

## تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق چندلایه مرکب با استفاده از دو روش تحلیلی تقریبی

در این مقاله با استفاده از دو روش تحلیلی تقریبی، به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های چندلایه مرکب پرداخته شده است. با توجه به لزوم بررسی اثر پارامترهای مختلف بر روی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مرکب و یافتن یک حل تحلیلی تقریبی، ابتدا با در نظر گرفتن جملات غیرخطی در روابط کرنش - جابجایی ون کارمن، به مدل‌سازی یک ورق مرکب پرداخته شده است؛ سپس معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت غیرخطی استخراج شده و این معادله به یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی کاهش داده می‌شود. از آنجاییکه روش تحلیلی تقریبی هموتوبی یکی از روش‌های کارآمد جهت حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد و دارای دقت بسیار بالایی است و روش دامنه فرکانس هم نیز در عین سادگی، دقت بسیار خوبی را دارد، لذا به منظور دست‌یابی به یک جواب تحلیلی تقریبی قابل قبول، از این روش‌ها استفاده گردیده است. نتایج نشان می‌دهند که این روش‌ها، حل‌های بسته با دقت بالایی را برای مسائل غیرخطی ارائه می‌نمایند. در پایان، اثر پارامترهای مختلف از جمله نسبت منطری، لایه‌چینی‌ها و نسبت مدول‌ها بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی ورق‌های ایزوتروپ و مرکب مورد بررسی قرار گرفته است.

امیر لطف‌آور<sup>۱</sup>

استادیار

حسین رفیعی‌پور<sup>۲</sup>

دانشجوی دکترا

صغری حمزه شلمزاری<sup>۳</sup>

کارشناسی ارشد

طاهره محمدی<sup>۴</sup>

کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما : ارتعاشات غیرخطی، ورق چندلایه کامپوزیتی، تئوری کلاسیک، روش تحلیلی هموتوبی، روش دامنه - فرکانس همی

### ۱- مقدمه

اکثر پدیده‌ها در جهان اطراف ما و به‌ویژه مسائل دینامیکی از جمله ارتعاشات، ذاتاً غیرخطی بوده و بوسیله معادلات غیرخطی تعریف می‌شوند. گرچه معمولاً می‌توان مسائل غیرخطی را با فرض رفتار خطی حول شرایط کاری حل کرد، ولی همیشه این کار توجیه‌پذیر نیست. گاهی در سیستم‌های غیرخطی، رفتارهایی

مشاهده می‌شود که امکان وقوع آنها در سیستم‌های خطی وجود ندارد. از سوی دیگر امروزه با پیشرفت‌های حاصل شده در حوزه‌های مختلف مهندسی، دقت بالاتر نتایج مورد توجه جوامع علمی قرار گرفته است. با استناد به همین دلایل، بررسی مسائل غیرخطی به یکی از مهمترین چالش‌های مهندسی، فیزیک و دیگر علوم تبدیل شده است. هر چند به دلیل ظهور کامپیوترهای سطح بالا، تولید و حل مسایل خطی بسیار آسان می‌نماید و برای حل بسیاری از مسائل خطی مرتبط با مهندسی مکانیک، نرم افزارهای عددی مختلفی وجود دارد که به کمک آنها می‌توان سیستم‌های خاصی را مدل نموده و در نهایت به حل عددی آنها پرداخت، اما در حالت کلی یافتن جواب دقیق برای مسایل غیرخطی قدری مشکل و گاهی غیرممکن خواهد بود. مساله پیچیده‌تر این است که نتایج غیرخطی را بتوان به نحوی استخراج نمود که امکان بررسی اثر پارامترهای مختلف مساله امکان‌پذیر باشد. از آنجایی که حل تحلیلی معادلات غیرخطی، بسیار مشکل و در مواردی غیرممکن می‌باشد، در دهه اخیر توجه زیادی به روش‌های حل تحلیلی - تقریبی در تحلیل سیستم‌های مهندسی [۱،۲] و به ویژه ارتعاشات [۳،۴،۵] شده است. روش اختلالات<sup>۱</sup> یکی از این روش‌های معروف برای حل مسائل غیرخطی است که بر مبنای وجود پارامترهای کوچک موسوم به اندازه اختلال<sup>۲</sup> در معادله استوار می‌باشد. از آنجایی که بسیاری از معادلات غیرخطی شامل اندازه اختلال نیستند، برای حل آنها روش‌های جدیدتری پدیدار شده‌اند که از آن جمله می‌توان روش توازن انرژی<sup>۳</sup>، روش ماکزیمم - مینیمم<sup>۴</sup>، روش اختلالات هموتوپی<sup>۵</sup>، روش توازن هارمونیک<sup>۶</sup>، روش تحلیلی هموتوپی<sup>۷</sup>، روش تغییراتی هی<sup>۸</sup>، روش دامنه فرکانس هی<sup>۹</sup>، روش تکرار تغییراتی هی<sup>۱۰</sup>، روش پارامتر توسعه‌یافته<sup>۱۱</sup> و روش بهینه شده لیندستت پوانکاره<sup>۱۲</sup> را نام برد.

بنابر آنچه گفته شد، برای رسیدن به دقت بالاتر در حوزه تحلیل ارتعاشات تیرها و ورق‌ها که ترم‌های غیرخطی نیز در معادلات دینامیکی آنها لحاظ شده است، از روش‌های تحلیلی - تقریبی استفاده خواهد شد. البته این روش‌ها به حل دقیق منتج نمی‌شوند ولی حل‌هایی با دقت بالا را ارائه می‌دهند و اجازه مطالعه اثر پارامترهای مختلف بر روی مساله را میسر می‌سازند.

بررسی مشخصات ارتعاشاتی ورق‌های ایزوتروپ و کامپوزیت از سال‌های بسیار دور مورد توجه پژوهشگران و محققین بوده است [۶،۷]. در مورد ارتعاشات خطی ورق‌ها، حل معادله حاکمه برای به‌دست آوردن فرکانس و شکل مد به مساله مقدار ویژه منتهی می‌شود [۸] و این در حالی است که برای ارتعاشات غیرخطی ورق‌ها، معادله حاکمه به‌صورت پیچیده‌ای تغییر می‌یابد [۹] و به‌دست آوردن حلی دقیق برای آن بسیار مشکل

<sup>1</sup> perturbation method (PM)

<sup>2</sup> perturbation quantity

<sup>3</sup> energy balance method (EBM)

<sup>4</sup> max-min approach (MMA)

<sup>5</sup> homotopy perturbation method (HPM)

<sup>6</sup> harmonic balance method (HBM)

<sup>7</sup> homotopy analysis method (HAM)

<sup>8</sup> he's variational approach (HVA)

<sup>9</sup> he's frequency amplitude formulation (HFA)

<sup>10</sup> variational iteration method (VIM)

<sup>11</sup> parameter-expansion method (PEM)

<sup>12</sup> modified lindstedt-poincare method (MLPM)

می‌شود. اولین مطالعه ارتعاشات با دامنه بزرگ ورق‌های ایزوتروپ با تکیه‌گاه ساده توسط چو و هرمان [۱۰] گزارش شده است. آنها معادلات دیفرانسیلی مربوط به معادله حرکت غیرخطی ورق را با استفاده از روش تابع بیضوی کلاسیک<sup>۱</sup> حل نمودند. بعد از آنها این معادلات به دفعات با روش‌های مختلفی همچون استفاده از تابع بیضوی [۱۱]، تئوری اختلالات<sup>۲</sup> [۱۲]، انتگرال‌گیری رانج کوتا [۱۳]، روش ریلی ریتز<sup>۳</sup> [۱۴] و گالرکین [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت.

سینگ و همکارانش [۱۶] در سال (۱۹۹۰) با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی مستقیم به بررسی ارتعاشات غیرخطی لمینیت کامپوزیتی متقاطع مستطیلی پرداختند. آنها با استفاده از فرضیات کیرشپف و به‌کار بردن روابط کرنش - جابجایی ون‌کارمن، معادلات حاکم را به‌دست آوردند. همچنین با فرض پایستاری انرژی، فرضیات نوسانگر تعادلی را به‌کار بردند و برای چیدمان‌های مختلف ورق‌های متقاطع، ارتعاشات با دامنه بزرگ را بررسی نمودند.

در سال (۱۹۹۶) شیخ و موخوپادهیای [۱۷] روش نوار محدود<sup>۴</sup> را برای بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق‌ها به‌کار گرفتند. پس از آنها نیز محققان زیادی از روش‌های مختلف المان محدود استفاده نمودند [۱۸، ۱۹]. باید توجه داشت که منبع اصلی ایجاد خطا در روش‌های المان محدود، نحوه استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی آنها می‌باشد.

سینگا و گاناپاتهی [۲۰] در سال (۲۰۰۴) ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی متقارن نازک را به کمک روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. آنها اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی و اینرسی داخل صفحه را نیز در فرمول‌بندی خود لحاظ نمودند. در این بررسی ماتریس‌های غیرخطی به‌دست آمده از معادلات لاگرانژ به‌وسیله تکنیک تکرار مستقیم حل شده است و تغییرات نسبت فرکانسی با دامنه، با لحاظ کردن اثر پارامترهای مختلف مثل جهت الیاف و شرایط مرزی نشان داده شده است.

ملکزاده و کرمی [۲۱] در سال (۲۰۰۶) ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر<sup>۵</sup> حل کردند. در این مطالعه اثر پارامترهای مختلف نظیر تکیه‌گاه‌ها، نسبت ضخامت به طول و نسبت منظری بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده حاکی از کارآمدی و سریع بودن روش دیفرانسیل کوادریچر برای به‌دست آوردن فرکانس غیرخطی صفحات می‌باشد. همچنین ملکزاده [۲۲] در سال (۲۰۰۸) با به‌کار بردن فرضیات ون‌کارمن برای ورق‌های نازک با تکیه‌گاه‌های مختلف، اثر پارامترهای مختلف در کاهش یا افزایش نسبت فرکانسی را بررسی نمود و با مقایسه این روش با دیگر روش‌های عددی، دقت بالای این روش را نشان داد.

لال [۲۳] در سال (۲۰۰۹) ارتعاشات غیرخطی ورق کامپوزیتی که بر روی بستر الاستیک قرار گرفته را مورد بررسی قرار داد. او از روش عددی المان محدود و تئوری برشی مرتبه بالا بهره گرفته و برای حل معادلات از روش تکرار مستقیم و روش اغتشاشات استفاده نموده است.

<sup>1</sup> classical elliptic function approach

<sup>2</sup> perturbation theory

<sup>3</sup> rayleigh-ritz method

<sup>4</sup> finite strip method

<sup>5</sup> differential quadrature method

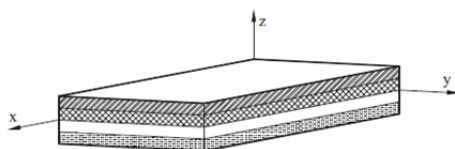
کومار داش [۲۴] در سال (۲۰۱۰) به بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی با استفاده از روش المان محدود پرداخته است. او با به کار بردن تئوری برشی مرتبه اول و به کمک کد المان محدودی که بر اساس کرنش‌های غیرخطی ون کارمن نوشته شده است، ارتعاشات دامنه بزرگ را بررسی نمود.

با بررسی مراجع مختلف مشاهده می‌شود که برای فرکانس غیرخطی یک ورق ایزوتروپ و یا کامپوزیتی با تکیه‌گاه‌های ساده، نتایج متفاوتی توسط پژوهشگران مختلف گزارش شده است، به طوری که برای یک ورق مربعی ایزوتروپ نازک و برای دامنه بی‌بعد شده یک، از کمترین مقدار ۱.۲۹۶۷ [۲۵] تا بیشترین مقدار ۱.۶۲۶ [۱۵]، نتایجی به ثبت رسیده است.

با توجه به لزوم بررسی ارتعاشات غیرخطی و اثر پارامترهای مختلف بر روی آن و یافتن یک حل تحلیلی تقریبی، در این مقاله سعی شده است تا با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی در روابط کرنش - جابجایی به مدل‌سازی یک ورق کامپوزیتی پرداخته شود. سپس معادله حاکمه به یک فرم استاندارد تبدیل شده و با استفاده از دو روش تحلیلی تقریبی، به حل آنها پرداخته شود تا بدین طریق اثر پارامترهای مختلف بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی بررسی گردد.

## ۲- فرمول‌بندی

یک ورق نازک کامپوزیتی به طول  $a$  در جهت  $x$ ، عرض  $b$  در جهت  $y$  و ضخامت  $h$  در جهت  $z$  که شامل  $n$  لایه ارتوتروپ می‌باشد در نظر گرفته شده است. این ورق از هر چهار طرف دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد. دستگاه مختصات کارتزین به گونه‌ای بر روی آن نصب شده است که صفحه  $xy$  بر روی صفحه میانی قرار گرفته است، محور  $z$  عمود بر این صفحه می‌باشد و مبدا مختصات در گوشه این صفحه فرض شده است. شکل (۱) فرضیات فوق را نشان می‌دهد.



شکل ۱- شماتیک یک ورق کامپوزیتی و دستگاه کارتزین متصل به آن

همچنین فرض می‌شود که همه لایه‌های ارتوتروپ کاملاً به هم متصل شده‌اند و هیچ‌گونه لغزشی بین آن‌ها وجود ندارد. اگر  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب جابجایی‌های یک نقطه دلخواه از ورق در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  باشند،  $u_0(x, y)$  و  $v_0(x, y)$ ، جابجایی‌های نقطه متناظر با همان نقطه بر روی صفحه میانی می‌باشند. همچنین  $\varepsilon^0$  کرنش صفحه میانی و  $\kappa$  انحنای صفحه میانی می‌باشند، در این صورت کرنش مکانیکی متناظر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

با به کار بردن فرضیات جابجایی بزرگ ون کارمن، روابط کرنش - جابجایی داخل صفحه و یا صفحه میانی و همچنین روابط مربوط به انحناهای صفحه به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات، روابط تنش - کرنش برای هر لایه را می توان به شکل زیر نشان داد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k \quad (4)$$

که در آن اعداد ۱، ۲، ۶ به ترتیب نشان دهنده تانسورهای در جهات  $xy, yy, xx$  دستگاه مختصات متصل به هر لایه می باشند. همچنین  $(Q_{ij})_k$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) ضرایب ماتریس سختی کاهش یافته مرتبط با لایه  $k$  ام می باشند و بر حسب ثابت های مهندسی هر لایه به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (5)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

از آنجا که این صفحات از چندین لایه ارتوتروپ با جهات اصلی دلخواه نسبت به مختصات مرجع ساخته شده اند، معادلات متشکله مربوط به هر لایه باید به مختصات مرجع انتقال یابد. بدین ترتیب روابط تنش - کرنش هر لایه در مختصات مرجع به صورت زیر می باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (6)$$

که  $(Q_{ij})_k$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) مولفه‌های ماتریس سختی دوران یافته می‌باشند. برای به دست آوردن معادله متشکله که ارتباط بین کرنش‌ها را با منته‌های نیرو و تنش به وجود می‌آورد، با انتگرال‌گیری بر روی ضخامت در معادله (۶) روابط آشنای زیر حاصل می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در آن  $A_{ij}$  سختی کششی،  $B_{ij}$  سختی کششی - خمشی و  $D_{ij}$  سختی خمشی نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (9)$$

سپس برای به دست آوردن معادله حرکت، از اصل همیلتون استفاده می‌شود. در نتیجه داریم:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt \quad (10)$$

که در آن  $U$  ناشی از انرژی کرنشی ورق و  $T$  نشان‌دهنده انرژی جنبشی ورق می‌باشد که در آن انرژی پتانسیل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dz dx dy \quad (11)$$

از آنجا که ارتعاشات عرضی مورد نظر بوده و با صرف نظر کردن از اینرسی‌های داخل صفحه، انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (\sum \rho_i h_i) \dot{w}^2 dx dy \quad (12)$$

با جایگزینی انرژی‌های فوق در معادله (۱۰) که مربوط به اصل همیلتون می‌باشد و انتگرال‌گیری بر روی ضخامت، معادلاتی بر حسب منته‌های نیرو و تنش حاصل خواهند شد. سپس با انتگرال‌گیری جزیه‌جز بر روی معادلات و قرار دادن ضرایب  $\delta u_0$ ،  $\delta v_0$  و  $\delta w_0$  برابر با صفر، معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (13)$$

با فرض تکیه‌گاه ساده بدون جابجایی، مجموعه توابع زیر برای معادلات جابجایی در نظر گرفته می‌شوند که شرایط مرزی را نیز ارضا می‌کنند:

$$\begin{aligned} u_0 &= U(t) \sin \frac{2m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v_0 &= V(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{2n\pi y}{b} \\ w_0 &= W(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن  $U(t)$ ،  $V(t)$  و  $W(t)$  به ترتیب ماکزیمم جابجایی مرکز ورق در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند. با اعمال روش گالرکین در معادلات (۱۳)، از دو معادله اول توابع  $U(t)$  و  $V(t)$  برحسب  $W(t)$  به دست خواهند آمد. با جایگزینی این توابع در معادله سوم (۱۳)، معادله حاکمه که به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو می‌باشد، به دست می‌آید:

$$\frac{d^3 W(t)}{dt^3} + \alpha_1 W(t) + \alpha_2 W^2(t) + \alpha_3 W^3(t) = 0 \quad (15)$$

اگر  $W_{\max}$  ماکزیمم دامنه بی‌بعد نوسان در مرکز ورق باشد، شرایط اولیه نوسان در مرکز ورق را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$W(0) = W_{\max}, \quad \frac{dW(0)}{dt} = 0 \quad (16)$$

ضرایب  $\alpha_i$ ، تابعی از مولفه‌های ماتریس‌های سختی و مشخصات هندسی ورق می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_1 = \frac{\left( \frac{2T_1 T_2 T_5 - T_5^2 T_3 - T_1^2 T_6}{T_3 T_6 - T_2^2} + T_8 \right)}{\sum_{i=1}^N \rho_i h_i}$$

$$\alpha_2 = \frac{\left( \frac{3(T_2 T_4 T_5 + T_1 T_2 T_7 - T_3 T_5 T_7 - T_1 T_4 T_6)}{T_3 T_6 - T_2^2} + T_9 \right)}{\sum_{i=1}^N \rho_i h_i} \quad (17)$$

$$\alpha_3 = \frac{\left( \frac{4T_2 T_4 T_7 - 2T_7^2 T_3 - 2T_4^2 T_6}{T_3 T_6 - T_2^2} \right)}{\sum_{i=1}^N \rho_i h_i}$$

که ضرایب  $T_i$  در ضمیمه بیان شده است.

### ۳- روش دامنه - فرکانس هی

روش تحلیلی تقریبی دامنه - فرکانس هی یک روش بسیار ساده و مؤثر برای حل مسائل دیفرانسیل غیرخطی با مقدار اولیه می‌باشد. این روش که بر اساس یک روش ریاضی باستانی چینی به دست آمده، اولین بار توسط هی [۲۶] و در سال (۲۰۰۶) ارائه شده است. این فرمول‌بندی از یک روش مختصر برای ارائه رابطه بین فرکانس و دامنه یک سیستم غیرخطی استفاده می‌کند. در این روش معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u'' + f(u, u', u'') = 0 \quad (18)$$

که در آن  $f(u)$  یک تابع غیرخطی از  $u, u'$  و  $u''$  می‌باشد و لزومی به حضور ضریب پارامتر کوچک<sup>۱</sup> در ترم‌های غیرخطی نیست. لازم به ذکر است که عدم وجود ضریب پارامتر کوچک در جمله غیرخطی باعث می‌شود تا روش‌های کلاسیک اختلالات قادر به حل این معادله نباشند.

با در نظر گرفتن شرایط اولیه زیر برای سیستم موردنظر:

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (19)$$

بر اساس فرمول‌بندی هی، ابتدا دو تابع اولیه زیر، که شرایط اولیه مسأله یا همان معادله (۱۹) را ارضا می‌کنند، به عنوان جواب تقریبی لحاظ می‌گردند [۲۷]:

$$u_1(t) = A \cos t$$

$$u_2(t) = A \cos \omega t \quad (20)$$

که به ترتیب جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی زیر می‌باشند [۲۷]:

<sup>1</sup> small parameter



$$\begin{aligned} u'' + \omega_1^2 u &= 0, \quad \omega_1 = 1 \\ u'' + \omega_2^2 u &= 0, \quad \omega_2 = \omega \end{aligned} \quad (21)$$

با فرض اینکه  $\omega$  فرکانس ارتعاشات معادله غیرخطی موردنظر نیز باشد، بنابراین با جایگزینی رابطه (۲۰) به عنوان دو تابع تقریبی اولیه در معادله (۱۸)، باقیمانده‌های زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= -A \text{Cost} + f(u_1) \\ R_2(t) &= -A \omega^2 \text{Cos} \omega t + f(u_2) \end{aligned} \quad (22)$$

با به کارگیری روش دامنه - فرکانس می‌توان نوشت:

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 R_2(t_2) - \omega_2^2 R_1(t_1)}{R_2(t_2) - R_1(t_1)} \quad (23)$$

پیشنهادات متفاوتی برای انتخاب نقاط موقعیت<sup>۱</sup>  $t_2, t_1$  ارائه شده است. اولین بار  $t_1 = t_2 = 0$  پیشنهاد شد و سپس گنگ و کی [۲۸] نقاط زیر را پیشنهاد کردند:

$$t_1 = \frac{T_1}{N}, \quad t_2 = \frac{T_2}{N} \quad (24)$$

که در آن  $N$  یک عدد صحیح دلخواه بوده و معمولاً  $N = 12$  اختیار می‌شود [۲۹].  $T_1$  و  $T_2$  نیز دوره تناوب دو تابع  $u_1$  و  $u_2$  هستند.

اصلاحات دیگری نیز بر روی این روش صورت گرفت و در نهایت مقدار فرکانس غیرخطی سیستم در روش تعمیم‌یافته‌ی، به صورت زیر ارائه گردید:

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 \tilde{R}_2 - \omega_2^2 \tilde{R}_1}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} \quad (25)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/4} R_1(t) \text{Cos} \left( \frac{2\pi}{T_1} t \right) dt, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \\ \tilde{R}_2 &= \frac{4}{T_2} \int_0^{T_2/4} R_2(t) \text{Cos} \left( \frac{2\pi}{T_2} t \right) dt, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \end{aligned} \quad (26)$$

باید توجه داشت که تاکنون جهت افزایش دقت این روش، نتایج متعددی ارائه شده است [۳۰] و مسائل بسیار زیادی با این روش بررسی شده‌اند.

#### ۴- کاربرد روش دامنه - فرکانس هی برای حل ارتعاشات غیرخطی ورق چند لایه کامپوزیتی

همانطور که پیش از این گفته شد، با فرض دو تابع اولیه به صورت  $W_1(t) = A \text{Cos}(\omega_1 t)$  و  $W_2(t) = A \text{Cos}(\omega_2 t)$  که در آن  $\omega_1 = 1$  و  $\omega_2 = \omega$  بوده و فرکانس غیرخطی سیستم موردنظر می‌باشد و با جایگذاری  $W_1, W_2$  در معادله (۱۵)، به ترتیب دو باقیمانده زیر حاصل می‌آید:

<sup>1</sup> location points

$$R_1(t) = A \cos(t) (\alpha_1 - 1 + \alpha_2 A \cos(t) + \alpha_3 A^2 \cos^2(t)) \quad (27)$$

$$R_2(t) = A \cos(\omega t) (\alpha_1 - \omega^2 + \alpha_2 A \cos(\omega t) + \alpha_3 A^2 \cos^2(\omega t)) \quad (28)$$

اگر از معادلات بهبودیافته روش دامنه - فرکانس هی استفاده شود، می توان نوشت:

$$\tilde{R}_1 = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/4} R_1(t) \cos(t) dt = \frac{A \left( \sqrt{3} \alpha_1 - \sqrt{3} + \frac{3}{2} A \alpha_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} A^2 \alpha_3 \right)}{\pi} \quad (29)$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{4}{T_2} \int_0^{T_2/4} R_2(t) \cos(\omega t) dt = \frac{A \left( \sqrt{3} \alpha_1 - \sqrt{3} \omega^2 + \frac{3}{2} A \alpha_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} A^2 \alpha_3 \right)}{\pi}$$

حال با استفاده از رابطه زیر

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 \tilde{R}_2 - \omega_2^2 \tilde{R}_1}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} \quad (30)$$

و ساده سازی آن، فرکانس غیرخطی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega = \sqrt{\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} A \alpha_2 + \frac{3}{4} A^2 \alpha_3} \quad (31)$$

## ۵- روش تحلیلی تقریبی هموتوبی

از بین همه روش هایی که برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد، روش تحلیلی تقریبی هموتوبی یکی از بهترین و موثرترین روش ها است. با استفاده از این روش، مساله غیرخطی به تعداد نامحدودی مساله خطی تبدیل می شود. این فرایند توسط یک پارامتر دلخواه و محدود  $q$  که در بازه صفر تا یک قرار دارد، انجام می شود. به منظور معرفی مختصر این روش، مساله غیرخطی زیر در نظر گرفته می شود:

$$N[x(\tau)] = 0 \quad (32)$$

که در آن  $N$  یک عملگر غیرخطی کلی،  $\tau$  نشان دهنده زمان بی بعد و  $x$  یک تابع نامعلوم می باشد. معادله هموتوبی در حالت کلی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$H(\phi; q, h, h(\tau)) = (1-q)L[\phi(\tau; q) - x_0(\tau)] - qhh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \quad (33)$$

که در آن  $h$  یک پارامتر اختیاری غیر صفر،  $h(\tau)$  یک تابع اختیاری غیر صفر و  $L$  یک عملگر خطی اختیاری است. هنگامی که  $q$  از صفر تا یک افزایش می یابد،  $\phi(\tau; q)$  از یک تقریب اولیه به حل دقیق تغییر می کند. به عبارت دیگر  $\phi(\tau; q) = x_0(\tau)$ ، جواب معادله  $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$  به ازای  $q = 0$  می باشد و حل دقیق  $\phi(\tau; q) = x(\tau)$ ، جواب معادله  $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$  به ازای  $q = 1$  خواهد بود.

با در نظر گرفتن  $H(\phi; q, h, h(\tau)) = 0$ ، معادله تغییر شکل مرتبه صفرم به صورت زیر در می‌آید:

$$(1-q)L[\phi(\tau; q) - x_0(\tau)] = qhh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \quad (34)$$

که شرایط اولیه آن به شکل زیر می‌باشد:

$$\phi(\tau; q) = \text{const.}, \quad \frac{d\phi(\tau; q)}{d\tau} = 0 \quad (35)$$

بر اساس قضیه تیلور، توابع  $\phi(\tau; q)$  و  $\omega(q)$  را می‌توان به صورت یک سری توانی بر حسب  $q$  بسط داد:

$$\phi(\tau; q) = \phi(\tau; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad q^m = x_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(\tau) q^m \quad (36)$$

$$\omega(q) = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \omega(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad q^m = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m q^m$$

که  $x_m(\tau)$  و  $\omega_m$  مشتقات مرتبه  $m$  ام می‌باشند.

با دیفرانسیل‌گیری از معادله تغییر شکل مرتبه صفرم نسبت به پارامتر  $q$  و قرار دادن  $q = 0$ ، معادله تغییر شکل مرتبه اول بدست می‌آید که تقریب مرتبه اول  $x(t)$  را می‌دهد:

$$L[x_1(\tau)] = hh(\tau)N[\phi(\tau; q)] \Big|_{q=0} \quad (37)$$

$$x_1(0) = 0, \quad \frac{dx_1(0)}{d\tau} = 0$$

تقریب‌های مراتب بالاتر را می‌توان با استفاده از محاسبه معادله تغییر شکل مرتبه  $m$  ام بدست آورد. این عمل با  $m$  بار دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳۴) نسبت به پارامتر  $q$ ، به صورت زیر بدست می‌آید [۳۱].

$$L[v_m(\tau) - v_{m-1}(\tau)] = hh(\tau)R_m(\vec{v}_{m-1}, \vec{\omega}_{m-1}) \quad (38)$$

که پارامترهای آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_m(\vec{v}_{m-1}, \vec{\omega}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1} N[\phi(\tau; q), \omega(q)]}{dq^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (39)$$

$$\vec{v}_{m-1}(\tau) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$$

$$\vec{\omega}_{m-1}(\tau) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}\}$$

و شرایط اولیه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$v_m(0) = \dot{v}_m(0) = 0 \quad (40)$$

## ۶- کاربرد روش تحلیلی تقریبی همونوپیی برای حل ارتعاشات غیرخطی ورق چند لایه کامپوزیتی

ابتدا با تعریف یک پارامتر زمانی بی‌بعد جدید به صورت  $\tau = \omega t$ ، معادله (۱۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\omega^2 \frac{d^2 W(\tau)}{d\tau^2} + \alpha_1 W(\tau) + \alpha_2 W^2(\tau) + \alpha_3 W^3(\tau) = 0 \quad (41)$$

که در آن شرایط اولیه بصورت زیر می‌باشد:

$$W(0) = A, \quad \frac{dW(0)}{d\tau} = 0 \quad (42)$$

به منظور حل معادله (۴۱) با استفاده از روش تحلیلی تقریبی هموتویی، ابتدا باید یک جواب تقریبی حدس زده شود. از آنجا که ارتعاشات سیستم در نظر گرفته شده یک حرکت پریودیک است و با توجه به شرایط اولیه سیستم، حدس اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$W_0(\tau) = A \cos(\tau) \quad (43)$$

که در آن  $A = W_{\max}/r$  و برابر با ماکزیمم دامنه بی بعد است. بنابر آنچه پیش از این گفته شد، عملگر غیرخطی به صورت زیر تعریف می شود:

$$N[\phi(\tau; q), \omega(q)] = \omega(q)^2 \frac{d^2 \phi(\tau; q)}{d\tau^2} + \alpha_1 \phi(\tau; q) + \alpha_2 \phi^2(\tau; q) + \alpha_3 \phi^3(\tau; q) \quad (44)$$

و به منظور استفاده از روش تحلیلی تقریبی هموتویی، عملگر خطی اختیاری به صورت زیر در نظر گرفته خواهد شد:

$$L[\phi(\tau; q)] = \omega_0^2 \left[ \frac{\partial^2 \phi(\tau; q)}{\partial \tau^2} + \phi(\tau; q) \right] \quad (45)$$

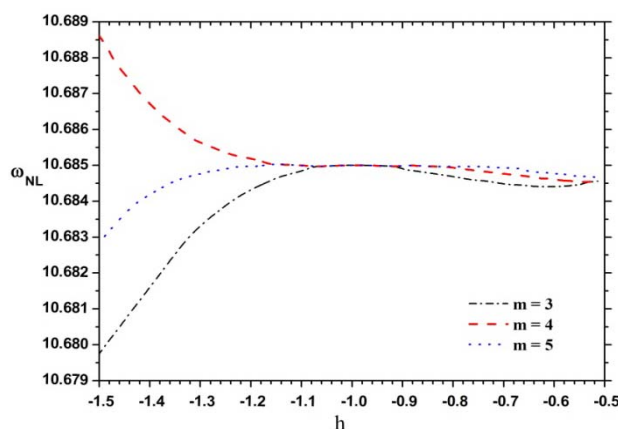
تابع اختیاری  $h(\tau)$  و پارامتر اختیاری  $h$  به ترتیب ناحیه و نرخ همگرایی حل تقریبی را تعیین می کنند. شکل (۲) تغییرات فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند را با تغییر در پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود، با محاسبه تقریب های مرتبه بالاتر، ناحیه همگرایی افزایش می یابد، ولی مشاهده می شود که حتی تقریب های مرتبه پایین نیز در یک ناحیه کوچک دقت قابل قبولی را نشان می دهند. به همین دلیل جهت استخراج همه نتایج، پارامترهای همگرایی به صورت  $h = -1$  و  $h(\tau) = 1$  لحاظ خواهد شد [۳۲].

با توجه به معادله (۳۷) و با در نظر گرفتن معادلات (۴۴) و (۴۵)، برای تقریب اول می توان نوشت:

$$\omega_0^2 \left[ \frac{\partial^2 W_1(\tau)}{\partial \tau^2} + W_1(\tau) \right] = \omega^2 \frac{d^2 W_0(\tau)}{d\tau^2} + \alpha_1 W_0(\tau) + \alpha_2 \phi^2 W_0^2(\tau) + \alpha_3 \phi^3 W_0^3(\tau) \quad (46)$$

که در آن شرایط اولیه بصورت زیر خواهد بود:

$$W_1(0) = 0, \quad \frac{dW_1(0)}{d\tau} = 0 \quad (47)$$



شکل ۲- بررسی اثر پارامتر مربوط به ناحیه همگرایی بر روی فرکانس غیرخطی یک تیر هدفمند

حال با قراردادن معادله (۴۳) در رابطه (۴۶)، می‌توان نوشت:

$$\omega_0^2 \left[ \frac{\partial^2 W_1(\tau)}{\partial \tau^2} + W_1(\tau) \right] = \left( \omega_0^2 - \alpha_1 - \frac{3}{4} \alpha_3 A^2 \right) A \cos(\tau) - \frac{1}{2} \alpha_2 A^2 \cos(2\tau) - \frac{\alpha_3}{4} W^3 \cos(3\tau) \quad (48)$$

سمت راست معادله (۴۸) شامل ترم‌هایی می‌باشد که باعث پیدایش جملات زمان‌رو در تابع  $V_1$  می‌شوند و باید آنها را حذف نمود. این مساله باعث پیدایش یک معادله جبری خواهد شد که حل آن تقریب مرتبه صفر فرکانس غیرخطی را نتیجه می‌دهد و از آنجا داریم:

$$\omega_0 = \omega_{Nonlinear_0} = \sqrt{\alpha_1 + \frac{3}{4} \alpha_2 A^2} \quad (49)$$

همچنین با حل معادله (۴۸) و اعمال نکته فوق، تقریب مرتبه اول تابع زمانی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$W(\tau) = W_0(\tau) + W_1(\tau) = \frac{1}{96\omega_0^2} \left( (96\omega_0^2 A - 3\alpha_3 A^3 + 32\alpha_2 A^2) \cos(\tau) + 16\alpha_2 A^2 \cos(2\tau) + 3\alpha_3 A^3 \cos(3\tau) - 48\alpha_2 A^2 \right) \quad (50)$$

به همین ترتیب با قرار دادن  $m$  برابر با ۲ در معادله (۳۸) و اجتناب از حضور جملات زمان‌رو، تقریبی از فرکانس غیرخطی  $\omega_1$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_1 = \omega_{Nonlinear_1} = -\frac{A}{384\omega_0^2} \left( 160\alpha_2^2 A - 64\alpha_1\alpha_2 + 9\alpha_3^2 A^3 + 64\omega_0^2\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_3 A - 144\alpha_2\alpha_3 A^2 \right) \quad (51)$$

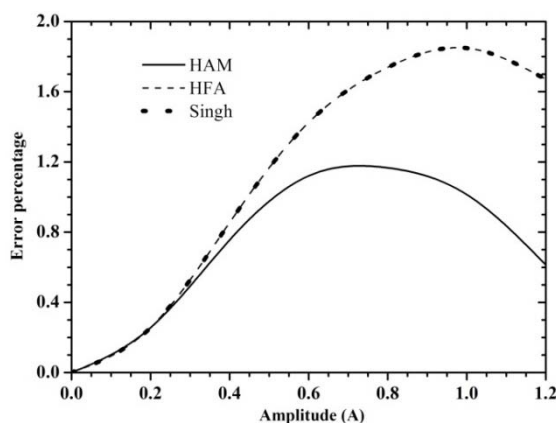
و با توجه به معادله (۳۶)، تقریب فرکانس غیرخطی مرتبه اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \quad (52)$$

## ۷- نتایج تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق کامپوزیتی

در این بخش ابتدا با مقایسه نتایج به دست آمده و تحقیقات انجام شده پیشین، صحت نتایج به دست آمده اثبات شده و پس از آن رفتار ارتعاشی ورق‌های ایزوتروپ و کامپوزیت بررسی می‌گردد.

با بررسی مراجع مختلف مشاهده می‌شود که برای فرکانس غیرخطی یک ورق ایزوتروپ و یا کامپوزیتی با تکیه‌گاه‌های ساده، نتایج متفاوتی توسط پژوهشگران مختلف گزارش شده است به طوری که برای یک ورق مربعی ایزوتروپ نازک و برای دامنه بی‌بعد شده یک، از کمترین مقدار  $1.2967$  [۲۵] تا بیشترین مقدار  $1.626$  [۱۵]، نتایجی به ثبت رسیده است. یکی از معتبرترین این نتایج مربوط به حل سینگا [۳۳] در سال  $2007$  می‌باشد که با استفاده از روش المان محدود به دست آمده است. از آنجایی که این حل برای ورق‌های مورب انجام شده است و نتایج مربوط به ورق‌های مربعی و مستطیلی آن بسیار کم می‌باشد، با جستجو در مراجع مختلف، مرجعی که هم مطابقت خوبی با این حل المان محدود داشته باشد و هم حالت‌های متفاوتی را مورد بررسی قرار داده باشد، یافته شد. [۱۶]



شکل ۳ - مقایسه خطای روش‌های مختلف با نتایج به دست آمده از روش المان محدود

برای یک ورق کامپوزیتی مربعی متقارن پنج لایه

به منظور انجام مقایسه بهتر بین روش‌های فوق، حل المان محدود به عنوان مرجع انتخاب شده و دقت دو روش دیگر در مقایسه با آن سنجیده می‌شود. شکل (۳) درصد خطای هر یک از این روش‌ها را نسبت به حل المان محدود نشان می‌دهد.

همانطور که از جدول (۱) مشاهده می‌شود، در مقایسه همه این روش‌ها با روش المان محدود، نتایج به دست آمده از روش دامنه فرکانس‌ها تقریباً برابر با نتایج سینگ [۱۶] و روش تحلیلی تقریبی هموتوپی به مراتب دارای دقت بالاتری می‌باشد، اما به دلیل آنکه نتایج ارائه شده توسط سینگ گسترده‌تری فراوانی دارد، از آن به عنوان یک مرجع برای مقایسه‌های بعدی استفاده می‌شود. در ادامه نشان داده خواهد شد که برای کل بازه جواب، استفاده از دو روش ارائه شده، منجر به جواب‌هایی با دقت بالا می‌شود. همچنین اثر نسبت منظری، لایه‌چینی‌ها، نسبت مدول‌ها و تعداد لایه‌ها بر روی نسبت فرکانسی ورق‌های ایزوتروپ و کامپوزیت بررسی خواهد شد.

جدول ۱- مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقارن مربعی ۵ لایه

W/h	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$			
	HFA	HAM	Singh [16] (PM)	Singha [33] (FEM) <sup>1</sup>
0.2	1.033	1.0329	1.0329	1.030264
0.4	1.1262	1.1251	1.1262	1.116664
0.6	1.2664	1.2626	1.2664	1.248613
0.8	1.4399	1.4318	1.4399	1.415289
1	1.6361	1.6227	1.6361	1.606408
1.2	1.8479	1.8287	1.8479	1.817537

جدول (۲) مقایسه‌ای را برای نسبت فرکانسی ورق مربعی و مستطیلی ایزوتروپ نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود، روش‌های حل ارائه شده دارای تطابق بسیار بالایی با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۶] می‌باشند.

<sup>1</sup> finite element method

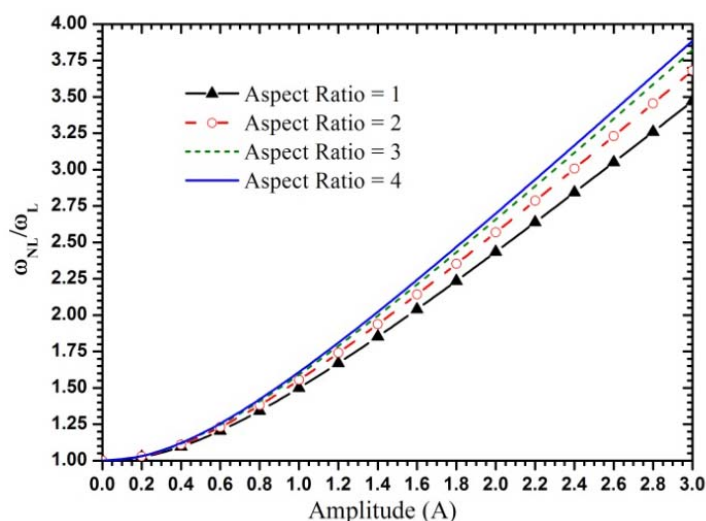
باید توجه داشت که ضریب جمله مرتبه دوم جابجایی  $\alpha_2$  در معادله ۱۵، به دلیل تقارن ورق‌های مربعی، برابر با صفر می‌شود.

**جدول ۲-** مقایسه نسبت ارتعاش غیرخطی به خطی برای ورق ایزوتروپ مربعی و مستطیلی

( $\nu=0.3$ )

$W/h$	$(a/b=1)$			$(a/b=2)$		
	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]
0.2	1.0252	1.0252	1.0208	1.0286	1.0285	1.0254
0.4	1.0973	1.0967	1.0809	1.1099	1.1091	1.0982
0.6	1.2081	1.2056	1.1743	1.2336	1.2306	1.2097
0.8	1.3478	1.3422	1.2937	1.3884	1.3818	1.3505
1	1.5087	1.4988	1.4327	1.5651	1.5537	1.5124
1.2	1.6845	1.6698	---	1.7571	1.7404	---
1.4	1.8711	1.8512	1.7503	1.9599	1.9376	1.8770
1.6	2.0656	2.0404	---	2.1705	2.1425	---
1.8	2.2659	2.2353	---	2.3868	2.3530	---
2	2.4707	2.4347	2.2828	2.6074	2.5679	2.4798

در هر دو مورد ورق‌های مربعی و مستطیلی مشاهده می‌شود که آثار غیرخطی‌گری با افزایش دامنه فرکانس، افزایش یافته و برای ورق مستطیلی این اثر شدیدتر می‌باشد. یعنی با افزایش نسبت منظری، نسبت فرکانسی افزایش می‌یابد. به منظور نشان دادن بهتر این موضوع، در شکل (۴) با استفاده از روش تحلیلی تقریبی هموتوپی، اثر نسبت منظری مورد بررسی قرار گرفته است.



**شکل ۴-** اثر نسبت منظری بر روی نسبت فرکانسی ورق ایزوتروپ

جدول (۳) نسبت فرکانسی را به ازای تغییرات دامنه و برای یک ورق مربعی کامپوزیتی با چیدمان متقاطع متقارن و پادمتقارن نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که هر دو آرایش متقارن ارائه شده در این جدول دارای نسبت‌های فرکانسی یکسانی می‌باشند.

**جدول ۳-** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مربعی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]
0.25	1.0577	1.0575	1.0634	1.0511	1.0509	1.0535	1.0511	1.0509	1.0535
0.5	1.2146	1.2120	1.2388	1.1913	1.1891	1.2038	1.1913	1.1891	1.2038
0.75	1.4386	1.4305	1.4832	1.3940	1.3872	1.4172	1.3940	1.3872	1.4172
1	1.7033	1.6881	1.7679	1.6361	1.6227	1.6691	1.6361	1.6227	1.6691
1.25	1.9927	1.9694	---	1.9027	1.8819	---	1.9027	1.8819	---
1.5	2.2974	2.2659	2.4000	2.1847	2.1563	2.2355	2.1847	2.1563	2.2355
1.75	2.6120	2.5724	---	2.4770	2.4408	---	2.4770	2.4408	---
2	2.9334	2.8857	3.0729	2.7763	2.7325	2.8439	2.7763	2.7325	2.8439

نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی ورق مستطیلی با نسبت منظری دو و با آرایش های مختلف در جدول (۴) آورده شده است. در جدول (۵)، نسبت فرکانسی برای یک ورق مستطیلی ارائه شده است، با این تفاوت که در این حالت نسبت منظری برابر با چهار می باشد.

**جدول ۴-** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مستطیلی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, a/b = 2)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]
0.25	1.1337	1.0522	1.0645	1.1308	1.1297	1.1327	1.0323	1.0322	1.0340
0.5	1.3462	1.2156	1.2427	1.4543	1.4458	1.4674	1.1236	1.1226	1.1331
0.75	1.6063	1.4600	1.4905	1.8730	1.8531	1.8946	1.2612	1.2576	1.2798
1	1.8947	1.7463	1.7787	2.3365	2.3040	2.3652	1.4318	1.4239	1.4593
1.25	2.2003	2.0531	---	2.8227	2.7777	---	1.6250	1.6119	---
1.5	2.5167	2.3703	2.4178	3.3216	3.2644	3.3634	1.8337	1.8148	1.8777
1.75	2.8405	2.6935	---	3.8284	3.7591	---	2.0532	2.0283	---
2	3.1692	3.0205	3.0976	4.3402	4.2591	4.3949	2.2803	2.2493	2.3396

**جدول ۵-** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مستطیلی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, a/b = 4)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]	HFA	HAM	Ref [16]
0.25	1.1444	1.0499	1.0653	1.1674	1.1657	1.1707	1.0310	1.0309	1.0326
0.5	1.3652	1.2129	1.2454	1.5658	1.5544	1.5838	1.1187	1.1178	1.1275
0.75	1.6314	1.4607	1.4956	2.0655	2.0403	2.0951	1.2514	1.2480	1.2688
1	1.9245	1.7522	1.7863	2.6090	2.5694	2.6489	1.4164	1.4089	1.4423
1.25	2.2337	2.0641	---	3.1738	3.1202	---	1.6037	1.5913	---
1.5	2.5534	2.3861	2.4303	3.7504	3.6830	3.8099	1.8066	1.7885	1.8479
1.75	2.880	2.7136	---	4.3340	4.2531	---	2.0201	1.9962	---
2	3.2114	3.0444	3.1148	4.9222	4.8279	5.0011	2.2415	2.2115	2.2971



با توجه به آنچه در جداول فوق ارائه شده است، مشاهده می‌شود که برای ورق‌های متقاطع پادمتقارن، با افزایش نسبت منطری و نسبت مدول، نسبت فرکانسی افزایش می‌یابد. در جداول (۶) تا (۸) همه نتایج ارائه شده در سه جدول فوق و برای نسبت مدول متفاوت آورده شده است. با توجه به جداول ذکر شده، مشاهده می‌شود که با انتقال لایه‌های با زاویه ۹۰ درجه به فاصله دورتر از محور میانی، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی کاهش می‌یابد.

**جدول ۶ -** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مربعی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 10, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref
	[16]			[16]			[16]		
0.25	1.0520	1.0518	1.0556	1.0480	1.0478	1.0498	1.0480	1.0478	1.0498
0.5	1.1946	1.1924	1.2113	1.1803	1.1783	1.1907	1.1803	1.1783	1.1907
0.75	1.4004	1.3933	1.4315	1.3727	1.3664	1.3922	1.3727	1.3664	1.3922
1	1.6457	1.6321	1.6906	1.6038	1.5913	1.6314	1.6038	1.5913	1.6314
1.25	1.9155	1.8944	---	1.8591	1.8396	---	1.8591	1.8396	---
1.5	2.2008	2.1720	2.2715	2.1301	2.1031	2.1722	2.1301	2.1031	2.1722
1.75	2.4964	2.4597	---	2.4114	2.3769	---	2.4114	2.3769	---
2	2.7988	2.7545	2.8941	2.6998	2.6578	2.7553	2.6998	2.6578	2.7553

**جدول ۷ -** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مستطیلی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 10, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, a/b = 2)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref
	[16]			[16]			[16]		
0.25	1.1147	1.0513	1.0588	1.0998	1.0991	1.0986	1.0335	1.0334	1.0352
0.5	1.3077	1.2059	1.2222	1.3557	1.3498	1.3579	1.1281	1.1271	1.1375
0.75	1.5499	1.4345	1.4516	1.6986	1.6835	1.7013	1.2703	1.2664	1.2885
1	1.8219	1.7034	1.7204	2.0859	2.0602	2.0877	1.4460	1.4377	1.4729
1.25	2.1122	1.9930	---	2.4972	2.4606	---	1.6444	1.6309	---
1.5	2.4141	2.2940	2.3206	2.9226	2.8750	2.9210	1.8585	1.8390	1.6795
1.75	2.7240	2.6018	---	3.3561	3.2981	---	2.0833	2.0576	---
2	3.0392	2.9140	2.9620	3.7954	3.7270	3.7908	2.3158	2.2839	2.3730

**جدول ۸ -** مقایسه نسبت ارتعاشی برای ورق کامپوزیتی متقاطع مستطیلی با چیدمان های مختلف

$$(E_1/E_2 = 10, G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, a/b = 4)$$

W/h	[0°/90°/0°/90°]			[0°/90°/90°/0°]			[90°/0°/0°/90°]		
	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref	HFA	HAM	Ref
	[16]			[16]			[16]		
0.25	1.1271	1.0512	1.0613	1.1246	1.1236	1.1259	1.0327	1.0326	1.0342
0.5	1.3319	1.2099	1.2310	1.4349	1.427	1.4459	1.1251	1.124	1.1337
0.75	1.5846	1.447	1.4683	1.8392	1.8202	1.8572	1.2642	1.2604	1.2811
1	1.8657	1.7256	1.7455	2.2882	2.257	2.3117	1.4364	1.4284	1.4613
1.25	2.1643	2.0248	---	2.7601	2.7168	---	1.6313	1.6181	---
1.5	2.474	2.3348	2.3624	3.245	3.1897	3.2788	1.8418	1.8227	1.8811
1.75	2.7911	2.6511	---	3.738	3.6709	---	2.0629	2.0378	---
2	3.1133	2.9713	3.0204	4.2359	4.1573	4.2796	2.2918	2.2606	2.3444

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله دو روش تحلیلی تقریبی برای بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی متقاطع ارائه شد. ابتدا با استفاده از روابط کرنش - جابجایی ون کارمن و همچنین اصل همیلتون، معادله حاکم بر ارتعاشات غیرخطی حاصل شده و سپس این معادله دیفرانسیل غیرخطی پاره‌ای با استفاده از روش گالرکین و در نهایت روش تحلیلی تقریبی هموتوپی، به صورت پارامتری حل شده است.

مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش المان محدود و روش اختلالات، دقت بسیار بالای روش‌های ارائه شده را برای پیش‌بینی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی نشان می‌دهد. روش دامنه فرکانس‌هی، در عین سادگی، جواب‌هایی با دقت روش اختلالات را ارائه داده و روش تحلیلی تقریبی هموتوپی، نتایجی با دقت بالاتر نسبت به هر دو روش اختلالات و دامنه - فرکانس‌هی را ارائه می‌نماید. نتایج نشان می‌دهند که همواره با افزایش دامنه، افزایش نسبت منظری و افزایش نسبت مدول‌ها، آثار غیرخطی‌گری افزایش یافته و در نتیجه نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی، سیری صعودی خواهد داشت. همچنین مشاهده می‌شود که هر اندازه، لایه‌های با زاویه الیاف ۹۰ درجه را به فاصله دورتری نسبت به صفحه میانی منتقل نماییم، نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد.

## پیوست

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{-4C_n}{3n\pi} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^3 B_{22} \\
T_2 &= \frac{16C_{mn}}{9mn\pi^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} + A_{66}) \\
T_3 &= \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 A_{66} + 4 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 A_{22} \\
T_4 &= \frac{C_m}{3m\pi} \left( 2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^3 A_{22} - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} - A_{66}) \right) \\
T_5 &= \frac{-4C_m}{3m\pi} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^3 B_{11}, \quad T_6 = 4 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 A_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 A_{66} \\
T_7 &= \frac{C_n}{3n\pi} \left( 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^3 A_{11} - \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 (A_{12} - A_{66}) \right) \\
T_8 &= \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 D_{11} + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\
&\quad + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 D_{22} \\
T_9 &= \frac{4C_{mn}}{3mn\pi^2} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 B_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 B_{22} \right) \\
T_{10} &= \frac{9}{32} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 A_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 A_{22} \right) \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 (A_{12} + 2A_{66}) \\
C_m &= 1 - (-1)^m, \quad C_n = 1 - (-1)^n, \quad C_{mn} = C_m C_n
\end{aligned}$$

## مراجع

- [1] He, J.H., "Homotopy Perturbation Method for Solving Boundary Value Problems", *Physics Letters A*, Vol. 350, No. 1-2, pp. 87-88, (2006).
- [2] He, J.H., "Variational Iteration Method: Some Recent Results and New Interpretations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 207, pp. 3-17, (2007).
- [3] Liu, H.M., "Approximate Period of Nonlinear Oscillators with Discontinuities by Modified Lindstedt-Poincare Method", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 23, No. 2, pp. 577-579, (2005).
- [4] Beléndez, A., Hernandez, A., Beléndez, T., Álvarez, M.L., Gallego, S., Ortuño, M., and Neipp, C., "Application of the Harmonic Balance Method to a Nonlinear Oscillator Typified by a Mass Attached to a Stretched Wire", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 302, No. 4-5, pp. 1018-1029, (2007).
- [5] Younesian, D., Askari, H., Saadatnia, Z., and KalamiYazdi, M., "Frequency Analysis of Strongly Nonlinear Generalized Duffing Oscillators using He's Frequency Amplitude Formulation and He's Energy Balance Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 9, pp. 3222-3228, (2010).
- [6] Leissa, A.W., "Plate Vibration Research, 1976-1980: Classical Theory", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, No. 9, pp. 11-22, (1981).
- [7] Leissa, A.W., "Plate Vibration Research, 1976-1980: Complicating Factors", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, No. 10, pp. 19-36, (1981).
- [8] Bert, C.W., "Plate Research on Dynamic Behavior of Composite and Sandwich Plates—IV", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 17, No. 11, pp. 3-25, (1985).
- [9] Sathyamoorthy, M., "Nonlinear Vibrations of Plates: an Update of Recent Research Developments", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 10S, pp. 55-62, (1996).
- [10] Chu, H.N., and Herrmann, G., "Plate Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Plates", *ASME J. Appl. Mech.* Vol. 23, pp. 532-540, (1956).
- [11] Chandrasekharappa, G., and Srirangarajan, H.R., "Nonlinear Free Vibration of Elastic Plates", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 5, pp. 665-667, (1989).
- [12] Bhimaraddi, A., "Large Amplitude Vibrations of Imperfect Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, No. 3, pp. 457-470, (1993).
- [13] Rao, B.N., and Pillai, S.R.R., "Non-linear Vibrations of a Simply Supported Rectangular Antisymmetric Cross-ply Plate with Immovable Edges", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 3, pp. 568-572, (1992).

- [14] Raju, I.S., Rao, G.V., and Raju, K.K., "Effect of Longitudinal or Inplane Deformation and Inertia on the Large Amplitude Flexural Vibrations of Slender Beams and Thin Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49, No. 3, pp. 415-422, (1976).
- [15] Chen, C.S., Fung, C.P., and Chein, R.D., "A Further Study on Nonlinear Vibration of Initially Stressed Plates", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 172, No. 1, pp. 349-367, (2006).
- [16] Singh, S., Raju, K.K., and Rao, G.V., "Non-linear Vibrations of Simply Supported Rectangular Cross-ply Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, No. 2, pp. 213-226, (1990).
- [17] Sheikh, A.H., and Mukhopadhyay, M., "Large Amplitude Free Flexural Vibration of Stiffened Plates", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 11, pp. 2377-2383, (1996).
- [18] Sivakumar, K., Iyengar, N.G.R., and Deb, K., "Free Vibration of Laminated Composite Plates with Cutouts", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 221, No. 3, pp. 443-470, (1999).
- [19] Sundararajana, N., Prakash, T., and Ganapathi, M., "Nonlinear Free Flexural Vibrations of Functionally Graded Rectangular and Skew Plates under Thermal Environments", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, No. 2, pp. 152-168, (2005).
- [20] Singha, M.K., and Ganapathi, M., "Large Amplitude Free Flexural Vibrations of Laminated Composite Skew Plates", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 39, No. 10, pp. 1709-1720, (2004).
- [21] Malekzadeha, P., and Karami, G., "Differential Quadrature Nonlinear Analysis of Skew Composite Plates Based on FSDT", *Engineering Structures*, Vol. 28, No. 9, pp. 1307-1318, (2006).
- [22] Malekzadeha, P., "A Differential Quadrature Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Skew Thin Plates", *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 2, pp. 237-250, (2007).
- [23] Lal, A., and Singh, B.N., "Stochastic Nonlinear Free Vibration of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundation in Thermal Environments", *Computational Mechanics*, Vol. 44, No. 1, pp. 15-29, (2008).
- [24] Kumar Dash, A., "Large Amplitude Free Vibration Analysis of Composite Plates by Finite Element Method", *Master of Technology in Structural Engineering*, Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Rourkela, India, (2010).
- [25] Mei, C., "Finite Element Displacement Method for Large Amplitude Free Flexural Vibrations of Beams and Plates", *Computers and Structures*, Vol. 3, No. 1, pp. 163-174, (1973).
- [26] He, J.H., "Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear Equations", *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 20, No. 10, pp. 1141-1199, (2006).

- [27] Zhang, H.L., "He's Amplitude-frequency Formulation to a Nonlinear Oscillator with Discontinuity", *Application, Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2197-2198, (2009).
- [28] Fan, J., "He's Frequency-amplitude Formulation for the Duffing Harmonic Oscillator", *Computers and Mathematics with Application*. Vol. 58, No. 11-12, pp. 2473-2476, (2009).
- [29] Geng, L., and Cai, X.C., "He's Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators", *European Journal of Physics*, Vol. 28, No. 5, pp. 923-931, (2007).
- [30] He, J.H., "An Improved Amplitude-frequency Formulation for Nonlinear Oscillators", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 9, No. 2, pp. 211-212, (2008).
- [31] Li, S., and Liao, S.J., "An Analytic Approach to Solve Multiple Solutions of a Strongly Nonlinear Problem", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, pp. 854-865, (2005).
- [۳۲] رفیعی پور حسین، لطف‌آور امیر، حمزه شلمزاری صغری، "تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکلر - پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتویی"، *مهندسی مکانیک مدرس*، ۱۲ (۵)، ص ۸۷-۱۰۱، (۱۳۹۱).
- [33] Singha, M.K., and Daripa, R., "Nonlinear Vibration of Symmetrically Laminated Composite Skew Plates by Finite Element Method", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 42, No. 9, pp. 1144-1152, (2007).

## فهرست نمادهای انگلیسی

طول ورق	:	a
عرض ورق	:	b
ضخامت ورق	:	h
جابه‌جایی در راستای محور X	:	u
جابه‌جایی در راستای محور Y	:	v
جابه‌جایی در راستای محور Z	:	w
کرنش صفحه	:	$\epsilon$
انحنای صفحه	:	$\kappa$
تنش	:	$\sigma$
انرژی کرنشی ورق	:	U
انرژی جنبشی ورق	:	T
فرکانس ارتعاشات غیر خطی	:	$\omega$
دامنه ارتعاشات غیر خطی	:	A
پارامتر دلخواه	:	q
یک عملگر غیر خطی	:	N
زمان بی بعد	:	$\tau$
عملگر خطی اختیاری	:	L
ضرایب ماتریس سختی کاهش یافته	:	$Q_{ij}$
سختی کششی	:	$A_{ij}$
سختی کششی - خمشی	:	$B_{ij}$
سختی خمشی	:	$D_{ij}$
منتجه‌های نیرو	:	$N_{xy}$
منتجه‌های تنش	:	$M_{xy}$
نقاط موقعیت	:	$t_2, t_1$
دوره تناوب	:	$T_1, T_2$
پارامتر و تابع اختیاری غیر صفر هموتوپی	:	$h, h(\tau)$

**Abstract**

In this paper, the analysis of nonlinear free vibration in laminated composite plates is presented using two approximate analytical methods. Since it is necessary to investigate the effects of different parameters on nonlinear vibrations of composite plates and to find an analytical-approximate solution, a composite plate was modeled considering nonlinear terms in Von Karman strain-displacement relations, at first. Then, the partial differential equation governing the nonlinear motion was extracted and the equation was reduced in to an ordinary non-linear differential equation. Homotopy analysis method is an effective and accurate method for solving nonlinear differential equations and also the frequency amplitude method has good accuracy beside its simplicity. In this regard, in order to achieve an acceptable analytical-approximate solution, the mentioned methods were used. The results reveal that the proposed methods have high accuracy while it offers an analytical closed form solution for the nonlinear problem. Finally, the effect of different parameters such as aspect ratio, layers configuration and modulus ratio on the frequency ratio of isotropic and composite plates was studied.