

## بررسی ارتعاشات یک سیستم غیرخطی دو درجه آزادی در شرایط تشدید هم‌زمان

در بررسی ارتعاشات سازه‌ها، مدل‌سازی خطی ممکن است غیردقیق و یا گمراه‌کننده باشد. وجود خصوصیات غیرخطی در یک سیستم موجب بروز رفتارهایی در پاسخ آن می‌شود که در سیستم‌های خطی وجود ندارد. در این مقاله ارتعاشات غیرخطی یک سیستم دو درجه آزادی شامل سیستم اصلی و جاذب، در حالت تشدید هم‌زمان ثانویه و داخلی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. فنرها و دمپرهای سیستم به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. با حل معادلات حرکت با روش اغتشاشی<sup>۳</sup> مقیاس زمانی متعدد<sup>۴</sup> و به دست آوردن معادلات پاسخ فرکانسی در حالت پایا، تاثیر پارامترهای سیستم روی دامنه سیستم اصلی و همچنین پایداری و انشعابات گره-زینی<sup>۵</sup> بررسی شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که در تشدید هم-زمان فوق‌هارمونیک<sup>۶</sup> و داخلی<sup>۷</sup>، به دلیل حضور جاذب و کاهش دامنه، اثرات غیرخطی کاهش یافته و سیستم رفتاری نزدیک به رفتار سیستم‌های خطی از خود نشان می‌دهد. همچنین، پارامترهای غیرخطی جاذب تاثیر اندکی روی دامنه سیستم اصلی دارد و با افزایش سختی غیرخطی سیستم اصلی، برخلاف حالت خطی، دامنه افزایش می‌یابد. از آنجایی که با افزایش دامنه در سیستم‌های غیرخطی امکان پدیده پرش<sup>۸</sup> وجود دارد، پایداری و محدوده پارامتر تنظیم که منجر به ایجاد سه پاسخ برای دامنه سیستم می‌شود نیز تعیین گردیده‌است.

سمیه اکرا احمدثانی<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

حسن نحوی<sup>۲</sup>

دانشیار

واژه‌های راهنما: ارتعاشات غیرخطی، جاذب، روش مقیاس زمانی متعدد، تشدید فوق هارمونیک

### ۱- مقدمه

ارتعاش یکی از پدیده‌های نامطلوب در زندگی ماست که باعث ایجاد اختلال، آسیب و خرابی دستگاه‌ها و مکانیزم‌ها می‌شود. به همین دلیل همواره هزینه، زمان و تلاش بسیاری برای رفع، کاهش یا کنترل ارتعاش صرف می‌شود. بسیاری از سیستم‌های کاربردی را می‌توان با یک سیستم یک درجه آزادی غیرخطی تقریب

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان [s\\_ahmadsani@yahoo.com](mailto:s_ahmadsani@yahoo.com)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان [hnavhi@cc.iut.ac.ir](mailto:hnavhi@cc.iut.ac.ir)

<sup>۳</sup> Perturbation

<sup>۴</sup> Multiple time scale

<sup>۵</sup> Saddle-node bifurcation

<sup>۶</sup> Super-harmonic resonance

<sup>۷</sup> Internal resonance

<sup>۸</sup> Jump

زد. وقوع پدیده‌هایی نظیر پرش، دو شاخه‌ای شدن، تشدید داخلی و آشوب<sup>۱</sup> در رفتار ارتعاشی سیستم‌های غیرخطی دیده می‌شود که مدل‌سازی خطی به دلیل نادیده گرفتن اثرات غیرخطی توانایی پیش‌بینی و توجیه آن را ندارد. در موارد تشدید، ارتعاش چنین سیستم‌هایی را می‌توان به کمک جاذب ارتعاشی به طور موثر کاهش داد. جاذب‌های ارتعاشی با انتقال انرژی از سیستم اصلی به جاذب، ارتعاشات را کاهش می‌دهند و به دلیل مزایایی همچون هزینه کم و عملکرد ساده، مورد توجه قرار گرفته‌اند. جاذب معمولاً به صورت یک جرم نسبتاً سبک در مقایسه با جرم اصلی تعریف می‌شود که با فنر و دمپر به سیستم اصلی متصل شده‌است. جاذب‌ها با هدف کاهش دامنه ارتعاشی دارای کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مکانیک و عمران هستند. طراحی جاذب‌ها پیشینه‌ای طولانی دارد. اولین جاذب ارتعاشی که شامل یک جرم- فنر متصل به دستگاه اصلی بود توسط Frahm پیشنهاد شده‌است.

Natsiavas [۱] با استفاده از روش میانگین‌گیری<sup>۲</sup> به بررسی نوسانات حالت پایا و پایداری جاذب‌های ارتعاشی غیرخطی پرداخت. Amer [۲] معادلات دیفرانسیل غیرخطی سه سیستم مختلف که بیانگر مدهای ارتعاشی متفاوت از تیر یک سر درگیر می‌باشند را به کمک حل تحلیلی و با روش مقیاس زمانی متعدد بررسی کرد. او با استفاده از حل عددی به بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر رفتار سیستم در حالت‌های مختلف تشدید پرداخت. Zhu و همکاران [۳] به بررسی دینامیک غیرخطی یک سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی با دمپر و فنر غیرخطی پرداختند. با استفاده از روش اغتشاشی میانگین‌گیری حل حالت پایای پریودیک معادلات حرکت استخراج شد و پایداری سیستم بررسی گردید. آن‌ها با رسم دیاگرام دوشاخه - شدگی، حرکات پریودیک، شبه پریودیک و آشوبناک را مورد مطالعه قرار دادند. EL-Bassiouny [۴] اثرات دمپر الاستومریک و غیرخطی از مرتبه دو و سه برای کنترل ارتعاشات پیچشی میل‌لنگ را در حالت تشدید اولیه بررسی کرد. Amer و EL- Sayed [۵] ارتعاشات یک سیستم غیرخطی متصل به جاذب با فنر غیرخطی را در حالت تشدید هم‌زمان اولیه و داخلی با روش اغتشاشی مقیاس زمانی متعدد بررسی کردند. آن‌ها به کمک معادلات پاسخ فرکانسی به دست آمده، اثر جاذب و پارامترهای سیستم را به صورت عددی بررسی و بهترین حالت را برای تشدید داخلی گزارش کردند. Eissa و Sayed [۶] یک سیستم فنر-آونگ غیرخطی سه درجه آزادی تحت نیروی تحریک پریودیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها موارد امکان‌پذیر برای تشدید را به صورت عددی بررسی و اثر پارامترهای مختلف را روی رفتار سیستم مطالعه کردند. همچنین با رسم نمودار صفحه-فاز برای دامنه حالت پایا، حالت‌های پایداری و ناپایداری سیستم را بررسی نمودند. Ji و Zhang [۷] کاهش ارتعاشات یک سیستم تحریک شده غیرخطی را به کمک جاذب ارتعاشی خطی در حالت تشدید اولیه مطالعه کردند. به کمک حل تقریبی مقیاس زمانی متعدد معادلات پاسخ فرکانسی استخراج شد و رفتارهای دینامیکی غیرخطی مانند نقاط دو شاخه شدگی، پدیده پرش و هیستریزیس<sup>۳</sup> بررسی گردید.

Ji و Zhang [۸] در تحلیل دیگری ارتعاشات یک سیستم غیرخطی متصل به جاذب خطی را در حالت تشدید فوق‌هارمونیک بررسی کردند و به کمک حل عددی نشان دادند که نمی‌توان هیچ مقدار بهینه‌ای برای ضرایب سختی و میرایی جاذب به منظور حذف ارتعاشات تشدید فوق‌هارمونیک به دست آورد.

<sup>1</sup> Chaos

<sup>2</sup> Averaging

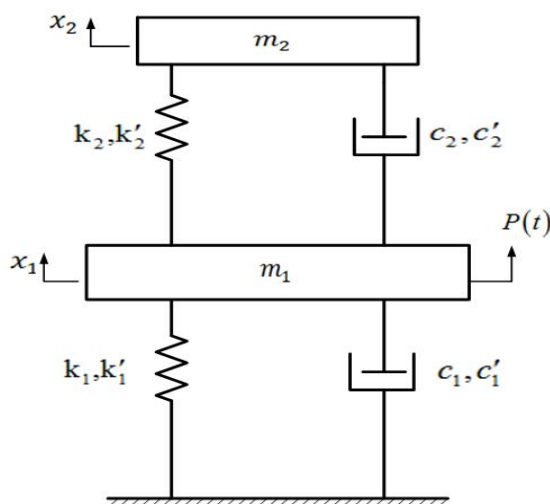
<sup>3</sup> Hysteresis

Elgoahary و El-Ganaini [۹] امکان کاهش ارتعاشات یک تیر تحت چند نیروی تحریک هارمونیک را در حالت تشدید هم‌زمان اولیه و داخلی مطالعه کردند. برای حل تقریبی از روش مقیاس زمانی متعدد تا مرتبه دو استفاده گردید و پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفت. Sayed و Kamel [۱۰] به بررسی ارتعاشات یک سیستم غیرخطی تحت تحریک‌های پرپودیک و پارامتریک با استفاده از جاذب ارتعاشی فعال پرداختند. پایداری حل پرپودیک غیرخطی در دو حالت تشدید داخلی ۱:۲ و ۱:۳ و همچنین پایداری حل عددی با استفاده از روش صفحه فاز و معادلات پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفت.

در این پژوهش، ارتعاشات یک سیستم غیرخطی ضعیف<sup>۱</sup> دو درجه آزادی در حالت تشدید هم‌زمان فوق-هارمونیک و داخلی، با استفاده از روش اغتشاشی مقیاس زمانی متعدد بررسی شده‌است. با به‌دست آوردن معادلات پاسخ فرکانسی، تاثیر پارامترهای خطی و غیرخطی روی دامنه نوسان سیستم، محدوده پایداری پاسخ و امکان وقوع پدیده پرش مورد مطالعه قرار گرفته‌است. مرور مقالات و تحقیقات قبلی نشان داده‌است که تحلیل حالت هم‌زمان تشدید فوق‌هارمونیک و داخلی برای یک سیستم دو درجه آزادی با پارامترهای غیرخطی تاکنون گزارش نشده‌است.

## ۲- مدل سازی ریاضی

در شکل (۱) مدل یک سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده‌است.  $m_1$  و  $m_2$  به ترتیب جرم سیستم اصلی با جابه‌جایی  $x_1$  و جرم جاذب با جابه‌جایی  $x_2$  است.  $k_i, k'_i, c_i, c'_i$  ( $i=1,2$ ) به ترتیب بیانگر سختی خطی، سختی غیرخطی، میرایی خطی و میرایی غیرخطی اند که در آن اندیس یک مربوط به سیستم اصلی و اندیس دو مربوط به جاذب است. سیستم اصلی تحت نیروی تحریک خارجی  $P(t) = \sum_{i=1}^n p_i \cos \Omega_i t$  قرار دارد که در آن  $\Omega$  فرکانس تحریک خارجی است.



شکل ۱- نمای شماتیک سیستم دو درجه آزادی غیرخطی

<sup>1</sup> Weakly nonlinear

نیروهای فنر و میرایی سیستم از درجه سه، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$F_i(x_i) = k_i x_i + k'_i x_i^3 \quad (۱)$$

$$R_i(x_i) = c_i \dot{x}_i + c'_i \dot{x}_i^2 \quad (۲)$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون معادلات حرکت سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k'_1 x_1^3 + c_1 \dot{x}_1 + c'_1 \dot{x}_1^2 - k_2 (x_2 - x_1) - k'_2 (x_2 - x_1)^3 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c'_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(x_2 - x_1)^2 = \sum_{j=1}^n p_j \cos \Omega_j t \quad (۳)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k'_2 (x_2 - x_1)^3 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c'_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(x_2 - x_1)^2 = 0 \quad (۴)$$

معادلات (۳) و (۴) را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \varepsilon \alpha_1 x_2 - \varepsilon \alpha_3 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon \zeta_4 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \varepsilon \zeta_5 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(x_2 - x_1)^2 + \varepsilon \alpha_4 x_1^3 + \varepsilon \zeta_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \zeta_6 \dot{x}_1 x_1^2 = \sum_{j=1}^n p_j \cos \Omega_j t \quad (۵)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + \varepsilon \alpha_2 (x_2 - x_1)^3 + \varepsilon \zeta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon \zeta_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(x_2 - x_1)^2 = 0 \quad (۶)$$

که  $\varepsilon$  نشان دهنده پارامتر اغتشاشی بدون بعد کوچک است و بقیه پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \frac{k_2}{m_2} & \omega_1^2 &= \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \alpha_1 &= \frac{k_2}{m_1} & \alpha_2 &= \frac{k'_2}{m_2} & \alpha_3 &= \frac{k'_2}{m_1} & \alpha_4 &= \frac{k'_1}{m_1} \\ \zeta_1 &= \frac{c_1}{m_1} & \zeta_2 &= \frac{c_2}{m_2} & \zeta_3 &= \frac{c'_2}{m_2} & \zeta_4 &= \frac{c_2}{m_1} & \zeta_5 &= \frac{c'_2}{m_1} & \zeta_6 &= \frac{c'_1}{m_1} \end{aligned} \quad (۷)$$

### ۳- تحلیل مساله

#### ۳-۱- روش مقیاس زمانی متعدد

برای حل معادلات حرکت از روش مقیاس زمانی متعدد استفاده می‌شود. در این روش، حل معادله غیرخطی توسط چند جمله اول یک بسط مجانبی بیان می‌شود. فرض می‌شود معادلات (۵) و (۶) با تقریب مرتبه یک اسیلون، یعنی  $O(\varepsilon^1)$ ، پاسخی به فرم زیر دارند [۱۱]:

$$x_1(t, \varepsilon) = x_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{11}(T_0, T_1) + \dots \quad (۸-الف)$$

$$x_2(t, \varepsilon) = x_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{21}(T_0, T_1) + \dots \quad (۸-ب)$$

که در آن  $T_0 = t$  مقیاس زمانی سریع و وابسته به تغییراتی است که در فرکانس طبیعی سیستم اصلی  $\omega_1$  و فرکانس تحریک خارجی  $\Omega$  رخ می‌دهد.  $T_1 = \varepsilon t$  یک مقیاس زمانی آهسته و وابسته به تغییرات دامنه و فاز

است که به علت وجود عوامل غیرخطی، میرایی و تشدید ایجاد می‌گردد. مشتقات اول و دوم نسبت به زمان  $t$  را می‌توان به شکل مشتقات جزئی نسبت به  $T_0$  و  $T_1$ ، با تقریب مرتبه یک، به صورت زیر بسط داد:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (9)$$

که در آن  $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ . با جایگذاری معادلات (۸) و (۹) در معادلات حرکت (۵) و (۶) و با برابر قراردادن ضرایب  $\varepsilon$  با توان‌های مساوی، نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon^0: D_0^2 x_{10} + \omega_2^2 x_{10} = p \cos \Omega t \quad (10)$$

$$D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 x_{20} = \omega_2^2 x_{10} \quad (11)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = -2D_0 D_1 x_{10} + \alpha_1 x_{20} + \alpha_3 (x_{20} - x_{10})^3 + \zeta_4 (D_0 x_{20} - D_0 x_{10}) - \alpha_4 x_{10}^3 \\ + \zeta_5 (x_{20} - x_{10})^2 (D_0 x_{20} - D_0 x_{10}) - \zeta_1 D_0 x_{10} - \zeta_6 x_{10}^2 D_0 x_{10} \quad (12)$$

$$D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} = -2D_0 D_1 x_{20} + \omega_2^2 x_{11} - \alpha_2 (x_{20} - x_{10})^3 - \zeta_2 (D_0 x_{20} - D_0 x_{10}) \\ - \zeta_3 (x_{20} - x_{10})^2 (D_0 x_{20} - D_0 x_{10}) \quad (13)$$

پاسخ عمومی معادلات (۱۰) و (۱۱) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x_{10} = A_{10}(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + Fe^{i\Omega T_0} + c.c \quad (14)$$

$$x_{20} = A_{20}(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + \Gamma_1 A_{10}(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \Gamma_2 P e^{i\Omega T_0} + c.c \quad (15)$$

که در آن  $\Gamma_1 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$ ،  $\Gamma_2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \Omega^2}$ ،  $F = \frac{p}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$ ،  $A_{10}$  و  $A_{20}$  توابعی از  $T_1$  و  $\bar{A}_{10}$  و  $\bar{A}_{20}$  به ترتیب مزدوج مختلط  $A_{10}$  و  $A_{20}$  می‌باشند.

با جایگذاری معادلات (۱۴) و (۱۵) در معادله (۱۲) و انجام محاسبات لازم، فرم کلی پاسخ  $x_{11}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{11} = B_1 e^{i\omega_1 T_0} + B_2 e^{i\omega_2 T_0} + B_3 e^{i\Omega T_0} + B_4 e^{3i\omega_1 T_0} + B_5 e^{3i\omega_2 T_0} + B_6 e^{3i\Omega T_0} + B_7 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0} + B_8 e^{i(\omega_1 - 2\omega_2) T_0} \\ + B_9 e^{i(\omega_2 + 2\omega_1) T_0} + B_{10} e^{i(\omega_2 - 2\omega_1) T_0} + B_{11} e^{i(2\omega_1 + \Omega) T_0} + B_{12} e^{i(2\omega_1 - \Omega) T_0} + B_{13} e^{i(2\omega_2 + \Omega) T_0} + B_{14} e^{i(2\omega_2 - \Omega) T_0} \\ + B_{15} e^{i(\omega_1 + 2\Omega) T_0} + B_{16} e^{i(\omega_1 - 2\Omega) T_0} + B_{17} e^{i(\omega_2 + 2\Omega) T_0} + B_{18} e^{i(\omega_2 - 2\Omega) T_0} + B_{19} e^{i(\Omega + \omega_1 + \omega_2) T_0} + B_{20} e^{i(\Omega + \omega_1 - \omega_2) T_0} \\ + B_{21} e^{i(\Omega - \omega_1 + \omega_2) T_0} + B_{22} e^{i(\Omega - \omega_1 - \omega_2) T_0} + c.c \quad (16)$$

در معادله فوق  $B_i$  ( $i=1-22$ ) توابعی بر حسب  $T_1$  هستند.

برای به دست آوردن پاسخ  $x_{21}$ ، با جایگذاری معادلات (۱۶)-(۱۴) در معادله (۱۳) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} x_{21} = & H_1 e^{i\omega_2 T_0} + H_2 e^{i\omega_1 T_0} + H_3 e^{i\Omega T_0} + H_4 e^{3i\omega_1 T_0} + H_5 e^{3i\omega_2 T_0} + H_6 e^{3i\Omega T_0} + H_7 e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + H_8 e^{i(\omega_1-2\omega_2)T_0} \\ & + H_9 e^{i(\omega_2+2\omega_1)T_0} + H_{10} e^{i(\omega_2-2\omega_1)T_0} + H_{11} e^{i(2\omega_1+\Omega)T_0} + H_{12} e^{i(2\omega_1-\Omega)T_0} + H_{13} e^{i(2\omega_2+\Omega)T_0} + H_{14} e^{i(2\omega_2-\Omega)T_0} \\ & + H_{15} e^{i(\omega_1+2\Omega)T_0} + H_{16} e^{i(\omega_1-2\Omega)T_0} + H_{17} e^{i(\omega_2+2\Omega)T_0} + H_{18} e^{i(\omega_2-2\Omega)T_0} + H_{19} e^{i(\Omega+\omega_1+\omega_2)T_0} + H_{20} e^{i(\Omega+\omega_1-\omega_2)T_0} \\ & + H_{21} e^{i(\Omega-\omega_1+\omega_2)T_0} + H_{22} e^{i(\Omega-\omega_1-\omega_2)T_0} + c.c \end{aligned} \quad (17)$$

در معادله فوق  $H_i$  ( $i=1-22$ ) توابعی بر حسب  $T_1$  هستند.

### ۳-۲- تشدید همزمان فوق هارمونیک و داخلی

برای تحلیل ارتعاشی سیستم غیرخطی مورد نظر حالت همزمان تشدید فوق هارمونیک ( $\Omega \cong \frac{1}{3}\omega_1$ ) و تشدید داخلی ( $\omega_2 \cong 3\omega_1$ ) در نظر گرفته می شود. به منظور بیان نزدیکی مقادیر فرکانس های طبیعی سیستم اصلی، جاذب و نیروی تحریک به یکدیگر از پارامتر تنظیم استفاده می شود. با معرفی پارامترهای تنظیم  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{3}\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \\ \omega_2 &= 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \end{aligned} \quad (18)$$

با اعمال حالت تشدید همزمان فوق در معادلات (۱۲) و (۱۳)، عبارتهای سکولار برای پاسخ های  $x_{21}$  و  $x_{11}$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} & -2i\omega_1 A'_{10} + \alpha_1 \Gamma_1 A_{10} + 3\alpha_3 A_{10}^2 \overline{A_{10}} (\Gamma_1 - 1)^3 + 6\alpha_3 F^2 A_{10} (\Gamma_1 - 1)(\Gamma_2 - 1)^2 + 6\alpha_3 A_{10} A_{20} \overline{A_{20}} (\Gamma_1 - 1) \\ & + \zeta_4 i\omega_1 A_{10} (\Gamma_1 - 1) + \zeta_5 i\omega_1 A_{10}^2 \overline{A_{10}} (\Gamma_1 - 1)^3 + 2\zeta_5 i\omega_1 A_{10} F^2 (\Gamma_1 - 1)(\Gamma_2 - 1)^2 + 2\zeta_5 i\omega_1 A_{10} A_{20} \overline{A_{20}} (\Gamma_1 - 1) \\ & - 3\alpha_4 A_{10}^2 \overline{A_{10}} - 6\alpha_4 A_{10} F^2 - \zeta_1 i\omega_1 A_{10} - \zeta_6 i\omega_1 A_{10}^2 \overline{A_{10}} - 2\zeta_6 i\omega_1 A_{10} F^2 \\ & + [\alpha_3 F^3 (\Gamma_2 - 1)^3 + \zeta_5 i\Omega F^3 (\Gamma_2 - 1)^3 - \alpha_4 F^3 - \zeta_6 i\Omega F^3] e^{i\sigma_1 T_1} \\ & + [3\alpha_3 \overline{A_{10}}^2 A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 + \zeta_5 i\omega_2 \overline{A_{10}}^2 A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 - 2\zeta_5 i\omega_1 \overline{A_{10}}^2 A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2] e^{i\sigma_2 T_1} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -2i\omega_2 A'_{20} - 3\alpha_2 A_{20}^2 \overline{A_{20}} - 6\alpha_2 A_{20} F^2 (\Gamma_2 - 1)^2 - 6\alpha_2 A_{10} \overline{A_{10}} A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 - \zeta_2 i\omega_2 A_{20} \\ & - 2\zeta_3 i\omega_2 A_{10} \overline{A_{10}} A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 - 2\zeta_3 i\omega_2 A_{20} F^2 (\Gamma_2 - 1)^2 - \zeta_3 i\omega_2 A_{20}^2 \overline{A_{20}} - \Gamma_1 \alpha_1 A_{20} - 3\Gamma_1 \alpha_3 A_{20}^2 \overline{A_{20}} \\ & - 6\Gamma_1 \alpha_3 A_{20} F^2 (\Gamma_2 - 1)^2 - 6\Gamma_1 \alpha_3 A_{10} \overline{A_{10}} A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 - \Gamma_1 \zeta_4 i\omega_2 A_{20} - 2\Gamma_1 \zeta_5 i\omega_2 A_{10} \overline{A_{10}} A_{20} (\Gamma_1 - 1)^2 \\ & - 2\Gamma_1 \zeta_5 i\omega_2 A_{20} F^2 (\Gamma_2 - 1)^2 - \Gamma_1 \zeta_5 i\omega_2 A_{20}^2 \overline{A_{20}} + [-\alpha_2 A_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 - \zeta_3 i\omega_1 A_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 \\ & - \frac{\omega_2^2}{8\omega_1^2} (\alpha_3 A_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 + \zeta_5 i\omega_1 A_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 - \alpha_4 A_{10}^3 - \zeta_6 i\omega_1 A_{10}^3)] e^{-i\sigma_2 T_1} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

فرم قطبی پارامترهای  $A_{10}$  و  $A_{20}$  به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{m0} = \frac{1}{2} a_m (T_1) e^{i\mu_m(T_1)} \quad (m=1,2) \quad (21)$$

که  $a_m$  و  $\mu_m$  پارامترهایی با مقادیر حقیقی هستند. با جایگذاری رابطه (۲۱) در معادلات (۱۹) و (۲۰) و جداسازی عبارتهای حقیقی و مجازی آن می‌توان نوشت:

$$a'_{10} = z_1 a_{10} + z_2 a_{10}^3 + z_3 a_{10} a_{20}^2 + q_1 \sin \gamma_1 + q_2 \cos \gamma_1 + a_{10}^2 a_{20} (q_3 \sin \gamma_2 + q_4 \cos \gamma_2) \quad (22)$$

$$a_{10} \mu'_1 = z_4 a_{10} + z_5 a_{10}^3 + z_6 a_{10} a_{20}^2 - q_1 \cos \gamma_1 + q_2 \sin \gamma_1 - a_{10}^2 a_{20} (q_3 \cos \gamma_2 - q_4 \sin \gamma_2) \quad (23)$$

$$a'_{20} = u_1 a_{20} + u_2 a_{20}^3 + u_3 a_{10}^2 a_{20} - a_{10}^3 (q_5 \sin \gamma_2 - q_6 \cos \gamma_2) \quad (24)$$

$$a_{20} \mu'_2 = u_4 a_{20} + u_5 a_{20}^3 + u_6 a_{10}^2 a_{20} - a_{10}^3 (q_5 \cos \gamma_2 + q_6 \sin \gamma_2) \quad (25)$$

در معادلات فوق فرض شده:

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \mu_1,$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_1 + \mu_2 - 3\mu_1 \quad (26)$$

در معادلات (۲۲)-(۲۵) از متغیرهای  $z_i$ ،  $u_i$  و  $q_i$  ( $i=1-6$ )، به منظور ساده‌سازی در بیان معادلات استفاده گردیده و تعاریف مربوط به آنها در پیوست ارائه شده‌اند.

برای به‌دست آوردن حل حالت دائم معادلات (۲۲)-(۲۵)، از شرط  $a'_i = \gamma'_i = 0$  استفاده می‌شود. طبق این شرط می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mu'_1 = \sigma_1,$$

$$\mu'_2 = 3\sigma_1 - \sigma_2 \quad (27)$$

معادلات پاسخ فرکانسی با توجه به مقادیر دامنه سیستم اصلی و جاذب در سه حالت زیر قابل بررسی است:

$$i) \quad a_{10} \neq 0, \quad a_{20} = 0$$

$$ii) \quad a_{10} = 0, \quad a_{20} \neq 0 \quad (\text{حالت ایده‌آل})$$

$$iii) \quad a_{10} \neq 0, \quad a_{20} \neq 0 \quad (\text{حالت واقعی}) \quad (28)$$

با بررسی معادلات پاسخ فرکانسی برای حالت واقعی (iii)، مشخص شد این حالت به‌ازای پارامترهای تنظیم حقیقی موقعی جواب دارد که دامنه جاذب صفر باشد. لذا در این مقاله حالت (i) که در آن دامنه سیستم

اصلی غیر صفر و دامنه جاذب صفر است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با جایگذاری این شرط در معادلات (۲۵)-(۲۲) و اعمال شرط حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(z_1 + z_2 a_{10}^2)^2 a_{10}^2 + (z_4 - \sigma_1 + z_5 a_{10}^2)^2 a_{10}^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad (29)$$

که در آن :

$$q_1 = \frac{\alpha_3 F^3}{\omega_1} (\Gamma_2 - 1)^3 - \frac{\alpha_4 F^3}{\omega_1},$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \zeta_5 F^3 (\Gamma_2 - 1)^3 - \frac{1}{3} \zeta_6 F^3$$

### ۳-۳- پایداری حالت پایا (دائم)

برای بررسی پایداری حل حالت دائم سیستم، از روش Andronov-Vitt [۱۱] استفاده می‌شود. در این روش یک اغتشاش کوچک به صورت زیر به معادلات (۲۵)-(۲۲) وارد می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_0 + a_1 \\ a_{20} &= b_0 + b_1 \\ \gamma_1 &= \eta_0 + \eta_1 \\ \gamma_2 &= \beta_0 + \beta_1 \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن پارامترهای به دست آمده از حل حالت دائم و  $a_1, b_1, \eta_1, \beta_1$  اغتشاشات کوچکی هستند که به حل وارد می‌شوند. با اعمال حل حالت دائم در معادلات و اعمال شرط (i)، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_{1,2} = 2a_0^2 z_2 + z_1 \pm \sqrt{z_2^2 a_0^4 - 3a_0^4 z_5^2 + 4z_5 a_0^2 \sigma_1 - 4z_4 z_5 a_0^2 - \sigma_1^2 + 2z_4 \sigma_1 - z_4^2}, \quad \lambda_3 = u_1 + u_3 a_0^2 \quad (31)$$

شرط پایداری آن است که مقادیر ویژه در صورت حقیقی بودن منفی و در صورت موهومی بودن، قسمت حقیقی آن منفی باشد. این موضوع در بخش مثال عددی بررسی خواهد شد.

### ۳-۴- انشعابات نقاط گره-زینی

برای تعیین امکان وجود انشعاب گره-زینی، با اعمال شرط  $\frac{d\sigma_1}{da_{10}^2} = 0$  در معادله پاسخ فرکانسی (۲۹) می‌توان نتیجه گرفت که این انشعاب در نقاط مربوط به پارامترهای تنظیم زیر رخ می‌دهد:

$$\sigma_1^\pm = z_4 + 2z_5 a_{10}^2 \pm \sqrt{z_5^2 a_{10}^4 - (z_1 + z_2 a_{10}^2)(z_1 + 3z_2 a_{10}^2)} \quad (32)$$



اگر  $(z_5^2 - 3z_2^2)a_{10}^4 > 4z_1z_2a_{10}^2 + z_1^2$  باشد آنگاه در بازه  $\sigma_1^- < \sigma_1 < \sigma_1^+$  سه پاسخ حقیقی برای  $a_{10}$  وجود دارد که دو پاسخ پایدار و دیگری ناپایدار است. در صورتی که  $(z_5^2 - 3z_2^2)a_{10}^4 = 4z_1z_2a_{10}^2 + z_1^2$  باشد، آنگاه دامنه بحرانی که باعث ظاهر شدن انشعابات گره-زینی می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

$$a_{10}^2 = \frac{2z_1z_2 \pm z_1\sqrt{z_2^2 + z_5^2}}{(z_5^2 - 3z_2^2)} \quad (33)$$

که در پارامتر تنظیم  $\sigma_1 = z_4 + 2z_5a_{10}^2$  رخ می‌دهد.

با استفاده از معادله پاسخ فرکانسی (۲۹)، دامنه ماکزیمم سیستم اصلی در حضور جاذب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{10}^2)_P = \sqrt[3]{\frac{q_1^2 + q_2^2}{2z_2^2} + \frac{z_1^3}{27z_2^3} + \left( \left( \frac{q_1^2 + q_2^2}{2z_2^2} + \frac{z_1^3}{27z_2^3} \right)^2 - \frac{z_1^6}{729z_2^6} \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2z_1}{3z_2} + \frac{z_1^2}{9z_2^2 \sqrt[3]{\frac{q_1^2 + q_2^2}{2z_2^2} + \frac{z_1^3}{27z_2^3} + \left( \left( \frac{q_1^2 + q_2^2}{2z_2^2} + \frac{z_1^3}{27z_2^3} \right)^2 - \frac{z_1^6}{729z_2^6} \right)^{\frac{1}{2}}}} \quad (34)$$

در صورتی که ماکزیمم دامنه سیستم اصلی از دامنه بحرانی به دست آمده از معادله (۳۳) بیشتر باشد، آنگاه سه پاسخ برای دامنه سیستم اصلی وجود دارد و شاهد پدیده پرش در سیستم خواهیم بود.

#### ۴- مثال عددی

به منظور بررسی رفتار سیستم در حالت تشدید هم‌زمان فوق‌هارمونیک و داخلی، مقادیر جدول (۱) برای پارامترهای سیستم دو درجه آزادی در نظر گرفته شده و نتایج با رسم نمودار پاسخ فرکانسی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌است.

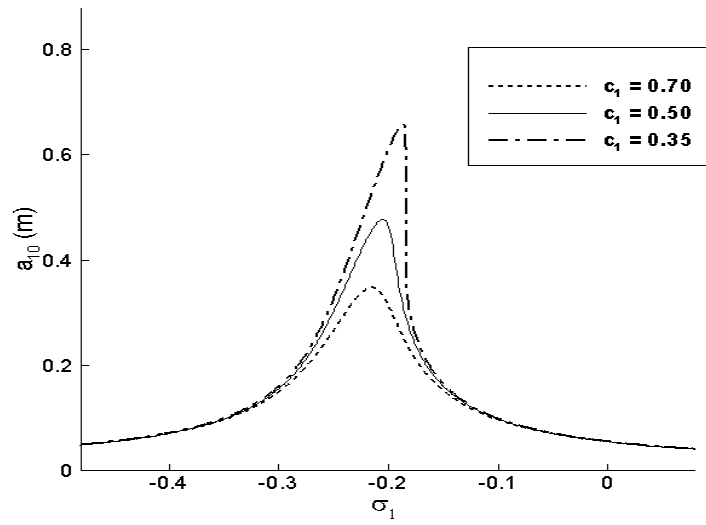
جدول ۱- مقادیر پارامترهای به کار رفته در سیستم دو درجه آزادی

$m_1$	$m_2$	$k_1$	$k'_1$	$k_2$	$k'_2$	$c_1$	$c'_1$	$c_2$	$c'_2$
(kg)	(kg)	(N/m)	(N/m <sup>3</sup> )	(N/m)	(N/m <sup>3</sup> )	(Ns/m)	(Ns/m <sup>3</sup> )	(Ns/m)	(Ns/m <sup>3</sup> )
10	0.1	55	6	5.45	2	0.5	0.1	0.06	0.01

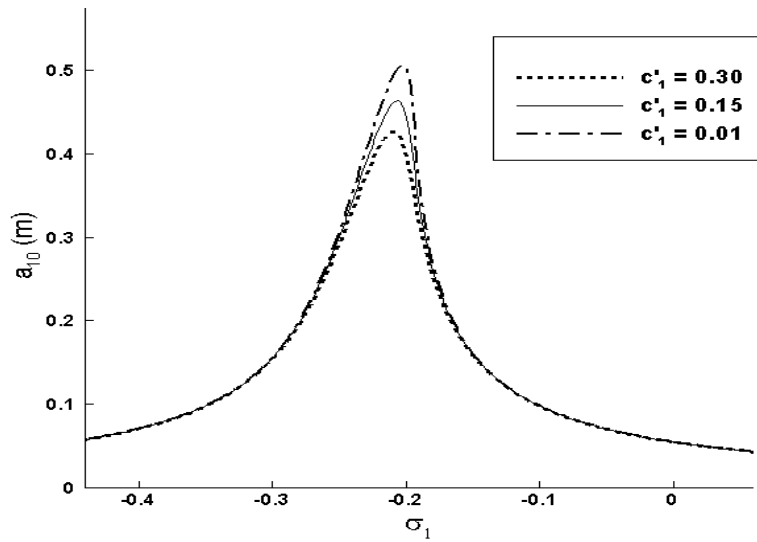
با استفاده از مقادیر پارامترها می‌توان نتیجه گرفت  $\omega_1 = 2.4587(\text{rad/s})$ ،  $\omega_2 = 7.3824(\text{rad/s})$  و شرط تشدید داخلی  $3\omega_1 \approx \omega_2$  حفظ شده است. همچنین مقدار عددی فرکانس تحریک  $\Omega \approx 0.8195(\text{rad/s})$  خواهد بود. نیروی  $p = 4N$  به سیستم اعمال می‌شود. در شکل‌های (۲-۷) با رسم منحنی پاسخ فرکانسی، تاثیر پارامترهای سیستم روی دامنه سیستم اصلی، در حالت  $a_{20} = 0$ ،  $a_{10} \neq 0$  مشاهده می‌شود.

شکل (۲) تاثیر میرایی خطی سیستم اصلی را روی دامنه سیستم اصلی در حالت پایا نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش  $c_1$ ، ماکزیمم دامنه سیستم اصلی افزایش یافته و با خم شدن نمودار به سمت راست باعث ایجاد ناحیه سه پاسخی یا پرش می‌شود. با کاهش ضریب میرایی غیرخطی سیستم اصلی نیز مطابق شکل (۳) دامنه سیستم اصلی افزایش می‌یابد که البته تاثیر  $c_1$  در افزایش دامنه از تاثیر  $c_1'$  بیشتر است. در شکل (۴) مشاهده می‌شود با افزایش  $c_2$ ، دامنه سیستم اصلی اندکی کاهش می‌یابد، به طوری که با نزدیک به صفر در نظر گرفتن ضریب میرایی خطی سیستم اصلی، افزایش دامنه از  $a_{10} \approx 0.52(m)$  تجاوز نمی‌کند. با توجه به شکل (۵) مشاهده می‌شود با تغییر در مقدار میرایی غیرخطی جاذب،  $c_2'$ ، دامنه سیستم اصلی بدون تغییر باقی می‌ماند. با توجه به پارامترهای تعریف شده در معادله پاسخ فرکانسی، ضریب عبارت‌هایی که عامل میرایی غیرخطی جاذب در آن‌ها حضور دارد بسیار کوچک و نزدیک به صفر است و لذا نمودار با تغییر  $c_2'$  تغییری نمی‌کند.

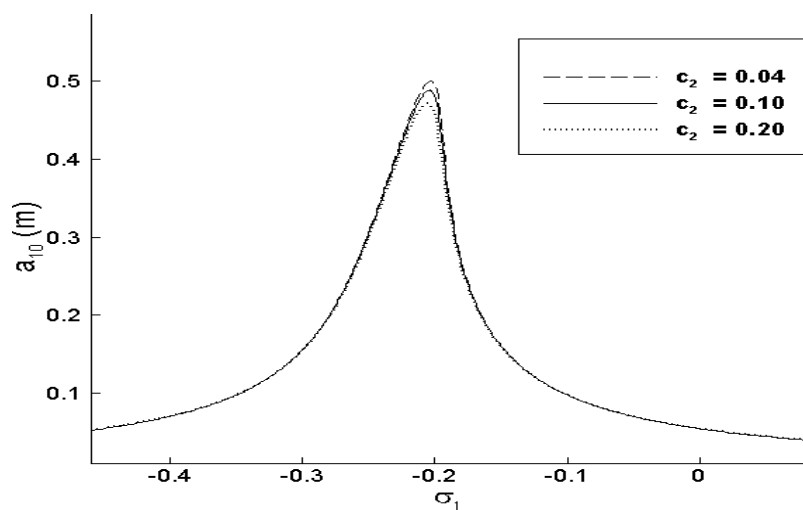
شکل (۶) تغییرات دامنه بازای مقادیر مختلف سختی خطی سیستم اصلی و جاذب را نشان می‌دهد. با توجه به تعریف فرکانس‌های طبیعی، این اعداد به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که نسبت فرکانس‌های طبیعی در تشدید داخلی حفظ شود. در این حالت ماکزیمم دامنه سیستم اصلی با افزایش سختی خطی جاذب و سیستم اصلی کاهش می‌یابد. همچنین منحنی به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند و مقدار مطلق پارامتر تنظیم متناظر با دامنه ماکزیمم بزرگتر می‌شود. نمودار تغییرات دامنه نسبت به  $k_1'$  در شکل (۷) نشان می‌دهد که با افزایش سختی غیرخطی سیستم اصلی، ماکزیمم دامنه سیستم افزایش می‌یابد و با انتقال منحنی به سمت چپ، مقدار مطلق پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  افزایش یافته و از حالت تشدید دور می‌گردد. همچنین در شکل (۸) مشاهده می‌شود با افزایش  $k_2'$  ماکزیمم دامنه سیستم تغییری نمی‌کند.



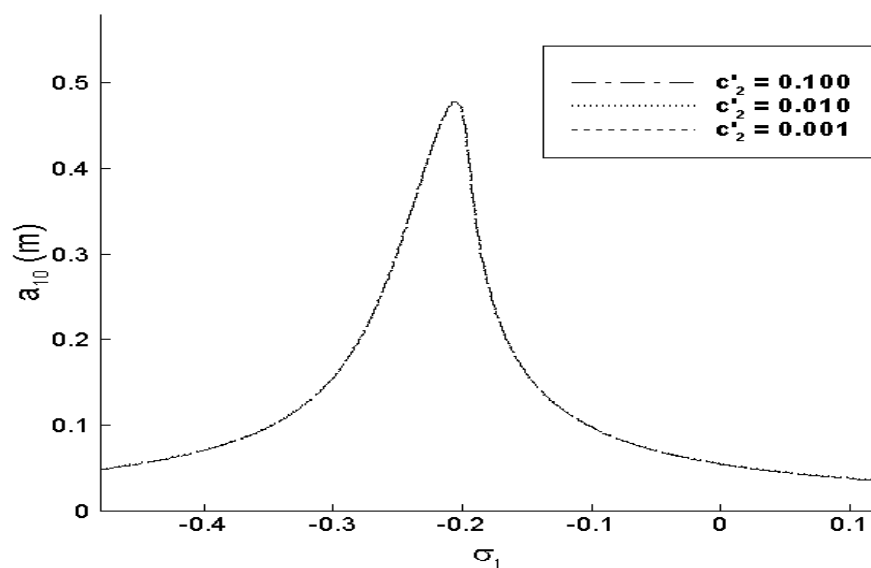
شکل ۲- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  (rad/s)، برای مقادیر مختلف میرایی خطی سیستم اصلی  $c_1$  بر حسب  $Ns/m$



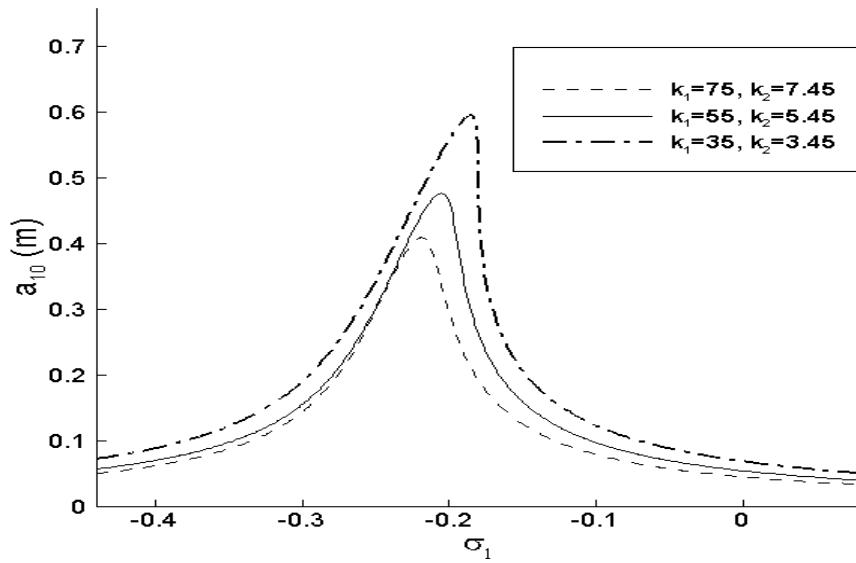
شکل ۳- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  (rad/s)، برای مقادیر مختلف میرایی غیرخطی سیستم اصلی  $c'_1$  بر حسب  $Ns/m^3$



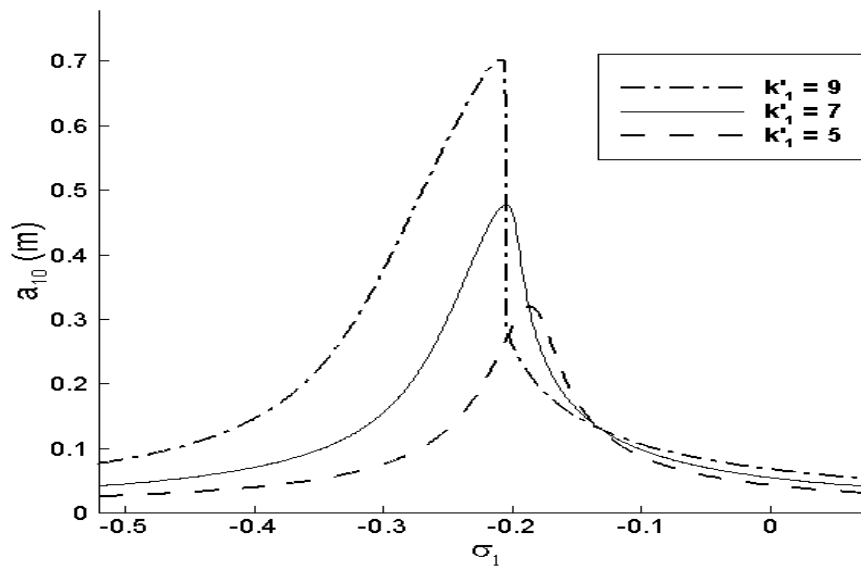
شکل ۴- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  ( $rad/s$ )، برای مقادیر مختلف میرایی خطی جاذب  $c_2$  بر حسب  $Ns/m$



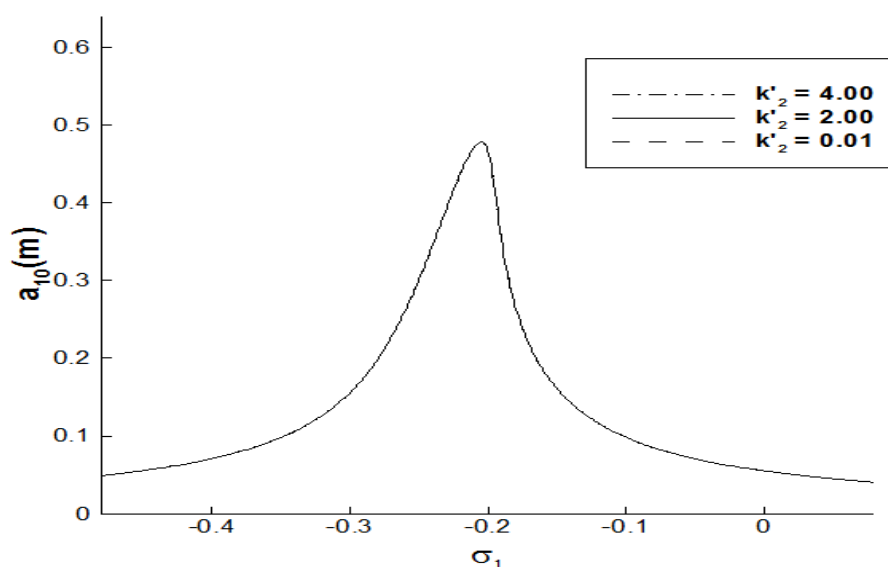
شکل ۵- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  ( $rad/s$ )، برای مقادیر مختلف میرایی غیرخطی جاذب  $c'_2$  بر حسب  $Ns/m^3$



شکل ۶- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  (rad/s)، برای مقادیر مختلف سختی خطی جاذب و سیستم اصلی  $k_1, k_2$  بر حسب  $N/m$



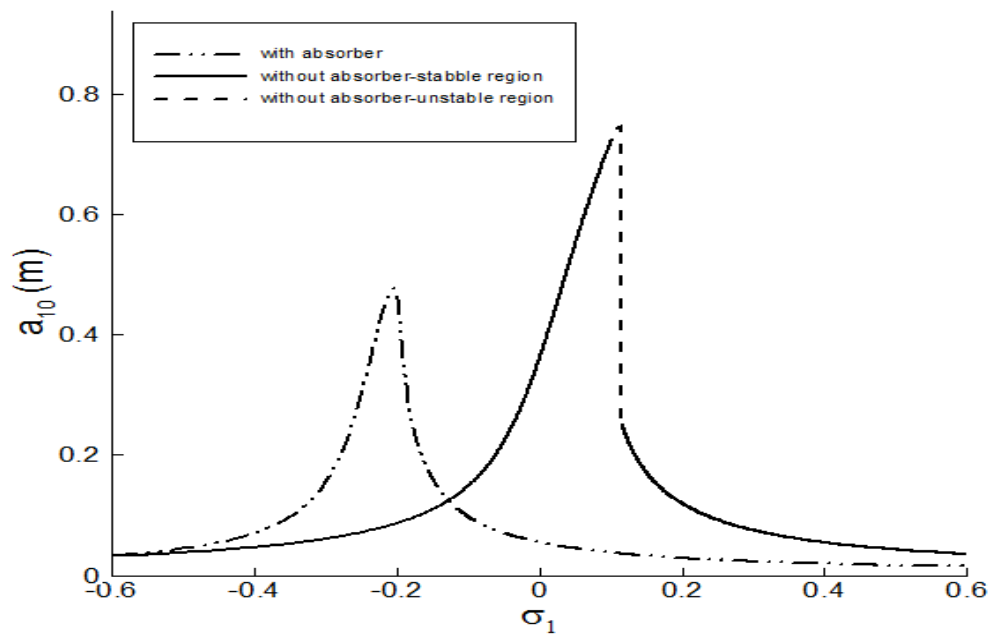
شکل ۷- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  (rad/s)، برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی سیستم اصلی  $k'_1$  بر حسب  $N/m^3$



شکل ۸- نمودار تغییرات دامنه سیستم اصلی نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma_1$  (rad/s)، برای مقادیر مختلف

سختی غیرخطی جاذب  $k'_2$  بر حسب  $N/m^3$ .

شکل (۹) منحنی پاسخ فرکانسی سیستم اصلی غیرخطی را در حالت با جاذب و بدون جاذب نشان می‌دهد. اگر جاذب به سیستم اصلی متصل نباشد، ماکزیمم دامنه سیستم اصلی  $0.7462(m)$  و پارامتر تنظیم متناظر با آن  $0.1131(rad/s)$  خواهد بود. مقدار دامنه بحرانی که باعث ظاهر شدن انشعابات گره-زینی می‌شود  $0.4263(m)$  است. از آنجا که ماکزیمم دامنه سیستم اصلی در حالت بدون جاذب از این مقدار بزرگ‌تر است، ناحیه سه پاسخی به وجود می‌آید. برای منحنی پاسخ فرکانسی در محدوده  $0.0967 < \sigma_1 < 0.1152$  سه پاسخی برای دامنه سیستم اصلی وجود دارد که یک پاسخ ناپایدار بوده و دو پاسخ پایدارند. با اتصال جاذب، ماکزیمم دامنه سیستم اصلی کاهش می‌یابد و به  $0.4778(m)$  می‌رسد. رفتار سیستم نزدیک به رفتار سیستم‌های خطی است و حداکثر دامنه در پارامتر تنظیم بزرگتری اتفاق می‌افتد. در این حالت مقدار دامنه بحرانی که باعث ظاهر شدن انشعابات گره-زینی می‌شود  $0.5407(m)$  است و چون حداکثر دامنه کمتر از مقدار بحرانی آن است، پدیده پرش حذف می‌شود و ناحیه سه پاسخی در سیستم وجود نخواهد داشت.



شکل ۹- منحنی پاسخ فرکانسی برای سیستم اصلی در حالت تشدید هم‌زمان ( $\Omega \cong \frac{1}{3}\omega_1, \omega_2 \cong 3\omega_1$ )

در دو حالت با جاذب و بدون جاذب

با جایگذاری مقادیر عددی پارامترها در معادلات (۳۱)، مقادیر ویژه سیستم اصلی در حضور جاذب به‌ازای پارامترهای تنظیم مختلف و برای مقادیر حقیقی دامنه به صورت جدول (۲) خواهد بود. با توجه به این‌که قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه منفی است، در نتیجه سیستم در حالت با جاذب بازای تمامی مقادیر پارامتر تنظیم دارای حرکت پایدار خواهد بود و محدوده سه پاسخی برای دامنه سیستم حذف خواهد شد.

جدول ۲- مقادیر ویژه سیستم در حضور جاذب برای پارامترهای تنظیم مختلف

$\sigma_1 (rad / s)$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
-0.35	$-0.02603 + 0.12577i$	$-0.02603 - 0.12577i$	-0.30338
-0.20	-0.01216	-0.04094	-0.30346
-0.10	$-0.02603 - 0.12423i$	$-0.02603 + 0.12423i$	-0.30338
0.00	$-0.02602 - 0.22544i$	$-0.02602 + 0.22544i$	-0.30338
0.10	$-0.02601 - 0.32573i$	$-0.02601 + 0.32573i$	-0.30338
0.20	$-0.02601 + 0.42584i$	$-0.02601 - 0.42584i$	-0.30338

جدول (۳) مقادیر ویژه سیستم اصلی بدون جاذب را برای پارامترهای تنظیم مختلف نشان می دهد. در حالت بدون جاذب، سیستم مورد بررسی به سیستم یک درجه آزادی تبدیل می گردد. همان طور که مشاهده می شود در خارج از محدوده سه پاسخی پارامتر تنظیم، تمامی مقادیر ویژه منفی است که بیانگر پایداری سیستم در این ناحیه است.

در  $\sigma_1 = 0.0967(\text{rad/s})$  و  $\sigma_1 = 0.1152(\text{rad/s})$  یکی از مقادیر ویژه حقیقی است که مربوط است به نقاط انشعاب زینی. همچنین  $\sigma_1 = 0.1050(\text{rad/s})$  در ناحیه سه پاسخی قرار دارد.

**جدول ۳-** مقادیر ویژه سیستم اصلی بدون جاذب برای پارامترهای تنظیم مختلف

$\sigma_1(\text{rad/s})$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0.0944	$-0.0279 + 0.0392i$	$-0.0279 + 0.0392i$
0.0945	$-0.0279 + 0.359i$	$-0.0279 - 0.359i$
0.0967	-0.0024	0.0519
0.1050	$-0.0280 - 0.0295i$	$-0.0280 + 0.0295i$
	0.0147	-0.0699
	$-0.0269 + 0.0449i$	$-0.0269 - 0.0449i$
0.1152	-0.0053	0.0508
0.1180	$-0.3065 + 0.5469i$	$-0.3065 - 0.5469i$
0.1190	$-0.3061 - 0.6233i$	$-0.3061 + 0.6233i$

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات یک سیستم غیرخطی متصل به جاذب ارتعاشی غیرخطی، در حالت تشدید هم زمان فوق هارمونیک و داخلی بررسی شد. برای حل تقریبی معادلات حرکت غیرخطی سیستم از روش اغتشاشی مقیاس زمانی متعدد تا تقریب مرتبه یک استفاده شد. با استخراج معادلات پاسخ فرکانسی، تاثیر پارامترهای سیستم بر روی پاسخ و پایداری آن بررسی شد. با توجه به نتایج به دست آمده می توان دریافت که برای حالت تشدید هم زمان مورد بررسی، پارامترهای غیرخطی جاذب تاثیر اندکی در کاهش دامنه سیستم اصلی



دارند. بنابراین برای ایجاد شرایط بهینه به منظور کاهش ارتعاشات در سیستم، می‌توان از جاذب‌های خطی استفاده نمود. همچنین از آنجایی که برخلاف حالت خطی، افزایش سختی غیرخطی سیستم اصلی موجب افزایش دامنه می‌شود، کاهش سختی غیرخطی توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است نتایج ارائه شده برای سیستم‌های غیرخطی ضعیف کاربرد دارد.

## مراجع

- [1] Natsiavas, S., "Steady State Oscillations and Stability of Nonlinear Dynamic Vibration Absorbers", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 156, No. 2, pp. 227-245, (1992).
- [2] Amer, Y.A., "On the Solution of Parametrically Excited Different System of Nonlinear Differential Equations", Ph. D thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science, Zagazig University, Egypt, (2002).
- [3] Zhu, S.J., Zheng, Y.F., and Fu, Y.M., "Analysis of Nonlinear Dynamics of a Two-degree-of-freedom Vibration System with Nonlinear Damping and Nonlinear Spring", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 271, pp. 15-24, (2004).
- [4] EL-Bassiouny, A.F., "Effect of Nonlinearities in Elastomeric Material Dampers on Torsional Oscillation Control", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 162, pp. 835-854, (2005).
- [5] Amer, Y.A., and EL-Sayed, A.T., "Vibration Suppression of Nonlinear System via Nonlinear Absorber", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1948-1963, (2008).
- [6] Eissa, M., and Sayed, M., "Vibration Reduction of a Three DOF Nonlinear Spring Pendulum", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 465-488, (2008).
- [7] Ji, J.C., and Zhang, N., "Suppression of Primary Resonance Vibrations of a Forced Nonlinear System using a Dynamic Vibration Absorber", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 2044-2056, (2010).
- [8] Ji, J.C., and Zhang, N., "Suppression of Super-harmonic Resonance Response using a Linear Vibration Absorber", *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, pp. 411-416, (2011).
- [9] El-Ganaini, W.A.A., and Elgohary, H.A., "Vibration Suppression via Time-delay Absorber Described by Nonlinear Differential Equations", *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 4, pp. 49 – 67, (2011).
- [10] Sayed, M., and Kamel, M., "1:2 and 1:3 Internal Resonance Active Absorber for Nonlinear Vibrating System", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 36, pp. 310-332, (2012).

[11] Nayfeh, A.H., and Mook, D., "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons Inc., New York, (1979).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$a_{10}$ : دامنه سیستم اصلی

$a_{20}$ : دامنه جاذب

$m_1$ : جرم سیستم اصلی

$m_2$ : جرم جاذب

$C_1$ : میرایی خطی سیستم اصلی

$C_1'$ : میرایی غیرخطی سیستم اصلی

$C_2$ : میرایی خطی جاذب

$C_2'$ : میرایی غیرخطی جاذب

$k_1$ : سختی خطی سیستم اصلی

$k_1'$ : سختی غیرخطی سیستم اصلی

$k_2$ : سختی خطی جاذب

$k_2'$ : سختی غیرخطی جاذب

$P$ : نیروی تحریک خارجی

$T_0$ : مقیاس زمانی سریع

$T_1$ : مقیاس زمانی آهسته

$t$ : زمان

$x_1$ : جابه‌جایی مطلق سیستم اصلی

$x_2$ : پاسخ مطلق جاذب

$x_{10}$ : پاسخ سیستم اصلی از مرتبه صفر اپسیلون

$x_{11}$ : پاسخ سیستم اصلی از مرتبه یک اپسیلون

$x_{20}$ : پاسخ جاذب از مرتبه صفر اپسیلون

$x_{21}$ : پاسخ جاذب از مرتبه یک اپسیلون

### نمادهای یونانی

$\alpha_1$ : نسبت سختی خطی جاذب به جرم سیستم اصلی

$\alpha_2$ : نسبت سختی غیرخطی جاذب به جرم جاذب

$\alpha_3$ : نسبت سختی غیرخطی جاذب به جرم سیستم اصلی

$\alpha_4$ : نسبت سختی غیرخطی سیستم اصلی به جرم سیستم اصلی

$\varepsilon$ : پارامتر اغتشاشی بدون بعد

$\zeta_1$ : نسبت میرایی خطی سیستم اصلی به جرم سیستم اصلی

$\zeta_2$ : نسبت میرایی خطی جاذب به جرم جاذب

$\zeta_3$ : نسبت میرایی غیرخطی جاذب به جرم جاذب

$\zeta_4$ : نسبت میرایی خطی جاذب به جرم سیستم اصلی

$\zeta_5$ : نسبت میرایی غیرخطی جاذب به جرم سیستم اصلی

$\zeta_6$ : نسبت میرایی غیرخطی سیستم اصلی به جرم سیستم اصلی

$\mu_1$ : فاز سیستم اصلی

$\mu_2$ : فاز جاذب

$\sigma_1$ : پارامتر تنظیم برای بیان نزدیکی فرکانس تحریک خارجی و فرکانس طبیعی سیستم اصلی به یکدیگر

$\sigma_2$ : پارامتر تنظیم برای بیان نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم اصلی و جاذب به یکدیگر

$\Omega$ : فرکانس تحریک خارجی

$\omega_1$ : فرکانس طبیعی خطی شده سیستم اصلی

$\omega_2$ : فرکانس طبیعی خطی شده جاذب

## پیوست

$$z_1 = -\frac{1}{2}\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_4(\Gamma_1 - 1) + \zeta_5 F^2(\Gamma_1 - 1)(\Gamma_2 - 1)^2 - \zeta_6 F^2$$

$$z_2 = \frac{1}{8}\zeta_5(\Gamma_1 - 1)^3 - \frac{1}{8}\zeta_6$$

$$z_3 = \frac{1}{4}\zeta_5(\Gamma_1 - 1)$$

$$z_4 = -\frac{1}{2\omega_1}\alpha_1\Gamma_1 - \frac{3}{\omega_1}\alpha_3 F^2(\Gamma_1 - 1)(\Gamma_2 - 1)^2 - \frac{3}{\omega_1}\alpha_4 F^2$$

$$z_5 = -\frac{3}{8\omega_1}\alpha_3(\Gamma_1 - 1)^3 + \frac{3}{8\omega_1}\alpha_4$$

$$z_6 = -\frac{3}{4\omega_1}\alpha_3(\Gamma_1 - 1)$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}\zeta_2 - \zeta_3 F^2(\Gamma_2 - 1)^2 - \frac{1}{2}\Gamma_1\zeta_4 - \Gamma_1\zeta_5 F^2(\Gamma_2 - 1)^2$$

$$u_2 = -\frac{1}{8}\zeta_3 - \frac{1}{8}\Gamma_1\zeta_5$$

$$u_3 = -\frac{1}{4}\zeta_3(\Gamma_1 - 1)^2 - \frac{1}{4}\Gamma_1\zeta_5(\Gamma_1 - 1)^2$$

$$u_4 = \frac{3}{\omega_2}\alpha_2 F^2(\Gamma_2 - 1)^2 + \frac{1}{2\omega_2}\Gamma_1\alpha_1 + \frac{3}{\omega_2}\Gamma_1\alpha_3 F^2(\Gamma_2 - 1)^2$$

$$u_5 = \frac{3}{8\omega_2}\alpha_2 + \frac{3}{8\omega_2}\Gamma_1\alpha_3$$

$$u_6 = \frac{3}{4\omega_2}\alpha_2(\Gamma_1 - 1)^2 + \frac{3}{4\omega_2}\Gamma_1\alpha_3(\Gamma_1 - 1)^2$$

$$q_1 = \frac{\alpha_3 F^3}{\omega_1}(\Gamma_2 - 1)^3 - \frac{\alpha_4 F^3}{\omega_1}$$

$$q_2 = \frac{1}{3}\zeta_5 F^3(\Gamma_2 - 1)^3 - \frac{1}{3}\zeta_6 F^3$$

$$q_3 = \frac{3}{8\omega_1}\alpha_3(\Gamma_1 - 1)^2$$

$$q_4 = \frac{3}{8} \zeta_5 (\Gamma_1 - 1)^2 - \frac{1}{4} \zeta_5 (\Gamma_1 - 1)^2$$

$$q_5 = -\frac{1}{8\omega_2} \alpha_2 (\Gamma_1 - 1)^3 - \frac{3}{64\omega_1} \alpha_3 (\Gamma_1 - 1)^3 + \frac{3}{64\omega_1} \alpha_4$$

$$q_6 = -\frac{1}{24} \zeta_3 a_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 - \frac{3}{64} \zeta_5 a_{10}^3 (\Gamma_1 - 1)^3 + \frac{3}{64} \zeta_6 a_{10}^3$$

**Abstract**

To accurately predict vibration behavior of structures, a complete mathematical modeling is necessary. In nonlinear structural vibration analysis, using the linear model may lead to wrong results. In this paper, the nonlinear vibrations of a two-degree-of-freedom system consists of the main system and an absorber is studied at simultaneous secondary and internal resonances. The frequency response equations are obtained by solving the equations of motion using the method of multiple time scales (MTS). The effects of system parameters on the amplitude of the main system is investigated. Stability analysis is performed by the method of Andronov and Vitt and the saddle-node bifurcation points are detected. The results show that in the simultaneous super-harmonic and internal resonance case, system shows an almost linear behavior. Also, the nonlinear parameters of the absorber have insignificant effect on the amplitude of the main system. Unlike the linear case, when the nonlinear stiffness of the main system increases, the system amplitude increases as well. Finally, the domain of detuning parameter with three responses, resulted in the jump phenomenon in the response, is determined.