

تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری نانولوله کربنی حامل سیال در بستر الاستیک

موسی رضائی^۱

دانشیار

سعید لطفان^۲

دانشجوی کارشناسی ارشد

در پژوهش حاضر، رفتار ارتعاش عرضی غیرخطی نانولوله کربنی حامل سیال در بستر الاستیک با دامنه نوسانات بزرگ، مورد تحلیل قرار گرفته است. بدین منظور سیال گذرنده از نانولوله، غیرویسکوز و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. معادله ارتعاشی حاکم بر اساس تئوری الاستیک ریلی استخراج شده و با در نظر گرفتن تغییر متغیر مناسب، معادله به صورت قابل حل با روش اغتشاشات تبدیل و حل شده است. بر خلاف پژوهش‌های پیشین، رابطه تحلیلی سرعت بحرانی سیال که در آن اثر غیرخطی هندسی نیز لحاظ شده، استخراج گردیده است. در مقایسه با ارتعاشات کم دامنه و رفتار خطی نانولوله، با افزایش دامنه ارتعاشات عرضی، ناپایداری سیستم در سرعت‌های بالاتر سیال عبوری اتفاق می‌افتد.

واژه‌های راهنما: نانولوله کربنی، ارتعاشات غیرخطی، پایداری، سرعت بحرانی سیال، روش اغتشاشات

۱- مقدمه

بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها موضوع بسیاری از مطالعات و تحقیقات اخیر بوده است. از آنجایی که انجام آزمایشات عملی کنترل شده در مقیاس نانو و همچنین شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی بسیار مشکل و پرهزینه است بنابراین معمولاً از مدل‌سازی محیط‌های پیوسته الاستیک برای مطالعه رفتار مکانیکی نانولوله‌ها از جمله مشخصه‌های ارتعاشی آن‌ها استفاده می‌شود. در بسیاری از کاربردهای عملی، اغلب نانولوله‌ها در یک محیط الاستیک قرار دارند. در نتیجه بررسی رفتار نانولوله‌هایی با نسبت طول به قطر کم و یا محدود شده در بستر الاستیک مورد توجه می‌باشد. این امر اهمیت بررسی تأثیر ممان اینرسی دورانی را در رفتار ارتعاشی نانولوله‌ها دو چندان می‌کند.

برای مطالعه رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی، آنالیز ارتعاشی با استفاده از مدل کلاسیک تیر الاستیک مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. رفیعی [۱] ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی را با استفاده از تئوری اغتشاشات مورد مطالعه قرار داده است. هو و همکاران [۲] و فیروزآبادی و همکار [۳] ارتعاشات خطی نانولوله کربنی را بررسی نمودند و نشان دادند که با افزایش طول نانولوله، فرکانس‌های طبیعی کاهش

^۱ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز m_rezaee@tabrizu.ac.ir

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز s_lotfan@tabrizu.ac.ir

می‌یابد. رو و همکاران [۴] شکل موده‌های ارتعاشی نانولوله کربنی را بدون در نظر گرفتن سیال استخراج کردند. هی و همکاران [۵] ارتعاش خطی نانولوله کربنی حامل سیال را بررسی نمودند و نشان دادند که با افزایش سرعت سیال، فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی کاهش می‌یابد. ونگ و همکاران [۶] اثر دامنه ارتعاشات عرضی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس غیرخطی تشدید را بررسی نمودند، آن‌ها اثر محیط الاستیک را که نانولوله در آن قرار دارد، بر پاسخ ارتعاشی بررسی کرده‌اند. زانگ و همکاران [۷] ارتعاشات عرضی نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری را مطالعه کرده‌اند، آن‌ها با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی اثر بار محوری فشاری در ارتعاشات خطی را بررسی کردند و نشان دادند که فرکانس طبیعی با افزایش نیروی محوری فشاری کاهش می‌یابد. یون و همکاران [۸-۹] ارتعاشات خطی نانولوله کربنی حامل سیال را با استفاده از تئوری تیر الاستیک مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که جریان سیال داخل نانولوله بر فرکانس‌های طبیعی اثر می‌گذارد و کم‌انرژی نانولوله زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت سیال به یک مقدار بحرانی برسد که در آن، فرکانس طبیعی مود متناظر به صفر می‌رسد. زانگ و همکاران [۱۰] اثرات شرایط مرزی متفاوت بر سرعت بحرانی سیال عبوری از لوله را بررسی کردند و نشان دادند که با ناپایدار شدن سیستم، فرکانس طبیعی صفر می‌شود. خادم و راسخ [۱۱] در مطالعه‌ی خود ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌ی حامل سیال را بررسی نمودند. آن‌ها معادله‌ی حرکت را با فرض مدل اویلر- برنولی استخراج کرده و برای حل آن، روش مقیاس‌های چندگانه را بکار برده‌اند و ناپایداری سیستم تحت تأثیر سرعت سیال و نیروی محوری را بر اساس فرکانس‌های خطی مورد مطالعه قرار داده‌اند.

بررسی سازه‌ها در ابعاد نانو نیازمند استفاده از شبیه‌سازی مولکولی است که محاسبات فراوانی می‌طلبد. از طرف دیگر، تئوری غیرموضعی که اثر ابعاد را در نظر می‌گیرد، یک روش تحلیلی است که در مقایسه با شبیه‌سازی مولکولی حجم محاسبات بسیار کمتری دارد. سلطانی و همکاران [۱۲] اثر تنش غیرموضعی ناشی از ابعاد را در نظر گرفتند و اثر شرایط مرزی متفاوت را نیز بر روی همین مسئله بررسی نمودند و نشان دادند که افزایش پارامتر غیرموضعی، باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

ونگ [۱۳] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیک همین مسئله را مورد مطالعه قرار داد. فرکانس‌های طبیعی بدست آمده در مدل بهبود یافته او بیشتر از فرکانس‌های طبیعی مدل کلاسیک اویلر- برنولی بود. رفیعی و همکاران [۱۴] اثر پارامترهای مقیاس ریز را بررسی کردند و نشان دادند که با در نظر گرفتن این اثر فرکانس‌های طبیعی خطی و سرعت بحرانی سیال کاهش می‌یابد. هرچند مدل غیرموضعی اثر ابعاد را در نظر می‌گیرد ولی در این تئوری لازم است مقدار پارامتر غیرموضعی بر اساس نتایج تجربی بدست آید.

در بسیاری از تحقیقات انجام شده به بررسی رفتار ارتعاش غیرخطی نانولوله‌های کربنی پرداخته شده است، اما عمده تحقیقات انجام شده در این زمینه بر اساس روش‌های عددی می‌باشد. در بررسی ارتعاشات غیرخطی سازه‌ها از روش DQM^1 نیز استفاده شده است که از دقت مناسبی برخوردار است. برای نمونه، لی و چنگ [۱۵] از روش مذکور برای مطالعه ارتعاشات غیرخطی صفحات ارتوتروپ با تغییر شکل محدود و با در نظر گرفتن اثر برش عرضی استفاده کرده‌اند. در تحقیق حاضر با مد نظر قرار دادن نیروی محوری و با استفاده از تئوری تیر ریلی، معادله حاکم بر رفتار ارتعاش غیرخطی نانولوله کربنی حامل سیال استخراج شده

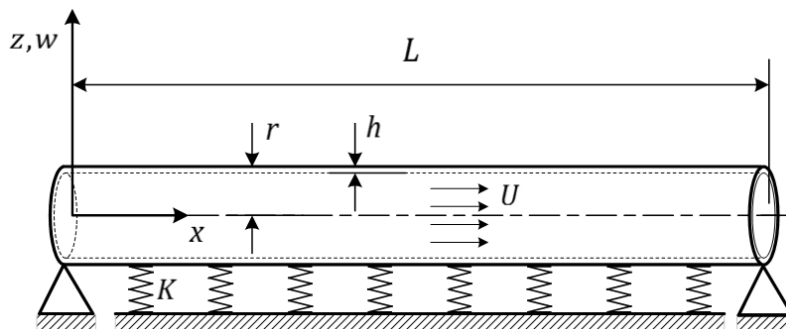
¹ Differential Quadrature Method

است. اثر غیرخطی از نوع هندسی بوده و مربوط به دامنه ارتعاشی نسبتاً بزرگ می‌باشد. معادله بدست آمده به شدت غیرخطی می‌باشد و نمی‌توان آن را با استفاده از روش‌های تحلیلی وابسته به پارامتر غیرخطی کوچک حل کرد. بنابراین با اعمال تغییر پارامتر مناسب، معادله غیرخطی جدیدی با حفظ ماهیت مسأله بدست آمده که دارای پارامتر غیرخطی کوچک می‌باشد. معادله بدست آمده با بکارگیری روش اغتشاشات حل شده و فرکانس غیرخطی تشدید استخراج شده است. همچنین در این پژوهش اثر غیرخطی هندسی بر سرعت بحرانی سیال و میزان تأثیر اینرسی دورانی بررسی شده است که در پژوهش‌های پیشین لحاظ نشده است. در ادامه اثر دامنه نوسان، نیروی محوری و ضریب لاغری که مشخصه‌ای از هندسه نانولوله است بر فرکانس غیرخطی تشدید بررسی شده است. همچنین اثر سرعت سیال بر فرکانس غیرخطی و پایداری نانولوله مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که نتایج بدست آمده با استفاده از روش حاضر، مطابقت خوبی با نتایج عددی دارد.

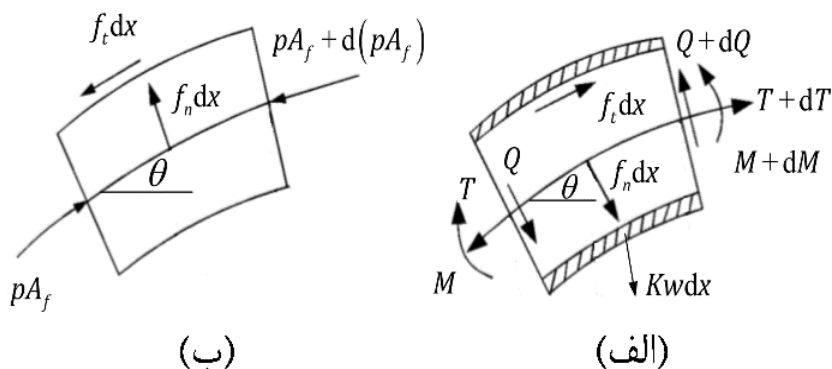
۲- استخراج معادله ارتعاشی نانولوله کربنی

مطابق شکل (۱) نانولوله کربنی حامل سیال و در بستر الاستیک را در نظر می‌گیریم که در آن، L طول، r شعاع خارجی و h ضخامت نانولوله است؛ U سرعت سیال و K ضریب سفتی بستر الاستیک می‌باشد. x محور مختصات طولی نانولوله و $w(x, t)$ معرف حرکت عرضی هر نقطه از نانولوله در راستای محور z می‌باشد. در این مطالعه از اثر نیروی گرانش بر حرکت صرف نظر شده است.

برای بدست آوردن معادله ارتعاشی نانولوله، المانی از نانولوله و سیال به طول dx را مطابق شکل (۲) در نظر می‌گیریم. در این شکل f_r و f_n نیروهای متقابل بین سیال و نانولوله، p فشار سیال، A_f سطح مقطع عبور سیال، T نیروی محوری، Q نیروی برشی و M گشتاور خمشی در نانولوله، θ دوران المان در صفحه حرکت می‌باشد.



شکل ۱- نانولوله کربنی حامل سیال در بستر الاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها.



شکل ۲- الف- دیاگرام آزاد المان نانولوله. ب- دیاگرام آزاد المان سیال [۱۶].

با توجه به این که المان نانولوله در جهت محور x حرکت نمی‌کند و جریان سیال درون آن نیز پایا و یکنواخت فرض شده است بنابراین المان نانولوله در این راستا فاقد شتاب خواهد بود. با نوشتن معادله تعادل در جهت x به ترتیب برای المان نانولوله و سیال داریم:

$$f_t dx + f_n \theta dx + dT = 0 \quad (1)$$

$$f_t dx + f_n \theta dx + d(pA_f) = 0 \quad (2)$$

همچنین با اعمال قانون دوم نیوتن در راستای محور z به ترتیب برای المان نانولوله و سیال می‌توان نوشت:

$$f_t \theta dx - f_n dx + dQ + d(T \theta) - kwdx = m_{nt} a_{nt} dx \quad (3)$$

$$-f_t \theta dx + f_n dx - d(pA_f \theta) = m_f a_f dx \quad (4)$$

در این روابط m_{nt} جرم واحد طول نانولوله، m_f جرم واحد طول سیال، a_{nt} شتاب المان نانولوله و a_f شتاب المان سیال می‌باشد. با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$ و ادغام معادلات (۱) و (۲) معادله تعادل در راستای محور x به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T - pA_f) = 0 \quad (5)$$

با توجه به فرض یکنواخت بودن سرعت سیال در هر مقطع از نانولوله، حرکت المان سیال در نانولوله را می‌توان به صورت حرکت مماسی در نظر گرفت و شتاب آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a}_f = \vec{a}_{nt} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor} \quad (6)$$

در این رابطه عبارت‌های \vec{a}_{rel} و \vec{a}_{cor} به ترتیب شتاب کریولیس و شتاب نسبی می‌باشد. مؤلفه‌های شتاب در رابطه (۶) از روابط زیر بدست می‌آید:

$$a_{nt} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$a_{rel} = U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۸)$$

$$a_{cor} = 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad (۹)$$

همه مؤلفه‌های شتاب المان سیال با یکدیگر هم جهت و در راستای محور z می‌باشد. با گشتاورگیری از نیروها و گشتاورهای اعمالی به المان نانولوله حامل سیال حول مرکز جرم آن، نیروی برشی Q به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} + (J_m + J_f) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (۱۰)$$

در این رابطه J_m ممان اینرسی جرم واحد طول نانولوله و J_f ممان اینرسی جرم واحد طول سیال می‌باشد. با استفاده از روابط (۳) تا (۱۰) و $M = EI_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ معادله ارتعاشی نانولوله حامل سیال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (m_m + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left((J_m + J_f) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) \\ + 2m_f U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_f U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (T - pA_f) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Kw = 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

در این رابطه E مدول الاستیسیته و I_m ممان اینرسی سطح مقطع نانولوله می‌باشد. به منظور بررسی تأثیر دامنه ارتعاشی نسبتاً بزرگ و اثر غیرخطی ناشی از آن، نیروی محوری در نانولوله را به صورت ترکیبی از نیروی محوری ناشی از تغییر شکل و نیروی محوری خارجی در نظر می‌گیریم:

$$T = T_0 + EA_m \varepsilon_{xx} \quad (۱۲)$$

در رابطه فوق $EA_m \varepsilon_{xx}$ نیروی محوری ناشی از تغییر شکل، T_0 نیروی محوری خارجی، A_m سطح مقطع نانولوله و ε_{xx} کرنش طولی می‌باشد. همچنین داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (۱۳)$$

از طرفی تغییر طول ΔL ، ناشی از حرکت نانولوله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - L \quad (۱۴)$$

با توجه به کوچک بودن عبارت $\frac{\partial w}{\partial x}$ نیروی محوری در نانولوله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = T_0 + \frac{EA_m}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (۱۵)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۵) در محدوده x تا L داریم [۱۷]:

$$T - pA_f = (T - pA_f)_{x=L} \quad (۱۶)$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در (۱۱) و استفاده از رابطه (۱۶)، معادله حاکم بر ارتعاشات غیرخطی نانولوله حامل سیال در بستر الاستیک به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + 2m_f U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \\ + m_f U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Kw - \left(T_0 + \frac{EA_m}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \bar{p}A_f \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

در این رابطه $m = m_m + m_f$ و $J = J_m + J_f$ می‌باشد. همچنین \bar{p} از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۸]:

$$\bar{p} = \bar{p}(1 - 2\nu\delta) \quad (۱۸)$$

در این رابطه \bar{p} فشار در انتهای پایین دست نانولوله و ν نسبت پواسون می‌باشد. در معادله (۱۸) پارامتر δ به وجود قید در $x = L$ بستگی دارد. اگر قیدی در مقابل حرکت محوری وجود داشته باشد، $\delta = 1$ خواهد بود و در غیر این صورت $\delta = 0$ می‌باشد. در این مقاله با فرض تخلیه سیال به جو، \bar{p} برابر صفر فرض شده است. همچنین شرایط مرزی متناظر با معادله (۱۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$w(0, t) = \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (۱۹-الف)$$

$$w(L, t) = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (۱۹-ب)$$

نکته قابل توجه در مورد رابطه (۱۷) این است که در مرجع [۱۸] از اثر اینرسی دورانی، $\frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right)$ ، و

عبارت غیرخطی، $\frac{EA_m}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$ ، صرف نظر شده است، همچنین این معادله نشان می‌دهد که فشار در انتهای پایین دست نانولوله به صورت نیروی محوری عمل می‌کند.

۳- استخراج پاسخ زمانی با استفاده از روش اغتشاشات

با توجه به این که معادله (۱۷) یک معادله دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد و جواب تحلیلی برای آن وجود ندارد، بنابراین برای حل آن ابتدا پاسخ معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۷) را به صورت $w(x, t) = \phi(x)q(t)$ در نظر می‌گیریم که در آن $q(t)$ پاسخ زمانی و $\phi(x)$ توابع مقایسه‌ای هستند که شرایط مرزی حاکم بر سیستم را ارضاء می‌کنند. برای نانولوله کربنی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و مود ارتعاشی n ام، تابع $\phi(x)$ را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (۲۰)$$

با جایگذاری $w(x, t)$ در رابطه (۱۷) و ضرب طرفین آن در $\phi(x)$ و انتگرال گیری از آن در طول نانولوله و استفاده از خاصیت تعامد توابع مقایسه‌ای در نظر گرفته شده و پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\ddot{q}(t) + \alpha q(t) + \beta q^3(t) = 0 \quad (21)$$

در این رابطه علامت (۰) مشتق نسبت به زمان است و همچنین:

$$\alpha = \frac{\xi_2}{\xi_1} \quad (22\text{-الف})$$

$$\beta = \frac{\xi_3}{\xi_1} \quad (22\text{-ب})$$

در روابط اخیر توابع ξ_1 تا ξ_3 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\xi_1 = (J_m + J_f) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + (m_m + m_f) \quad (23\text{-الف})$$

$$\xi_2 = EI_m \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + [T_0 - m_f U^2] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + K \quad (23\text{-ب})$$

$$\xi_3 = \frac{EA_m n^4 \pi^4}{4L^4} \quad (23\text{-ج})$$

همانطور که مشاهده می‌شود معادله (۲۱) یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است. یکی از روش‌های مناسب برای حل چنین معادلاتی، استفاده از روش اغتشاشات می‌باشد. با استفاده از این روش یک معادله پیچیده غیرخطی به چند معادله دیفرانسیل خطی ساده‌تر تبدیل می‌شود. یکی از فرض‌های مهم در این روش این است که ضریب جمله غیرخطی در مقایسه با ضریب سایر جملات کوچک باشد، در حالی که برای ابعاد نانو، مقدار β عدد بسیار بزرگی بوده و تقریباً برابر 10^4 می‌باشد و امکان استفاده از روش اغتشاشات در این حالت وجود ندارد. برای این منظور تابع جدید $g(t)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۹]:

$$g(t) = \alpha q(t) \quad (24)$$

با استفاده از این رابطه، معادله (۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) + \varepsilon g^3(t) = 0 \quad (25)$$

تغییر پارامتر انجام شده موجب می‌شود ضریب جمله غیرخطی به اندازه کافی کوچک شود. در معادله (۲۵)، ε پارامتر غیرخطی و ω_0 فرکانس طبیعی خطی می‌باشد:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (26\text{-الف})$$

$$\omega_0^2 = \alpha \quad (26\text{-ب})$$

همچنین معادله (۲۵) را می‌توان به صورت بی‌بعد زیر نوشت:

$$\ddot{g}(\tau) + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} g^3(\tau) = 0 \quad (27)$$

که در آن مشتقات نسبت به τ می‌باشد و τ به صورت

$$\tau = \omega_0 t \quad (28)$$

تعریف می‌شود. بعلاوه، بر اساس پارامترهای مسأله، در معادله (۲۷) ε کوچکتر از واحد می‌باشد و ε/ω_0^2 نیز کوچکتر از واحد است. بر اساس روش اغتشاشات، پاسخ معادله (۲۵) را به صورت رابطه (۲۹) در نظر می‌گیریم [۲۰]:

$$g(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i g_i(t) = g_0(t) + \varepsilon g_1(t) + \varepsilon^2 g_2(t) + \dots \quad (29)$$

در رابطه فوق $g_0(t)$ پاسخ معادله در حالت خطی می‌باشد و توابع $g_1(t)$ ، $g_2(t)$ و ... توابع نامعلوم حاصل از اغتشاش ایجاد شده در اثر وجود جمله غیرخطی می‌باشد. همچنین می‌دانیم که فرکانس غیرخطی تشدید علاوه بر دامنه نوسان به ε نیز وابسته است، بنابراین داریم [۲۰]:

$$\omega^2 = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \omega_i^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2 + \varepsilon^2 \omega_2^2 + \dots \quad (30)$$

با جایگذاری دو جمله اول از روابط (۲۹) و (۳۰) در معادله (۲۵) داریم:

$$\ddot{g}_0(t) + \varepsilon \ddot{g}_1(t) + \varepsilon (g_0(t) + \varepsilon g_1(t))^3 + (\omega^2 - \varepsilon \omega_1^2)(g_0(t) + \varepsilon g_1(t)) = 0 \quad (31)$$

با توجه به اینکه ε مقدار بسیار کوچکتر از واحد می‌باشد، می‌توان از توان‌های بالاتر آن صرف نظر کرد. با مرتب کردن رابطه بدست آمده و برابر صفر قرار دادن ضرایب ε^0 و ε^1 ، معادلات دیفرانسیل برای حل جمله تصحیح $g_1(t)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{g}_0(t) + \omega^2 g_0(t) = 0 \quad (32)$$

$$\ddot{g}_1(t) + \omega^2 g_1(t) = \omega_1^2 g_0(t) - g_0^3(t) \quad (33)$$

با استفاده از رابطه (۲۴) و شرایط اولیه $q(0) = A_0$ و $\dot{q}(0) = 0$ ، حل معادله (۳۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$g_0(t) = \alpha A_0 \cos \omega t \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) داریم:

$$\ddot{g}_1(t) + \omega^2 g_1(t) = \omega_1^2 \alpha A_0 \cos \omega t - \alpha^3 A_0^3 \cos^3 \omega t \quad (35)$$

در رابطه فوق ضرایب عبارت $\cos \omega t$ ، به عنوان جملات سکولار شناخته می‌شوند. بنابراین با حذف تنها جمله سکولار، خواهیم داشت:

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} \alpha^2 A_0^2 \quad (36)$$

جمله تصحیح مرتبه اول، $g_1(t)$ ، با استخراج پاسخ معادله دیفرانسیل (۳۵) با شرایط اولیه $g_1(0) = 0$ و $\dot{g}_1(0) = 0$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$g_1(t) = \frac{\alpha^3 A_0^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (۳۷)$$

در نهایت پاسخ زمانی معادله (۲۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$g(t) = \alpha A_0 \cos \omega t + \varepsilon \frac{\alpha^3 A_0^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (۳۸)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۳۰) و (۳۶) فرکانس غیرخطی سیستم از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon \frac{3\alpha A_0^2}{4}} \quad (۳۹)$$

مشاهده می‌شود که فرکانس غیرخطی سیستم تابعی از دامنه نوسان است که از اثر غیرخطی در سیستم ناشی می‌شود. با استفاده از روابط (۳۸) و (۲۴) پاسخ ارتعاشی نانولوله کربنی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w(x, t) = A_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\cos \omega t + \beta \frac{A_0^2}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \right] \quad (۴۰)$$

ونگ و همکاران [۲۱] نشان دادند که کمناش نانولوله کربنی زمانی رخ می‌دهد که فرکانس طبیعی صفر و بخش حقیقی در فرکانس طبیعی مختلط ظاهر می‌شود. به عبارتی رفتار پایدار ارتعاشی، پیرودیگ می‌باشد که ناشی از فرکانس طبیعی موهومی است و با افزایش سرعت سیال عبوری و شروع ناپایداری، این بخش از فرکانس طبیعی صفر شده و بخش حقیقی بوجود می‌آید. بر همین اساس با برابر صفر قرار دادن رابطه (۳۹) و استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳)، سرعت بحرانی سیال، متناظر با شروع ناپایداری نانولوله از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U_c = \frac{1}{\sqrt{m_f}} \left[E \left(I_{nt} + \frac{3}{16} A_0^2 A_{nt} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + K \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 + T_0 \right]^{0.5} \quad (۴۱)$$

بر اساس این رابطه سرعت بحرانی سیال به سفتی خمشی نانولوله، دامنه ارتعاش، ضریب سفتی بستر الاستیک و نیروی محوری بستگی دارد. لازم به ذکر است در مورد رابطه اخیر، در مراجع پیشین از اثر عبارت غیرخطی، $\frac{3}{16} A_0^2 A_{nt}$ ، صرف نظر شده است.

۴- بحث و نتایج

به منظور بررسی رفتار ارتعاشی و ناپایداری نانولوله، نتایج در دو بخش ارائه می‌شود: در بخش اول رفتار ارتعاش غیرخطی و اثر پارامترهای دخیل بر فرکانس غیرخطی بررسی شده و در بخش دوم ناپایداری و پاسخ پس از ناپایداری^۱ مورد مطالعه قرار گرفته است. برای ارائه نتایج از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (42)$$

$$A_0^* = \frac{A_0}{r} \quad (43)$$

$$U^* = U \sqrt{\frac{m_f L^2}{EI_{nt}}} \quad (44)$$

$$T_0^* = \frac{T_0 L^2}{EI_{nt}} \quad (45)$$

در روابط فوق، ω^* نسبت فرکانس غیرخطی تشدید بر فرکانس طبیعی خطی (فرکانس تشدید بی‌بعد)، A_0^* ماکزیمم دامنه ارتعاشی بی‌بعد، U^* سرعت بی‌بعد سیال و T_0^* نیروی محوری بی‌بعد می‌باشد. مشخصات هندسی و مکانیکی نانولوله به صورت $L = 45 \text{ nm}$ ، $r = 1.5 \text{ nm}$ ، $h = 0.34 \text{ nm}$ ، $\rho_{nt} = 1300 \text{ kg/m}^3$ و $E = 1.1 \text{ TPa}$ می‌باشد و سیال عبوری از نانولوله، آب با چگالی $\rho_f = 988 \text{ kg/m}^3$ در نظر گرفته شده است.

بخش اول

۴-۱- رفتار ارتعاش غیرخطی

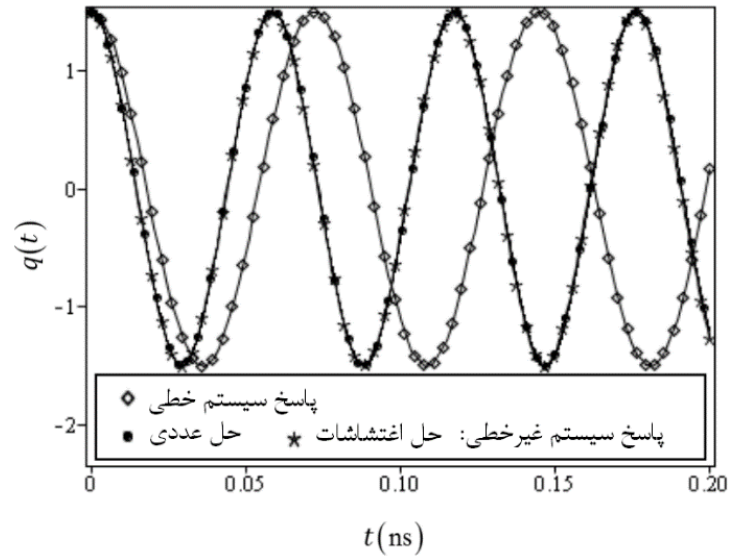
ابتدا به منظور بررسی صحت نتایج استخراج شده، پاسخ زمانی نانولوله در مود اول ارتعاشی با حل عددی و پاسخ خطی مقایسه شده است. حل عددی با استفاده از روش ضمنی رزنبراک^۲ بر اساس روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ و استفاده از توابع درون‌یاب درجه ۳ می‌باشد. طبق این روش معادله دیفرانسیل به شکل دستگاه معادلات مرتبه اول در می‌آید و اگر این دستگاه معادله غیرسخت^۳ باشد روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرد و در غیر این صورت، بر اساس روش ضمنی رزنبراک، مناسب‌ترین تابع درون‌یاب تا درجه ۳ انتخاب و مسأله مطابق روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ حل می‌گردد [۲۲].

همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوب حل عددی و حل اغتشاشات نشان‌دهنده دقت بالای حل حاصل از روش ارائه شده است. بر اساس این شکل با در نظر گرفتن اثر غیرخطی، فرکانس تشدید سیستم افزایش می‌یابد. همچنین اختلاف فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی با گذشت زمان بیشتر پدیدار می‌شود.

¹ Post-instability

² Rosenbrock

³ Nonstiff

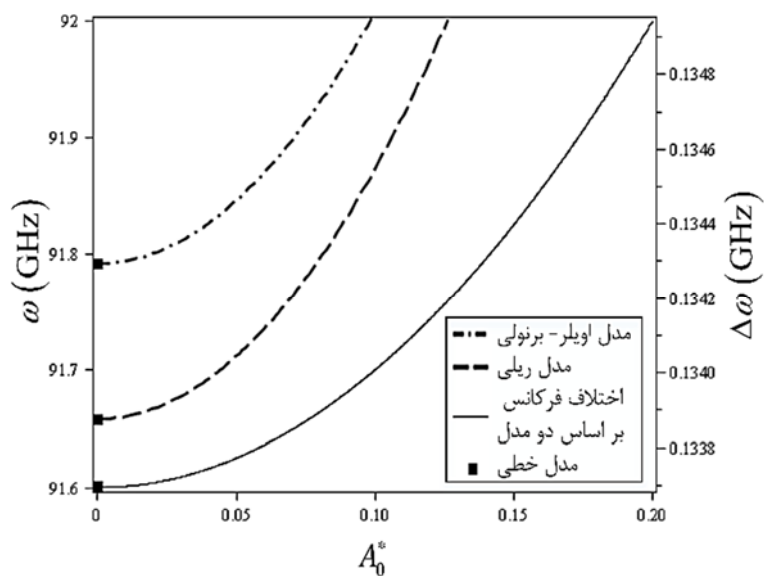


شکل ۳- پاسخ زمانی ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی حامل سیال در مقایسه با حل عددی و

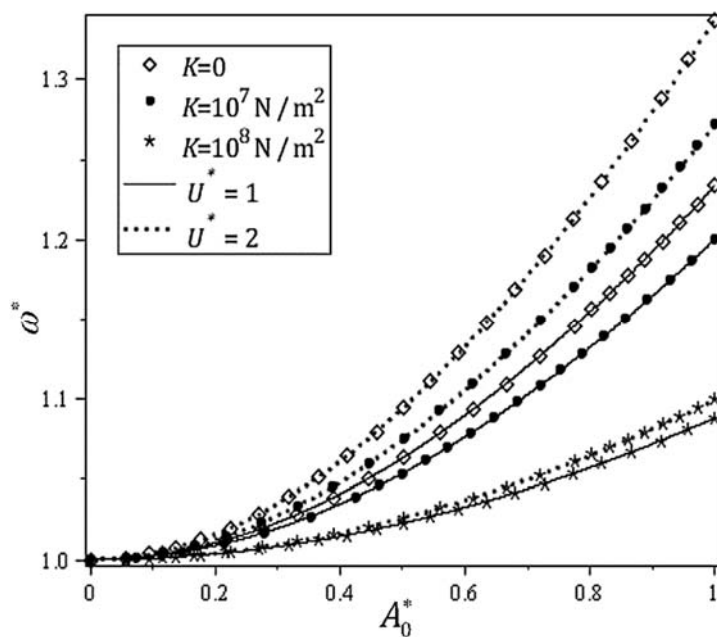
$$\text{پاسخ خطی به ازای } U^* = A_0^* = 1 \text{ و } K = T_0^* = 0.$$

در مطالعه حاضر اثر ممان اینرسی دورانی و اثر غیرخطی هندسی توأمأ مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی نانولوله مبنی بر دو مدل اوپلر- برنولی و ریلی در شکل (۴) آورده شده است. با توجه به این شکل، در نظر گرفتن ممان اینرسی دورانی باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. با توجه به شکل (۴) میزان اختلاف فرکانس طبیعی بر اساس دو مدل، $\Delta\omega$ ، با افزایش ماکزیمم دامنه ارتعاشات عرضی نانولوله بیشتر می‌شود و به عبارتی با در نظر گرفتن اثر غیرخطی میزان تأثیر ممان اینرسی دورانی بر فرکانس غیرخطی تشدید افزایش می‌یابد.

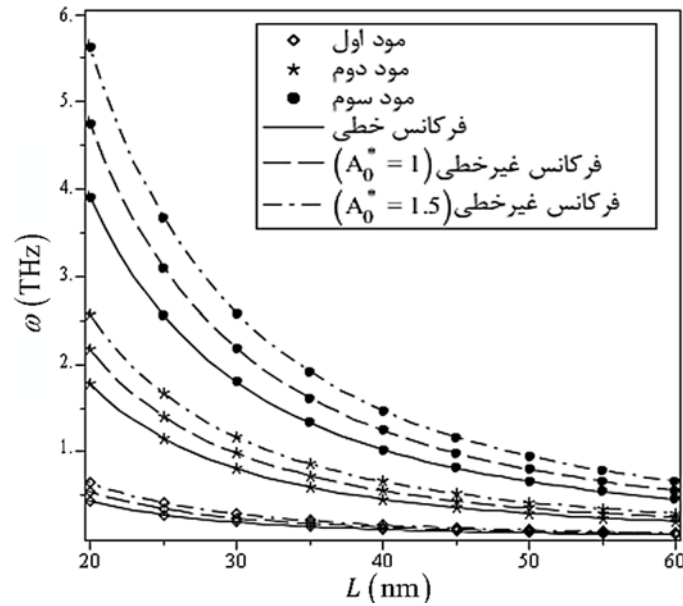
شکل (۵) تغییرات فرکانس تشدید بی‌بعد بر حسب ماکزیمم دامنه ارتعاشی بی‌بعد برای مقادیر مختلف ضرایب سفتی بستر الاستیک و سرعت بی‌بعد سیال را نشان می‌دهد. واضح است که با افزایش ماکزیمم دامنه ارتعاشی بی‌بعد و سرعت بی‌بعد سیال رفتار غیرخطی سیستم افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار K ، مقادیر فرکانس غیرخطی به مقادیر خطی متناظر میل می‌کند.



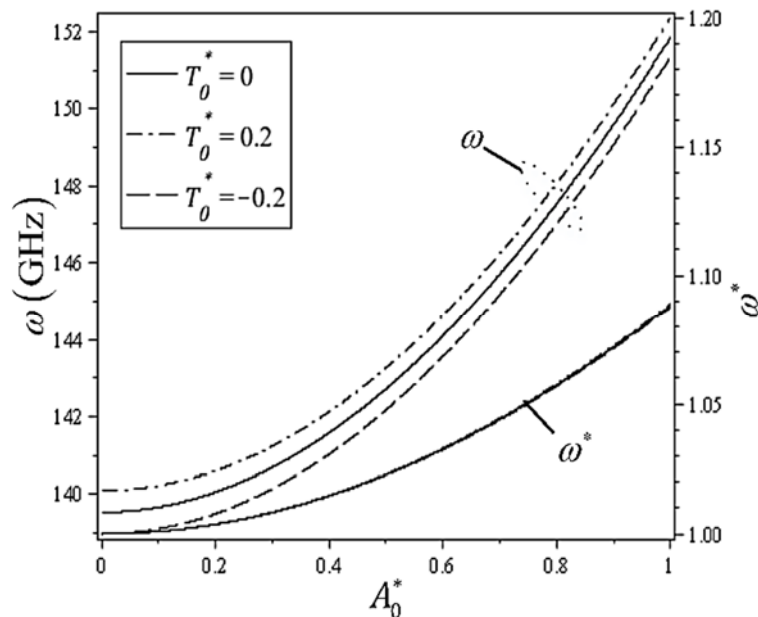
شکل ۴- فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی نانولوله حامل سیال بر حسب دامنه ارتعاشی بی‌بعد مبنی بر دو مدل اوپلر-برنولی و ریلی به ازای $U^* = 1$ و $T_0^* = 0$.



شکل ۵- تأثیر ضریب سفتی بستر الاستیک، K ، و سرعت بی‌بعد سیال، U^* بر فرکانس تشدید بی‌بعد به ازای $T_0 = 0$.



شکل ۶- تأثیر طول نانولوله کربنی حامل سیال بر فرکانس طبیعی در سه مود اول ارتعاشی به ازای $T_0 = K = 0$ و $U^* = 1$.



شکل ۷- تأثیر نیروی محوری بر فرکانس غیرخطی، ω ، و فرکانس تشدید بی‌بعد، ω^* ، به ازای $K = 0$ و $U^* = 1$.

با افزایش طول نانولوله و یا به عبارتی افزایش ضریب لاغری، $L/2r$ ، فرکانس طبیعی نانولوله کاهش می‌یابد. شکل (۶) این کاهش را در سه مود اول ارتعاشی نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود این کاهش به گونه‌ای است که با افزایش طول نانولوله، فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی همگرا می‌شود و به عبارتی اثر غیرخطی کاهش می‌یابد؛ این کاهش در مود اول بیشتر است.

در ادامه اثر نیروی محوری بر فرکانس طبیعی نانولوله بررسی شده است و نتایج نشان می‌دهد که نیروی محوری کششی فرکانس طبیعی را افزایش و نیروی محوری فشاری آن را کاهش می‌دهد. این نتایج در شکل

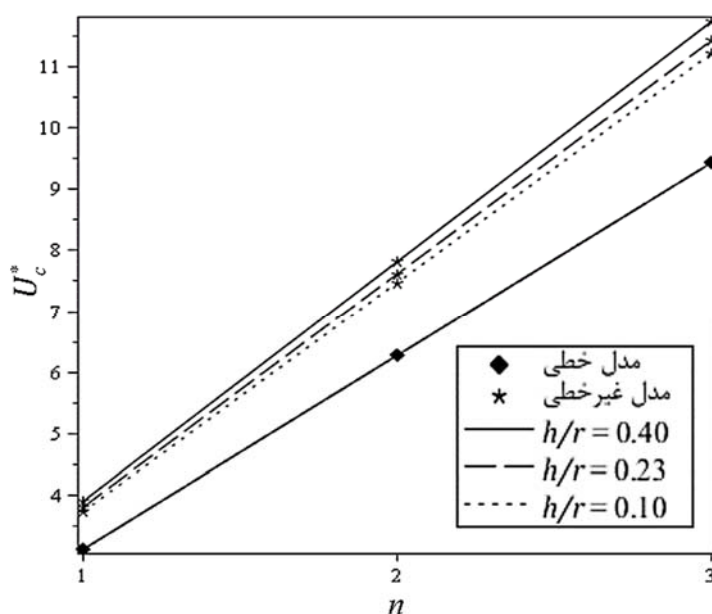
(۷) آورده شده است. همچنین در این شکل مشاهده می‌شود که نیروی محوری تأثیری بر فرکانس تشدید بی‌بعد ندارد و به عبارتی نیروی محوری، فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی را به یک نسبت تغییر می‌دهد.

بخش دوم

۴-۲- ناپایداری و پاسخ پس از ناپایداری

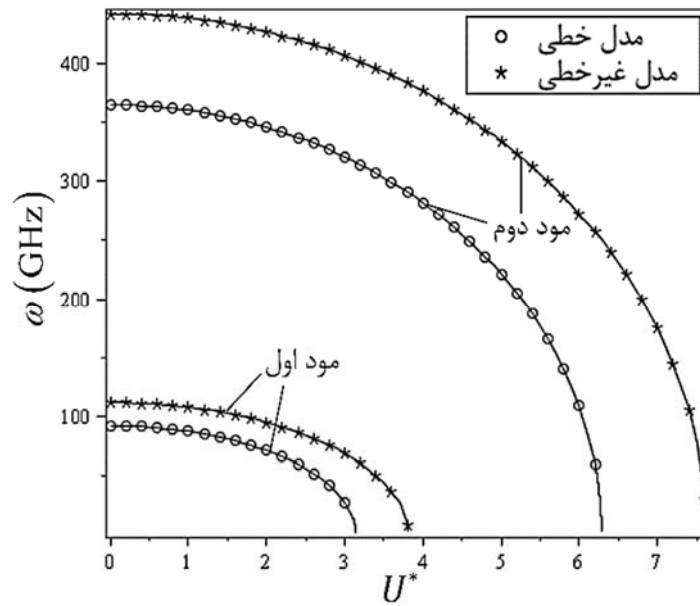
یون و همکاران [۷] نشان دادند که کمانش یا ناپایداری استاتیکی نانولوله‌های کربنی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس طبیعی نانولوله صفر شود، بر همین اساس در مطالعات پیشین بر روی ناپایداری نانولوله‌های کربنی، ناحیه پایداری متناظر با مثبت بودن فرکانس خطی در نظر گرفته شده است [۱۱]. در حالی که در این مطالعه بر اساس مفهوم ارائه شده توسط یون و همکاران [۷] سرعت بحرانی غیرخطی متناظر با رابطه (۴۱) استخراج شده است که شروع ناپایداری با در نظر گرفتن اثر غیرخطی در سیستم را نشان می‌دهد. در این بخش اثر پارامترهای هندسی و رفتار غیرخطی بر سرعت بحرانی و همچنین تأثیر سرعت سیال بر فرکانس غیرخطی و پاسخ پس از ناپایداری بررسی شده است.

شکل (۸) تأثیر نسبت ضخامت نانولوله بر شعاع خارجی، h/r ، بر سرعت بحرانی سیال با در نظر گرفتن اثر غیرخطی و صرف نظر از آن، در سه مود اول ارتعاشی را نشان می‌دهد. مطابق شکل تأثیر این پارامتر هندسی با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی ظاهر می‌شود و در مدل خطی، هر سه نمودار بر هم منطبق هستند. مشاهده می‌شود که در مدل خطی در مودهای اول تا سوم مقادیر سرعت بحرانی بی‌بعد به ترتیب برابر با ۳/۱۴۱۶، ۶/۲۸۳۲ و ۹/۲۴۴۸ می‌باشد، این مقادیر در مراجع [۱۰، ۱۷] نیز استخراج شده است، و در مطالعه حاضر با در نظر گرفتن اثر غیرخطی به ازای $h/r = 0.1$ به ترتیب به مقادیر ۳/۷۳۶۲، ۷/۴۷۲۴ و ۱۱/۲۰۸۶ افزایش یافته‌اند. بر این اساس با افزایش ضخامت نانولوله، ناپایداری در سرعت‌های بالاتر اتفاق می‌افتد.



شکل ۸- اثر ضخامت نانولوله بر سرعت بحرانی بی‌بعد سیال، U_c^* ، در سه مود اول ارتعاشی بر اساس

مدل‌های خطی و غیرخطی به ازای $K = T_0 = 0$ و $A_0^* = 1$.



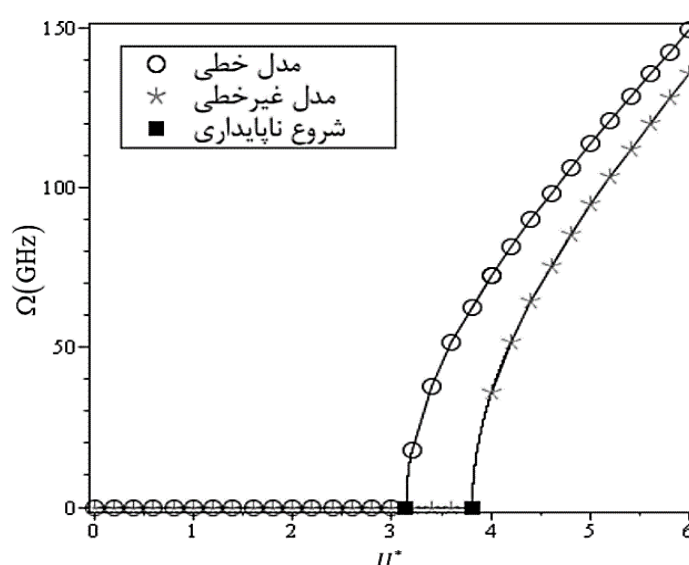
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی نانولوله در برابر سرعت بی‌بعد سیال برای دو مود ارتعاشی اول به ازای $K = T_0 = 0$ و $A_0^* = 1$.

همانطور که اشاره شد با افزایش سرعت سیال عبوری از نانولوله، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد و از طرفی اثر غیرخطی سبب افزایش فرکانس تشدید می‌شود. این پدیده برای فرکانس‌های خطی و غیرخطی در مودهای اول و دوم ارتعاشی در شکل (۹) نشان داده شده است. بر این اساس با افزایش سرعت سیال، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و با رسیدن آن به مقدار بحرانی، فرکانس طبیعی صفر می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن اثر غیرخطی، ناپایداری در سرعت‌های بالاتر اتفاق می‌افتد. همچنین با افزایش سرعت سیال، اختلاف فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی بیشتر می‌شود که نشان دهنده تشدید رفتار غیرخطی و مؤید نتایج نشان داده شده در شکل (۵) می‌باشد. نوع رفتار پاسخ ارتعاشی نانولوله با رسیدن به سرعت بحرانی و پس از آن در جدول (۱) آورده شده است که در آن Δ افزایش در دامنه پاسخ زمانی نسبت به ماکزیمم دامنه پایدار است. همانطور که مشاهده می‌شود با رسیدن سرعت سیال به سرعت بحرانی، $U_c^* = 3.808$ ، دامنه پاسخ زمانی در این لحظه به شدت افزایش می‌یابد و پس از آن پاسخ ناپایدار می‌شود. ناپایدار شدن پاسخ بدین معنی است که دامنه پاسخ زمانی ثابت نبوده و به صورت نمایی با افزایش زمان به بی‌نهایت میل می‌کند؛ به عبارت دیگر نوسان و ارتعاشی پس از ناپایداری وجود ندارد و کمناش استاتیکی اتفاق می‌افتد.

همانطور که در جدول (۱) آورده شد، با رسیدن سرعت سیال به مقدار بحرانی، سیستم ناپایدار می‌شود و دامنه پاسخ زمانی به شدت افزایش می‌یابد این افزایش دامنه به علت صفر شدن فرکانس ارتعاشات و پدید آمدن بخش حقیقی فرکانس مختلط، Ω ، می‌باشد. شکل (۱۰) بخش حقیقی فرکانس‌های خطی و غیرخطی را نمایش می‌دهد.

جدول ۱- رفتار پاسخ ارتعاشی غیرخطی در مود اول

نوع پاسخ ارتعاشی	افزایش در دامنه Δ (nm)	سرعت بی بعد سیال U^*
پایدار	۰	۳/۵
پایدار	۰/۹۱۴	۳/۷۹
پایدار	۴/۸۸۲	۳/۸
پایدار	۱۶/۵۱۳	۳/۸۰۵
پایدار	۵۰/۷۳۷	۳/۸۰۷
ناپایدار	∞	۳/۸۰۸

شکل ۱۰- بخش حقیقی فرکانس طبیعی مختلط خطی و غیرخطی در برابر سرعت بی بعد سیال به ازای $A_0^* = 1$.

$$.K = T_0 = 0$$

نتایج ارائه شده در جدول (۱) و شکل (۱۰) نشان می‌دهد مادامی که سیستم پایدار است، فرکانس طبیعی موهومی سبب پاسخ پریودیک می‌شود و با افزایش سرعت سیال این فرکانس کاهش یافته و صفر می‌شود و پس از شروع ناپایداری، بخش حقیقی فرکانس مختلط که به صورت نمایی سبب افزایش دامنه پاسخ زمانی می‌شود، بوجود می‌آید و پاسخ ارتعاشی ناپایدار می‌شود. بر این اساس در محدوده پایدار، $U^* < U_c^*$ ، بخش حقیقی فرکانس صفر می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، با استفاده از فرضیات واقع‌بینانه و استفاده از مدل الاستیک ریلی، معادله ارتعاشی نانولوله کربنی حامل سیال در بستر الاستیک استخراج شد که در آن اثر ممان اینرسی دورانی و اثر غیرخطی هندسی نیز لحاظ شده است. مدل بدست آمده با استفاده از روش اغتشاشات حل گردید.

مقایسه نتایج با حل عددی نشان می‌دهد که روش اغتشاشات با دقت بسیار مناسبی رفتار ارتعاش غیرخطی سیستم را پیش‌بینی کرده و برخلاف روش‌های عددی امکان بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار غیرخطی نانولوله‌های کربنی را در اختیار می‌گذارد.

همانطور که مشاهده شد، در نظر گرفتن ممان اینرسی دورانی سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود و میزان این کاهش با در نظر گرفتن اثر غیرخطی و با افزایش ماکزیمم دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد در حالی که در مدل خطی میزان تأثیر ممان اینرسی دورانی بر فرکانس طبیعی مقدار ثابتی می‌باشد. به عبارت دیگر با افزایش دامنه نوسان، دوران هر المان از نانولوله بیشتر می‌شود و واضح است که میزان تأثیر ممان اینرسی دورانی نیز افزایش می‌یابد.

همچنین با افزایش ضریب سفتی بستر الاستیک، رفتار ارتعاشی غیرخطی به رفتار خطی میل می‌کند. میزان تأثیر این ضریب برای مقادیر $K < 10^7 \text{ N/m}^2$ بسیار کم بوده و قابل صرف نظر می‌باشد در حالی که با افزایش ضریب سفتی از این مقدار، نسبت فرکانسی به شدت کاهش می‌یابد.

بر اساس مطالعه حاضر با افزایش طول نانولوله فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی کاهش می‌یابد. به گونه‌ای که برای نانولوله با طول کم، اثر غیرخطی کاملاً واضح می‌باشد و با افزایش طول نانولوله فرکانس طبیعی کاهش یافته و فرکانس‌های غیرخطی تشدید به مقادیر خطی متناظر همگرا می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش طول نانولوله، اثر غیرخطی کاهش می‌یابد.

نیروی محوری کششی باعث افزایش فرکانس‌های غیرخطی شده و نیروی محوری فشاری آن را کاهش می‌دهد. البته تغییرات ایجاد شده در فرکانس‌ها به گونه‌ای است که فرکانس تشدید بی‌بعد به مقدار نیروی محوری بستگی ندارد. همچنین نشان داده شد که اثر فشار در پایین دست نانولوله به صورت نیروی محوری اثر می‌کند و می‌تواند ناحیه ناپایداری را افزایش دهد.

افزایش سرعت سیال عبوری از نانولوله سبب تشدید رفتار غیرخطی و کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و با رسیدن سرعت سیال به مقدار بحرانی، فرکانس طبیعی صفر شده و ناپایداری روی می‌دهد. در این پژوهش رابطه‌ای برای سرعت بحرانی استخراج شده است که اثر غیرخطی هندسی نیز در آن ظاهر شده است و نتایج نشان می‌دهد که رفتار غیرخطی، سرعت بحرانی را افزایش می‌دهد. با رسیدن سرعت سیال به مقدار بحرانی و صفر شدن فرکانس طبیعی، پاسخ پریودیک ناشی از فرکانس طبیعی موهومی از بین می‌رود و با بوجود آمدن بخش حقیقی در فرکانس طبیعی مختلط، سیستم ناپایدار شده و به صورت موهومی، عبارت $e^{\Omega t}$ که در آن Ω پس از شروع ناپایداری ظاهر می‌شود، دامنه پاسخ زمانی را به شدت افزایش می‌دهد.

مراجع

[۱] رفیعی، ر.، "تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله کربنی با استفاده از تئوری اغتشاشات"، مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۲، شماره ۳، صص ۶۰-۶۷، (۱۳۹۱).

[2] Hu, Y.G., Liew, K.M., and Wang, Q., "Modeling of Vibrations of Carbon Nanotubes", *Procedia Engineering*, Vol. 31, pp. 343-347, (2012).

- [3] Firouz-Abadi, R.D., and Hosseinian, A.R., "Free Vibrations of Single-walled Carbon Nanotubes in the Vicinity of a Fully Constrained Graphene Sheet", *Computational Materials Science*, Vol. 53, No. 1, pp. 12-17, (2012).
- [4] Yoon, J., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A., "Vibration of an Embedded Multiwall Carbon Nanotube", *Composite Science and Technology*, Vol. 63, No. 11, pp. 1533-1542, (2003).
- [5] Yan, Y., He, X.Q., Zhang, L.X., and Wang, C.M., "Dynamic Behavior of Triple-walled Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, No. 3-5, pp. 1003-1018, (2009).
- [6] Fu, Y.M., Hong, J.W., and Wang, X.Q., "Analysis of Nonlinear Vibration for Embedded Carbon Nanotubes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 4-5, pp. 746-756, (2006).
- [7] Zhang, Y., Liu, G., and Han, X., "Transverse Vibrations of Double-walled Carbon Nanotubes under Compressive Axial Load", *Physics Letters A*, Vol. 340, No. 1-4, pp. 258-266, (2005).
- [8] Yoon, J., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A., "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1836-1850, (2005).
- [9] Yoon, J., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A., "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 11-12, pp. 3337-3349, (2006).
- [10] Ni, Q., Zhang, Z.L., and Wang, L., "Application of the Differential Transformation Method to Vibration Analysis of Pipes Conveying Fluid", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, No. 16, pp. 7028-7038, (2011).
- [11] Rasekh, M., and Khadem, S., "Nonlinear Vibration and Stability Analysis of Axially Loaded Embedded Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42, No. 13, pp.135112, (2009).
- [12] Soltani, P., Taherian, M.M., and Farshidianfar, A., "Vibration and Instability of a Viscous-fluid-conveying Single-walled Carbon Nanotube Embedded in a Visco-elastic Medium", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 43, No. 42, pp. 425401, (2010).
- [13] Wang, L., "A Modified Nonlocal Beam Model for Vibration and Stability of Nanotubes Conveying Fluid", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 1, pp. 25-28, (2011).
- [14] Rafiei, M., Mohebpour, S.R., and Daneshmand, F., "Small-scale Effect on the Vibration of Non-uniform Carbon Nanotubes Conveying Fluid and Embedded in Viscoelastic Medium", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 7-8, pp. 1372-1379, (2012).

- [15] Li, J.J., and Cheng, C.J., “Differential Quadrature Method for Nonlinear Vibration of Orthotropic Plates with Finite Deformation and Transverse Shear Effect”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 281, No. 1-2, pp. 295–309, (2005).
- [16] Gorman, D.G., Reese, J.M., and Zhang, Y.L., “Vibration of a Flexible Pipe Conveying Viscous Pulsating Fluid Flow”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2, pp. 379-392, (2000).
- [17] Paidoussis, M.P., “Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow”, Vol. 1, pp. 71-76, Academic Press, California, (1998).
- [18] Wang, L., “Vibration and Instability Analysis of Tubular Nano- and Micro-beams Conveying Fluid using Nonlocal Elastic Theory”, *Physica E*, Vol. 41, No. 10, pp. 1835-1840, (2009).
- [19] Khadem, S.E., and Rezaee, M., “Non-linear Vibration Analysis of a String under Bending Moment Effects using the Perturbation Method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 4, pp. 677-691, (2002).
- [20] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., “*Nonlinear Oscillations*”, John Wiley & Sons, New York, (1979).
- [21] Wang, L., Ni, Q., and Li, M., “Buckling Instability of Double-wall Carbon Nanotubes Conveying Fluid”, *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 2, pp. 821-825, (2008).
- [22] Shampine, L.F., and Corless, R.M., “Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 125, No. 1, pp. 31-40, (2000).

فهرست نمادهای انگلیسی

سطح مقطع عبور سیال	A_f
سطح مقطع نانولوله	A_{nt}
شرط اولیه جابه‌جایی	A_0
ماکزیمم دامنه ارتعاشی بی‌بعد	A_0^*
شتاب المان نانولوله	a_{nt}
شتاب المان سیال	a_f
شتاب کریولیس	a_{cor}
شتاب نسبی	a_{rel}
مدول الاستیسیته	E
نیروهای متقابل بین سیال و نانولوله	f_t, f_n
پاسخ زمانی	$g(t)$

پاسخ زمانی معادله خطی	$g_0(t)$
توابع نامعلوم تصحیح	$g_1(t), g_2(t), \dots$
ضخامت نانولوله	h
ممان اینرسی سطح مقطع نانولوله	I_{nt}
ممان اینرسی جرم واحد طول سیال	J_f
ممان اینرسی جرم واحد طول نانولوله	J_{nt}
ضریب سفتی بستر الاستیک	K
طول نانولوله	L
گشتاور خمشی	M
جرم واحد طول سیال	m_f
جرم واحد طول نانولوله	m_{nt}
شماره مود ارتعاشی	n
فشار سیال	p
فشار در انتهای پایین دست نانولوله	\bar{p}
نیروی برشی	Q
پاسخ زمانی	$q(t)$
شعاع خارجی نانولوله	r
نیروی محوری	T
نیروی محوری خارجی	T_0
نیروی محوری بی بعد	T_0^*
زمان	t
سرعت سیال	U
سرعت بحرانی سیال	U_c
سرعت بی بعد سیال	U^*
سرعت بحرانی بی بعد سیال	U_c^*
حرکت عرضی نانولوله	$w(x, t)$
محور مختصات طولی	x
محور مختصات عرضی	z

نمادهای یونانی

ضریب معادله زمانی	α
ضریب معادله زمانی	β
افزایش در دامنه پاسخ زمانی	Δ

پارامتر وابسته به شرط مرزی	δ
پارامتر غیرخطی	ε
کرنش طولی	ε_{xx}
دوران المان	θ
نسبت پواسون	ν
ضرایب معادله زمانی	ξ_i
چگالی سیال	ρ_f
چگالی نانولوله	ρ_{nt}
پارامتر بی بعد	τ
توابع مقایسه‌ای	$\phi(x)$
بخش حقیقی فرکانس مختلط	Ω
فرکانس طبیعی خطی	ω_0
فرکانس غیرخطی تشدید	ω
جملات تصحیح فرکانس غیرخطی	$\omega_1, \omega_2, \dots$
فرکانس تشدید بی بعد	ω^*

Abstract

In the present study, considering the geometric nonlinearity, the nonlinear vibration behavior of a carbon nanotube conveying fluid embedded in an elastic medium is studied. The fluid passing through the nanotube is considered to be inviscid and incompressible.

Using the Rayleigh's elastic theory, the governing equation of motion is derived. By considering a suitable parameter, the governing equation is converted to a form which can be solved by the perturbation method. Applying the Lindstedt-Poincaré method, the time response, the nonlinear resonance frequencies and the fluid critical velocity of the nanotube are obtained. The accuracy of the results is investigated by comparing them with those obtained through the numerical method. Unlike previous researches, the analytical relation for the fluid critical velocity is obtained considering the effect of the geometric nonlinearity. The results indicate that, as the fluid velocity increases and reaches a critical value, the time response amplitude grows without limit and the nanotube loses stability. Moreover, in comparison with the linear and small-amplitude vibrations of nanotube, by increasing the amplitude of oscillations, nonlinear behavior dominates and the instability occurs at a higher fluid velocity.