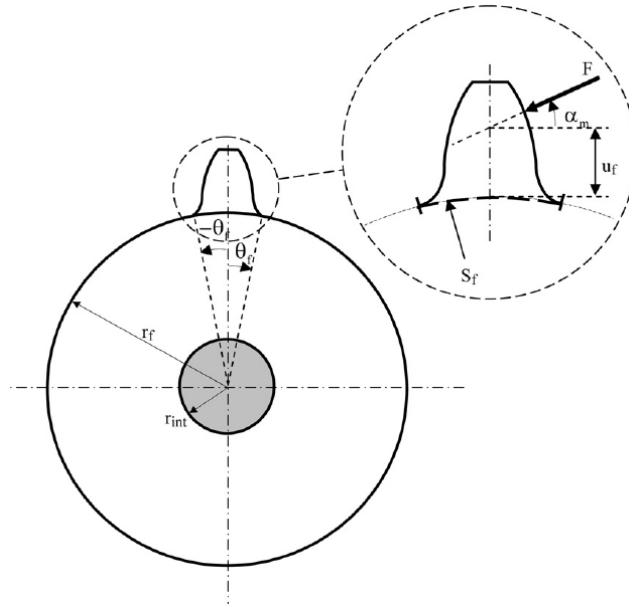
در روابط اخیر  $I_i$  ممان اینرسی سطح  $S_i$  حول محور تقارن دندان و  $A_i$  سطح مقطع مربوطه است.  $E$  مدول یانگ و  $\nu$  نسبت پواسون می‌باشد. بنابراین سفتی درگیری دندان را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$k_b = \frac{F}{\delta_b} \quad (5)$$



شکل ۱- مدل تیر یک سرگردار دندان برای محاسبه تغییرشکل خمشی دندان [۱۹]

<sup>1</sup>Shear factor



شکل ۲- مشخصات هندسی دندان برای محاسبه سفتی پایه [۱۹]

### ۲-۱-۲- تغییر شکل بستر دندان

محاسبه تغییر شکل بستر دندان بر اساس تئوری موسخلیشویلی که برای یک حلقه تغییر شکل پذیر ارائه شده است، صورت می‌پذیرد. در این تئوری، دندان صلب در نظر گرفته می‌شود و بدنه چرخ‌دنده به صورت یک بستر الاستیک مدل می‌شود که نیروهای عمودی، مماسی و گشتاور خمشی در محل ریشه دندان، به آن وارد می‌گردد. با فرض ثابت بودن تنش برشی و توزیع خطی تنش عمودی در ریشه دندان، فرمول تحلیلی برای تغییر شکل بستر دندان به صورت زیر بدست می‌آید [۲۰]:

$$\delta_f = \frac{F \cos^2 \alpha_m}{WE} \left\{ L^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \alpha_m) \right\} \quad (6)$$

در رابطه (۶)،  $W$  عرض دندان است و  $u_f$  و  $s_f$  در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.  $L^*$ ،  $M^*$ ،  $P^*$  و  $Q^*$  را می‌توان از تابع چند جمله‌ای زیر بدست آورد:

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = \frac{A_i}{\theta_f^2} + B_i h_{fi}^2 + \frac{C_i h_{fi}}{\theta_f} + \frac{D_i}{\theta_f} + E h_{fi} + F_{ii} \quad (7)$$

که در آن  $X_i^*$  مشخص کننده ضرایب  $L^*$ ،  $M^*$ ،  $P^*$  و  $Q^*$  است.  $h_{fi} = \frac{r_f}{r_{int}}$  و  $\theta_f$  در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. ضرایب  $A_i$ ،  $B_i$ ،  $C_i$ ،  $D_i$ ،  $E_i$  و  $F_{ii}$  نیز در جدول (۱) آورده شده است. در نهایت، سفتی پایه عبارت است از:

$$k_f = \frac{F}{\delta_f} \quad (8)$$

## ۲-۱-۳- تغییر شکل تماسی

یانگ و سان [۲۱] از فرمولی که وبر [۲۲] برای استوانه‌های در تماس با استفاده از تئوری دو بعدی هرتز برای محاسبه جابجائی ناشی از نیروی تماسی ارائه داده است استفاده کردند. آنها با در نظر گرفتن هندسه چرخ‌دنده و انجام ساده‌سازی به این نتیجه رسیدند که سفتی تماسی هرتزین دو دندانه درگیر، مستقل از محل تماس و عمق نفوذ دو دندانه در همدیگر بوده و در طول خط تماس ثابت می‌باشد. سفتی تماسی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$k_h = \frac{\pi EW}{4(1-\nu^2)} \quad (9)$$

و تغییرشکل موضعی ناشی از تماس موضعی به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta_h = \frac{F}{k_h} \quad (10)$$

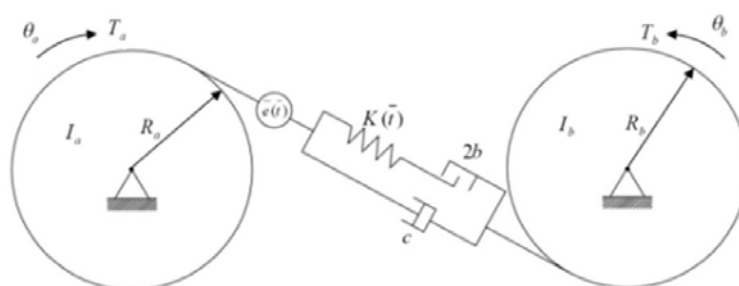
## ۲-۱-۴- سفتی درگیری یک جفت دندانه

اگر اندیس‌های ۱ و ۲ نشان دهنده دو دندانه درگیر باشند، با توجه به یکسان بودن نیروی انتقالی روی هر دو دندانه می‌توان سفتی درگیری نهایی  $k_{12}$  را از سری فرض کردن سفتی‌های دندانه‌ها بدست آورد بنابراین:

$$k_{12} = 1 / \left( \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{f2}} \right) \quad (11)$$

جدول ۱- ضرایب معادله (۷) [۱۹]

$F_i$	$E_i$	$D_i$	$C_i$	$B_i$	$A_i$	
۶/۱۶۰۴۵	۰/۰۲۷۱	$۴/۷۷۰۲ \times 10^{-۳}$	$-۲/۳۰۱ \times 10^{-۴}$	$-۱/۹۹۱۶۶ \times 10^{-۳}$	$-۵/۵۷۴ \times 10^{-۵}$	$L^*(h_{fi}, \theta_f)$
۰/۹۰۱۶۶	۰/۱۶۲۴	$-۹/۹۲۵۶ \times 10^{-۳}$	$-۱۶۳/۴۳۱ \times 10^{-۴}$	$۲۱۶/۱ \times 10^{-۳}$	$۶۰/۱۱۱ \times 10^{-۵}$	$M^*(h_{fi}, \theta_f)$
۰/۹۲۳۶	۰/۲۱۶۹۵	$۵۳/۳ \times 10^{-۳}$	$۰/۰۵۳۱۶ \times 10^{-۴}$	$۱۱۶۵/۵ \times 10^{-۳}$	$-۵۰/۹۵۲ \times 10^{-۵}$	$P^*(h_{fi}, \theta_f)$
۰/۶۹۰۴	-۰/۱۴۷۲	$۷/۱۶۲۹۷ \times 10^{-۳}$	$-۴/۰۹۶۴ \times 10^{-۴}$	$۹/۰۱۶۱۶۹ \times 10^{-۳}$	$-۶/۲۰۴۲ \times 10^{-۵}$	$Q^*(h_{fi}, \theta_f)$



شکل ۳- مدل دو درجه آزادی ارتعاشات پیچشی غیرخطی دو چرخ‌دنده درگیر

## ۲-۲- معادلات حاکم بر سیستم

مدل دو درجه آزادی ارتعاشات پیچشی یک جفت چرخ‌دنده ساده در شکل (۳) نشان داده شده است. فرضیات صورت گرفته در این مدل عبارتند از:

- ۱- شفت‌ها و محل اتصال چرخ‌دنده‌ها در روی شفت‌ها صلب فرض می‌شود.
- ۲- یاتاقان‌ها صلب در نظر گرفته می‌شوند.
- ۳- ضریب میرایی درگیری ثابت فرض می‌شود.
- ۴- اینرسی شفت‌ها و اجزای متصل به آنها به صورت گسسته در محل چرخ‌دنده‌ها و یاتاقان‌ها در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به فرضیات اخیر، چرخ‌دنده‌ها تنها قادر به حرکت چرخشی خواهند بود. با فرض یکسان بودن همه دندانه‌ها بر روی چرخ‌دنده، فرکانس خطای انتقال با فرکانس درگیری دندانه‌ها و هارمونیک‌های بالاتر آن برابر خواهد بود. بر اساس این فرض، دامنه لقی در طول درگیری دنده‌ها نیز ثابت خواهد بود.

با صرف‌نظر از حرکت خارج از صفحه، معادلات حاکم بر ارتعاشات پیچشی غیرخطی سیستم را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$I_a \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} + c(R_a \frac{d\theta_a}{dt} - R_b \frac{d\theta_b}{dt} - \frac{d\bar{e}}{dt})R_a + R_a K(\bar{t})f(R_a \theta_a - R_b \theta_b - \bar{e}(\bar{t})) = T_a \quad (12)$$

$$I_b \frac{d^2 \theta_b}{dt^2} - c(R_a \frac{d\theta_a}{dt} - R_b \frac{d\theta_b}{dt} - \frac{d\bar{e}}{dt})R_b - R_b K(\bar{t})f(R_a \theta_a - R_b \theta_b - \bar{e}(\bar{t})) = -T_b \quad (13)$$

جملات دوم در دو معادله اخیر نشان دهنده گشتاور ناشی از نیروی میرایی ویسکوز درگیری دندانه‌ها و جملات سوم معرف گشتاور حاصل از نیروی درگیری دندانه‌ها است که در آن تابع  $f(R_a \theta_a - R_b \theta_b - \bar{e}(\bar{t}))$  بیان‌کننده تابع جابجایی غیرخطی ناشی از لقی بین دندانه‌ها می‌باشد و  $T_a$  و  $T_b$  به ترتیب گشتاور شفت ورودی و گشتاور ترمزی روی چرخ‌دنده متحرک هستند.  $\bar{e}(\bar{t})$  خطای انتقال استاتیکی است و از خطاهای فرایند تولید و همچنین اصلاحات دندانه‌ها ناشی می‌شود و به عنوان تحریک جابجایی در مدل وارد می‌گردد. از آنجا که این سیستم دارای یک مود حرکتی صلب است و در آن هیچ نوع انرژی پتانسیلی در سیستم ذخیره نمی‌شود می‌توان با تعریف پارامتر جدید  $\bar{x} = R_a \theta_a - R_b \theta_b - \bar{e}(\bar{t})$  درجات آزادی سیستم را به یک کاهش داد و معادله حاکم را به صورت زیر بدست آورد:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + c \frac{d\bar{x}}{dt} + K(\bar{t})f(\bar{x}) = \bar{F} - m \frac{d^2 \bar{e}(\bar{t})}{dt^2} \quad (14)$$

که در آن:

$$m = \frac{I_a I_b}{I_b R_a^2 + I_a R_b^2} \quad (15)$$

$$\bar{F} = \frac{T_a I_b R_a + T_b I_a R_b}{I_b R_a^2 + I_a R_b^2} \quad (16)$$



$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x} - b, & \bar{x} > b \\ 0, & |\bar{x}| \leq b \\ \bar{x} + b, & \bar{x} < -b \end{cases} \quad (17)$$

در این روابط  $m$  معرف اینرسی کلی سیستم چرخ دنده‌ای،  $\bar{F}$  نیروی متوسط انتقالی بین دندانه‌ها،  $2b$  لقی کل بین دندانه‌ها و  $f(\bar{x})$  تابع جابجایی غیرخطی سه تکه‌ای در اثر وجود لقی بین دندانه‌ها است، این نوع غیرخطی، از هندسه سیستم ناشی می‌شود. برای بی‌بعدسازی معادلات، پارامترهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{b}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{mean}}{m}}, \quad t = \omega_n \bar{t}, \quad k(t) = \frac{K(\bar{t})}{K_{mean}}, \\ \tau = \Omega t, \quad \varepsilon\mu = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad f_0 = \frac{\bar{F}}{bK_{mean}} \end{aligned} \quad (18)$$

خطای انتقال استاتیکی  $\bar{e}(\bar{t})$  تابعی پررودیک با فرکانس اصلی برابر فرکانس درگیری است. بنابراین:

$$\bar{e}(\bar{t}) = \sum_{l=1}^L f_l \cos(l\omega\bar{t}) \quad (19)$$

با بی‌بعدسازی رابطه اخیر بر حسب پارامترهای ذکر شده می‌توان نوشت:

$$e(\tau) = \sum_{l=1}^L f_l \cos(l\tau) \quad (20)$$

با در نظر گرفتن  $f_l = \frac{F_l}{b}$  و پس از بی‌بعدسازی، معادله (۱۴) به شکل زیر در می‌آید:

$$\Omega^2 \ddot{x} + 2\varepsilon\mu\Omega \dot{x} + k(\tau)f(x) = f_0 + \sum_{l=1}^3 (l\Omega)^2 f_l \cos(l\tau) \quad (21)$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ x + 1, & x < -1 \end{cases} \quad (22)$$

در رابطه (۲۱) علامت نقطه در بالای حروف نشان‌دهنده مشتق نسبت به  $\tau$  است. پارامترهای بی‌بعد در این معادله عبارتند از فرکانس بی‌بعد ورودی،  $\Omega$ ، نسبت میرایی،  $\varepsilon\mu$ ، ضریب بار،  $f_0$ ، و ضرایب بسط خطای انتقال استاتیکی،  $f_l (l = 1, 2, 3, \dots, L)$ .

### ۳- نتایج

مشخصات سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای مورد بحث مطابق جدول (۲) در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده است که گشتاور  $T = 28.13(N.m)$  به پینیون وارد می‌شود.

جدول ۲- مشخصات سیستم انتقال قدرت تک مرحله‌ای

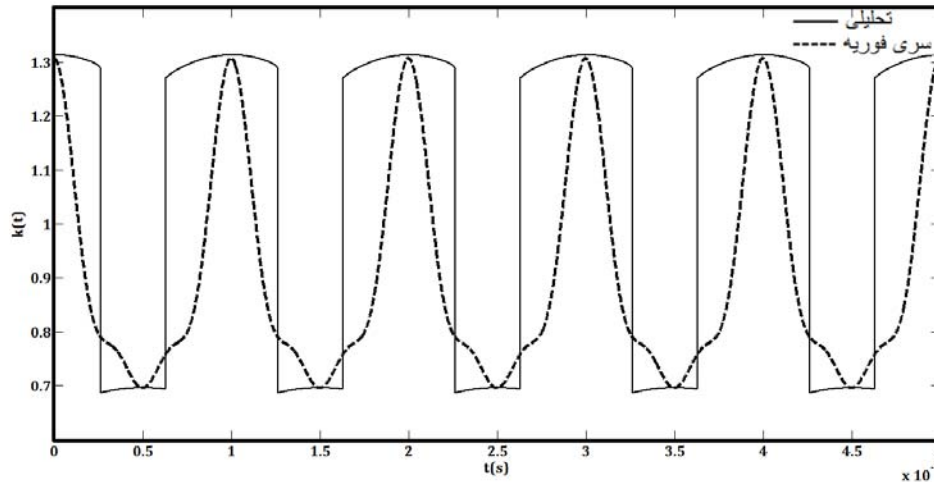
چرخ	پینیون	
۳۰	۲۵	تعداد دندانه
۲	۲	مدول (mm)
۲۰	۲۰	عرض دندانه (mm)
۱/۶۳	۱/۶۳	نسبت تماس
۲۰۰۰	۲۴۰۰	سرعت دورانی (rpm)
۲۰	۲۰	زاویه فشار (deg)
$2.07 \times 10^9$	$2.07 \times 10^9$	مدول یانگ (Pa)
۰/۳	۰/۳	نسبت پواسون

### ۳-۱- نتایج سفتی درگیری

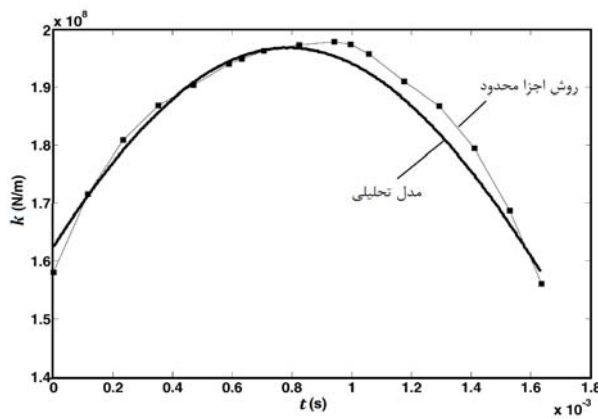
در این بخش برای روشن شدن اهمیت استفاده از روش تحلیلی برای محاسبه سفتی درگیری، ابتدا نتایج سفتی درگیری حاصل از سری فوریه استفاده شده در منبع [۲۳] و روش تحلیلی با هم مقایسه شده است. در منبع [۲۳] برای مدل‌سازی سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها از سه جمله اول سری فوریه مطابق رابطه (۲۳) استفاده شده است:

$$k(\bar{t}) = k \left[ \alpha + \beta \sum_{l=1}^3 \varepsilon_l \cos(l\omega\bar{t}) \right] \quad (23)$$

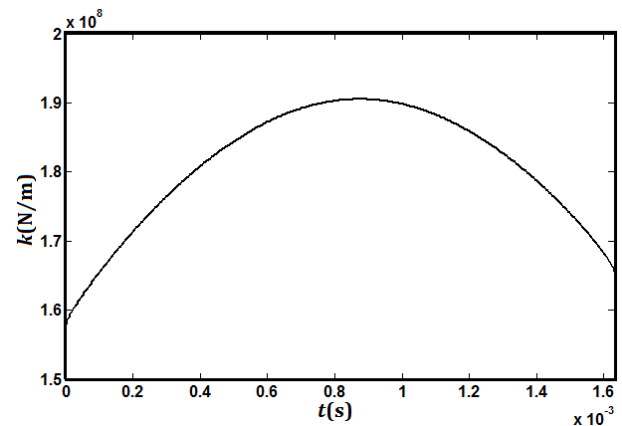
در رابطه (۲۳)،  $\omega$  فرکانس درگیری دندانه‌ها و  $\varepsilon_1 = 0.05$ ،  $\varepsilon_2 = 0.02$  و  $\varepsilon_3 = 0.01$  می‌باشد. در شکل (۴) سفتی درگیری دندانه برآورد شده با استفاده از رابطه (۲۳) به ازای  $\alpha = 0.9$  و  $\beta = 5.1$  با سفتی درگیری بدست آمده از روش تحلیلی نشان داده شده است. همانطور که از شکل (۴) مشخص است استفاده از سری فوریه با سه جمله تقریب ضعیفی از سفتی درگیری واقعی می‌باشد. لازم به ذکر است که مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  برای چرخنده‌های مورد تحلیل در مرجع مذکور به ترتیب ۱ و ۲ در نظر گرفته شده است.



شکل ۴- سفتی درگیری بدست آمده از روش تحلیلی و سری فوریه با سه جمله



(ب)

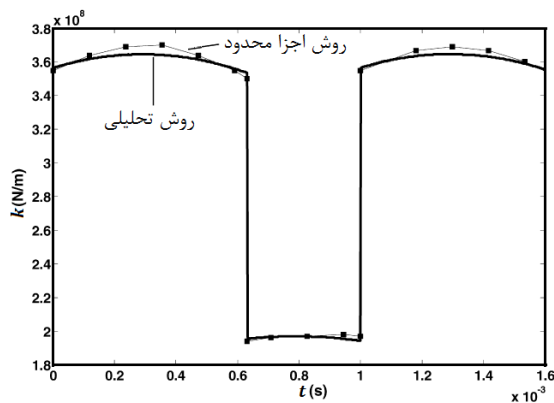


(الف)

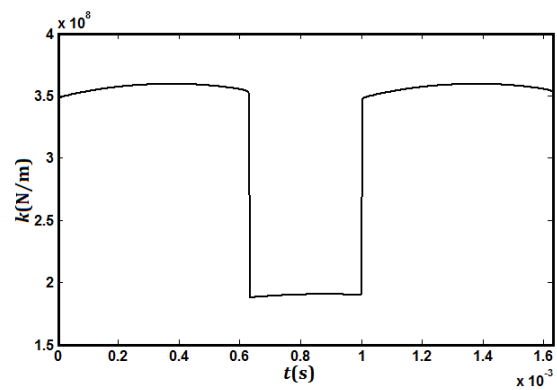
شکل ۵- الف) سفتی درگیری بدست آمده از روش تحلیلی یک جفت دندان

ب) سفتی درگیری یک جفت دندان ارائه شده در مرجع [۱۹]

در شکل (۵) نتیجه بدست آمده برای سفتی درگیری یک جفت دندان نشان داده شده است. نتیجه بدست آمده با نتایج تحلیلی و روش اجزاء محدود مقایسه شده است. در شکل (۵-الف) نتیجه بدست آمده از محاسبات تحقیق حاضر و در شکل (۵-ب) نتایج ارائه شده در مرجع [۱۹] نشان داده شده است. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است سفتی درگیری تابعی از زمان بوده و بر حسب زاویه چرخش چرخ‌دنده‌ها تغییر می‌کند. در نقطه شروع درگیری یک دندان از پینیون با یک دندان از چرخ‌دنده، انتهای دندان پینیون با سر دندان چرخ‌دنده درگیر است. این درگیری با چرخش پینیون ادامه می‌یابد تا اینکه در انتهای درگیری، سر دندان پینیون با انتهای دندان چرخ‌دنده درگیر می‌شود. با توجه به شکل (۵-الف) سفتی درگیری در نزدیکی نقطه گام بیشترین مقدار را دارد. همچنین این شکل‌ها نشان دهنده دقت خوب روش تحلیلی محاسبه سفتی درگیری در مقایسه با روش اجزاء محدود است که نیازمند انجام محاسبات طولانی می‌باشد.



(ب)



(الف)

شکل ۶- الف) سفتی درگیری برای درگیری یک جفت و دو جفت دندانه

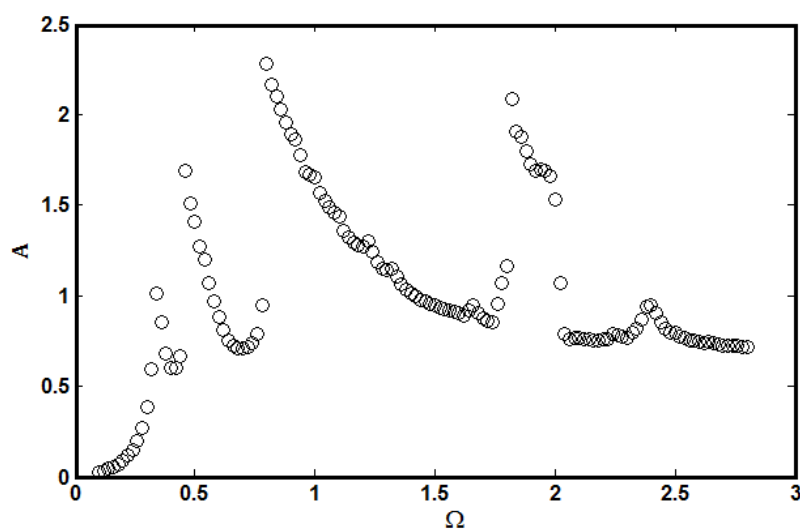
ب) سفتی درگیری برای درگیری یک جفت و دو جفت دندانه [۱۹]

شکل (۶- الف) سفتی درگیری را برای درگیری با نسبت تماس  $1/63$  نشان می‌دهد. بر اساس الگوی درگیری، به ترتیب ابتدا دو جفت دندانه سپس یک جفت و در نهایت دوباره دو جفت دندانه درگیر می‌شوند. با فرض اینکه زمان درگیری دندانه‌ها برابر  $T_e$  باشد، در ابتدای درگیری، دو جفت دندانه برای مدت زمان  $t_{DT} = (\varepsilon - 1)T_e$  که در آن  $\varepsilon$  نسبت تماس است درگیر می‌شوند تا اینکه جفت دندانه اول از درگیری خارج شوند و تنها یک جفت دندانه درگیر باقی می‌ماند که این یک جفت دندانه برای مدت زمان  $t_{ST} = (2 - \varepsilon)T_e$  در حالت درگیر باقی می‌ماند تا اینکه جفت دندانه دیگری وارد درگیری گردد بعد از آن روند درگیری بطور مشابه ادامه می‌یابد. شکل (۶- الف) نتیجه بدست آمده از محاسبات تحقیق حاضر و شکل (۶- ب) نتایج ارائه شده در مرجع [۱۹] را نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل‌ها بر می‌آید سفتی درگیری وقتی دو جفت دندانه درگیرند بیشتر از سفتی درگیری یک جفت دندانه درگیر است. همچنین نتایج تطابق خوبی در مقایسه با هم دارند.

### ۳-۲- پاسخ فرکانسی و بررسی تاثیر ضرایب بی‌بعد سیستم بر آن

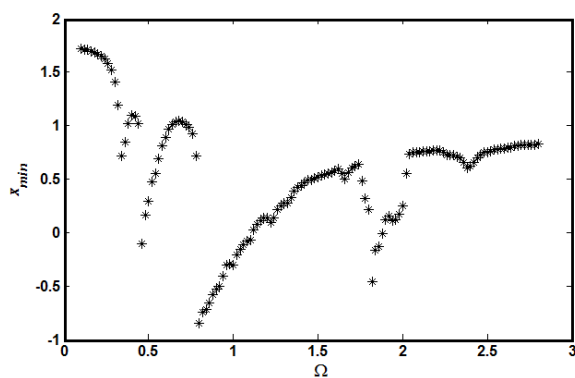
در شکل (۷) پاسخ فرکانسی سیستم به ازای ضرایب بی‌بعد  $f_0 = 0.8$ ،  $f_1 = 0.5$  و  $\varepsilon\mu = 0.06$  رسم شده است. در این شکل می‌توان سه پرش را مشاهده کرد. اولین پرش در نزدیکی فرکانس نسبی  $\Omega = 0.45$  رخ داده است. این شکل نشان می‌دهد که بین فرکانس‌های نسبی  $\Omega = 0.425$  و  $\Omega = 0.450$  احتمال وجود دو پاسخ پایدار برای سیستم وجود دارد و شرایط اولیه تعیین کننده پاسخ نهایی سیستم است. در فرکانس نسبی نزدیک  $0.775$  چرخه حدی سیستم، پایداری خود را از دست می‌دهد و به شاخه بالایی با یک چرخه حدی دیگر پرش می‌کند. این امر ناشی از جدایش دندانه‌های درگیر است که در نتیجه آن سیستم رفتار نرم‌شونده نشان داده و دامنه تغییرات خطای انتقال افزایش می‌یابد. رژیم حرکتی تا قبل از جدایش دندانه‌ها رژیم حرکتی بدون برخورد<sup>۱</sup> است و در آن خطای انتقال دینامیکی، همواره بزرگتر از واحد است یعنی  $x_{min} > 1$ .

<sup>۱</sup> No Impact Motion

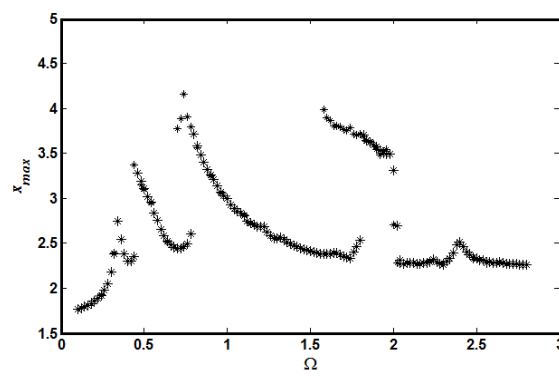


شکل ۷- پاسخ فرکانسی بر حسب دامنه ارتعاش

در شکل (۸ الف و ب) پاسخ فرکانسی بر حسب حداکثر و حداقل دامنه ارتعاشی به ازای پارامترهای بی بعد ارائه شده است. در این شکل نیز انواع رژیم‌های حرکتی به وضوح مشاهده می‌شود. بازه‌های فرکانسی مربوط به این حالت در شکل (۸) قابل مشاهده است. پس از جدایش دندانه‌ها، رژیم حرکتی به رژیم برخورد یک‌طرفه<sup>۱</sup> تغییر وضعیت می‌دهد که در آن  $-1 < x_{min} < 1$ ،  $x_{max} > 1$  می‌باشد. پرش مشابهی را نیز می‌توان در نزدیکی فرکانس نسبی  $\Omega = 1.9$  مشاهده کرد.



(ب)

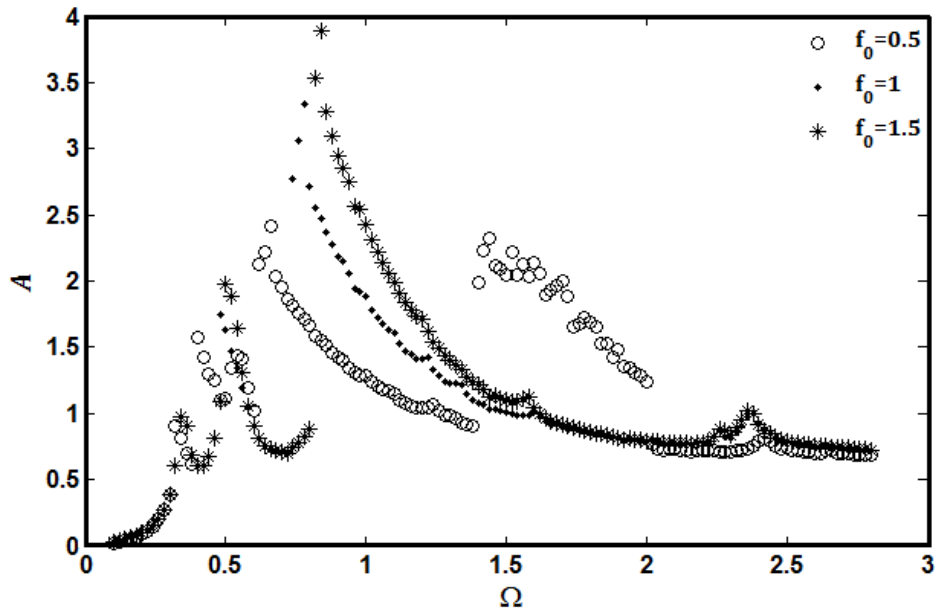


(الف)

شکل ۸- الف- پاسخ فرکانسی بر حسب حداکثر دامنه ارتعاش

ب- پاسخ فرکانسی بر حسب حداقل دامنه ارتعاش

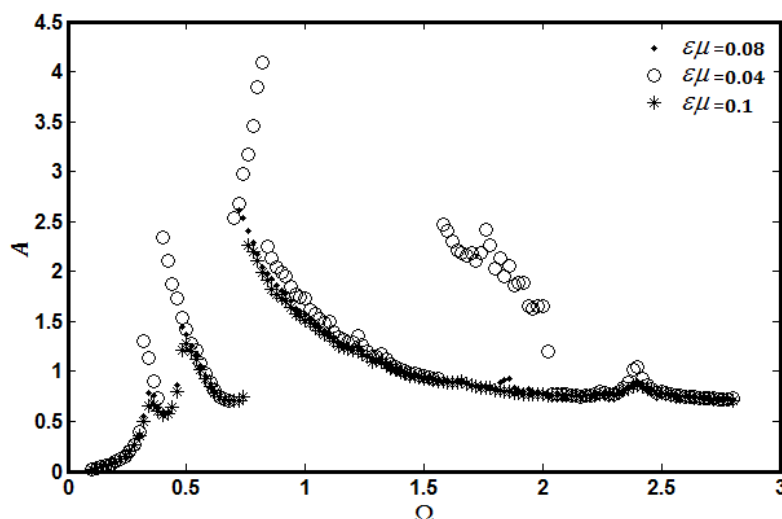
<sup>1</sup> Single Side Impact Motion



شکل ۹- تاثیر ضریب بار بر پاسخ فرکانسی سیستم

در شکل (۹) پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر بی بعد  $f_1 = 0.5$  و  $\varepsilon\mu = 0.08$  و به ازای مقادیر مختلف ضریب بی بعد  $f_0$  رسم شده است. آنچه که در نگاه اول از این شکل برمی آید این است که افزایش ضریب بار موجب افزایش دامنه خطای انتقال دینامیکی می گردد. علاوه بر آن افزایش ضریب بار باعث پایدار شدن پاسخ سیستم در حوالی فرکانس نسبی  $\Omega = 2$  شده است. نکته مهم تر این است که علاوه بر اینکه افزایش ضریب بار، حتی تا سه برابر مقدار اولیه نتوانسته است از جدایش دندانه ها در نزدیکی فرکانس  $0.8$  جلوگیری کند، موجب برخورد به پشت دندانه ها نیز شده است. چنین نتیجه ای در مرجع [۳] نیز برای سیستم انتقال قدرت دو مرحله ای گزارش شده است.

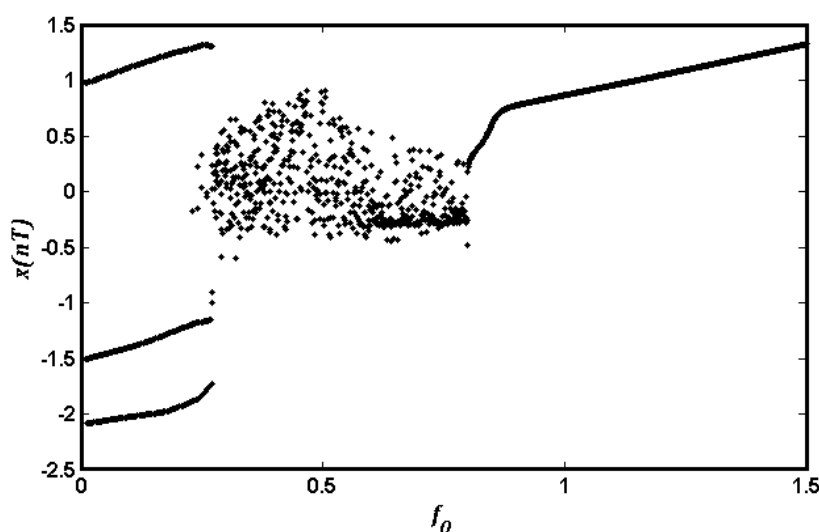
در شکل (۱۰) پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر بی بعد  $f_1 = 0.5$  و  $f_0 = 0.8$  رسم شده و تاثیر پارامتر بی بعد میرایی بر پاسخ فرکانسی سیستم نشان داده شده است. همچنانکه در این شکل دیده می شود پارامتر بی بعد میرایی تاثیر بسیار زیادی بر پاسخ سیستم دارد. بطوری که افزایش ضریب میرایی از  $0.04$  به  $0.08$  موجب پایدار شدن پاسخ سیستم در نزدیکی فرکانس نسبی  $2$  شده و از وقوع پرش جلوگیری می کند. افزایش بیشتر ضریب میرایی تا  $0.1$  برخورد به پشت دندانه ها را نیز حذف می کند و موجب نزدیک تر شدن پاسخ سیستم به پاسخ سیستم خطی می گردد.



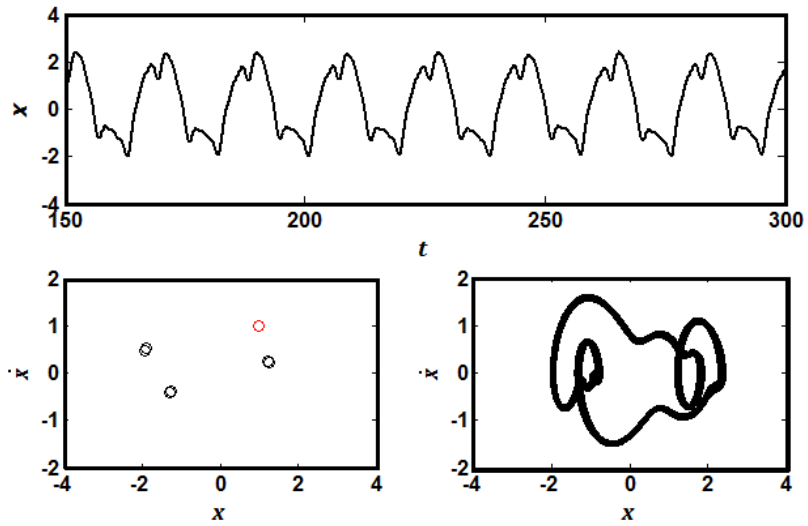
شکل ۱۰- تاثیر ضریب میرایی بی‌بعد بر پاسخ فرکانسی سیستم

### ۳-۳- دیاگرام‌های دوشاخگی و پوانکاره

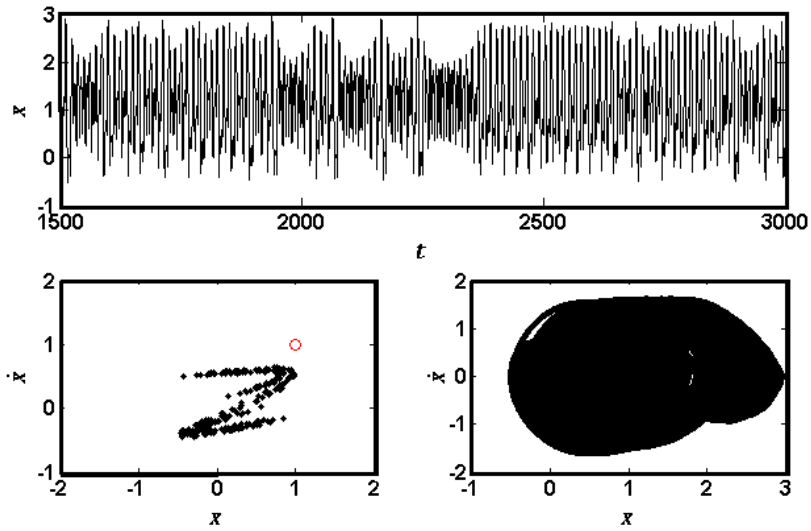
در شکل (۱۱) دیاگرام دوشاخگی بر حسب پارامتر دوشاخگی ضریب بار،  $f_0$  و به ازای پارامترهای بی‌بعد  $f_1 = 0.5$  و  $\varepsilon\mu = 0.06$  در فرکانس نسبی  $\Omega = 1.8$  نشان داده شده است. در این شکل سه رژیم حرکتی مشاهده می‌شود: در بازه  $0.8$  تا  $1/5$ ، حرکت دارای فرکانسی معادل فرکانس تحریک است. در بازه  $0.27$  تا  $0.8$  رژیم حرکتی از نوع آشوبناک می‌باشد و در نهایت به ازای مقادیر کمتر از  $0.27$  برای ضریب بار، حرکت به حرکت  $3T$  تبدیل می‌شود. این رژیم‌های حرکتی را می‌توان با رسم دیاگرام‌های فاز و پوانکاره نشان داد. شکل (۱۲-الف) پاسخ سیستم، نمودار فاز و پوانکاره را به ازای  $f_0 = 0.2$ ، شکل (۱۲-ب) به ازای  $f_0 = 0.5$  و شکل (۱۲-ج) به ازای  $f_0 = 1.2$  نشان می‌دهد. وجود سه نقطه در شکل (۱۲-الف) بیانگر حرکت  $3T$  می‌باشد. در این نمودارها، نقطه کمرنگ‌تر نشانگر حالت اولیه سیستم می‌باشد.



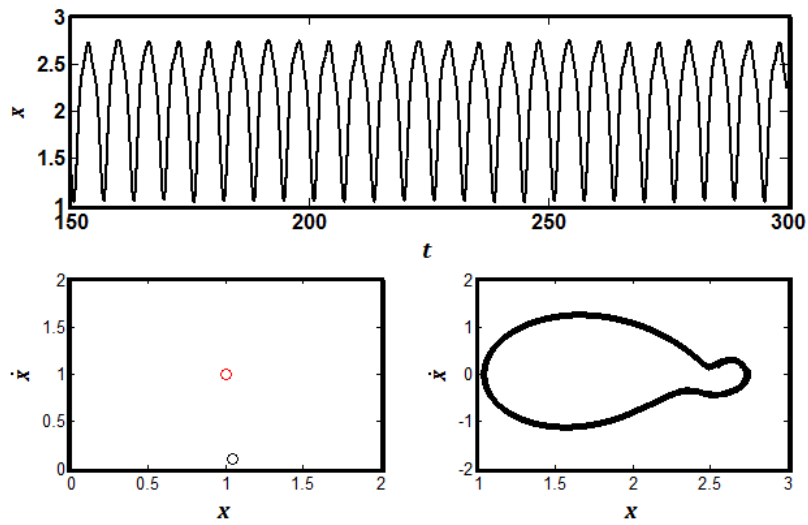
شکل ۱۱- دیاگرام دوشاخگی بر حسب پارامتر بی‌بعد ضریب بار



الف



ب



ج

شکل ۱۲- دیاگرام‌های پاسخ زمانی فاز و پوانکاره



#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله مدلی برای ارتعاشات پیچشی یک جفت چرخ دنده ساده که اثرات لقی، سفتی متغیر با زمان دندانه‌ها و خطای انتقال استاتیکی در آن لحاظ شده است، معرفی شده است. بعد از محاسبه تغییر شکل‌های مختلف دندانه‌ها، سفتی درگیری دندانه‌ها با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده در منبع [۱۹] بدست آمده و به صورت ماتریسی در معادلات وارد شده است. وجود خطای انتقال استاتیکی عیناً موجب افزایش یا کاهش خطای انتقال دینامیکی سیستم در هنگام کارکرد می‌گردد. در این مطالعه خطای انتقال استاتیکی بصورت تحریک جابجایی در مدل وارد شده است. برای حل معادلات از روش عددی رانگ-کوتا مرتبه چهار استفاده شده است. سپس با انجام تحلیل پارامتری، تاثیر پارامترهای ضریب بار و میرایی بی‌بعد بر روی پاسخ مطالعه شده است که نتایج حاصل را می‌توان در موارد ذیل خلاصه کرد:

- ۱- استفاده از روش تحلیلی برای مدلسازی سفتی درگیری موجب واقعی‌تر شدن مدلسازی سیستم می‌شود.
- ۲- افزایش نیروی انتقالی سیستم یا به عبارتی ضریب بار موجب افزایش خطای انتقال دینامیکی می‌گردد.
- ۳- افزایش بار انتقالی سیستم نمی‌تواند مانع از جدایش دندانه‌ها شود.
- ۴- بار انتقالی پایین سیستم می‌تواند موجب ایجاد حرکت آشوبناک در سیستم گردد.
- ۵- پایین بودن ضریب میرایی ویسکوز در چرخ‌دنده‌ها می‌تواند موجب جدایش دندانه‌ها و حتی برخورد به پشت آنها گردد.
- ۶- با افزایش ضریب میرایی ویسکوز، رفتار سیستم به رفتار سیستم خطی نزدیک می‌شود.

#### مراجع

- [1] Ozguven, H. N., and Houser, D. R., "Mathematical Models used in Gear Dynamics – A Review", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 3, pp. 383–411, (1988).
- [2] Wang, J., Li, R., and Peng, X., "Survey of Nonlinear Vibration of Gear Transmission Systems", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, No. 3, pp. 309–329, (2003).
- [3] Kahranam, A., and Al-shyyab, A., "Nonlinear Dynamic Analysis of a Multi-mesh Gear Train using Multi-term Harmonic Balance Method: Period-one Motions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 284, pp. 151–172, (2005).
- [4] Kahranam, A., and Al-shyyab, A., "Nonlinear Dynamic Analysis of a Multi-mesh Gear Train using Multi-term Harmonic Balance Method: Sub-harmonic Motions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, pp. 417–451, (2005).
- [5] Shen, Y., Yang, S., and Liu, X., "Nonlinear Dynamic of a Spur Gear Pair with Time-varying Stiffness and Backlash Based on Incremental Harmonic Balance Method", *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 416, pp. 1256–1263, (2006).
- [6] Parker, R. G., Virjayaker, S. M., and Imajo, T., "Nonlinear Dynamic Response of a Spur Gear Pair: Modeling and Experimental Comparisons", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, No. 3, pp. 435–455, (2000).

- [7] Chang-Jian, C., and Chang, Sh., “Bifurcation and Chaos Analysis of Spur Gear Pair with and without Nonlinear Suspension”, *Nonlinear Analysis: Real World Application*, Vol. 12, pp. 979-989, (2011).
- [8] Lukzko, J., “Chaotic Vibration in Gear Mesh Systems”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanic*, Vol. 46, No. 4, pp. 879–896, (2008).
- [9] Wan, C., and Jian, C., “Nonlinear Analysis for Gear Pair System Supported by Long Journal Bearings under Nonlinear Suspension”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, pp. 569–583, (2010).
- [10] Walha, L., Fakhfakh, T., and Haddar, M., “Nonlinear Dynamic of a Two-stage Gear System with Mesh Stiffness Fluctuation, Bearing Flexibility and Backlash”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, pp. 1058–1069, (2009).
- [11] Bonori, G., and Pellicano, F., “Non-smooth Dynamics of Spur Gears with Manufacturing Errors, *Journal of Sound and Vibration*”, Vol. 306, pp. 271–283, (2007).
- [12] Kaung, J., H., and Lin, A. D., “Theoretical Aspects of Torque Responses in Spur Gearing Due to Mesh Stiffness Variation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 2, pp. 255-271, (2003).
- [13] Liu, G., “Nonlinear Dynamics of Multi-mesh Gear Systems, Presented in Partial Fulfillment of the Requirements of the Degree Doctor of Philosophy in the Graduate School of the Ohio State University”, the Ohio State University, (2007).
- [14] Howard, I., Jia, S., and Wang, J., “The Dynamic Modeling of Spur Gear in Mesh Including Friction and a Crack”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 5, pp. 831-853, (2001).
- [15] Davoli, P., Gorla, C., and Boni, G., “Transmission Error and Noise Emission of Spur Gear: A Theoretical and Experimental Approach”, *Proceeding of the ASME 2007 International Design Engineering Conference, IDET/CIE2007 September 4–7, Las Vegas, Nevada, USA.DETC2007–34099*, (2007).
- [16] Farshidianfar, A., and Saghafi, A., “Global Bifurcation and Chaos Analysis in Nonlinear Vibration of Spur Gear Systems”, *An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*, Vol. 75, No. 4, pp. 783-806, (2014).
- [17] Li, S., and Kahraman, A., “A Tribo-dynamic Model of a Spur Gear Pair”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 4963–4978, (2013).
- [18] Chen, Z., Shao, Y., “Mesh Stiffness Calculation of a Spur Gear Pair with Tooth Profile Modification and Tooth Root Crack”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 62, pp. 63-74, (2013).
- [19] Chaari, F., Fakhfakh, T., and Haddar, M., “Analytical Modeling of Spur Gear Tooth Crack and Influence on Gear Mesh Stiffness”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 216, pp. 461-468, (2009).

- [20] Sainsot, P., and Velez, P., "Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, pp. 748-752, (2004).
- [21] Yang, D. C. H., and Sun, Z. S., "A Rotary Model for Spur Gear Dynamic", *ASME Journal of Mechanism Transmission and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 529-535, (1985).
- [22] Weber, C., "The Deflection of Loaded Gears and the Effects on their Load Carrying Capacity, Dept. of Scientific and Industrial Research", Sponsored Research, Germany, Report No. 3, (1949).
- [23] Shen, Y., Yang, S., and Liu, X., "Nonlinear Dynamic of a Spur Gear Pair with Time-varying Stiffness and Backlash Based on Incremental Harmonic Balance Method", *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1256–1263, (2006).

### فهرست نشانه های انگلیسی

- $A_i$ : سطح مقطع آام دندانها
- $b$ : نصف لقی بین دندانها
- $c$ : ضریب میرایی ویسکوز
- $\bar{e}(t)$ : خطای انتقال استاتیکی
- $E$ : مدول یانگ
- $f_0$ : ضریب بی بعد متوسط نیروی انتقالی بین دندانها
- $f_l$ : ضرایب بسط خطای انتقال استاتیکی
- $F$ : نیروی اعمالی به دندانها
- $\bar{F}$ : متوسط نیروی انتقالی بین دندانها
- $f(\bar{x})$ : تابع جابجایی غیرخطی سه تکه ای در اثر وجود لقی بین دندانها
- $G$ : مدول برشی چرخ دنده ها
- $I_a$ : ممان اینرسی پینیون و شفت ورودی
- $I_b$ : ممان اینرسی چرخ دنده و شفت خروجی
- $k_b$ : سفتی خمشی دندانها
- $k_f$ : سفتی بستر دندانها
- $k_h$ : سفتی تماسی دندانها
- $k_{12}$ : سفتی درگیری یک جفت دندانها
- $K(\bar{t})$ : سفتی درگیری متغیر با زمان
- $K_{mean}$ : سفتی درگیری میانگین

- $L_e$ : طول موثر دندان  
 $m$ : جرم متوسط چرخ‌دنده‌ها  
 $N$ : تعداد دندان‌های چرخ‌دنده  
 $R_a$ : شعاع گام پینیون  
 $R_b$ : شعاع گام چرخ‌دنده  
 $s_h$ : ضریب شکل برشی  
 $T_a$ : گشتاور اعمالی به پینیون  
 $T_b$ : گشتاور اعمالی به چرخ‌دنده  
 $\bar{t}$ : زمان بر حسب ثانیه  
 $t$ : زمان بی‌بعد  
 $T_e$ : دوره درگیری دندان‌ها  
 $t_{ST}$ : زمان درگیری یک جفت دندان  
 $t_{DT}$ : زمان درگیری دو جفت دندان  
 $\bar{x}$ : خطای انتقال دینامیکی  
 $x$ : خطای انتقال دینامیکی بی‌بعد  
 $x_{\min}$ : مینیمم خطای انتقال دینامیکی  
 $x_{\max}$ : ماکسیمم خطای انتقال دینامیکی

### نمادهای یونانی

- $\alpha_m$ : زاویه فشار برای چرخ‌دنده‌های استاندارد  
 $\delta_b$ : تغییر شکل خمشی دندان  
 $\delta_f$ : تغییر شکل بستر دندان  
 $\delta_h$ : تغییر شکل تماسی دندان‌ها  
 $\varepsilon$ : نسبت تماس چرخ‌دنده‌ها  
 $\varepsilon\mu$ : نسبت میرایی  
 $\nu$ : ضریب پواسون  
 $\tau$ : زمان بی‌بعد اصلاح شده  
 $\omega_n$ : فرکانس طبیعی سیستم چرخ‌دنده‌ای  
 $\Omega$ : فرکانس بی‌بعد ورودی

**Abstract**

For a long time, the vibration modeling of gear systems was based on the linear vibration theory. However, in the last decades, the nonlinear factors such as backlash, time varying mesh stiffness, friction, transmission error and other imperfections have been taken into account. The aim of this paper is to investigate the nonlinear vibration of spur gear in presence of clearance and the static transmission error. To this end, first the time varying mesh stiffness of tooth is calculated analytically. Then the Governing equations of motion are extracted and are solved through Runge-Kutta method and the effect of the system parameters on its nonlinear vibrational behavior is demonstrated.