

## کمانش ورق‌های ضخیم هدفمند براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

در این مقاله، کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی مورد بررسی قرار گرفته است. این تئوری هر سه مؤلفه جابجایی را برحسب توابع لژاندر در جهت ضخامت بسط می‌دهد. با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و معیار تعادل همسایگی، معادلات پایداری بدست می‌آیند. دستگاه معادلات بدست آمده با فرض تکیه‌گاه ساده روی هر چهار لبه ورق با روش ناویر حل شده و بار بحرانی کمانش بدست می‌آید. پس از بررسی صحت نتایج ارائه شده، مقادیر بار بحرانی کمانش برای پارامترهای مختلفی مانند اندیس ماده هدفمند، نسبت منظری و نسبت ضخامت به عرض ورق برای انواع شرایط بارگذاری مورد بررسی قرار گرفته است.

مهديه عبدالهه<sup>۱</sup>

کارشناس ارشد

عليرضا سعیدی<sup>۲</sup>

استاد

ميثم محمدي<sup>۳</sup>

مربی

واژه‌های راهنما: کمانش، ورق‌های مستطیلی ضخیم، مواد هدفمند، تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی

### ۱- مقدمه

امروزه استفاده ترکیبی از مواد برای دستیابی به خواص مطلوب، روز به روز افزایش یافته است، زیرا با توجه به توسعه تکنولوژی و پیشرفت‌های صورت گرفته، عملاً یک ماده به تنهایی نمی‌تواند خواص مورد نیاز صنایع پیشرفته را برآورده سازد. بنابراین مواد مرکب جایگزین مواد همسانگرد شده‌اند که در ابتدا این مواد به صورت لایه‌ای تولید می‌شده‌اند. با توجه به ساختار لایه‌ای، سازه‌های ساخته شده معمولاً در اثر تنش‌های پسماند لایه‌لایه شده و دارای عمر کمی بودند. به همین منظور در سال (۱۹۸۴)، مهندسين هوا فضای ژاپنی در لابراتور موفق به تولید موادی با ریز ساختارهای ناهمگن به نام مواد هدفمند شدند، این مواد از یک لایه تشکیل شده بودند و خواص به صورت تابعی از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کرد. با توجه به کاربرد این مواد، اجزای تشکیل دهنده عموماً سرامیک و فلز در نظر گرفته می‌شوند. در این صورت خواص مکانیکی آن‌ها به آرامی و به‌طور پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کنند. در این مواد عدم وجود فصل مشترک

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان mahdiehabdollahi5@gmail.com

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان saidi@uk.ac.ir

<sup>۳</sup> مربی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان mohammadi@eng.uk.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۳/۱۰/۲۹، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۲/۰۷

تیز و ناگهانی باعث بهبود مقاومت اتصال، کاهش تنش‌های پسماند و توزیع یکنواخت تنش‌ها می‌شود. مؤلفه سرامیکی باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می‌گردد و از طرف دیگر مؤلفه فلزی باعث انعطاف‌پذیری و جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی بسیار بالا می‌شود.

ورق‌ها با شکل‌های هندسی گوناگون در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. ورق‌ها برحسب کاربردها ممکن است تحت بارگذاری درون صفحه‌ای قرار گیرند که اعمال بیش از حد مجاز این بارها می‌تواند باعث ناپایداری و شکست ورق شود. بنابراین تحلیل پایداری ورق یکی از مسائل مهم مهندسی به شمار می‌آید. تاکنون محققین زیادی به تحلیل کمانش ورق پرداخته‌اند. جواهری و اسلامی [۱] کمانش ورق‌های مستطیلی هدفمند تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده را براساس تئوری کلاسیک انجام داده‌اند. با استفاده از روش حل ناپایدار بحرانی کمانش را به صورت حل دقیقی بدست آورده و مقادیر عددی بار بحرانی کمانش برای ابعاد مختلف ورق ارائه داده‌اند. چن و لیو [۲] کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای صفحه‌ای توزیع شده غیرخطی در لبه‌ها را براساس روش بدون المان<sup>۱</sup> بدست آورده‌اند. کمانش ورق‌های مستطیلی هدفمند با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده را تحت انواع شرایط بارگذاری با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم توسط شریعت و اسلامی [۳] مورد بررسی قرار گرفته است. اوکویا و همکارانش [۴] با استفاده از روش المان محدود، ارتعاشات و کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها از المان‌های نوع میندلین<sup>۲</sup> و رایزنر<sup>۳</sup> برای مدل‌سازی استفاده کردند و نتیجه گرفتند که المان‌های نوع رایزنر نتیجه بهتری نسبت به المان‌های نوع میندلین می‌دهند. میرزایی‌فر و همکارانش [۵] فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کمانش را برای ورق‌های مستطیلی ایزوتروپیک مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مقاله از اولین و دومین جمله بسط سری تیلور استفاده شده و یک روش تقریبی برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کمانش بدست آمده است. سعیدی و همکارانش [۶] به بررسی خمش و کمانش ورق‌های ضخیم دایره‌ای ساخته شده از مواد هدفمند براساس تئوری برشی مرتبه سوم پرداخته‌اند. محمدی و همکارانش [۷-۸] معادلات پایداری را برای ورق‌های هدفمند مستطیلی براساس تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول بدست آورده‌اند که این معادلات به هم وابسته بودند. آن‌ها تعدادی تابع جدید معرفی نمودند که با استفاده از این تابع‌ها معادلات وابسته را به معادلات غیر وابسته تبدیل کردند. حل تحلیلی کمانش ورق‌های هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم توسط بداغی و سعیدی [۹] انجام شده و نتایج عددی را برای ورق تحت انواع بارگذاری، شرایط مرزی متقارن و نامتقارن ارائه شده است. روش دقیقی برای تعیین بار بحرانی کمانش ورق‌های ارتوتروپیک براساس تغییر شکل‌های پیش کمانش توسط نادری و سعیدی [۱۰] بدست آمده است. باترا و ویدولی [۱۱] با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر، تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های پیزوالکتریک ارائه کرده‌اند. باترا و ایمنی [۱۲] ارتعاشات و توزیع تنش ورق‌های مستطیل ایزوتروپ را با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی بررسی کرده‌اند. با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا را برای ورق‌های تراکم‌ناپذیر توسط باترا [۱۳] ارائه شده است.

<sup>1</sup> Mesh-free method

<sup>2</sup> Mindlin-type element

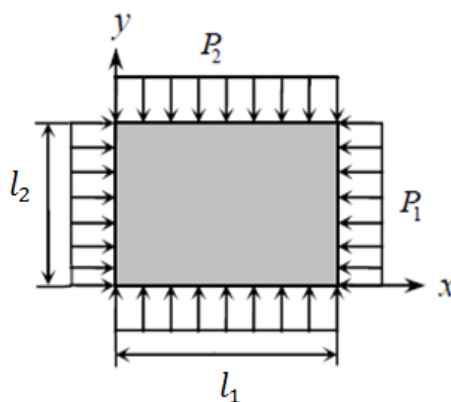
<sup>3</sup> Reissner-type element

ایشان با استفاده از این تئوری، معادلات ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی چهار طرف تکیه-گاه ساده را تعیین کرده است. شیخ الاسلامی و سعیدی [۱۴] ارتعاشات ورق‌های مستطیلی تراکم‌ناپذیر روی بستر الاستیک براساس تئوری تغییر شکل برشی و عمودی بدست آورده‌اند و آن‌ها نشان دادند هنگامی که از تئوری مرتبه پنج تغییر شکل برشی و عمودی استفاده شود، نتایج بدست آمده خیلی نزدیک به نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته سه بعدی است.

در این مقاله کمانش ورق‌های مستطیلی ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات خواص ماده هدفمند تابعی از مختصات در جهت ضخامت در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی، با بکار بردن اصل حداقل انرژی پتانسیل و معیار تعادل همسایگی، معادلات پایداری بدست می‌آیند. با فرض شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده، از حل ناوبر برای تعیین دقیق بار بحرانی کمانش ورق مستطیلی استفاده شده است. در پایان مقادیر مختلف بار بحرانی کمانش براساس پارامترهای مختلف ارائه شده است.

## ۲- تعیین معادلات پایداری ورق

ورق مستطیلی مطابق شکل (۱) در مختصات دکارتی با طول  $l_1$ ، عرض  $l_2$  و ضخامت  $h$  در نظر گرفته شده است. همانند شکل، ورق تحت بارهای درون صفحه‌ای در جهت  $x$  و  $y$  است. از آنجاییکه ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را در راستای  $Z$  به صورت بسط چندجمله‌ای نوشت و به این ترتیب مؤلفه‌های جدید جابجایی فقط تابعی از  $x, y$  هستند. که این کار باعث ساده‌سازی مسأله می‌شود و دقت مسأله بستگی به تعداد جملات نگه داشته شده در بسط چندجمله‌ای دارد. در تئوری‌های قبلی بسط میدان جابجایی به صورت سری تیلور بود اما در تئوری مرتبه‌ی بالای تغییر شکل برشی و عمودی، بسط میدان جابجایی به صورت سری لژاندر در نظر گرفته می‌شود. این تئوری برخلاف تئوری‌های قبلی تمام کرنش‌های عمودی و برشی را شامل می‌شود. بنابراین برای تحلیل ورق‌های ضخیم مناسب هستند. چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شوند [۱۴]:



شکل ۱- ورق مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a(z)L_b(z)dz = \delta_{ab} \quad a, b = 0,1,2, \dots k \quad (۱)$$

که  $a$  و  $b$  شمارنده آزاد،  $k$  مرتبه تئوری مورد استفاده و  $\delta_{ab}$  تابع دلتای کرونگر است.

چندجمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان به صورت رابطه (۲) بدست آورد:

$$L_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{(2n-1)}{h}} P_{n-1}(z) \quad n \geq 1 \quad (۲)$$

که  $P$  چندجمله‌ای‌های لژاندر است که به وسیله روابط بازگشت‌پذیر (۳) بدست می‌آید:

$$P_0(z) = 1 \quad (۳-الف)$$

$$P_1(z) = \frac{2z}{h} \quad (۳-ب)$$

$$P_{n+1}(z) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\frac{2z}{h}\right)P_n(z) - \left(\frac{n}{n+1}\right)P_{n-1}(z) \quad (۳-ج)$$

به منظور مطالعه رفتار ورق، باترا و ویدولی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر مؤلفه‌های میدان جابجایی را براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی به شکل رابطه (۴) بیان می‌شوند [۱۱]:

$$u_i(x, y, z) = L_a(z)u_i^a(x, y) \quad i = 1,2,3 \quad (۴)$$

شمارنده‌ی تکرار شونده‌ی  $a$  در معادله بالا به معنای جمع روی آن از صفر تا مرتبه تئوری تغییر شکل برشی و عمودی می‌باشد.

مشتق چندجمله‌ای لژاندر را می‌توان به صورت ترکیب خطی از خود چندجمله‌ای‌های لژاندر چنین نوشت:

$$L'_a(z) = D_{ab}L_b(z) \quad (۵)$$

که  $D$  ماتریس ضرایب مشتق است. این ماتریس برای تئوری مرتبه پنج تغییر شکل برشی و عمودی به صورت رابطه (۶) می‌باشد:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

بنابراین مشتق میدان جابجایی را می‌توان چنین بیان کرد:

$$u_{i,j}(x, y, z) = L_a(z)u_{i,j}^a(x, y) \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2 \quad (۷-الف)$$

$$u_{i,3}(x, y, z) = D_{ab}L_b(z)u_i^a(x, y) \quad i = 1,2,3 \quad (۷-ب)$$

بر اساس فرضیات فون-کارمن برای روابط غیر خطی کرنش-جابجایی، مؤلفه‌های کرنش‌های به صورت رابطه (۸) بدست می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_a u_{1,1}^a + \frac{1}{2} L_a L_b u_{3,1}^a u_{3,1}^b \\ L_a u_{2,2}^a + \frac{1}{2} L_a L_b u_{3,2}^a u_{3,2}^b \\ D_{ab} L_b u_3^a + \frac{1}{2} D_{ab} D_{cd} L_b L_d u_3^a u_3^c \\ \frac{1}{2} (L_a u_{1,2}^a + L_a u_{2,1}^a + L_a L_b u_{3,1}^a u_{3,2}^b) \\ \frac{1}{2} (D_{ab} L_b u_1^a + L_a u_{3,1}^a + D_{ab} L_b L_c u_3^a u_{3,1}^c) \\ \frac{1}{2} (D_{ab} L_b u_2^a + L_a u_{3,2}^a + D_{ab} L_b L_c u_3^a u_{3,2}^c) \end{pmatrix} \quad (۸)$$

با توجه به اینکه ماده مورد استفاده هدفمند در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته برای این ماده به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود [۷]:

$$E(z) = E_m + (E_{ce} - E_m) \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^N \quad (۹)$$

که در آن  $E(z)$  مدول الاستیسته ورق، زیرنویس  $m$  و  $ce$  به ترتیب به فلز و سرامیک ورق اشاره می‌کند. همچنین پارامتر  $N$  نشان‌دهنده اندیس ماده هدفمند می‌باشد که تغییر آن باعث تغییر خواص ماده می‌شود. تغییرات ضریب پواسون در جهت ضخامت بسیار کم است، بنابراین ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود.

از این‌رو، ثابت‌های الاستیک برای ماده هدفمند عبارتند از:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(z)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (۱۰-الف)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (۱۰-ب)$$

$$C_{55} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (۱۰-ج)$$

بنابراین، میدان تنش بر حسب مؤلفه‌های کرنش به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (۱۱)$$

که منتجه‌های تنش به صورت روابط (۱۲) تعريف می‌شوند:

$$M_{ij}^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} L_a(z) dz \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۱۲-الف)$$

$$M_{ij}^{ab} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} L_a(z) L_b(z) dz \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۱۲-ب)$$

با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل، معادلات تعادل بر حسب منتجه‌های تنش به صورت روابط (۱۳) بدست می‌آیند:

$$M_{11,1}^a - D_{ab} M_{13}^b + M_{12,2}^a = 0 \quad (۱۳-الف)$$

$$M_{22,2}^a - D_{ab} M_{23}^b + M_{12,1}^a = 0 \quad (۱۳-ب)$$

$$\begin{aligned} & -(M_{11}^{ab} u_{3,1}^b)_{,1} - (M_{22}^{ab} u_{3,2}^b)_{,2} + D_{ab} M_{33}^b + D_{ab} D_{cd} M_{33}^{bd} u_3^c \\ & - (M_{12}^{ab} u_{3,2}^b)_{,1} - (M_{12}^{ab} u_{3,1}^b)_{,2} - M_{13,1}^a + D_{ab} M_{13}^{bc} u_{3,1}^c \\ & - D_{cb} (M_{13}^{ab} u_3^c)_{,1} - M_{23,2}^a + D_{ab} M_{23}^{bc} u_{3,2}^c \\ & - D_{cb} (M_{23}^{ab} u_3^c)_{,2} = 0 \end{aligned} \quad (۱۳-ج)$$

و همچنین با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل شرایط مرزی به شکل روابط (۱۴) بدست می‌آیند:

$$\delta u_1^a = 0 \quad \text{یا} \quad M_{11}^a \vec{e}_1 + M_{12}^a \vec{e}_2 + P_1 L_a(0) \vec{e}_1 = 0 \quad (۱۴-الف)$$

$$\delta u_2^a = 0 \quad \text{یا} \quad M_{22}^a \vec{e}_2 + M_{12}^a \vec{e}_1 + P_2 L_a(0) \vec{e}_2 = 0 \quad (۱۴-ب)$$

$$\begin{aligned} \delta u_3^a = 0 \quad \text{یا} \quad & M_{11}^{ab} u_{3,1}^b \vec{e}_1 + M_{22}^{ab} u_{3,2}^b \vec{e}_2 + M_{12}^{ab} u_{3,2}^b \vec{e}_1 \\ & + M_{12}^{ab} u_{3,1}^b \vec{e}_2 + M_{13}^a \vec{e}_1 + D_{cb} M_{13}^{ab} u_3^c \vec{e}_1 \\ & + M_{23}^a \vec{e}_2 + D_{cb} M_{23}^{ab} u_3^c \vec{e}_2 = 0 \end{aligned} \quad (۱۴-ج)$$

از آن جایکه کرنش‌ها توابعی غیرخطی از مؤلفه‌های میدان جابجایی هستند، بنابراین مؤلفه‌های تنش و منتجه‌های تنش به صورت غیرخطی هستند. برای بدست آوردن معادلات پایداری خطی از معیار تعادل همسایگی استفاده می‌شود. بدین صورت که یک نمو کوچک به مؤلفه‌های میدان جابجایی داده و معادلات در دو شکل همسایگی قبل و بعد از نمو بررسی می‌شوند. واضح است که وضعیت ورق، بعد از جابجایی کوچک و نمو بوجود آمده در معادلات همچنان در حال تعادل باقی می‌ماند. از این‌رو:

$$u_i^a = \bar{u}_i^a + \tilde{u}_i^a \quad (۱۵)$$

که  $\bar{u}_i^a$  مربوط به وضعیت تعادل ورق و  $\tilde{u}_i^a$  مربوط به همسایگی وضعیت تعادل است. بنابراین نتیجه‌های تنش را می‌توان به صورت روابط (۱۶) بیان کرد:

$$M_{ij}^a = \bar{M}_{ij}^a + \tilde{M}_{ij}^a \quad (۱۶-الف)$$

$$M_{ij}^{ab} = \bar{M}_{ij}^{ab} + \tilde{M}_{ij}^{ab} \quad (۱۶-ب)$$

بر اساس معیار تعادل همسایگی و جایگزینی آن در نتیجه‌های تنش، معادلات تعادل به معادلات پایداری تبدیل می‌شوند. لازم به ذکر است که عبارت‌های با بالانویس (-) شرایط تعادل را ارضا کرده و از معادلات حذف می‌شوند. همچنین حاصل ضرب عبارت‌های با بالانویس (~) به دلیل کوچکی صرف نظر شده است. با توجه به اینکه در حالت تعادل فقط بارگذاری در جهت  $x$  و  $y$  داریم، بنابراین معادلات پایداری به صورت روابط (۱۷) بدست می‌آیند:

$$\tilde{M}_{11,1}^a - D_{ab}\tilde{M}_{13}^b + \tilde{M}_{12,2}^a = 0 \quad (۱۷-الف)$$

$$\tilde{M}_{22,2}^a - D_{ab}\tilde{M}_{23}^b + \tilde{M}_{12,1}^a = 0 \quad (۱۷-ب)$$

$$\begin{aligned} -\bar{M}_{11}^{ab}\tilde{u}_{3,11}^b - \bar{M}_{22}^{ab}\tilde{u}_{3,22}^b + D_{ab}\tilde{M}_{33}^b \\ -\tilde{M}_{13,1}^a - \tilde{M}_{23,2}^a = 0 \end{aligned} \quad (۱۷-ج)$$

با قرار دادن مؤلفه‌های نتیجه‌های تنش بر حسب میدان جابجایی در معادلات پایداری و پس از ساده‌سازی آن‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [L_a L_c C_{11} \tilde{u}_{1,11}^c + L_a L_c C_{55} (\tilde{u}_{1,22}^c + \tilde{u}_{2,12}^c) + D_{cd} L_a L_d C_{12} \tilde{u}_{3,1}^c \\ + L_a L_c C_{12} \tilde{u}_{2,21}^c - D_{ab} (D_{cd} L_b L_d C_{55} \tilde{u}_1^c + L_b L_c C_{55} \tilde{u}_{3,1}^c)] dz = 0 \end{aligned} \quad (۱۸-الف)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [L_a L_c C_{12} \tilde{u}_{1,12}^c + L_a L_c C_{55} (\tilde{u}_{1,21}^c + \tilde{u}_{2,11}^c) + D_{cd} L_a L_d C_{12} \tilde{u}_{3,2}^c \\ + L_a L_c C_{11} \tilde{u}_{2,22}^c - D_{ab} (D_{cd} L_b L_d C_{55} \tilde{u}_2^c + L_b L_c C_{55} \tilde{u}_{3,2}^c)] dz = 0 \end{aligned} \quad (۱۸-ب)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [-D_{cd} L_a L_d C_{55} \tilde{u}_{1,1}^c - L_a L_c C_{55} \tilde{u}_{3,11}^c + D_{ab} D_{cd} L_b L_d C_{11} \tilde{u}_3^c \\ + D_{ab} L_b L_c (C_{12} \tilde{u}_{1,1}^c + C_{12} \tilde{u}_{2,2}^c) - D_{cd} L_a L_d C_{55} \tilde{u}_{2,2}^c \\ - L_a L_c C_{55} \tilde{u}_{3,22}^c] dz - \bar{M}_{11}^{ac} \tilde{u}_{3,11}^c - \bar{M}_{22}^{ac} \tilde{u}_{3,22}^c = 0 \end{aligned} \quad (۱۸-ج)$$

با بکار بردن معیار تعادل همسایگی در روابط (۱۴)، شرایط مرزی به صورت روابط (۱۹) می‌باشند:

$$\delta \tilde{u}_1^a = 0 \quad \text{یا} \quad \tilde{M}_{11}^a \vec{e}_1 + \tilde{M}_{12}^a \vec{e}_2 = 0 \quad (۱۹-الف)$$

$$\delta \tilde{u}_2^a = 0 \quad \text{یا} \quad \tilde{M}_{22}^a \vec{e}_2 + \tilde{M}_{12}^a \vec{e}_1 = 0 \quad (۱۹-ب)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{u}_3^a = 0 \quad \text{یا} \quad & \bar{M}_{11}^{ab} \tilde{u}_{3,1}^b \vec{e}_1 + \bar{M}_{22}^{ab} \tilde{u}_{3,2}^b \vec{e}_2 \\ & + \bar{M}_{12}^{ab} \tilde{u}_{3,2}^b \vec{e}_1 + \bar{M}_{12}^{ab} \tilde{u}_{3,1}^b \vec{e}_2 \\ & + \tilde{M}_{13}^a \vec{e}_1 + D_{cb} \bar{M}_{13}^{ab} \tilde{u}_3^c \vec{e}_1 \\ & + \tilde{M}_{23}^a \vec{e}_2 + D_{cb} \bar{M}_{23}^{ab} \tilde{u}_3^c \vec{e}_2 = 0 \end{aligned} \quad (۱۹-ج)$$

برای یک ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده، جابجایی در راستای ضخامت ورق روی لبه‌ها برابر صفر است. بنابراین شرایط مرزی برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده طبق روابط (۲۰) می‌باشند:

$$\tilde{u}_3^a = 0 \quad \tilde{M}_{11}^a = 0 \quad \tilde{M}_{12}^a = 0 \quad \text{بر روی } x = 0, l_1 \quad (۲۰-الف)$$

$$\tilde{u}_3^a = 0 \quad \tilde{M}_{22}^a = 0 \quad \tilde{M}_{12}^a = 0 \quad \text{بر روی } y = 0, l_2 \quad (۲۰-ب)$$

به منظور سادگی و با حفظ کلیت تحقیق، بار فشاری صفحه‌ای در جهت  $x$  را می‌توان به صورت رابطه (۲۱) تعریف کرد:

$$P_1 = -P \quad (۲۱)$$

و همچنین بار فشاری  $y$  بر حسب بار در جهت  $x$  با معرفی پارامتر بار ( $R$ ) به شکل رابطه (۲۲) بیان می‌شود:

$$P_2 = RP_1 = -RP \quad (۲۲)$$

که  $R = 1$  نشان‌دهنده بار فشاری در هر دو جهت  $x$  و  $y$ ،  $R = 0$  نشان‌دهنده بار فشاری تک محوره در جهت  $x$  و  $R = -1$  بیانگر بار فشاری در جهت  $x$  و بار کششی در جهت  $y$  است.

با توجه به اینکه بار بحرانی کمانش در راستای  $x$  به صورت رابطه (۲۳) می‌باشد:

$$P_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_{11} dz \quad (۲۳)$$

در نتیجه برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش ابتدا باید بسط جملات لژاندر  $L_a(z)$  و  $L_b(z)$  را در  $\bar{M}_{11}^{ab}$  نوشت، فقط عبارتهای ثابت آن‌ها به عنوان ضریب بار کمانش حساب شده و عباراتی که شامل  $z$  و توان‌های بالاتر آن می‌باشند، صفر می‌شوند.

برای حل معادلات پایداری برای ورقی با چهار طرف تکیه‌گاه ساده از حل ناویر استفاده می‌کنیم. در حل ناویر توابع جابجایی به صورت بسط سری فوریه (۲۴) در نظر گرفته می‌شود تا علاوه بر ارضای معادلات پایداری، شرایط مرزی مربوط به ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده را نیز ارضا کنند.

$$\tilde{u}_1^c = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_1^{cmn} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \quad (۲۴-الف)$$

$$\tilde{u}_2^c = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_2^{cmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \quad (۲۴-ب)$$



$$\tilde{u}_3^c = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_3^{cmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \quad (24-ج)$$

با جایگذاری روابط (۲۴) در معادلات پایداری، مجموعه‌ای از معادلات همگن بدست می‌آید که با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب و بدست آوردن کمترین مقدار حاصل، بار بحرانی کمانش بدست می‌آید.

### ۳- نتایج

برای سنجش درستی نتایج، بار بحرانی کمانش محاسبه شده با استفاده از تئوری مرتبه پنج تغییر شکل برشی و عمودی با نتایج مرجع [۹] مقایسه شده است. این نتایج برای ورقی با خصوصیات مکانیکی  $E_{ce} = 420\text{Gpa}$ ،  $E_m = 70\text{Gpa}$  و  $\nu = 0.3$  برای انواع شرایط بارگذاری در جدول (۱) آمده است. مقایسه نشان می‌دهد که نتایج از دقت قابل قبولی برخوردار هستند. گرچه اختلاف کمی مشاهده می‌شود، اما این اختلاف به این علت است که در تئوری برشی مرتبه سوم از کرنش عمودی صرف نظر شده است در حالیکه این تئوری اثر کرنش عمودی را در نظر گرفته و نتایج حاصل از این تئوری از دقت بالاتری نسبت به تئوری-های دیگر برخوردار است.

**جدول ۱-** مقایسه بار بحرانی کمانش ( $\text{MN/m}$ ) برای ورق هدفمند چهار طرف تکیه‌گاه ساده با نسبت ضخامت به عرض  $h/l_2 = 0.1$

درصد اختلاف بین دو تئوری	نتایج مقاله حاضر	نتایج مرجع [۹]	$l_1/l_2$	$R$	$N$
۰/۴۰۳	۷۱۵/۸۰۸	۷۱۸/۶۹۲	۱	۱	
۰/۲۹۶	۵۲۵/۳۰۸	۵۲۶/۸۶۱	۱/۵		
۰/۴۰۳	۱۴۳۱/۵۹۴	۱۴۳۷/۳۶۱	۱	.	.
۰/۵۴۷	۱۵۱۹/۵۸۸	۱۵۲۷/۹۰۳	۱/۵		
۰/۹۵۲	۲۷۴۶/۸۴۲	۲۷۷۲/۹۸۰	۱	-۱	
۰/۹۵۲	۲۷۴۶/۸۴۲	۲۷۷۲/۹۸۰	۱/۵		
۰/۳۱۱	۳۵۰/۰۳۴	۳۵۱/۱۲۴	۱	۱	
۰/۲۲۷	۲۵۶/۱۹۴	۲۵۶/۷۷۶	۱/۵		
۰/۳۱۹	۷۰۰/۰۶۸	۷۰۲/۳۰۴	۱	.	۱
۰/۴۱۸	۷۴۵/۸۰۱	۷۴۸/۹۲۰	۱/۵		
۰/۷۷۰	۱۳۶۱/۱۷۴	۱۳۷۱/۶۵۳	۱	-۱	
۰/۷۷۰	۱۳۶۱/۱۷۴	۱۳۷۱/۶۵۳	۱/۵		

جدول (۲) مقادیر بار بحرانی کمانش ورق هدفمند مستطیلی تحت بارگذاری تک محوره برای مرتبه‌های یک تا پنج تئوری تغییر شکل برشی و عمودی آمده است. همان‌طوریکه مشاهده می‌شود، هرچه مرتبه تئوری بیشتر شود، مقادیر بار بحرانی کمانش بهم نزدیک شده و همگرایی نتایج بیشتر می‌شود، در حالیکه برای ضخامت‌های پایین می‌توان از تئوری مرتبه سه تغییر شکل برشی و عمودی استفاده کرد. با افزایش ضخامت نتایج حاصل از تئوری مرتبه سه دقیق نبوده و باید از تئوری‌های مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی مانند تئوری مرتبه چهار یا پنج استفاده کرد.

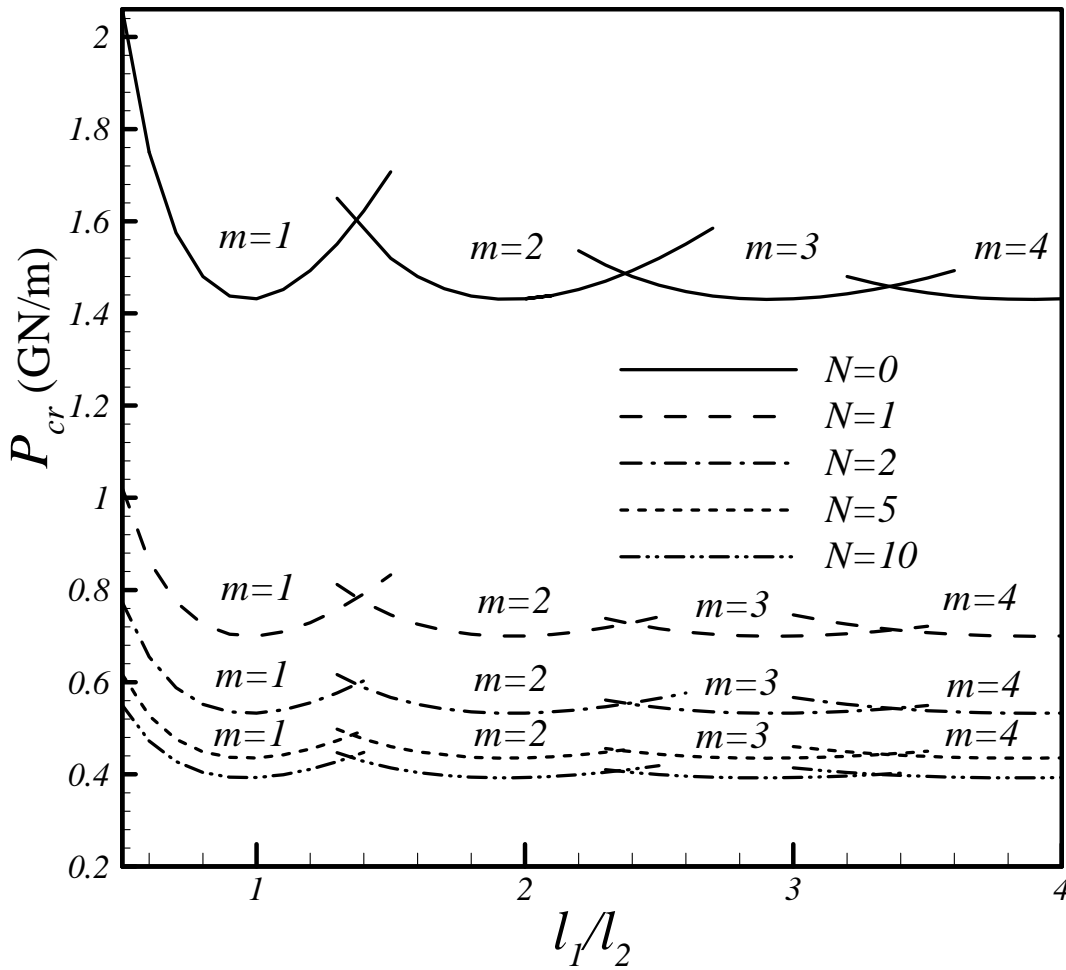
**جدول ۲-** بار بحرانی کمانش (GN/m) برای ورق هدفمند تحت بارگذاری فشاری تک محوره ( $R = 0$ )، برای مرتبه‌های یک تا پنج تئوری تغییر شکل برشی و عمودی

$k = 5$	$k = 4$	$k = 3$	$k = 2$	$k = 1$	$h/l_2$	$l_1/l_2$	$N$
۲/۰۶۰۱۳	۲/۰۶۰۱۳	۲/۰۶۰۳۳	۲/۰۹۰۳۸	۲/۵۴۰۶۴	۰/۱		
۱۱/۸۰۵۳۸	۱۱/۸۰۶۷۶	۱۱/۸۲۰۷۸	۱۲/۲۹۶۵۸	۱۴/۷۵۵۴۲	۰/۲	۰/۵	
۲۶/۹۶۴۹۵	۲۶/۹۸۶۳۴	۲۷/۱۱۳۴۰	۲۸/۵۸۶۷۴	۳۴/۱۸۶۱۸	۰/۳		
۱/۴۳۱۵۹	۱/۴۳۱۵۹	۱/۴۳۱۶۲	۱/۴۴۰۷۵	۱/۷۵۸۷۸	۰/۱		
۹/۷۷۵۰۲	۹/۷۷۵۱۲	۹/۷۷۷۳۵	۹/۹۸۷۰۴	۱۲/۰۹۴۹۷	۰/۲	۱	۰
۲۶/۵۰۴۶۰	۲۶/۵۰۶۹۷	۲۶/۵۳۳۱۵	۲۷/۵۲۷۲۳	۳۳/۰۸۰۳۷	۰/۳		
۱/۵۱۹۵۹	۱/۵۱۹۵۹	۱/۵۱۹۶۳	۱/۵۳۲۷۸	۱/۸۶۸۸۴	۰/۱		
۹/۸۵۷۰۰	۹/۸۵۷۲۵	۹/۸۶۱۳۵	۱۰/۱۳۱۶۹	۱۲/۲۳۳۳۷	۰/۲	۱/۵	
۲۵/۲۶۹۵۰	۲۵/۲۷۴۶۳	۲۵/۳۱۸۸۳	۲۶/۴۴۴۷۹	۳۱/۶۸۸۴۹	۰/۳		
۱/۰۲۰۸۸	۱/۰۲۰۹۳	۱/۰۲۱۰۳	۱/۱۴۲۴۹	۱/۲۵۶۵۶	۰/۱		
۶/۱۲۱۳۳	۶/۱۲۵۱۰	۶/۱۲۹۷۲	۶/۷۷۸۶۴	۷/۵۹۳۸۴	۰/۲	۰/۵	
۱۴/۵۲۵۱۲	۱۴/۵۶۱۵۰	۱۴/۶۰۶۰۸	۱۵/۹۲۹۳۵	۱۸/۱۲۰۸۰	۰/۳		
۰/۷۰۰۰۷	۰/۷۰۰۰۷	۰/۷۰۰۰۹	۰/۷۷۵۸۴	۰/۸۵۹۳۹	۰/۱		
۴/۸۹۹۹۳	۴/۹۰۰۵۲	۴/۹۰۱۳۸	۵/۴۰۵۴۷	۶/۰۴۴۳۱	۰/۲	۱	۱
۱۳/۶۸۰۰۳	۱۳/۶۸۷۰۲	۱۳/۶۹۵۶۷	۱۵/۰۰۱۶۴	۱۶/۹۵۸۸۹	۰/۳		
۰/۷۴۵۸۰	۰/۷۴۵۸۱	۰/۷۴۵۸۵	۰/۸۳۰۸۲	۰/۹۱۶۲۲	۰/۱		
۴/۹۹۲۶۹	۴/۹۹۳۷۶	۴/۹۹۵۲۱	۵/۵۲۶۲۳	۶/۱۷۰۲۲	۰/۲	۱/۵	
۱۳/۲۳۶۹۹	۱۳/۲۴۹۰۷	۱۳/۲۶۳۶۸	۱۴/۵۳۹۸۷	۱۶/۴۴۵۷۵	۰/۳		

**جدول ۳-** نتایج عددی بار بحرانی کمانش (GN/m) ورق هدفمند با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده تحت انواع شرایط بارگذاری براساس تئوری مرتبه پنج تغییر شکل برشی و عمودی

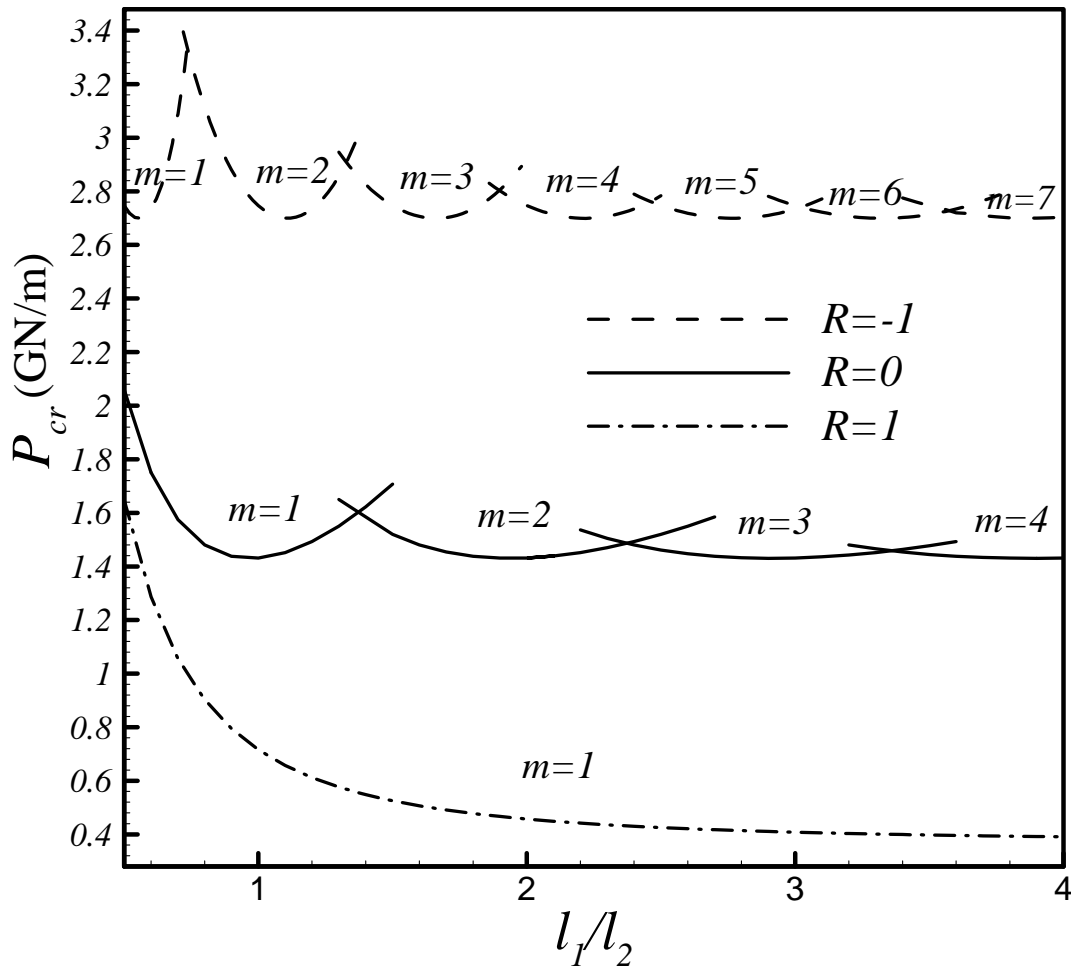
$R = -1$	$R = 0$	$R = 1$	$h/l_2$	$l_1/l_2$	$N$
۲/۷۴۶۸۴	۲/۰۶۰۱۳	۱/۶۴۸۱۰	۰/۱		
				۰/۵	
۱۵/۷۴۰۵۰	۱۱/۸۰۵۳۸	۹/۴۴۴۳۰	۰/۲		
۲/۷۴۶۸۴	۱/۴۳۱۵۹	۰/۷۱۵۸۱	۰/۱		
				۱	۰
۱۵/۷۴۰۵۰	۹/۷۷۵۰۲	۴/۸۸۷۵۱	۰/۲		
۲/۷۴۶۸۴	۱/۵۱۹۵۹	۰/۵۲۵۳۱	۰/۱		
				۱/۵	
۱۵/۷۴۰۵۰	۹/۸۵۷۰۰	۳/۷۳۲۴۶	۰/۲		
۱/۳۶۱۱۷	۱/۰۲۰۸۸	۰/۸۱۶۷۱	۰/۱		
				۰/۵	
۸/۱۶۱۷۸	۶/۱۲۱۳۳	۴/۸۹۷۰۶	۰/۲		
۱/۳۶۱۱۷	۰/۷۰۰۰۷	۰/۳۵۰۰۳	۰/۱		
				۱	۱
۸/۱۶۱۷۸	۴/۸۹۹۹۳	۲/۴۴۹۹۶	۰/۲		
۱/۳۶۱۱۷	۰/۷۴۵۸۰	۰/۲۵۶۱۹	۰/۱		
				۱/۵	
۸/۱۶۱۷۸	۴/۹۹۲۶۹	۱/۸۵۵۴۰	۰/۲		
۰/۷۳۳۴۱	۰/۵۵۰۰۶	۰/۴۴۰۰۴	۰/۱		
				۰/۵	
۳/۸۶۳۶۰	۲/۸۹۷۷۰	۲/۳۱۸۱۶	۰/۲		
۰/۷۳۳۴۱	۰/۳۹۲۹۱	۰/۱۹۶۴۶	۰/۱		
				۱	۱۰
۳/۸۶۳۶۰	۲/۵۵۱۲۵	۱/۲۷۵۶۳	۰/۲		
۰/۷۳۳۴۱	۰/۴۱۳۸۷	۰/۱۴۵۰۱	۰/۱		
				۱/۵	
۳/۸۶۳۶۰	۲/۵۲۲۴۰	۰/۹۹۰۳۱	۰/۲		

نتایج عددی بار بحرانی کمانش برای نسبت‌های مختلف منظری، اندیس‌های مختلف ماده هدفمند و نسبت ضخامت به عرض ورق تحت انواع شرایط بارگذاری در جدول (۳) آورده شده است.



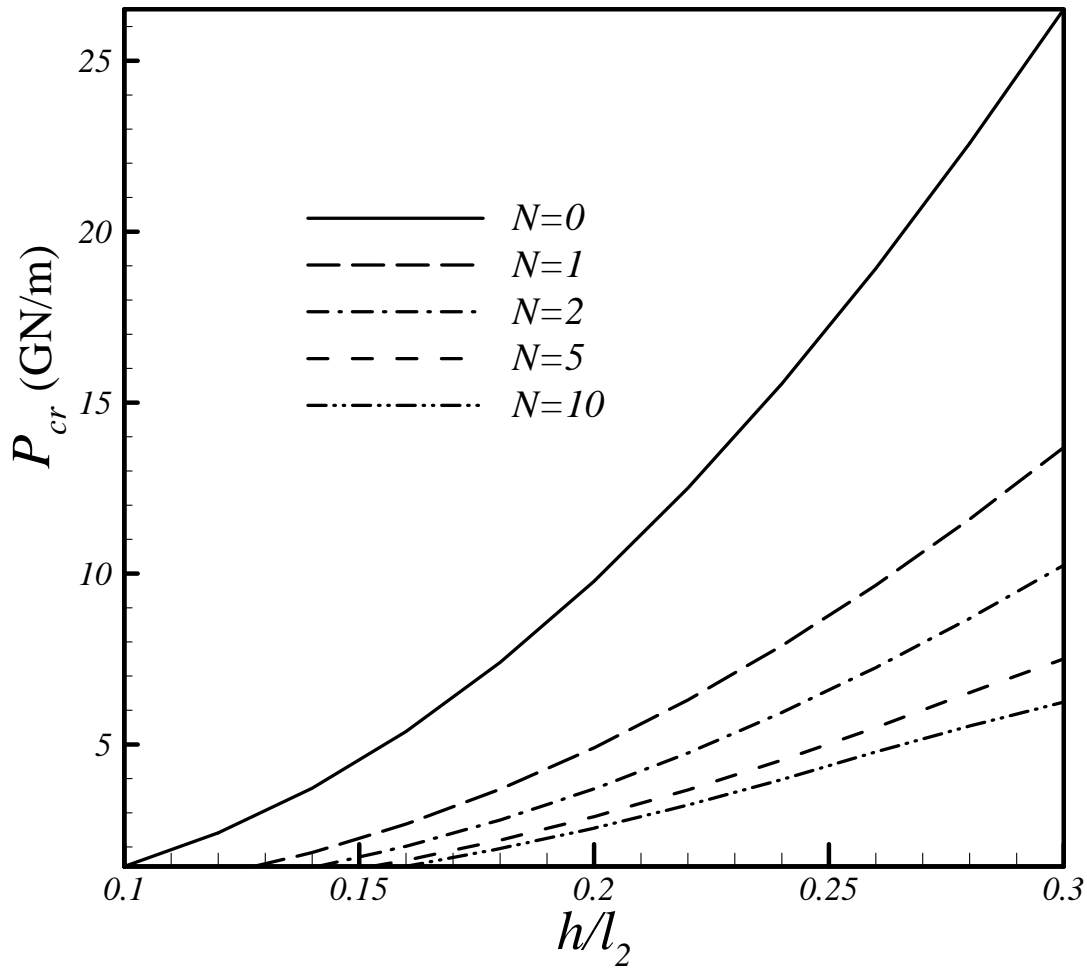
شکل ۲- تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب تغییرات نسبت منظری برای اندیس‌های مختلف ماده هدفمند  
 $R = 0, h/l_2 = 0.1$

تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب نسبت منظری ورق برای بارگذاری تک محوره در شکل (۲) نشان داده شده است. با توجه به این شکل می‌توان چنین نتیجه گرفت، زمانی که ورق تحت بارگذاری تک محوره قرار می‌گیرد، با افزایش نسبت منظری در اندیس‌های مختلف ماده هدفمند، کمانش در مودهای بالاتر رخ می‌دهد.



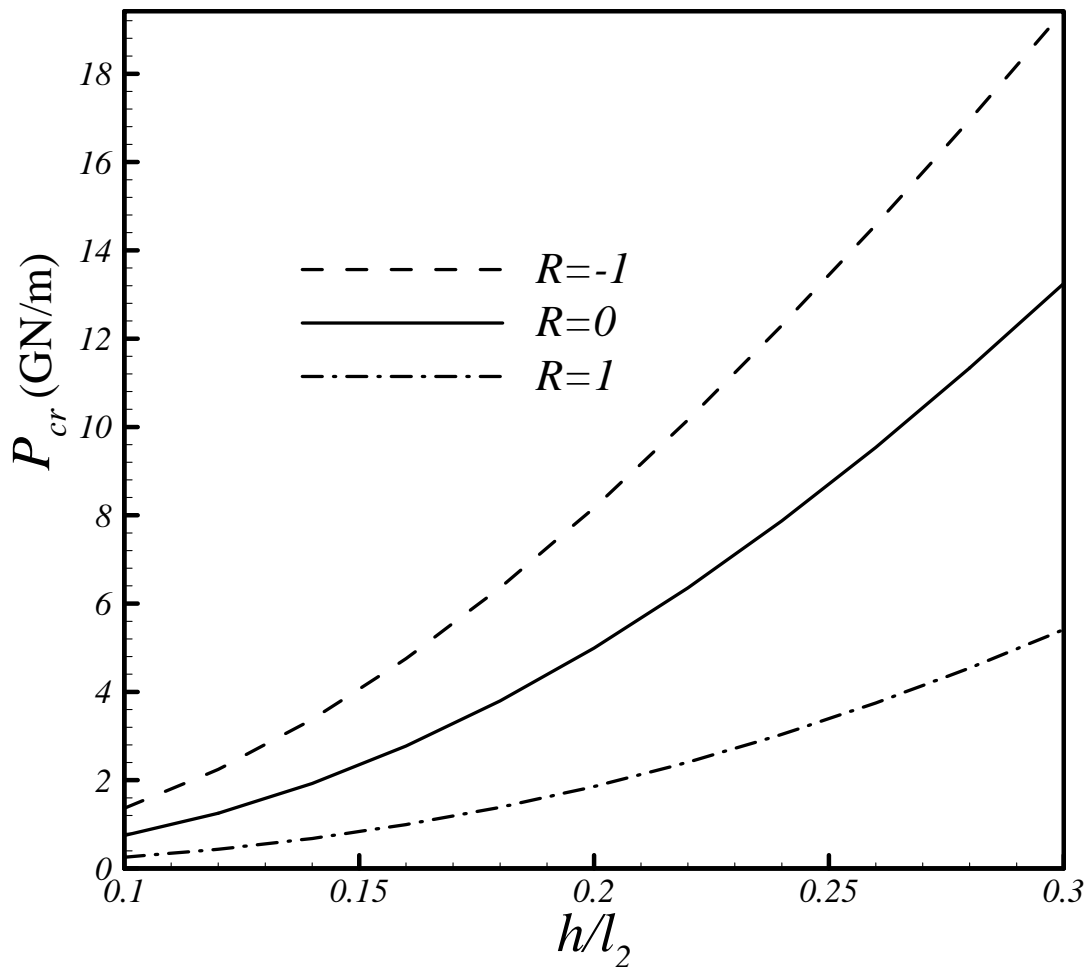
شکل ۳- تغییرات بار بحرانی کمانش بر حسب تغییرات نسبت منظری تحت انواع شرایط بارگذاری  
 $N = 0, h/l_2 = 0.1$

در شکل (۳)، اثر شرایط بارگذاری روی بار بحرانی کمانش نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، می‌توان چنین بیان کرد که با نسبت منظری مشابه، ورق تحت بار فشاری-کششی می‌تواند در مودهای بالاتری نسبت به شرایط دیگر بارگذاری کمانش کند. همچنین اگر ورق تحت بارگذاری دو محوره فشاری باشد، کمانش فقط در مود اول رخ می‌دهد.



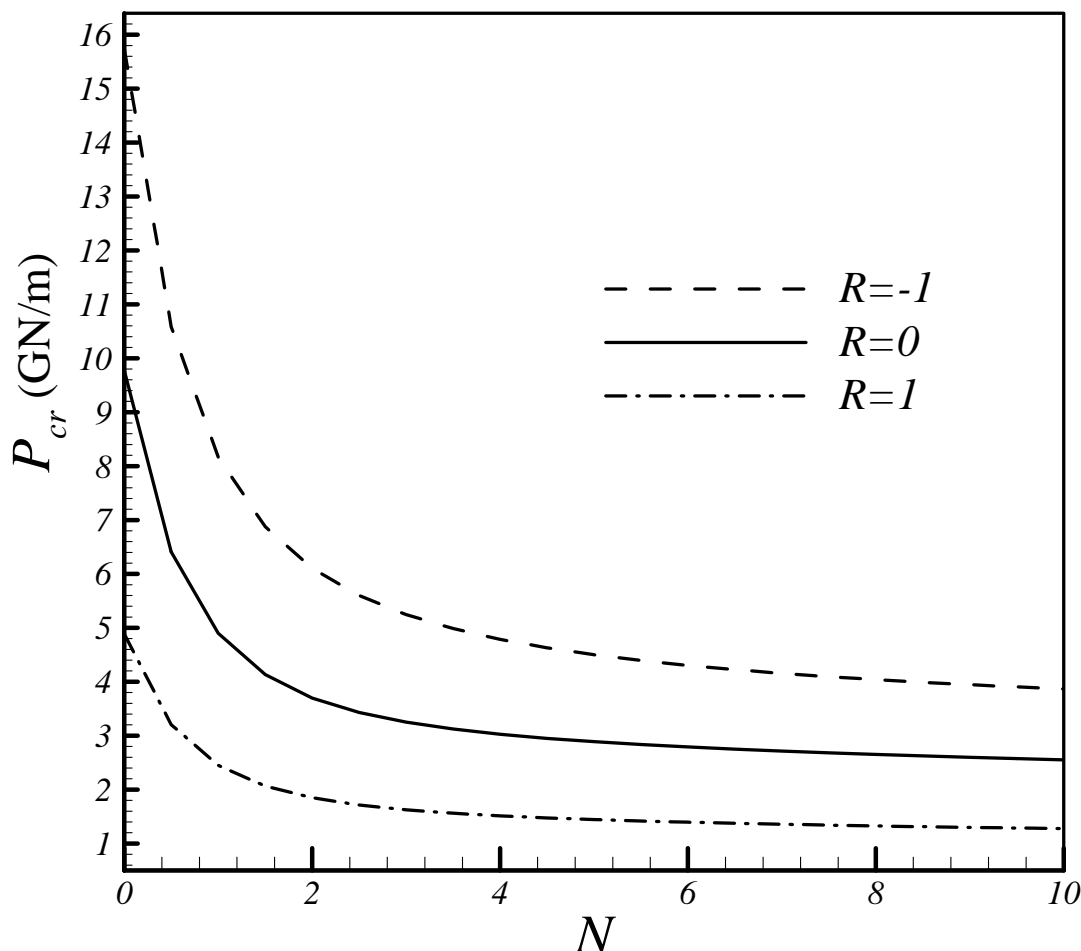
شکل ۴- تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب تغییرات نسبت ضخامت به عرض ورق برای اندیس‌های مختلف ماده هدفمند  
 $R = 0, l_1/l_2 = 1$

تغییرات بار بحرانی کمانش در اثر تغییرات ضخامت به عرض ورق برای اندیس‌های مختلف ماده هدفمند در شکل (۴) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۴) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت ضخامت به عرض ورق در یک نسبت منظری ثابت، مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. تغییرات بار بحرانی کمانش برای اندیس‌های کوچک‌تر ماده هدفمند خیلی بیشتر از تغییرات برای اندیس‌های بزرگ‌تر است.



**شکل ۵-** تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب تغییرات نسبت ضخامت به عرض ورق برای ماده هدفمند تحت انواع شرایط بارگذاری  $N = 1, l_1/l_2 = 1.5$

در شکل (۵)، تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب تغییرات ضخامت به عرض ورق برای انواع شرایط بارگذاری رسم شده است. شکل (۵) نشان می‌دهد که در یک نسبت ثابت ضخامت به عرض ورق، بیشترین مقدار بار بحرانی کمانش ورق مربوط به بارگذاری دو محوره‌ی فشاری-کششی است. کمترین مقدار بار بحرانی کمانش ورق مربوط به بارگذاری دو محوره‌ی فشاری است. مقدار بار بحرانی کمانش تحت بارگذاری تک محوره بین این دو بارگذاری قرار دارد.



شکل ۶- تغییرات بار بحرانی کمانش برحسب تغییرات اندیس‌های مختلف ماده هدفمند تحت انواع شرایط بارگذاری

$$l_1/l_2 = 1, h/l_2 = 0.2$$

شکل (۶)، نشان‌دهنده اثرات خواص ماده هدفمند روی بار بحرانی کمانش است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود برای همه انواع بارگذاری با افزایش اندیس ماده هدفمند مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد. زیرا با افزایش اندیس ماده هدفمند، سهم جزء فلز در مقابل جزء سرامیک افزایش یافته و از آن‌جاییکه فلزات نسبت به سرامیک‌ها نرم‌تر هستند، بار بحرانی کاهش می‌یابد.

#### ۴- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، کمانش ورق‌های مستطیلی ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل عمودی و برشی مورد مطالعه قرار گرفت. معادلات پایداری برای شرط مرزی چهار لبه تکیه‌گاه ساده حل شدند. در پایان با بررسی بار بحرانی کمانش بدست آمده می‌توان چنین نتیجه گرفت:



- ۱- تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی برای تحلیل کمانش ورق‌های ضخیم هدفمند مناسب است، زیرا در این تئوری هر دو اثر کرنش عمودی و برشی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مقدار بار بحرانی کمانش بدست آمده دقیق‌تر از تئوری‌های برشی مرتبه اول و سوم می‌باشد.
- ۲- در همه انواع بارگذاری بار بحرانی کمانش با افزایش نسبت ضخامت به عرض ورق در یک نسبت منطقی ثابت، افزایش می‌یابد.
- ۳- تغییرات بار بحرانی کمانش برای اندیس‌های کوچک‌تر ماده هدفمند خیلی بیشتر از تغییرات برای اندیس‌های بزرگ‌تر است.
- ۴- بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری تک محوره فشاری بیشتر از حالت بارگذاری دو محوره فشاری است و کمتر از حالت بارگذاری یک طرف فشاری و طرف دیگر کششی است.
- ۵- زمانی ورق در حالت بارگذاری تک محوره یا تحت بارگذاری یک طرف فشاری و طرف دیگر کششی قرار گیرد، با افزایش نسبت منطقی، کمانش در موده‌های بالاتری رخ می‌دهد.
- ۶- زمانی ورق تحت بارگذاری دو طرف فشاری قرار گیرد، کمانش فقط در مود اول رخ می‌دهد.
- ۷- در همه انواع بارگذاری‌ها با افزایش اندیس ماده هدفمند مقدار بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

## مراجع

- [1] Javaheri, R., and Eslami, M. R., "Buckling of Functionally Graded Rectangular Plates under in Plane Compressive Loading", ZAMM, Vol. 82, pp. 277-283, (2002).
- [2] Chen, X.L., and Liew, K.M., "Buckling of Rectangular Functionally Graded Materials Plates Subjected to Nonlinearly Distributed in Plane Edge Loads", Smart Materials and Structures, Vol. 13, pp. 1430-1437, (2004).
- [3] Shariat, B.A.S., and Eslami, M.R., "Buckling of Thick Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal Loads", Compos. Structures, Vol. 78, pp. 433-439, (2005).
- [4] Oyekoya, O.O., Mba, D.U., and El-Zafrany, A.M., "Buckling and Vibration Analysis of Functionally Graded Composite Structures using the Finite Element Method", Composite Structures, Vol. 89, pp. 134-142, (2009).
- [5] Mirzaeifar, R., Shahaba, S., and Bahai, H., "An Approximate Method for Simultaneous Modification of Natural Frequencies and Buckling Loads of Thin Rectangular Isotropic Plates", Engineering Structures, Vol. 31, pp. 208-215, (2009).
- [6] Saidi, A.R., Rasouli, A., and Sahraee, S., "Axisymmetric Bending and Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Circular Plates using Unconstrained Third-order Shear Deformation Plate Theory", Composite Structures, Vol. 89, pp.110-119, (2009).

- [7] Mohammadi, M., Saidi, A.R., and Jomehzadeh, E., "A Novel Analytical Approach for the Buckling Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Rectangular Plates with Two Simply-supported Opposite Edges", *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, (2010).
- [8] Mohammadi, M., Saidi, A.R., and Jomehzadeh, E., "Levy Solution for Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates", *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, (2010).
- [9] Bodaghi, M., and Saidi, A.R., "Levy-type Solution for Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on the Higher-order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, (2010).
- [10] Naderi, A., and Saidi, A.R., "On Pre-buckling Configuration of Functionally Graded Mindlin Rectangular Plates", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 535-538, (2010).
- [11] Batra, R.C., and Vidoli, S., "Higher-order Piezoelectric Plate Theory Derived from a Three-dimensional Variational Principle", *AIAA, Journal*, Vol. 40, pp. 91-104, (2002).
- [12] Batra, R.C., and Aimmanee, S., "Vibrations of Thick Isotropic Plates with Higher-order Shear and Normal Deformable Plate Theories", *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 934-955, (2005).
- [13] Batra, R.C., "Higher-order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates", *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, pp. 974-982, (2007).
- [14] Sheikholeslami, S.A., and Saidi, A.R., "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation using Higher-order Shear and Normal Deformable Plate Theory", *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 350-361, (2013).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$a, b$ : مرتبه‌ی چند جمله‌های لژاندر

$C$ : ثابت الاستیسیته بر حسب پاسکال

$c$ : مرتبه‌ی چند جمله‌های لژاندر

$ce$ : سرامیک

$D$ : ماتریس ضرایب مشتق چند جمله‌ای‌های لژاندر

$d$ : مرتبه‌ی چند جمله‌های لژاندر

$E$ : مدول الاستیسیته بر حسب پاسکال

$h$ : ضخامت ورق بر حسب متر

$\hat{i}, \hat{j}$ : راستای محورهای مختصات

- $k$ : مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی و عمودی
- $L$ : چند جمله‌ای‌های لژاندر
- $l_1, l_2$ : طول و عرض ورق برحسب متر
- $M_{ij}$ : منتجه‌های تنش برحسب نیوتن بر متر
- $\bar{M}_{ij}$ : منتجه‌های تنش در حالت تعادل برحسب نیوتن بر متر
- $\tilde{M}_{ij}$ : منتجه‌های تنش در حالت همسایگی تعادل برحسب نیوتن بر متر
- $m$ : فلز
- $N$ : اندیس ماده هدفمند
- $P$ : چند جمله‌ای‌های لژاندر
- $P_1, P_2$ : بارهای درون صفحه‌ای برحسب نیوتن بر متر
- $R$ : پارامتر بار
- $u_1, u_2, u_3$ : مؤلفه‌های میدان جابجایی برحسب متر
- $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ : مؤلفه‌های میدان جابجایی در تعادل برحسب متر
- $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ : مؤلفه‌های میدان جابجایی در همسایگی تعادل برحسب متر
- $\tilde{u}_1^{cmn}, \tilde{u}_2^{cmn}, \tilde{u}_3^{cmn}$ : مؤلفه‌های ثابت میدان جابجایی در همسایگی تعادل برحسب متر
- $x, y$ : مختصات مکان درون صفحه‌ای برحسب متر
- $z$ : مختصه مکان در جهت ضخامت برحسب متر

### نمادهای یونانی

- $\delta_{ab}$ : تابع دلتای کرونکر
- $\varepsilon$ : مؤلفه‌های غیرخطی کرنش
- $\nu$ : ضریب پواسون
- $\sigma$ : تنش برحسب پاسکال
- $\bar{\sigma}$ : تنش در حالت تعادل برحسب پاسکال

**Abstract**

In this paper, buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates is investigated based on the higher-order shear and normal deformable plate theory. According to this theory, all three displacement components are expanded by Legendre function of thickness direction. Stability equations are obtained using the principle of minimum total potential energy and the adjacent equilibrium criterion. Finally the stability equations are solved analytically for a plate with all edges simply supported using Navier solution and the critical buckling load is obtained. Comparing the results shows a good accuracy of the presented solution. Consequently, the effects of loading conditions, aspect ratio, thickness and material properties on the critical buckling load are investigated in detail.