

## تحلیل خواص وابسته به دمای تیرهای ساندویچی با رویه های هدفمند<sup>۳</sup> تحت بارهای موضعی

از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح شده برای تحلیل خواص وابسته به دمای تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند تحت بارهای موضعی در شرایط دمایی مختلف استفاده شده است. برای توزیع خواص در رویه‌های هدفمند از توابع توانی<sup>۴</sup> استفاده شده و تمامی خواص رویه‌ها وابسته به دما می‌باشند. در این مدل، برای رویه‌های هدفمند از تئوری برشی مرتبه اول و برای هسته انعطاف پذیر از الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. دو مقیاس طول انتشار بار برای تیر ساندویچی مذکور تعریف و در شرایط مختلف محاسبه شده است، که رفتار تیر ساندویچی تحت بارهای موضعی با طول موج‌های مختلف را توصیف می‌کنند. این مقیاس‌های طول انتشار وابسته به خواص مادی و خواص هندسی تیر ساندویچی می‌باشند و مشخص می‌کنند زمانی که یک بار خارجی بر رویه بالایی تیر وارد می‌شود، چه طولی از رویه‌ها و هسته را تحت تاثیر خود قرار می‌دهد. هماهنگی قابل قبولی بین نتایج تحلیل حاضر با نتایج المان محدود و همچنین با نتایج محققین دیگر مشاهده شده است.

یونس محمدی<sup>۱</sup>

استادیار

محسن بت‌شکنان

دهکردی<sup>۲</sup>

استادیار

واژه های راهنما: تیر ساندویچی، خواص وابسته به دما، بارگذاری موضعی، رویه‌های هدفمند

### ۱- مقدمه

یکی از موادی که در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای بر روی آن صورت گرفته است، مواد هدفمند می‌باشد. مواد هدفمند موادی هستند که با تغییر در ریز ساختار آن‌ها می‌توان از آن‌ها برای اهداف خاصی مانند کنترل تغییرات شدید دما استفاده کرد [۱]. این مواد دارای کاربردهای بسیار زیادی در عرصه‌های مختلف شامل مهندسی مکانیک، عمران، هوا فضا، بیومکانیک، انرژی هسته‌ای و مهندسی دریا می‌باشند. مواد هدفمند از لحاظ میکروسکوپی ناهمگن هستند و معمولاً مرکب از دو ماده شامل یک فلز و یک سرامیک می‌باشند. این مواد معمولاً به عنوان سپر حرارتی در محیط‌های با دماهای بالا استفاده می‌شوند [۱ و ۲].

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین u.mohammadi@gmail.com

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد mbd\_dehkordi@yahoo.com

<sup>۳</sup> Functionally Graded Material

<sup>۴</sup> Power Law Function

تیرهای ساندویچی با هسته تراکم پذیر که تحت بارهای موضعی قرار دارند نسبت به تیرهای تراکم ناپذیر، بیشتر در معرض واماندگی قرار دارند [۳]. اکنون اگر این تیر تحت شرایط دمایی نیز قرار داشته باشد آنگاه رویه‌های تیر ساندویچی باید توانایی تحمل آن حرارت را داشته باشند. یک نوع ساختار جدید و مفید از تیر ساندویچی می‌تواند یک تیر ساندویچی با هسته تراکم پذیر و رویه‌های ساخته شده از مواد هدفمند باشد [۴]، که در این مقاله به تحلیل این نوع از تیرهای ساندویچی پرداخته شده است.

تحلیل پانل‌های ساندویچی سنتی با استفاده از مدل‌های کلاسیک خطی و غیر خطی توسط محققانی مانند آلن [۵]، پلانتما [۶]، زنکرت [۷] و وینسون [۸] شروع شد و پس از آن توسط محققانی دیگر همچون نور [۹] و لیبرسکیو [۱۰] ادامه یافت. این پانل‌های ساندویچی سنتی معمولاً از رویه‌های کاملاً فلزی و هسته تراکم ناپذیر ساخته می‌شدند. در مدل‌های کلاسیک برای تحلیل پانل‌های ساندویچی سنتی فرض شده است که رویه‌ها تنها دارای مقاومت خمشی و هسته تنها دارای مقاومت برشی است و از انعطاف پذیری عرضی هسته نیز صرف‌نظر شده است. در این مدل‌ها، برای پیش بینی رفتار پانل‌های ساندویچی تحت بارهای غیرموضعی، مانند بارهای خمشی و ارتعاشات آزاد، از تئوری‌های تک لایه معادل<sup>۱</sup> بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۱۱]، و یا بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم [۱۲]، برای کل ضخامت تیر ساندویچی استفاده شده است. اما این مدل‌های سنتی در تحلیل تیرهای ساندویچی جدید که دارای هسته انعطاف پذیر می‌باشند، به خصوص تحت بارهای موضعی مانند بار فرورفتگی<sup>۲</sup> دچار خطای بسیاری خواهند شد [۳]. پتراس و ساتکلایف [۱۳] از طریق آزمایش و به طور تجربی نشان دادند که جابه‌جایی‌های خارج از صفحه و درون صفحه‌ای هسته در پانل‌های ساندویچی جدید با هسته انعطاف پذیر، مخصوصاً در نواحی نزدیک به بارهای موضعی، با توابع غیر خطی بدست می‌آیند. از آنجا که مدل‌های کلاسیک پانل‌های ساندویچی جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای هسته را با توابع خطی و جابه‌جایی‌های خارج از صفحه هسته را ثابت در نظر می‌گیرند، بنابراین نیاز به یک مدل جدید که توانایی تحلیل پانل‌های ساندویچی جدید را داشته باشد احساس شد.

فروستینگ و باروچ [۱۴] برای اولین بار و با استفاده از اصول تغییرات به توسعه یک تئوری مرتبه بالا برای پانل‌های ساندویچی پرداختند که انعطاف پذیری عرضی هسته را نیز در نظر می‌گرفت. در سال‌های بعد، آن‌ها و همچنین محققان دیگر از این تئوری مرتبه بالا برای تحلیل پانل‌های ساندویچی تحت شرایط مختلف استفاده کردند. در سال‌های اخیر، تئوری مرتبه بالای فروستینگ با انجام اصلاحاتی توسط محمدی و خلیلی [۱۵] برای تحلیل استاتیکی تیرهای ساندویچی تحت بارهای موضعی، و پس از آن توسط خلیلی و محمدی [۴] برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی، استفاده شده است.

هدف از این مطالعه، پیش بینی رفتار تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند و هسته انعطاف پذیر تحت بارهای موضعی و همچنین تحت شرایط دمایی با در نظر گرفتن وابستگی خواص رویه‌ها به دما می‌باشد. در این مقاله، تئوری مرتبه بالای فروستینگ دچار اصلاحاتی شده و از این تئوری اصلاح شده برای تحلیل تیر ساندویچی استفاده شده است. این اصلاحات عبارتند از: (۱) با توجه به وجود دماهای بالا در این تحقیق،

<sup>1</sup> Equivalent Single Layer

<sup>2</sup> Indentation

تمامی خواص رویه‌های هدفمند وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند، (۲) به منظور دقت بیشتر در محاسبه جابه‌جایی‌های رویه‌های هدفمند، از میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول به جای میدان جابه‌جایی کلاسیک استفاده شده است.

## ۲- روابط ریاضی

در این مقاله از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح شده سازه های ساندویچی استفاده شده است. یک تیر ساندویچی به طول  $L$  و پهنای واحد، شامل یک هسته به ضخامت  $h_c$ ، و دو رویه‌ی هدفمند به ضخامت های  $h_b$  و  $h_t$  به ترتیب برای رویه های بالایی و پایینی را مطابق با شکل (الف) در نظر می گیریم. تیر ساندویچی از یک سو تحت یک بار موضعی با شدت  $q_t$  بر رویه بالایی خود قرار گرفته و از سوی دیگر نیز تحت افزایش دمای یکنواخت قرار دارد.

با توجه به شدت تغییرات دما در این تحقیق، تمامی خواص رویه های هدفمند و هسته وابسته به دما در نظر گرفته شده اند. تغییرات هر یک از خواص رویه ها و هسته، مانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و یا ضریب انبساط حرارتی، با یک تابع درجه سوم بر حسب دما [۱۶] تعریف می شوند:

$$P = C_0(C_{-1}T^{-1} + 1 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3) \quad (۱)$$

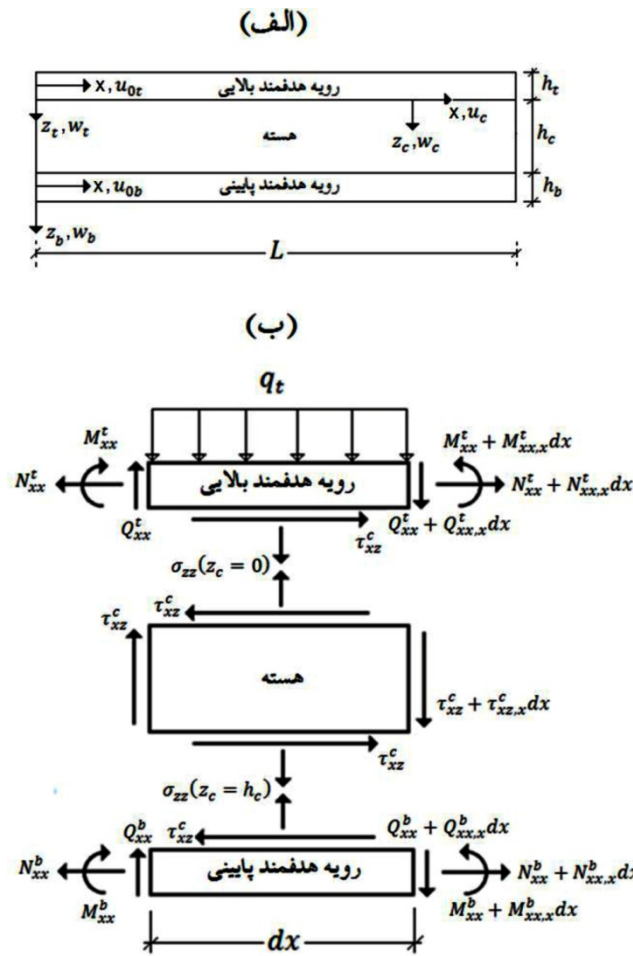
که در آن،  $P$  معرف هر یک از خواص رویه ها یا هسته؛  $C_0, C_1, C_2, C_3$  و  $C_{-1}$  ثوابت منحصر به فرد برای هر ماده؛ و  $T$  مقدار دما می باشد.

با توجه به دو بعدی بودن مدل، از تغییرات در راستای ضخامت صرفنظر شده است. با فرض تغییر شکل‌ها و دوران های کوچک، میدان جابه‌جایی رویه های هدفمند بر اساس تئوری برشی مرتبه اول<sup>۱</sup> ورق ها به صورت زیر تعریف می شود [۱۲]:

$$u_j(x, z) = u_{0j}(x) + z_j \psi_x^j(x) \quad (۲)$$

$$w_j(x, z) = w_{0j}(x) \quad (۳)$$

<sup>۱</sup> First Order Shear Deformation



شکل ۱- (الف) هندسه و دستگاه مختصات؛ (ب) نیروهای خارجی و داخلی

که در آن،  $j = t$  معرف رویه بالایی و  $j = b$  معرف رویه پایینی؛  $u_{0j}$  و  $w_{0j}$  تغییر شکل های صفحه میانی رویه ها به ترتیب در جهات  $x$  و  $z$ ؛ و  $\psi_x^j$  چرخش بردار نرمال صفحه میانی هر یک از رویه ها حول محور  $y$  می باشد. با استفاده از این میدان جابه جایی، روابط سینماتیک رویه های هدفمند را می توان به فرم زیر بدست آورد:

$$\varepsilon_{xx}^j(x, z) = u_{0j,x}(x) + z_j \psi_{x,x}^j(x) \tag{۴}$$

$$\gamma_{xz}^j(x) = w_{0j,x}(x) + \psi_x^j(x) \tag{۵}$$

که در آن،  $(\cdot)_i$  به معنی مشتق جزئی نسبت به  $i$  است. روابط سینماتیک هسته نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon_{zz}^c(x, z_c) = w_{c,z_c}(x, z_c) \tag{۶}$$

$$\gamma_{xz}^c(x, z_c) = u_{c,z_c}(x, z_c) + w_{c,x}(x, z_c) \tag{۷}$$

که در آن،  $u_c$  و  $w_c$  تغییر شکل های هسته به ترتیب در جهات  $x$  و  $z$  می باشند. در این مدل فرض شده است که همواره اتصال کامل بین رویه ها و هسته برقرار باشد، بنابراین، چهار شرایط سازگاری به صورت زیر بیان می شوند [۱۷]:

$$u_c(z_c = 0) = u_{0t} + \frac{h_t}{2} \psi_x^t \quad (۸)$$

$$u_c(z_c = h_c) = u_{0b} - \frac{h_b}{2} \psi_x^b \quad (۹)$$

$$w_c(z_c = 0) = w_{0t} \quad (۱۰)$$

$$w_c(z_c = h_c) = w_{0b} \quad (۱۱)$$

با برقرار کردن تعادل نیروها در راستای محور  $x$  ها برای دیاگرام آزاد رویه بالایی در شکل (۱ب) خواهیم داشت [۱۳ و ۱۵]:

$$(N_{xx}^t + N_{xx,x}^t dx)b - N_{xx}^t b + \tau_{xz}^c(z_c = 0) = 0 \quad (الف۱۲)$$

که در آن،  $b$  ضخامت تیر ساندویچی می باشد. اکنون با ساده سازی، داریم:

$$N_{xx,x}^t + \tau_{xz}^c(z_c = 0) = 0 \quad (۱۲ب)$$

سپس با برقرار کردن تعادل نیروها در راستای محور  $z$  ها و همچنین تعادل ممان ها برای رویه بالایی، به ترتیب معادلات (۱۴) و (۱۶)؛ به طور مشابه با برقرار کردن تعادل نیروها و ممان ها برای رویه پایینی معادلات (۱۳)، (۱۵) و (۱۷)؛ و درنهایت با برقرار کردن تعادل نیروها برای هسته معادلات (۱۸) و (۱۹) بدست می آیند:

$$N_{xx,x}^b - \tau_{xz}^c(z_c = h_c) = 0 \quad (۱۳)$$

$$Q_{x,x}^t + \sigma_{zz}^c(z_c = 0) + q_t = 0 \quad (۱۴)$$

$$Q_{x,x}^b - \sigma_{zz}^c(z_c = h_c) = 0 \quad (۱۵)$$

$$M_{xx,x}^t - Q_x^t + \tau_{xz}^c(z_c = 0) \frac{h_t}{2} = 0 \quad (۱۶)$$

$$M_{xx,x}^b - Q_x^b + \tau_{xz}^c(z_c = h_c) \frac{h_b}{2} = 0 \quad (۱۷)$$

$$\tau_{xz,z_c}^c = 0 \quad (۱۸)$$

$$\sigma_{zz,z_c}^c + \tau_{xz,x}^c = 0 \quad (۱۹)$$

که در آن،  $N_{xx}^j$  و  $M_{xx}^j$  به ترتیب منتهجه های تنش و ممان رویه ها؛  $Q_x^j$  توزیع نیروی برشی بر واحد طول در راستای  $x$  هر یک از رویه ها؛ و  $\tau_{xz}^c$  تنش برشی هسته می باشد. اکنون با استفاده از دو معادله از معادلات تعادل (۱۸) و (۱۹)، روابط سینماتیک هسته، و سه معادله از معادلات سازگاری (۸)، (۱۰) و (۱۱)، روابط تحلیلی برای تنش نرمال در راستای  $z$  هسته،  $\sigma_{zz}^c$ ، و جابه جایی های افقی و عمودی هسته،  $u_c$  و  $w_c$ ، بدست می آیند که به منظور خلاصه سازی در اینجا آورده نشده اند. برای جایگذاری منتهجه های تنش، منتهجه های ممان و نیروی برشی بر واحد طول برای هر یک از رویه های هدفمند می توان از روابط ذیل استفاده کرد:

$$N_{xx}^j = A_{11}^j u_{0j,x} + B_{11}^j \psi_{x,x}^j - N_{xx}^{Tj} \quad (۲۰)$$

$$M_{xx}^j = B_{11}^j u_{0j,x} + D_{11}^j \psi_{x,x}^j - M_{xx}^{Tj}, (j = t, b) \quad (21)$$

$$Q_x^j = A_{55}^j \gamma_{xz}^j \quad (22)$$

که در آن،  $A_{11}^j$ ،  $B_{11}^j$ ،  $D_{11}^j$  و  $A_{55}^j$  ضرایب ماتریس های سفتی کششی، خمشی و کوپلینگ رویه ها می باشند و برای هر یک از رویه های هدفمند و برای توزیع توانی خواص در مواد هدفمند، در پیوست (الف) تعریف شده اند [۱۸]. همچنین،  $N_{xx}^{Tj}$  و  $M_{xx}^{Tj}$  به ترتیب منتهی های تنش حرارتی و ممان حرارتی رویه های هدفمند می باشند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$N_{xx}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left( \frac{E_j(z_j, T)}{1-\nu_j(z_j, T)} \cdot \alpha_j(z_j, T) \cdot T \right) dz_j \quad (23)$$

$$M_{xx}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left( \frac{E_j(z_j, T)}{1-\nu_j(z_j, T)} \cdot \alpha_j(z_j, T) \cdot T \cdot z_j \right) dz_j \quad (24)$$

### ۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر تیر ساندویچی هدفمند تعریف شده در شکل (۱)، در نهایت بر حسب هفت مجهول بدست می آیند. این هفت مجهول عبارت اند از: جابه جایی های صفحه میانی هر یک از رویه ها،  $u_{0t}$ ،  $u_{0b}$ ،  $w_t$  و  $w_b$ ؛ مولفه های دورانی صفحه میانی هر یک از رویه ها حول محور  $y$ ،  $\psi_x^t$  و  $\psi_x^b$ ؛ و تنش برشی عرضی هسته،  $\tau_{xz}^c$ . شش معادله از معادلات حاکم، با جایگذاری روابط (۲۰) تا (۲۲) در شش معادله تعادل (۱۲) تا (۱۷) بدست می آیند. هفتمین معادله حاکم نیز با استفاده از جابه جایی در راستای  $x$  هسته،  $u_c$ ، و معادله سازگاری در سطح مشترک رویه پایینی و هسته، رابطه (۹) بدست می آید. این هفت معادله به شرح ذیل می باشند:

$$A_{11}^t u_{0t,xx} + B_{11}^t \psi_{x,xx}^t + \tau_{xz}^c = 0 \quad (25)$$

$$A_{11}^b u_{0b,xx} + B_{11}^b \psi_{x,xx}^b - \tau_{xz}^c = 0 \quad (26)$$

$$A_{55}^t k (w_{0t,xx} + \psi_{x,x}^t) + \frac{E_c}{h_c} (w_{0b} - w_{0t}) + \tau_{xz,x}^c \frac{h_c}{2} + q_t = 0 \quad (27)$$

$$A_{55}^b k (w_{0b,xx} + \psi_{x,x}^b) - \frac{E_c}{h_c} (w_{0b} - w_{0t}) + \tau_{xz,x}^c \frac{h_c}{2} = 0 \quad (28)$$

$$B_{11}^t u_{0t,xx} + D_{11}^t \psi_{x,xx}^t - A_{55}^t k (w_{0t,x} + \psi_x^t) + \tau_{xz}^c \frac{h_t}{2} = 0 \quad (29)$$

$$B_{11}^b u_{0b,xx} + D_{11}^b \psi_{x,xx}^b - A_{55}^b k (w_{0b,x} + \psi_x^b) + \tau_{xz}^c \frac{h_b}{2} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\tau_{xz}^c h_c}{G_c} - \frac{\tau_{xz,xx}^c h_c^3}{12E_c} - \frac{h_c}{2} (w_{0t,x} + w_{0b,x}) + \frac{1}{2} (h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b) + u_{0t} - u_{0b} = 0 \quad (31)$$

که در آن،  $k$  ضریب تصحیح برشی بوده و مطابق با فرضیات میندلین برابر با  $\pi^2/12$  در نظر گرفته شده است [۱۹]. این دستگاه معادلات به طور عددی برای هر نوع شرایط مرزی دلخواه قابل حل می باشد، اما در حالت خاص برای شرایط مرزی ساده به روش تحلیلی نیز قابل حل می باشد.

#### ۴- شرایط مرزی ساده

شرایط مرزی ساده بر روی تیر ساندویچی به نحوی اعمال شده است که اولاً از جابه‌جایی عمودی هسته در جهت ضخامت آن در لبه های تیر جلوگیری شده و ثانیاً رویه ها تحت شرایط تکیه گاهی ساده قرار گرفته است. برای این شرایط تکیه گاهی ساده بر روی تیر ساندویچی یک حل تحلیلی وجود دارد. با توجه به این شرایط تکیه گاهی ساده و همچنین بار موضعی وارد بر رویه بالایی، هفت مجهول مسئله را می توان با سری های فوریه بر حسب توابع مثلثاتی در راستای  $x$  به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} u_{0j}(x) \\ w_{0j}(x) \\ \psi_x^j(x) \\ \tau_{xz}^c(x) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} C_{uj}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{wj}^m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{\psi j}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{\tau}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در آن،  $C_{uj}^m$ ،  $C_{wj}^m$ ،  $C_{\psi j}^m$  و  $C_{\tau}^m$  ضرایب فوریه می باشند و باید در ادامه محاسبه شوند. ضمناً، بار خارجی وارد بر رویه هدفمند بالایی نیز به شکل سری فوریه به فرم زیر انتخاب شده است:

$$q_t(x) = \sum_{m=1}^M C_{qt}^m \sin(\alpha_m x) \quad (33)$$

که در آن، ثابت  $C_{qt}^m$  وابسته به توزیع بار خارجی می باشد. پس از جایگذاری تمامی مجهولات مسئله بر حسب سری های فوریه، از رابطه (۳۲)، در معادلات حاکم (۲۵) تا (۳۱)، دستگاه معادلات حاکم بر مسئله به فرم ماتریسی بدست می‌آید. این معادله ماتریسی با استفاده از نرم افزار **MATLAB** حل شده است و بردار ضرایب که شامل هفت ضریب فوریه مجهول، یعنی  $C_{uj}^m$ ،  $C_{wj}^m$ ،  $C_{\psi j}^m$ ،  $C_{\tau}^m$ ،  $C_{\psi b}^m$  و  $C_{\tau}^m$  می‌باشد بدست می‌آیند.

اکنون با جایگذاری توزیع بار خارجی از رابطه (۳۳) و مجهولات مسئله از رابطه (۳۲) در رابطه تنش نرمال بین رویه ها و هسته [۲۰]، رابطه تنش نرمال بین رویه پایینی و هسته و همچنین بین رویه بالایی و هسته بر حسب بار خارجی  $q_t$  بدست می‌آیند.

$$\sigma_{zz}^c(z_c = 0) = C_{\sigma zt}^m \cdot q_t(x) \quad (34)$$

$$\sigma_{zz}^c(z_c = h_c) = C_{\sigma zb}^m \cdot q_t(x) \quad (35)$$

که در آن،  $C_{\sigma zt}^m$  و  $C_{\sigma zb}^m$  ضرایب بی بعد انتقال بار به ترتیب در سطح مشترک رویه بالایی- هسته و در سطح مشترک رویه پایینی- هسته نام دارند و به صورت زیر بدست آمده اند:

$$C_{\sigma zt}^m = \frac{E_c}{h_c} (C_{wb}^m - C_{wt}^m) - \frac{h_c \pi}{2(L/m)} C_{\tau}^m \quad (36)$$

$$C_{\sigma zb}^m = \frac{E_c}{h_c} (C_{wb}^m - C_{wt}^m) + \frac{h_c \pi}{2(L/m)} C_{\tau}^m \quad (37)$$

این دو ضریب بی بعد وابسته به خواص مادی و هندسی تیر ساندویچی و نیز وابسته به  $L/m$ ، نیم طول موج جمله  $m$  از سری های فوریه، می باشند. این ضرایب انتقال بار از مقدار صفر، برای  $L/m$  های کوچک، تا

مقادیر نزدیک به یک، برای  $L/m$  های بزرگ، تغییر می کنند ( $0 \leq (C_{\sigma zt}^m, C_{\sigma zb}^m) < 1$ ). مقدار صفر برای ضرایب  $C_{\sigma zt}^m$  و  $C_{\sigma zb}^m$  به معنی آن است که هیچ درصدی از بار خارجی  $q_t$  به سطح مشترک رویه بالایی-هسته و همچنین به سطح مشترک رویه پایینی-هسته نرسیده است، و یا به عبارت دیگر تمامی بار توسط رویه بالایی تحمل شده است. اما در عوض مقادیر نزدیک به یک برای ضرایب  $C_{\sigma zt}^m$  و  $C_{\sigma zb}^m$  به معنی حداکثر انتقال بار از رویه بالایی به هسته و از هسته به رویه پایینی می باشد. لازم به ذکر است، ضرایب انتقال بار نمی توانند دقیقاً برابر با یک باشند، زیرا  $C_{\sigma zt}^m = 1$  به معنی تحمل نشدن هیچ باری توسط رویه بالایی، و  $C_{\sigma zb}^m = 1$  به معنی تحمل نشدن هیچ باری توسط رویه بالایی و هسته می باشد، که غیر ممکن است.

## ۵- مقیاس های طول انتشار<sup>۱</sup> بار

در این بخش، از تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالای اصلاح شده به منظور محاسبه میزان انتقال بار فرورفتگی خارجی از رویه بالایی به هسته و سپس از هسته به رویه پایینی تیر ساندویچی استفاده شده است. فرض شده است که بار خارجی بتواند تا جایی که سازه رفتار الاستیک از خود نشان می دهد افزایش یابد. بنابراین، نتایج این مدل می تواند برای تخمین لحظه واماندگی تیرهای ساندویچی ساخته شده از رویه های هدفمند و هسته ایزوتروپیک مفید باشد.

مقیاس طول انتشار بار، اولین بار توسط پتراس و ساتکلایف [۱۳] تنها برای سطح مشترک رویه بالایی و هسته و برای تیرهای ساندویچی با رویه های ایزوتروپیک معرفی شد. در این تحقیق، مقادیر مقیاس طول انتشار برای تیرهای ساندویچی با رویه های هدفمند و همچنین هم در سطح مشترک رویه بالایی و هسته،  $\lambda_t$ ، و هم در سطح مشترک رویه پایینی و هسته،  $\lambda_b$ ، تعریف و محاسبه شده است. این دو پارامتر مشخص کننده میزان تحمل تیر ساندویچی با رویه های هدفمند تحت بار موضعی فرورفتگی و همچنین تحت شرایط دمایی می باشد.

بارهای خارجی با نیم طول موج های کوچکتر از  $\lambda_t$  توسط رویه بالایی پخش و گسترده شده و مقدار کمتری از آن به هسته میرسد، اما برای طول موج های بزرگتر از  $\lambda_t$ ، درصد بیشتری از بار خارجی بدون تغییر از رویه بالایی عبور کرده و به هسته منتقل می شود. به طور مشابه، برای نیم طول موج های کوچکتر از  $\lambda_b$ ، بارهای خارجی توسط رویه بالایی و هسته پخش و گسترده شده و مقدار اندکی از آن ممکن است به رویه پایینی برسد، اما برای طول موج های بزرگتر از  $\lambda_b$ ، درصد بیشتری از بار خارجی بدون تغییر از رویه بالایی و هسته عبور کرده و به رویه پایینی منتقل می شود.

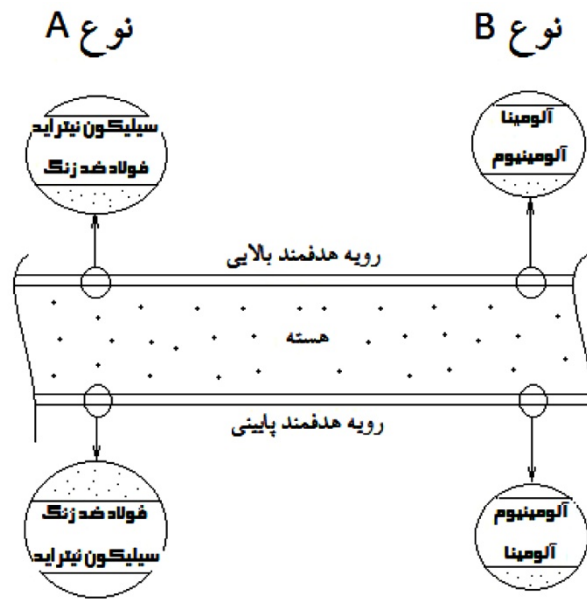
## ۶- صحت سنجی

به منظور صحت سنجی نتایج تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه های هدفمند تحت بارهای موضعی، نتایج عددی بدست آمده از روابط تحلیلی ارائه شده در این مقاله، با نتایج بدست آمده از تحلیل المان محدود تیر ساندویچی، مدل سازی شده در نرم افزار ANSYS، مقایسه شده است. نتایج اراده شده در این بخش، با فرض توزیع توانی خواص در رویه های هدفمند، روابط پیوست (الف)، بدست آمده است.

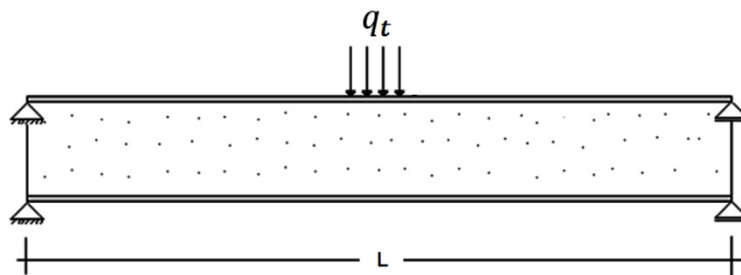
<sup>1</sup> Spreading Length Scale



(الف)



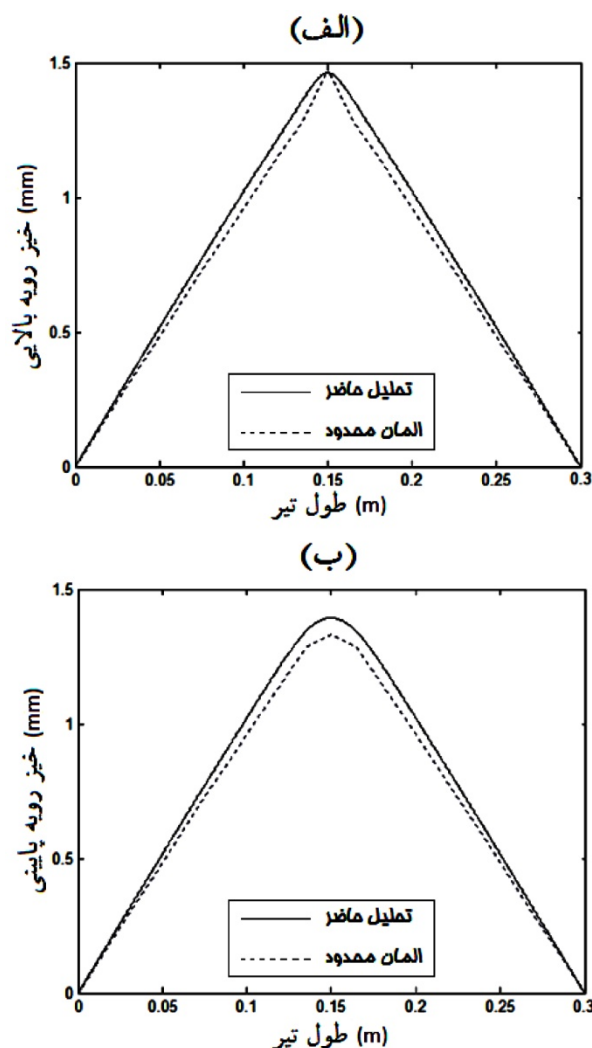
(ب)



شکل ۲- (الف) تعریف ساندویچ‌های نوع A و B، (ب) بار موضعی وارد بر رویه بالایی.

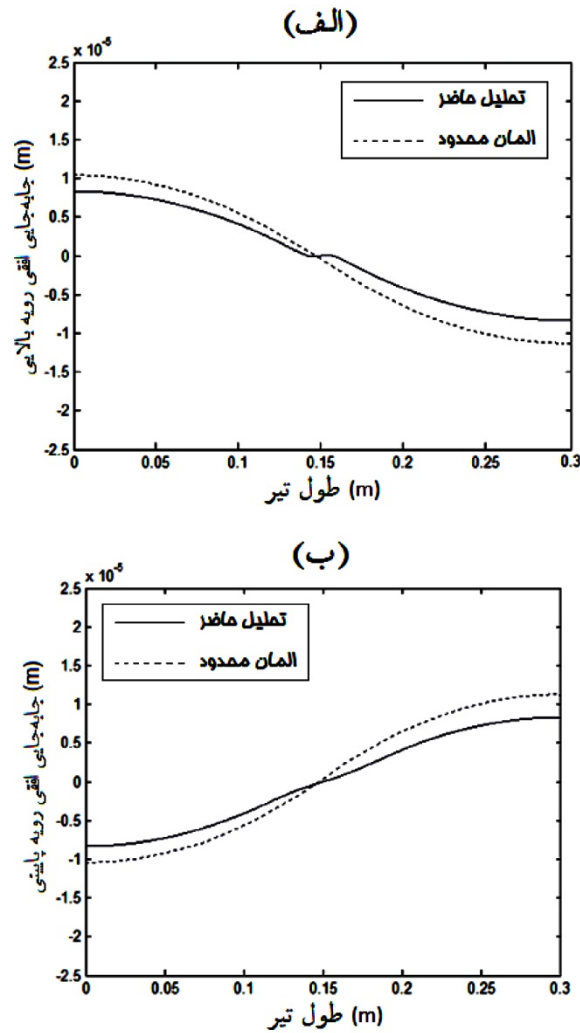
در این مقاله، نتایج عددی برای دو نوع تیر ساندویچی A و B، نشان داده شده در شکل (۲الف)، بدست آمده است. تیر ساندویچی نوع A دارای رویه های هدفمند ساخته شده از آلومینیوم و آلومینا، و تیر ساندویچی نوع B دارای رویه‌های هدفمند ساخته شده از فولاد و سیلیکون نیتراید می باشد. اما هر دو نوع تیر ساندویچی دارای هسته فوم سبک وزنی با سلول های بسته<sup>۱</sup> می باشند. ضمناً، هر دو تیر ساندویچی تحت بار موضعی وارد بر رویه بالایی خود قرار داشته و همچنین تحت تکیه‌گاه ساده در لبه های قرار گرفته اند، شکل (۲ب).

<sup>1</sup> Closed cells



شکل ۳- مقایسه نتایج (الف) خیز رویه بالایی (ب) خیز رویه پایینی. ( $p=1$ )

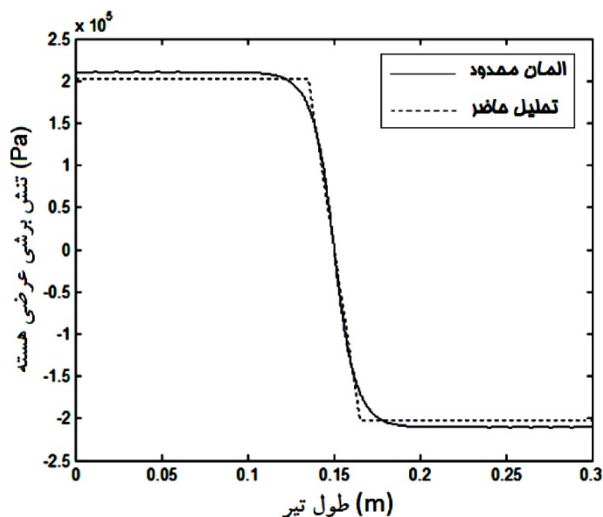
در این بخش و به منظور صحت سنجی نتایج، تیر ساندویچی مقارنی از نوع A با ضخامت ۱mm برای هر رویه؛ ضخامت ۱۸/۵۵mm برای هسته؛ پهنای ۶۰mm؛ طول ۳۰۰mm؛ که تحت بار ۱۲۵KN/m در ۴mm از قسمت میانی خود قرار گرفته دارد در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته و مدول برشی هسته به ترتیب ۵۲/۵ و ۲۱ مگا پاسکال، و مدول‌های الاستیسیته آلومینیوم و آلومینا نیز به ترتیب ۷۰GPa و ۳۸۰GPa در نظر گرفته شده است. نتایج عددی در این بخش شامل محاسبه جابه‌جایی‌های طولی و عرضی رویه‌های هدفمند، تنش برشی هسته، و تنش‌های نرمال در سطح مشترک رویه بالایی و هسته و در سطح مشترک رویه پایینی و هسته است. شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب جابه‌جایی‌های طولی و عرضی رویه‌های هدفمند، و شکل (۵) نیز تنش‌های برشی هسته را برای تیر ساندویچی نوع A تعریف شده در این بخش نشان می‌دهند.



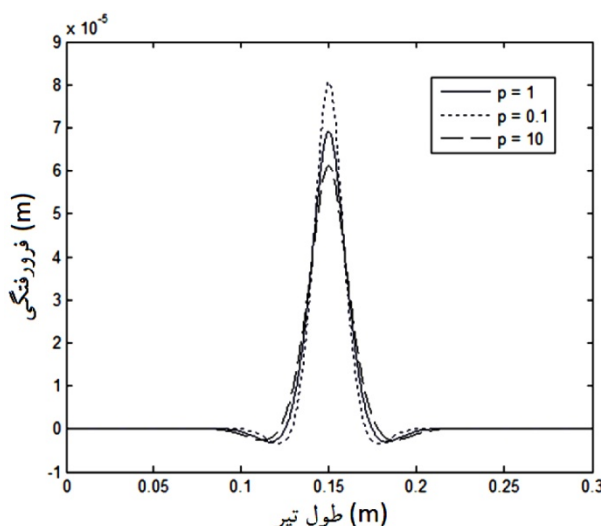
شکل ۴- مقایسه نتایج (الف) جابه‌جایی افقی رویه بالایی (ب) جابه‌جایی افقی رویه پایینی. ( $p=1$ )

نتایج شکل های (۳) تا (۵) برای تغییرات توانی خواص در رویه‌های هدفمند و با توان  $p=1$  ترسیم شده است. در هر یک از این شکل‌ها، نتایج بدست آمده از روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله، با نتایج المان محدود محاسبه شده از نرم افزار ANSYS، برای توزیع خطی خواص ( $p=1$ ) در رویه‌های هدفمند، مقایسه شده است. مشاهده می شود که حداکثر اختلاف بین نتایج المان محدود و نتایج مدل تحلیلی پیشنهاد شده در این تحقیق مربوط به جابه‌جایی عرضی رویه های هدفمند بالایی و پایینی است که به ترتیب در حدود ۵/۵٪ و ۵/۳٪ می‌باشند، شکل های (۳الف) و (۳ب). بنابراین، می توان بیان کرد که نتایج تحلیل دارای تطابق خوبی با نتایج المان محدود می‌باشند.

در یک حالت خاص نیز، یک مقایسه بین نتایج تحلیل حاضر با نتایج مرجع [۱۳] انجام شده است. در این حالت خاص، فرض شده است که خواص رویه ها در جهت ضخامت آن ها ثابت و پارامترهای مادی و هندسی تیر ساندویچی مشابه با فرضیات مرجع [۱۳] باشد که در جدول (۱) نیز آورده شده است.



شکل ۵- مقایسه نتایج تحلیلی و المان محدود تنش‌های برشی هسته. ( $p=1$ )



شکل ۶- تغییرات فرورفتگی در طول تیر برای سه توزیع متفاوت خواص در رویه‌های هدفمند. ( $p$ : توان تابع توانی)

جدول ۱- مقادیر پارامترهای مادی و هندسی از مرجع [۱۳]

پارامتر	چگالی هسته	مدول یانگ رویه‌ها	ضخامت رویه‌ها	ضخامت هسته
مقدار	$48 \text{ Kg/m}^3$	$1 \text{ GPa}$	$0.381 \text{ mm}$	$2/5 \text{ mm}$

در جدول (۲)، مقایسه ای بین مقادیر مقیاس طول انتشار بالایی،  $\lambda_t$ ، محاسبه شده توسط تحلیل حاضر و محاسبه شده توسط مرجع [۱۳] انجام شده است. جدول (۲) نشان می دهد حداکثر اختلاف بین نتایج مرجع [۱۳] با نتایج تحلیل حاضر ۴/۵٪ است که این مطلب از هماهنگی مناسب بین آن ها حکایت دارد.

جدول ۲- مقایسه طول های انتشار بالایی در یک حالت خاص

درصد اختلاف	مقیاس طول انتشار بالایی		تغییرات
	[۱۳]	تحلیل حاضر	
۳/۴٪	۱/۶	۱/۵۴۵	مثال پایه: مقادیر جدول (۱)
۴/۵٪	۴/۴	۴/۲	چهار برابر شدن ضخامت رویه بالایی
۱/۸٪	۲/۱	۲/۰۶۱	چهار برابر شدن ضخامت هسته
۰/۰۲٪	۵	۵/۰۰۱	صد برابر شدن مدول یانگ رویه بالایی

## ۷- نتایج عددی

شکل (۶)، میزان فرورفتگی هر مقطع دلخواه از تیر ساندویچی نوع A را برای سه مقدار متفاوت توان تابع توانی،  $p$ ، در رویه های هدفمند نشان می دهد. بنا به انتظار، فرورفتگی ها در ناحیه اعمال بار، متمرکز شده است. مشاهده می شود که توزیع خواص رویه های هدفمند با توان های برابر با ۰/۱ و ۱۰ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین فرورفتگی می باشند. زیرا در رویه های هدفمند با توزیع توانی خواص، زمانی که توان برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شود میانگین مدول الاستیسیته به سمت مدول الاستیسیته آلومینیوم و زمانی که توان برابر با ۱۰ انتخاب شود میانگین مدول الاستیسیته به سمت مدول الاستیسیته آلومینا گرایش پیدا می کند. از آنجا که مدول الاستیسیته آلومینیوم بسیار کوچکتر از مدول الاستیسیته آلومینا است، بنابراین فرورفتگی های بیشتری به ازای توان ۰/۱ در مقایسه با توان ۱۰ دیده می شود.

با رسم تغییرات ضرایب انتقال بار،  $C_{\sigma z t}^m$  و  $C_{\sigma z b}^m$ ، بر حسب نیم طول موج بار خارجی سینوسی وارد بر رویه هدفمند بالایی،  $L/m$ ، به ترتیب می توان مقیاس طول انتشار بالایی،  $\lambda_t$ ، و مقیاس طول انتشار پایینی،  $\lambda_b$ ، را بدست آورد. نیم طول موج بار در نقطه عطف هر یک از منحنی ها، برابر با مقیاس طول انتشار،  $\lambda_t$  یا  $\lambda_b$  خواهد بود [۱۳]. مقیاس های طول انتشار بالایی،  $\lambda_t$ ، و مقیاس های طول انتشار پایینی،  $\lambda_b$ ، برای شرایط هندسی و مادی مختلف در جدول (۳) محاسبه شده است.

با توجه به نتایج جدول (۳)، افزایش ضخامت رویه بالایی،  $h_t$ ، افزایش ضخامت رویه پایینی،  $h_b$ ، و یا افزایش ضخامت هسته،  $h_c$ ، باعث افزایش مقادیر مقیاس های طول انتشار،  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$ ، و یا به عبارت دیگر باعث افزایش توانایی تیر ساندویچی در پخش و گسترده کردن بار خارجی می شود. تاثیر ضخامت رویه بالایی بر مقدار  $\lambda_t$  بیشتر از تاثیر ضخامت هسته، و تاثیر ضخامت هسته بر مقدار  $\lambda_t$  بیشتر از تاثیر ضخامت رویه پایینی است. یعنی ضخامت رویه بالایی،  $h_t$ ، موثرترین پارامتر بر مقدار طول انتشار بالایی،  $\lambda_t$ ، است. و یا به عبارت دیگر، تیرهای ساندویچی با رویه های بالایی ضخیم تر دارای توانایی بیشتری در گسترش بار خارجی بر روی ناحیه بزرگتری از هسته می باشند. اما برای تغییر در مقدار مقیاس طول انتشار پایینی،  $\lambda_b$ ، تاثیر  $h_t$  کمی بیشتر از تاثیر  $h_b$ ، و تاثیر  $h_c$  کمی بیشتر از تاثیر  $h_t$  و  $h_b$  در این حالت خاص است. همچنین نتایج جدول (۳) نشان می دهند که اولاً افزایش چگالی هسته،  $\rho_c$ ، باعث کاهش مقیاس های طول انتشار می شود و ثانیاً مقیاس های طول انتشار مستقل از طول تیر،  $L$ ، می باشند.

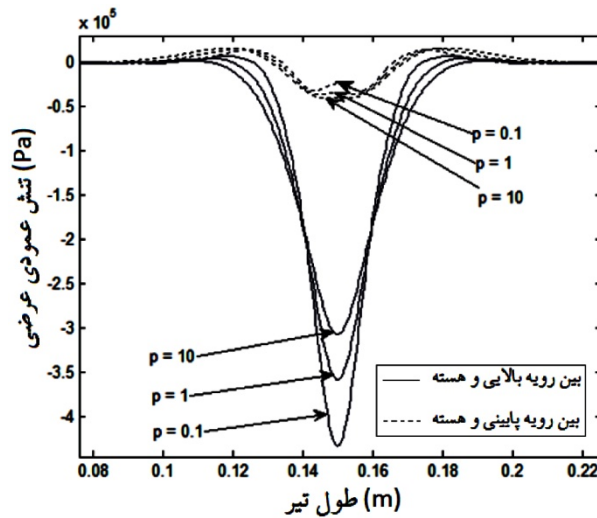
**جدول ۳- طول های انتشار تیر ساندویچی نوع A در شرایط هندسی و مادی مختلف (p=1).**

تغییرات	طول انتشار بالایی (mm)	طول انتشار پایینی (mm)
مثال پایه: مقادیر جدول (۴)	۲۰/۱۳	۱۹/۵۷
دو برابر شدن ضخامت هسته	۲۳/۸۱	۲۳/۳۹
دو برابر شدن چگالی هسته	۱۶/۸۹	۱۶/۴۱
دو برابر شدن ضخامت رویه بالایی	۲۵/۷۵	۲۳/۲۹
دو برابر شدن ضخامت رویه پایینی	۲۲/۴۵	۲۳/۰۹
دو برابر شدن ضخامت هر دو رویه	۳۳/۶۱	۳۳/۰۹
دو برابر شدن طول تیر	۲۰/۰۶	۱۹/۵۷

**جدول ۴- یک مثال عددی از تیر ساندویچی نوع A**

طول تیر	ضخامت هر رویه	چگالی هسته	ضخامت هسته
۶۰mm	۱/۵۲۴mm	۱۴۴Kg/m <sup>3</sup>	۱۰mm

مقادیر طول های انتشار تیر ساندویچی نوع B در شرایط مادی و هندسی مختلف و برای دو دمای ۳۰۰ و ۱۰۰۰ درجه کلین را می توان در پیوست (ب) مشاهده نمود. با مقایسه طول های انتشار تیرهای ساندویچی نوع A و B، از جدول (۳) و جدول پیوست (ب)، مشاهده می شود که در شرایط یکسان، طول های انتشار ساندویچ های نوع B بین ۶ تا ۸/۵ درصد بیشتر از طول های انتشار ساندویچ های نوع A هستند. که این به دلیل سفت تر بودن رویه های هدفمند نوع B، شامل سیلیکون نیتراید و فولاد، نسبت به رویه های هدفمند نوع A، شامل آلومینا و آلومینیوم، می باشد. یعنی افزایش سفتی رویه ها باعث افزایش  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$  خواهد شد. درصد کاهش طول های انتشار،  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$ ، در اثر افزایش ۷۰۰ درجه ای دما برای تیرهای ساندویچی نوع B در پیوست (ب) نشان داده شده است. نتایج پیوست (ب) نشان می دهد که با افزایش دما از ۳۰۰ به ۱۰۰۰ درجه کلین،  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$  در شرایط مختلف مادی و هندسی به طور میانگین در حدود ۶ درصد کاهش می یابند. این به دلیل در نظر گرفتن وابستگی خواص رویه ها به دما در این مقاله است که افزایش دما باعث کاهش سفتی رویه ها و در نتیجه کاهش طول های انتشار شده است.



شکل ۷- تغییرات تنش های نرمال در سطح مشترک رویه ها و هسته برای مقادیر مختلف  $p$ .

در شکل (۷)، تغییرات تنش نرمال در سطح مشترک رویه هدفمند بالایی و هسته،  $\sigma_{zz}^t$ ، و همچنین تغییرات تنش نرمال در سطح مشترک رویه هدفمند پایینی و هسته،  $\sigma_{zz}^b$ ، در طول تیر ساندویچی نوع A ترسیم شده است. این تغییرات برای سه مقدار مختلف توان تابع ترسیم شده اند. از شکل (۷) مشاهده می شود که در محل اعمال بار، مقادیر  $\sigma_{zz}^t$  به مراتب بیشتر از مقادیر  $\sigma_{zz}^b$  است. زیرا با توجه به توضیحات بخش ۴، مقدار ضرایب انتقال بار،  $C_{\sigma_{zt}}^m$  و  $C_{\sigma_{zb}}^m$ ، توصیف می کنند که بار خارجی به ترتیب چگونه به هسته و به رویه پایینی انتقال می یابد. اضافه بر آن، نتایج جدول (۳) نیز نشان می دهد که در حالت کلی و در شرایط یکسان همواره مقادیر  $C_{\sigma_{zb}}^m$  کوچکتر از  $C_{\sigma_{zt}}^m$  است، زیرا بار خارجی  $q_t$  برای رسیدن به هسته تنها توسط رویه بالایی پخش و گسترده می شود، اما همان بار خارجی برای رسیدن به رویه پایینی علاوه بر رویه بالایی توسط هسته نیز گسترده خواهد شد. بنابراین، در این شرایط همواره مقدار تنش های نرمال در سطح مشترک رویه بالایی-هسته بیشتر از مقدار تنش های نرمال در سطح مشترک رویه پایینی-هسته است، همانطور که در شکل (۷) نیز مشاهده می شود. در مجموع، منحنی های  $C_{\sigma_{zb}}^m$  و  $C_{\sigma_{zt}}^m$  بر حسب نیم طول موج بار خارجی،  $L/m$ ، به منظور محاسبه طول های موج بحرانی،  $\lambda_b$  و  $\lambda_t$ ، استفاده می شوند، که برای  $L/m$  های کوچکتر از این مقادیر، بار خارجی تا حد زیادی توسط رویه بالایی و هسته تغییر خواهد یافت. این تحلیل که در این مقاله بر اساس رفتار الاستیک تیرهای ساندویچی انجام شده است، اجازه درک رفتار تیر ساندویچی تحت بار خارجی مفروض را به ما خواهد داد.

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله، برای تحلیل رفتار تیر ساندویچی با رویه های هدفمند و با خواص وابسته به دما تحت بارهای موضعی از یک تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالای اصلاح شده استفاده شده است. قابلیت و توانایی این تئوری در تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه های هدفمند و هسته انعطاف پذیر که تحت بارهای موضعی و حرارتی قرار گرفته اند، با نتایج المان محدود بررسی و تایید شده است. تاثیر طول موج بار خارجی بر رفتار تیر

ساندویچی مطالعه شده و دو پارامتر طول انتشار  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$  به ترتیب برای سطح مشترک رویه بالایی-هسته و سطح مشترک رویه پایینی-هسته تعریف شده است. این دو پارامتر از مشخصه‌های هر تیر ساندویچی است که رفتار آن در برابر بارهای موضعی را توصیف می‌کند. با توجه به نتایج بدست آمده در این تحقیق، برخی از دستاوردهای مهم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

- (۱) افزایش هر چه بیشتر دما باعث کم شدن مقادیر طول‌های انتشار،  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$  می‌شود.
- (۲) زمانی که نیم طول موج بار خارجی کوچکتر از  $\lambda_t$  باشد، بار خارجی توسط رویه بالایی بر روی قسمتی از هسته گسترده می‌شود.
- (۳) برای نیم طول موج‌های بزرگتر از  $\lambda_t$ ، درصد زیادی از بار خارجی بدون تغییر و به طور موضعی به هسته منتقل خواهد شد.
- (۴) اگر نیم طول موج بار خارجی کوچکتر از  $\lambda_b$  باشد، آنگاه رویه بالایی و هسته باعث پخش شدن بار خارجی بر روی قسمتی از رویه پایینی می‌شوند.
- (۵) اگر نیم طول موج‌های بار خارجی بزرگتر از  $\lambda_b$  باشند، درصد نسبتاً زیادی از بار خارجی تقریباً بدون تغییر از رویه بالایی و هسته عبور کرده و به طور موضعی به رویه پایینی منتقل می‌شود.
- (۶) خصوصیات هندسی تیر ساندویچی که باعث افزایش  $\lambda_t$  می‌شوند، به ترتیب اهمیت عبارت اند از: ضخامت رویه بالایی، ضخامت هسته و ضخامت رویه پایینی.
- (۷) خصوصیات هندسی تیر ساندویچی که باعث افزایش  $\lambda_b$  می‌شوند، به ترتیب اهمیت عبارت اند از: ضخامت هسته، ضخامت رویه بالایی و ضخامت رویه پایینی.
- (۸) اندازه طول تیر،  $L$ ، تاثیری در مقادیر طول‌های انتشار،  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$ ، ندارد.
- (۹) افزایش چگالی هسته باعث کم شدن مقادیر  $\lambda_t$  و  $\lambda_b$  می‌شود.
- (۱۰) با افزایش سفتی رویه‌های هدفمند، طول‌های انتشار افزایش می‌یابند.

## سپاسگزاری

این تحقیق با حمایت‌های مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین انجام شده است.

## مراجع

- [1] Hui, S.S., and Li, S.R., "Postbuckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets and Temperature-dependent Properties", *Composites: Part B*, Vol. 39, pp. 332–344, (2008).
- [2] Zhao, J., Yanzheng, L., and Xing, A., "Analysis of Transient Thermal Stress in Sandwich Plate with Functionally Graded Coatings", *Thin Solid Films*, Vol. 516, pp. 7581–7587, (2008).
- [3] Frostig, Y., and Baruch, M., "Localized Load Effects in High-order Bending of Sandwich Panels with Flexible Core", *J. Engr. Mech*, Vol. 122, No. 11, pp. 1069-1076, (1996).



- [4] Khalili, S.M.R., and Mohammadi, Y., “Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Functionally Graded Face Sheets and Temperature-dependent Material Properties: A New Approach”, *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol. 35, pp. 61-74, (2012).
- [5] Allen, H.G., “*Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*”, Pergamon Press, London, (1969).
- [6] Plantema, F.J., “*Sandwich Construction*”, Wiley, New York, (1966).
- [7] Zenkert, D., “*An Introduction to Sandwich Construction*”, Chameleon Press Ltd, London, (1995).
- [8] Vinson, J.R., “*The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*”, Technomic Publishing Co. Inc, Lancaster, (1999).
- [9] Noor, A.K., Burton, W.S., and Bert, C.W., “Computational Models for Sandwich Panels and Shells”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 49, pp. 155–199, (1996).
- [10] Librescu, L., and Hause, T., “Recent Developments in the Modeling and Behavior of Advanced Sandwich Constructions: A Survey”, *Composite Structure*, Vol. 48, No. 1, pp. 1–17, (2011).
- [11] Mindlin, R.D., “Influence of Transverse Shear Deformation on the Bending of Classical Plates”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 8, pp. 18–31, (1951).
- [12] Reddy, J.N., “*Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*”, Wiley & Sons, New York, (1984).
- [13] Petras, A., and Sutcliffe, M.P.F., “Indentation Resistance of Sandwich Beams”, *J Composite Structure*, Vol. 46, pp. 413-424, (1999).
- [14] Frostig, Y., and Baruch, M., “A High Order Theory for the Bending of Sandwich Beams with a Flexible Core”, *J. ASCE, EM Division*, Vol. 118, No. 5, pp. 1026–1043, (1992).
- [15] Mohammadi, Y., and Khalili, S.M.R., “Effect of Geometrical and Mechanical Properties on Behavior of Sandwich Beams with Functionally Graded Face Sheets under Indentation Loading”, *J. Materials: Design and Applications*, Vol. 225, pp. 231-244, (2011).
- [16] Touloukian, Y.S., “*Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*”, McMillan, New York, (1967).
- [17] Malekzadeh, K., Khalili, S.M.R., and Mittal, R.K., “Local and Global Damped Vibrations of Sandwich Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach”, *J. Sandwich Structure Mater*, Vol. 7, No. 5, pp. 431–456, (2005).
- [18] Chi, S.H., and Chung, Y.L., “Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part I: Analysis”, *J. Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3657-3674, (2006).

- [19] Mindlin, R.M., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, (1951).
- [20] Malekzadeh K., Khalili, M.R., Olsson. R., and Jafari, A., "Higher-order Dynamic Response of Composite Sandwich Panels with Flexible Core under Simultaneous Low-velocity Impacts of Multiple Small Masses", J. Solids and Structures, Vol. 43, pp. 6667-6687, (2006).

### فهرست نمادهای انگلیسی

طول تیر ساندویچی	:	$L$
ضخامت هسته	:	$h_c$
ضخامت‌های رویه بالایی و رویه پایینی	:	$h_t, h_b$
مدول الاستیسیته هسته	:	$E_c$
مدول الاستیسیته رویه‌ها	:	$E_f$
مدول الاستیسیته سرامیک	:	$E_{ce}$
مدول الاستیسیته فلز	:	$E_m$
مدول برشی هسته	:	$G_c$
تغییر شکل‌های افقی رویه‌های بالایی و پایینی	:	$u_t, u_b$
تغییر شکل افقی هسته	:	$u_c$
تغییر شکل‌های عمودی رویه‌های بالایی و پایینی	:	$w_t, w_b$
تغییر شکل عمودی هسته	:	$w_c$
بار خارجی موضعی وارد بر رویه بالایی	:	$q_t$
محورهای طولی دستگاه مختصات برای رویه‌ها و هسته (هر یک از 0 تا $L$ تغییر می‌کند)	:	$x_t, x_b, x_c$
محورهای عمودی دستگاه مختصات برای رویه‌ها و هسته	:	$z_t, z_b, z_c$
توان ثابت و مثبت در توزیع توانی مواد هدفمند	:	$p$
ضریب تصحیح برشی	:	$k$
منتجه‌های تنش رویه‌های بالایی و پایینی	:	$N_{xx}^t, N_{xx}^b$
منتجه‌های ممان رویه‌های بالایی و پایینی	:	$M_{xx}^t, M_{xx}^b$
توزیع نیروی برشی بر واحد طول رویه‌های بالایی و پایینی	:	$Q_x^t, Q_x^b$
ضرایب بی بعد شده انتشار بار در سطح مشترک هر یک از رویه‌ها و هسته	:	$C_{\sigma z t}^m, C_{\sigma z b}^m$

### نمادهای یونانی

چگالی هسته	:	$\rho_c$
مقیاس‌های طول انتشار بار رویه‌های بالایی و پایینی	:	$\lambda_t, \lambda_b$

نسبت پواسون رویه ها	:	$\nu_f$
مولفه های دوران رویه های بالایی و پایینی	:	$\psi_x^t, \psi_x^b$
تنش برشی خارج از صفحه هسته	:	$\tau_{xz}^c$
تنش های عمودی در سطح مشترک هر یک از رویه ها با هسته	:	$\sigma_{zz}^t, \sigma_{zz}^b$
تنش عمودی در هسته	:	$\sigma_{zz}^c$
کرنش های عمودی در صفحه رویه های بالایی و پایینی	:	$\varepsilon_{xx}^t, \varepsilon_{xx}^b$
کرنش های عمودی خارج از صفحه در سطح مشترک هر یک از رویه ها با هسته	:	$\varepsilon_{zz}^t, \varepsilon_{zz}^b$
تنش برشی خارج از صفحه هسته	:	$\tau_{xz}^c$
کرنش های برشی خارج از صفحه رویه های بالایی و پایینی	:	$\gamma_{xz}^t, \gamma_{xz}^b$
کرنش برشی خارج از صفحه هسته	:	$\gamma_{xz}^c$
کرنش های عمودی صفحه میانی رویه های بالایی و پایینی	:	$\varepsilon_{xx}^{t0}, \varepsilon_{xx}^{b0}$
انحناهای صفحه میانی رویه های بالایی و پایینی	:	$\kappa_{xx}^t, \kappa_{xx}^b$

## پیوست ها

### پیوست (الف)

با فرض توزیع توانی در رویه های هدفمند، برخی از ضرایب مانریس های سفتی مورد نیاز در این تحقیق عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^t \\ B_{11}^t \\ D_{11}^t \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t}\right)^p + E_{ce}(T)}{1 - \left((\nu_m(T) - \nu_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t}\right)^p + \nu_{ce}(T)\right)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_t \\ z_t^2 \end{Bmatrix} dz_t \quad (\text{الف-۱})$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^b \\ B_{11}^b \\ D_{11}^b \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b}\right)^p + E_{ce}(T)}{1 - \left((\nu_m(T) - \nu_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b}\right)^p + \nu_{ce}(T)\right)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_b \\ z_b^2 \end{Bmatrix} dz_b \quad (\text{الف-۲})$$

$$A_{55}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t}\right)^p + E_{ce}(T)}{2 \left(1 + (\nu_m(T) - \nu_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t}\right)^p + \nu_{ce}(T)\right)} dz_t \quad (\text{الف-۳})$$

$$A_{55}^b = \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b}\right)^p + E_{ce}(T)}{2 \left(1 + (\nu_m(T) - \nu_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b}\right)^p + \nu_{ce}(T)\right)} dz_b \quad (\text{الف-۴})$$

## پیوست (ب)

طول های انتشار تیر ساندویچی نوع B در شرایط هندسی، مادی و دمایی مختلف ( $p=1$ ).

طول انتشار پایینی (mm)			طول انتشار بالایی (mm)			تغییرات
درصد کاهش	ل	ما	درصد کاهش	ل	ما	
-۵/۹٪	۱۹/۹۳	۲۱/۱۹	-۵/۹٪	۲۰/۴۳	۲۱/۷۱	مثال پایه: مقادیر جدول (۴)
-۵/۹٪	۲۳/۷۳	۲۵/۲۱	-۶/۳٪	۲۴/۲۳	۲۵/۸۵	دو برابر شدن ضخامت هسته
-۶/۱٪	۱۶/۷۱	۱۷/۷۹	-۵/۹٪	۱۷/۱۹	۱۸/۲۷	دو برابر شدن چگالی هسته
-۵/۷٪	۲۳/۶۱	۲۵/۰۵	-۴/۷٪	۲۶/۰۱	۲۷/۲۹	دو برابر شدن ضخامت رویه بالایی
-۵/۸٪	۲۳/۴۹	۲۴/۹۳	-۶/۲٪	۲۲/۸۳	۲۴/۳۵	دو برابر شدن ضخامت رویه پایینی
-۶/۱٪	۳۳/۶۳	۳۵/۸۱	-۶/۰٪	۳۴/۱۱	۳۶/۲۹	دو برابر شدن ضخامت هر دو رویه
-۵/۹٪	۱۹/۹۰	۲۱/۱۴	-۵/۷٪	۲۰/۴۶	۲۱/۷۰	دو برابر شدن طول تیر

**Abstract**

An improved high-order sandwich beam theory is used to analysis of sandwich beams with FG face sheets loaded by central indenter in various temperature conditions. Property distribution in the FG face sheets is according to power law function of FGMs and all properties of them are temperature dependent. In this model, first order shear deformation theory is used for the FG face sheets while three-dimensional elasticity is used for the flexible core. Two spreading length scales are introduced and calculated for defined sandwich beam, which characterized the behavior of sandwich beam under local loads. The theoretical predictions in the present work are compared with FEM results by ANSYS and the results published in the literature for special cases, and reasonable agreement is found between them.