

## تحلیل تنش درون صفحه‌ای در باریکه حاوی چندین ترک متحرک

در این مقاله با استفاده از روش توزیع نابجایی تحلیل تنش در باریکه الاستیک خطی حاوی مجموعه‌ای از ترک‌های متحرک با سرعت ثابت تحت بار درون صفحه‌ای انجام شده است. ابتدا معادلات حرکت با استفاده از تجزیه هلمهولتز از یکدیگر جدا می‌شوند سپس با استفاده از تغییر مختصات مناسب متغیر زمان حذف شده و مسئله تبدیل به دو معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مکانی می‌شود. این دو معادله با استفاده از تبدیل فوریه به دو معادله با دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شود. بعد از اعمال شرایط مرزی می‌توان معکوس تبدیل فوریه را اعمال نمود و میدان تنش ناشی از نابجایی را در باریکه محاسبه نمود. سپس با استفاده از این حل، معادلات انتگرالی برای تحلیل مسئله چندین ترک موازی با مرز متحرک با سرعت ثابت بدست می‌آید. این معادلات از نوع تکینگی کوشی هستند که با استفاده از روش عددی مناسب حل می‌گردند تا تابع توزیع نابجایی بدست آید. بعد از بدست آوردن توزیع نابجایی روی ترک‌ها می‌توان ضرایب شدت تنش برای ترک‌ها را بدست آورد.

### رسول باقری<sup>۱</sup>

دانشجوی دکتری

### مجتبی آیت‌اللهی<sup>۲</sup>

دانشیار

### مهدی نوروزی<sup>۳</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما: نابجایی درون صفحه‌ای - باریکه - ترک متحرک - ضرایب شدت تنش

### ۱- مقدمه

در تغییر شکل یک جسم در اثر اعمال نیروهای خارجی، نقص‌های داخل کریستال‌های جسم موثر هستند. اصلی‌ترین نوع نقص که در خواص مکانیکی کریستال موثر است، نابجایی نامیده می‌شود. در این مطالعه خواص نابجایی در مقیاس اتمی یا میکروسکوپی مورد نظر نمی‌باشد و تنها خواص ماکروسکوپی نابجایی در تئوری الاستیسیته حائز اهمیت است. وجود نابجایی نخستین بار توسط دانشمندان علم مواد کشف شد. اتم‌ها در یک کریستال دارای نابجایی از موقعیت اصلی شان در شبکه کامل جابه‌جا شده و نتیجه این تغییر مکان ایجاد میدان تنش حول محور نابجایی در جسم می‌باشد. در نتیجه نابجایی یکی از منابع ایجاد تنش داخلی در جسم محسوب می‌شود. بعدها نابجایی از دیدگاه الاستیسیته نیز تعریف گردید. V. Volterra [۱] جزء نخستین کسانی بود که به تعریف نابجایی پرداخت. تحلیل تنش در قطعات مکانیکی که دارای ترک بوده

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان [rasul\\_m65@yahoo.com](mailto:rasul_m65@yahoo.com)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان [mo\\_ayatollahy@yahoo.com](mailto:mo_ayatollahy@yahoo.com)

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زنجان [medirastkar@yahoo.com](mailto:medirastkar@yahoo.com)

و تحت بار دینامیکی قرار دارند از اهمیت خاصی برخوردار می باشد. طراحی با استفاده از اصول مکانیک شکست مستلزم داشتن معیاری است که مشخص کننده واماندگی<sup>۱</sup> قطعه باشد یکی از این معیارها ضریب شدت تنش است. ضریب شدت تنش در نوک ترک ها تابعی از هندسه ترک، شکل قطعه، شرایط و اندازه بارگذاری می باشد که پس از محاسبه با مقدار بحرانی آن مقایسه می گردد.

در ابتدا مروری بر تحقیقات انجام شده برای تحلیل تنش در محیط های الاستیک حاوی ترک متحرک، انجام می شود. B.Patra, S.Das [۲] ترک متحرک گریفیث در فصل مشترک بین دو لایه ارتوتروپیک غیر متشابه در نیم صفحه را بررسی کردند. با استفاده از روش تبدیلات فوریه مسئله مقدار مرزی مرکب به حل معادلات انتگرالی به طور هم زمان تبدیل شده و در نهایت با استفاده از چند جمله ای ژاکوبی حل شد. نتایج نشان داد که ضریب شدت تنش به طور پیوسته با افزایش سرعت تا مقدار مشخصی افزایش یافته سپس در یک محدوده بعد از آن رفتار نوسانی نشان می دهد. Z. T. Chen و همکارانش [۳] مسئله ترک متحرک تحت بارگذاری پاد صفحه ای در بین دو لایه از جنس ماده پیزوالکتریک نا همسان را بررسی کردند. برای حل مسئله از تبدیلات فوریه بهره بردند. آنها روابط بین سرعت ترک و ضرایب مربوط به جنس ماده بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی و جا بجائی الکتریکی را بدست آوردند. مسئله ترک گریفیت متحرک در بین دو لایه ارتوتروپیک نا همسان تحت بارگذاری درون صفحه ای توسط B.Patra, S.Das [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها برای حل معادلات انتگرالی تکین از چند جمله ای ژاکوبین استفاده کردند و تاثیر ضخامت لایه ها را بر ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار دادند. X. F. Wu و X. F. Li [۵] مسأله ترک متحرک تحت بارگذاری پاد صفحه ای را بین دو لایه از جنس ماده پیزوالکتریک نا همسان بررسی کردند. برای حل مسئله از تبدیل انتگرالی فوریه کسینوسی استفاده کردند و اثرات سرعت حرکت ترک بر ضریب شدت تنش را بدست آوردند. پاسخ الاستودینامیکی ترک نیمه بی نهایت منتشر شده با سرعت ثابت در صفحه نامحدود ارتوتروپیک تحت بارگذاری درون صفحه ای توسط J. J. Mason و C. R. Gonzalez [۶] ارائه شد. مسئله با استفاده از تبدیلات لاپلاس<sup>۲</sup> و فوریه به همراه روش وینر هاف<sup>۳</sup> حل شده است. آنها اثر سرعت حرکت ترک را بر روی ضریب شدت تنش بدست آوردند. مسئله ترک متحرک منتشر شده در صفحه نامحدود از جنس ماده تابعی با خواص الاستیک تحت بارگذاری درون صفحه ای مکانیکی توسط S. A. Meguid و همکاران [۷] بررسی شد. معادلات حاکم با استفاده از تبدیل فوریه و چند جمله ای چیبیشف<sup>۴</sup> حل گردید. آنها اثر گرادیان خواص ماده و سرعت انتشار ترک بر روی باز شدگی دهانه ترک، ضرایب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی کرنشی را ارائه دادند.

X.S. Bi و همکارانش [۸] ترک متحرک در باریکه از جنس ماده تابعی تحت بارگذاری پاد صفحه ای مکانیکی را بررسی کردند. آنها مدول های برشی را به شکل نمایی در نظر گرفتند و معادلات را با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی و روش کاپسون<sup>۵</sup> حل کردند. در این مطالعه اثرات سرعت ترک متحرک و مدول برشی بر روی ضریب چگالی انرژی کرنشی بررسی شده است. T. Zeng و Zhou [۹] مسأله یک ترک

<sup>1</sup> Failure

<sup>2</sup> Laplace transform

<sup>3</sup> Wiener-Hopf technique

<sup>4</sup> Chebyshev polynomials

<sup>5</sup> Copson's method

متحرک با طول ثابت در یک باریکه از جنس ماده تابعی تحت بار درون صفحه ای را حل کردند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه و تعریف باز شدگی دهانه ترک در عرض ترک به عنوان تابع ناشناخته، دو جفت معادله انتگرالی به دست آوردند. سپس با استفاده از روش چند جمله ای ژاکوبی معادلات انتگرالی را حل کردند. نتایج عددی ارائه شده اثر خواص مواد، ضخامت ماده تابعی و سرعت رشد ترک را بر روی رفتار شکست دینامیکی نشان می دهد. مسئله بر هم کنش سه ترک گریفیث متحرک هم راستا در نیم صفحه تشکیل شده از دو ماده الاستیک مختلف تحت بارگذاری پاد صفحه ای مکانیکی توسط S. Das [۱۰] ارائه شد. حل مسئله با استفاده از تبدیل فوریه و روش تبدیل هیلبرت<sup>۱</sup> محدود انجام شده و سپس ضریب شدت تنش نوک ترک برای لایه الاستیک با ضخامت متفاوت بدست آمد.

Z. Cheng, Z. Zhong [۱۱] مساله یک ترک متحرک منتشره واقع در باریکه ای از جنس دو ماده تابعی خواص الاستیک مختلف تحت بارگذاری درون صفحه ای را بررسی کردند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه مسأله را به معادلات انتگرالی تکین تبدیل کرده و این انتگرال ها را به کمک روش عددی ارائه شده توسط اردوغان<sup>۲</sup> حل کردند. در نهایت آنها اثر طول ترک و سرعت آنرا بر روی ضرایب شدت تنش بدست آوردند. همچنین نشان دادند که ضخامت ماده و سرعت ترک بر رفتار شکست دینامیکی تأثیر بسزایی دارند.

Z. Cheng [۱۲] انتشار ترک در یک محیط با پوششی از جنس ماده تابعی با خواص دلخواه که به یک لایه همگن چسبانده شده را مورد بررسی قرار داد. برای حل مسئله از یک مدل چند لایه استفاده کرد و با استفاده از تبدیل فوریه مسأله شرایط مرزی را به دستگاه معادلات انتگرالی تکین کاهش داد و آنرا با استفاده از چند جمله ای چبیشف به صورت عددی حل کرد. Z.Cheng و همکاران [۱۳] یک ترک متحرک موجود در فصل مشترک بین دو باریکه از جنس مواد تابعی مختلف تحت تغییر شکل صفحه ای را با روش معادلات انتگرالی بررسی کردند. آنها اثر پارامترهای هندسی همانند ضخامت باریکه و سرعت ترک را بر روی ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار دادند. M. Ayatollahi, R. Bagheri [۱۴] انتشار ترک در باریکه ساخته شده از مواد تابعی را که تحت بارگذاری پاد صفحه ای قرار داشته مورد بررسی قرار دادند. آنها برای حل مسئله از تبدیل فوریه بهره جسته و اثر طول ترک، ثابت ماده تابعی و سرعت ترک را بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی بدست آوردند.

در این مقاله حل تحلیلی مساله باریکه حاوی چندین ترک متحرک موازی با باریکه با سرعت های ثابت تحت تنش درون صفحه ای توسط روش توزیع نابجایی انجام شده است. از این حل برای بدست آوردن معادلات انتگرالی توزیع نابجایی روی ترکها استفاده شده است. این معادلات دارای تکینگی از نوع کوشی بوده که از حل آنها توزیع نابجایی روی ترکها و سپس ضرایب شدت تنش دینامیکی ترکها بدست آمده است. در اکثر مطالعات انجام شده تا به حال، بارگذاری بصورت پاد صفحه ای بوده و فقط امکان ایجاد مد سوم مکانیک شکست در مسائل مطرح شده است و یا اینکه با وجود فرض بارگذاری درون صفحه ای فقط قادر به حل مسائل با تعداد ترک محدود و چیدمانهای خاصی بوده اند. در حالیکه مزیت استفاده از این روش در این است که تعداد ترک ها و نحوه چیدمان آنها نسبت به هم در روش حل تأثیری ندارد.

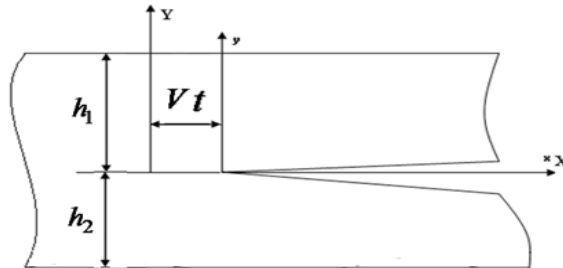
<sup>1</sup> Hilbert transform techniques

<sup>2</sup> Erdogan's method

## ۲- حل نابجایی درون صفحه‌ای در باریکه

باریکه مورد نظر دارای بعد بی نهایت در راستای محور  $x$  و بعد محدود در راستای محور  $y$  است (شکل ۱). معادلات حرکت در الاستیسیته خطی در غیاب نیروی حجمی به صورت زیر می باشد.

$$\mu \bar{\nabla}^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \rho \bar{u} \quad (1)$$



شکل ۱- نمایش نابجایی متحرک در باریکه

که در آن چگالی ماده  $\rho$ ،  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه و  $\bar{u}$  بردار تغییر مکان می باشد. سیستم معادلات بالا را می توان به حالت غیر وابسته تبدیل کرد. یکی از این روش ها استفاده از تبدیل هلمهولتز است که به صورت زیر می باشد:

$$\bar{u} = \bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \times \bar{\psi} \quad (2)$$

در این رابطه بردار تغییر مکان برحسب بردار  $\bar{\psi}$  و اسکالر  $\phi$  که توابع پتانسیل نامیده می شوند بیان شده است. با قرار دادن رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\mu \bar{\nabla}^2 [\bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \times \bar{\psi}] + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \bar{\nabla} \cdot [\bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \times \bar{\psi}] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\bar{\nabla} \phi + \bar{\nabla} \times \bar{\psi}] \quad (3)$$

از آنجا که روابط  $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{\psi} = 0$  و  $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \phi = \bar{\nabla}^2 \phi$  برقرار است رابطه (۱) به شکل زیر در می آید:

$$\bar{\nabla} [(\lambda + 2\mu) \bar{\nabla}^2 \phi - \rho \ddot{\phi}] + \bar{\nabla} \times [\mu \bar{\nabla}^2 \bar{\psi} - \rho \ddot{\bar{\psi}}] = 0 \quad (4)$$

در صورتی که روابط زیر برقرار باشد، رابطه (۴) خود به خود ارضاء می شود.

$$\bar{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \bar{\nabla}^2 \bar{\psi} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} \quad (5)$$

که  $c_L$  و  $c_T$  بترتیب سرعت موج طولی و سرعت موج برشی در ماده است که برحسب ضرایب لامه بصورت زیر بدست می آید.

$$c_L^2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \quad c_T^2 = \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (6)$$

با توجه به اینکه بارگذاری در صفحه  $x, y$  انجام شده و تابعی از  $z$  نمی باشد در نتیجه شرایط الاستیسیته دو بعدی برقرار می باشد. در نتیجه خواهیم داشت که

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

به همین ترتیب روابط مربوط به مولفه های تنش برای حالت کرنش صفحه ای به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} \right] \\ \sigma_{yy} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial x} \right] \\ \sigma_{zz} &= \lambda \nabla^2 \varphi \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به تعریف اپراتور دیفرانسیل دو بعدی لاپلاس در معادلات (۵)، داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} &= \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

روابط (۹) معادلات حاکم بر مسأله می باشند که بر حسب توابع پتانسیل بیان شده است. شکل (۱) نمایش یک نابجایی در یک باریکه ایزوتروپیک است که نسبت به سیستم مختصات ثابت  $X, Y$  با سرعت ثابت  $V$  در جهت مثبت محور  $x$  ها در حرکت است. اگر سیستم مختصات متحرک  $x, y$  را به راس نابجایی متصل شود و اجازه داده شود که سیستم مختصات با سرعت ثابت همراه نابجایی حرکت کند. در اینصورت روابط زیر، دو سیستم مختصات ثابت و متحرک را به هم مربوط می کند.

$$\begin{aligned} X &= x + V \cdot t \\ Y &= y \end{aligned} \quad (10)$$

اگر روابط (۱۰) را در روابط (۹) جایگزین کنیم متغییر زمان حذف می شود و معادلات حاکم در نهایت به صورت زیر بدست می آیند.

$$\left(1 - \frac{V^2}{c_L^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{V^2}{c_T^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

روابط (۱۱) بیانگر دستگاه معادلات با مشتقات جزئی است. جهت حل تحلیلی دستگاه معادلات بالا نیازمند بررسی شرایط مرزی مسئله است. تعریف نابجایی لبه ای از نوع ولترا با ایجاد یک شکاف در امتداد خط نابجایی و حرکت در جهت محور  $x$  به اندازه  $b_x$  و در جهت محور  $y$  به اندازه  $b_y$  انجام می شود که  $b_x$  و  $b_y$  مولفه های بردار برگرز<sup>۱</sup> نامیده می شود. مولفه های تغییر مکان براساس تئوری ولترا در محل نابجایی به دلیل چند مقداری بودن تغییر مکان ها روی خط نابجایی دارای ناپیوستگی بوده و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} u(x, 0^+) - u(x, 0^-) &= b_x H(x) \\ v(x, 0^+) - v(x, 0^-) &= b_y H(x) \end{aligned} \quad (12)$$

که  $H(x)$  تابع واحد پله ای است. همینطور شرایط پیوستگی مولفه های تنش روی خط نابجایی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0^+) &= \sigma_{yy}(x, 0^-) \\ \sigma_{xy}(x, 0^+) &= \sigma_{xy}(x, 0^-) \end{aligned} \quad (13)$$

حال با توجه به شکل (۱) شرایط مرزی و حدی مسئله بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h_1) &= 0, \quad \sigma_{xy}(x, h_1) = 0, \\ \sigma_{yy}(x, -h_2) &= 0, \quad \sigma_{xy}(x, -h_2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma_{ij}(x, y) &= 0, \quad i = j = x, y, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

برای حل مسأله نابجایی از تبدیلات انتگرال استفاده می شود که تبدیل مورد نظر در این مسأله تبدیل فوریه است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (15)$$

$i = \sqrt{-1}$  پارامتر موهومی است. وارون تبدیل فوریه عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (16)$$

حال با اعمال تبدیل فوریه (۱۵) به روابط (۱۱)، روابط زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\phi}}{dy^2} - \omega^2 \left(1 - \frac{V^2}{c_L^2}\right) \hat{\phi} &= 0 \\ \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} - \omega^2 \left(1 - \frac{V^2}{c_T^2}\right) \hat{\Psi} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که  $\hat{\phi}(\omega, y)$  و  $\hat{\Psi}(\omega, y)$  به ترتیب تبدیل فوریه توابع  $\phi(x, y)$  و  $\psi(x, y)$  می باشند. روابط (۱۷) یک دستگاه معادلات کامل با ضریب ثابت است، که به سادگی قابل حل می باشد. در نتیجه مولفه های پتانسیل برای هر بخش باریکه در فضای فوریه بصورت زیر بدست می آید.

<sup>1</sup> Burgers vector

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 &= C_1 e^{\omega y \sqrt{1-(V/c_L)^2}} + C_2 e^{-\omega y \sqrt{1-(V/c_L)^2}} & 0 \leq y \leq h \\ \hat{\Psi}_1 &= C_3 e^{\omega y \sqrt{1-(V/c_T)^2}} + C_4 e^{-\omega y \sqrt{1-(V/c_T)^2}} & 0 \leq y \leq h_1 \\ \hat{\phi}_2 &= C_5 e^{\omega y \sqrt{1-(V/c_L)^2}} + C_6 e^{-\omega y \sqrt{1-(V/c_L)^2}} & -h_2 \leq y \leq 0 \\ \hat{\Psi}_2 &= C_7 e^{\omega y \sqrt{1-(V/c_T)^2}} + C_8 e^{-\omega y \sqrt{1-(V/c_T)^2}} & -h_2 \leq y \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

که ضرایب  $C_i, i=1,2,\dots,8$  با استفاده از شرایط مرزی بدست می آیند که ضرایب، تابعی از  $\omega$  هستند که در پیوست آورده شده است. در نهایت میدان های تنش بصورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (tM_1 e^{-\omega(h_1(\alpha-\beta)-y\alpha)} + tM_2 e^{\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} + qe^{\omega y \beta})(F_1 b_x + iF_2 b_y) e^{i\omega x} d\omega \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (tM_2 i e^{-\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} + tM_1 e^{\omega(h_1(\alpha-\beta)-y\alpha)} + qe^{-\omega y \beta})(F_3 b_x + iF_4 b_y) e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{pM_1 e^{\omega(h_1\beta+(y-h_1)\alpha)} + pM_2 e^{\omega(h_1\beta+(h_1-y)\alpha)} - qe^{\omega y \beta}\} (F_1 b_x + iF_2 b_y) e^{i\omega(x)} d\omega \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{pM_2 e^{-\omega(h_1\beta+(h_1-y)\alpha)} + pM_1 e^{-\omega((y-h_1)\alpha+h_1\beta)} - qe^{-\omega y \beta}\} (F_3 b_x + iF_4 b_y) e^{i\omega(x)} d\omega \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{i\mu\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{sM_1 e^{\omega(h_1(\beta-\alpha)+y\alpha)} - sM_2 e^{\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} - re^{\omega y \beta}\} (F_1 b_x + iF_2 b_y) e^{i\omega x} d\omega \\ &\quad + \frac{i\mu\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{sM_1 e^{\omega(h_1(\alpha-\beta)-y\alpha)} - sM_2 e^{-\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} - re^{-\omega y \beta}\} (F_3 b_x + iF_4 b_y) e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

(19)

حال انتگرال های بالا را به دو بخش زوج و فرد نسبت به پارامتر  $\omega$  تبدیل کرده و میدان تنش بصورت زیر ساده می شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \{tM_1 e^{\omega[h_1\beta+(y-h_1)\alpha]} + tM_2 e^{\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + qe^{\omega y \beta}\} F_1 \\ &\quad - \{tM_2 e^{-\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + tM_1 e^{-\omega[(y-h_1)\alpha+h_1\beta]} + qe^{-\omega y \beta}\} F_3 \} \omega \cos(\omega x) d\omega \\ &\quad + \frac{b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \{tM_1 e^{\omega[h_1\beta+(y-h_1)\alpha]} + tM_2 e^{\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + qe^{\omega y \beta}\} iF_2 \\ &\quad - \{tM_2 e^{-\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + tM_1 e^{-\omega[(y-h_1)\alpha+h_1\beta]} + qe^{-\omega y \beta}\} iF_4 \} \omega \sin(\omega x) d\omega \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ pM_1 e^{\omega[h_1\beta+(y-h_1)\alpha]} + pM_2 e^{\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} \right\} - qe^{\omega y\beta} \right\} F_1 \\ & - \left\{ pM_2 e^{-\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + pM_1 e^{-\omega[(y-h_1)\alpha+h_1\beta]} \right\} - qe^{-\omega y\beta} \right\} F_3 \left\{ \omega \cos(\omega x) d\omega \right. \\ & + \frac{b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ pM_1 e^{\omega[h_1\beta+(y-h_1)\alpha]} + pM_2 e^{\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} \right\} - qe^{\omega y\beta} \right\} iF_2 \\ & \left. - \left\{ pM_2 e^{-\omega[h_1\beta+(h_1-y)\alpha]} + pM_1 e^{-\omega[(y-h_1)\alpha+h_1\beta]} \right\} - qe^{-\omega y\beta} \right\} iF_4 \left\{ i\omega \sin(\omega x) d\omega \right. \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{\mu b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ -sM_1 e^{\omega(h_1(\beta-\alpha)+y\alpha)} + sM_2 e^{\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} + re^{\omega y\beta} \right\} F_1 \right. \\ & + \left\{ sM_2 e^{-\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} - sM_1 e^{\omega(h_1(\alpha-\beta)-y\alpha)} + re^{-\omega y\beta} \right\} F_3 \left\{ \omega \sin(\omega x) d\omega \right. \\ & + \frac{\mu b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ -sM_1 e^{\omega(h_1(\beta-\alpha)+y\alpha)} + sM_2 e^{\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} + re^{\omega y\beta} \right\} F_2 \right. \\ & \left. \left. + \left\{ sM_2 e^{-\omega(h_1(\beta+\alpha)-y\alpha)} - sM_1 e^{\omega(h_1(\alpha-\beta)-y\alpha)} + re^{-\omega y\beta} \right\} F_4 \right\} \omega \cos(\omega x) d\omega \right. \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq h_1$$

(۲۰)

تمامی روابطی که تا کنون برای تنش حاصل شده است مربوط به قسمتی از باریکه می باشد که در بالای محور  $X$  ها واقع شده است. اما برای نیمه پایینی در سمت منفی محور  $Y$ ، تمامی مراحل بالا تکرار می شود. مولفه های تنش در بخش منفی محور  $Y$  به صورت زیر در می آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ tZ_1 e^{\omega y\alpha} + tZ_3 e^{-\omega y\alpha} + qK_1 e^{\omega y\beta} + qK_3 e^{-\omega y\beta} \right\} F_1 \right. \\ & + \left\{ tZ_2 e^{\omega y\alpha} + tZ_4 e^{-\omega y\alpha} + qK_2 e^{\omega y\beta} + qK_4 e^{-\omega y\beta} \right\} F_3 \left\{ \omega \cos(\omega x) d\omega \right. \\ & + \frac{b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ tZ_1 e^{\omega y\alpha} + tZ_3 e^{-\omega y\alpha} + tK_1 e^{\omega y\beta} + tK_3 e^{-\omega y\beta} \right\} iF_2 \right. \\ & \left. \left. + \left\{ tZ_2 e^{\omega y\alpha} + tZ_4 e^{-\omega y\alpha} + qK_2 e^{\omega y\beta} + qK_4 e^{-\omega y\beta} \right\} iF_4 \right\} i\omega \sin(\omega x) d\omega \right. \end{aligned}$$

$$-h_2 \leq y \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ pZ_1 e^{\omega y\alpha} + pZ_3 e^{-\omega y\alpha} - qK_1 e^{\omega y\beta} - qK_3 e^{-\omega y\beta} \right\} F_1 \right. \\ & + \left\{ pZ_2 e^{\omega y\alpha} + pZ_4 e^{-\omega y\alpha} - qK_2 e^{\omega y\beta} - qK_4 e^{-\omega y\beta} \right\} F_3 \left\{ \omega \cos(\omega x) d\omega \right. \\ & + \frac{b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\{ pZ_1 e^{\omega y\alpha} + pZ_3 e^{-\omega y\alpha} - qK_1 e^{\omega y\beta} - qK_3 e^{-\omega y\beta} \right\} iF_2 \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \{pZ_2 e^{\omega y \alpha} + pZ_4 e^{-\omega y \alpha} - qK_2 e^{\omega y \beta} - qK_4 e^{-\omega y \beta}\} iF_4 \} i \omega \sin(\omega x) d\omega \\
& -h_2 \leq y \leq 0 \\
\sigma_{xy} = & -\frac{\omega \mu b_x}{\pi} \int_0^{+\infty} \{sZ_1 e^{\omega y \alpha} - sZ_3 e^{-\omega y \alpha} - rK_1 e^{\omega y \beta} + rK_3 e^{-\omega y \beta}\} F_1 \\
& + \{sZ_2 e^{\omega y \alpha} - sZ_4 e^{-\omega y \alpha} - rK_2 e^{\omega y \beta} + rK_4 e^{-\omega y \beta}\} F_3 \} \sin(\omega x) d\omega \\
& + \frac{\omega \mu b_y}{\pi} \int_0^{+\infty} \{sZ_1 e^{\omega y \alpha} - sZ_3 e^{-\omega y \alpha} - rK_1 e^{\omega y \beta} + rK_3 e^{-\omega y \beta}\} iF_2 \\
& + \{sZ_2 e^{\omega y \alpha} - sZ_4 e^{-\omega y \alpha} - rK_2 e^{\omega y \beta} + rK_4 e^{-\omega y \beta}\} iF_4 \} \cos(\omega x) d\omega \\
& -h_2 \leq y \leq 0
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

از آنجا که انتگرال‌های (۲۰) و (۲۱) توابعی پیوسته از  $\omega$  هستند و نیز انتگرال‌ها در  $\omega = 0$  محدود هستند، نقاط تکینگی باید در محلی که  $\omega \rightarrow +\infty$ ، به دست آید. روابط مجانبی برای انتگرال‌ها وقتی که  $\omega \rightarrow +\infty$  بدست آمده است که در نهایت فرم مجانبی مولفه های تنش بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\infty} &= \frac{b_y}{2\pi} \frac{qs}{(s-\alpha r)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{qp}{(q-\beta p)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} & 0 \leq y \leq h_1 \\
\sigma_{x\infty} &= \frac{b_y}{2\pi} \frac{qs}{(s-\alpha r)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{qp}{(q-\beta p)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} & -h_2 \leq y \leq 0 \\
\sigma_{y\infty} &= -\frac{b_y}{2\pi} \frac{qs}{(s-\alpha r)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{qp}{(q-\beta p)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} & 0 \leq y \leq h_1 \\
\sigma_{y\infty} &= -\frac{b_y}{2\pi} \frac{qs}{(s-\alpha r)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{qp}{(q-\beta p)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} & -h_2 \leq y \leq 0 \\
\sigma_{xy\infty} &= -\frac{b_y}{2\pi} \frac{sr}{(s-\alpha r)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{pr}{(q-\beta p)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} & 0 \leq y \leq h_1 \\
\sigma_{xy\infty} &= -\frac{b_y}{2\pi} \frac{sr}{(s-\alpha r)} \frac{y\beta}{x^2 + (y\beta)^2} + \frac{b_x}{2\pi} \frac{pr}{(q-\beta p)} \frac{x}{x^2 + (y\beta)^2} & -h_2 \leq y \leq 0
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

رفتارهای مجانبی مولفه های تنش با نزدیک شدن به رأس نابجایی یعنی  $x \rightarrow 0$  و  $y \rightarrow 0$  بصورت تکینگی از نوع کوشی می باشد که به فرم کلی  $\frac{1}{r}$  است. این بدین معنی است که در محل نابجایی مقدار تنش بی نهایت می شود که این از خصوصیات شناخته شده نابجایی است.

### ۳- معادلات انتگرالی در محیط‌های حاوی ترک

حل نابجایی بدست آمده در بخش قبل را می‌توان برای تحلیل مناطق حاوی تعدادی ترک مستقیم متحرک که تحت مود اول و دوم مکانیک شکست قرار می‌گیرند بکار برد. فرض می‌شود که صفحه توسط  $N$  ترک مستقیم تضعیف شده است. معادلات پارامتری ترک‌ها را می‌توان بصورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + l_i s \\ y_i &= y_{0i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن  $(x_{0i}, y_{0i})$  مختصات وسط ترک  $i$  ام و  $l_i$  نصف طول ترک  $i$  ام می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجایی با چگالی  $B_{yj} dl$  و  $B_{xj} dl$  در راستای ترک در نقطه‌ای از ترک  $j$  ام به مختصات  $(x_j(p), y_j(p))$  روی المان بی‌نهایت کوچک  $dl$ ، میدان تنش ایجاد شده روی سطح ترک  $i$  ام بدست می‌آید که عبارتست از:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x_i(s), y_i(s)) &= \int_{-1}^1 k_{11ij}(s, p) B_{xj}(p) dp + \int_{-1}^1 k_{12ij}(s, p) B_{yj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sigma_{xy}(x_i(s), y_i(s)) &= \int_{-1}^1 k_{21ij}(s, p) B_{xj}(p) dp + \int_{-1}^1 k_{22ij}(s, p) B_{yj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (24)$$

میدان تنش ایجاد شده روی ترک  $i$  ام در صورتیکه  $N$  ترک وجود داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار عبارت خواهد شد از:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x_i(s), y_i(s)) &= \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 k_{11ij}(s, p) B_{xj}(p) dp + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 k_{12ij}(s, p) B_{yj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sigma_{xy}(x_i(s), y_i(s)) &= \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 k_{21ij}(s, p) B_{xj}(p) dp + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 k_{22ij}(s, p) B_{yj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

مطابق اصل باکنر [۱۵] مولفه‌های تنش بدست آمده ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترک‌ها در صفحه بدون ترک بعد از تغییر علامت در رابطه (۲۵) قرار گرفته و دانسیته نابجایی  $B_{yj}(p)$  و  $B_{xj}(p)$  باید محاسبه گردد. که در آن کرنل معادله انتگرالی در رابطه (۲۴) یعنی  $k_{11}(s, p)$  و  $k_{12}(s, p)$  و  $k_{21}(s, p)$  و  $k_{22}(s, p)$  برابر با ضرایب  $b_x$  و  $b_y$  در روابط تنش  $\sigma_{yy}$  و  $\sigma_{xy}$  محاسبه شده در روش نابجایی است. در معادلات انتگرالی (۲۵) کرنل‌های  $k_{ij}(s, p)$  توابع معلومی هستند. توابع  $\sigma_{yy}(x_i(s), y_i(s))$  و  $\sigma_{xy}(x_i(s), y_i(s))$  نیز توابع معلومی هستند که با توجه به بارگذاری خارجی تعیین می‌شوند. با حل معادلات انتگرالی (۲۵) که دارای تکینگی از نوع کوشی هستند تابع دانسیته نابجایی  $B_{yj}(p)$  و  $B_{xj}(p)$  بدست می‌آید. پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترک‌های احاطه شده در محیط بایستی روابطی ارائه نمود که بکمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها را بر حسب دانسیته نابجایی بر روی ترک‌ها محاسبه نمود. با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی، بازشدگی دهانه ترک برای ترک  $j$  ام از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$u_j^+(s) - u_j^-(s) = \int_{-1}^s \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{xj}(p) dp = \int_{-1}^s l_j B_{xj}(p) dp \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$v_j^+(s) - v_j^-(s) = \int_{-1}^s \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{yj}(p) dp = \int_{-1}^s l_j B_{yj}(p) dp \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

که در آن  $-1$  حد پایین که مشخص کننده ابتدای ترک با طول بی بعد شده واحد و  $N$  تعداد ترک ها می باشد و دانسیته نابجایی  $B_{yj}$  و  $B_{xj}$  است.  $u_j^+(s)$  و  $u_j^-(s)$ ،  $v_j^+(s)$  و  $v_j^-(s)$  به ترتیب نشان دهنده تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک در نقطه ای واقع بر ترک است. برای ترک های احاطه شده در محیط، جابجایی در خارج از لبه های ترک تک مقداری است بنابراین برای دانسیته نابجایی باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{xj}(p) dp = l_j \int_{-1}^1 B_{xj}(p) dp = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{yj}(p) dp = l_j \int_{-1}^1 B_{yj}(p) dp = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

دانسیته نابجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۲۵) و (۲۷) بدست می آید. بعلا تکینگی تنش در نوک ترک ها تابعیت دانسیته نابجایی بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$B_{xj}(p) = \frac{g_{xj}(p)}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$B_{yj}(p) = \frac{g_{yj}(p)}{\sqrt{1-p^2}} \quad -1 \leq p \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی اولین بار توسط F. Erdogan و همکاران [۱۶] ارائه گردید. در این روش معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه های چندجمله ای چبیشف<sup>۱</sup> و نظائر آن تعیین می شود گسسته شده و به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می شود با حل این سیستم معادلات جبری دانسیته نابجایی در نقاطی که در آنها معادلات گسسته شده اند بدست می آید. با قراردادن رابطه (۲۸) در روابط (۲۵) و (۲۶) سیستم معادلات جبری خطی زیر حاصل می شوند [۱۷]

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{z1}(p_n) \\ g_{z2}(p_n) \\ \vdots \\ g_{zN}(p_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(s_r) \\ q_2(s_r) \\ \vdots \\ q_N(s_r) \end{bmatrix} \quad (29)$$

که در آن نقاطی که در آن معادلات انتگرالی گسسته شده اند عبارتند از :

$$s_r = \cos\left(\frac{\pi r}{m}\right), \quad r = 1, 2, \dots, m-1, \quad p_t = \cos\left(\frac{\pi(2t-1)}{2m}\right), \quad t = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

<sup>1</sup>Chebyshev polynomials

و در آیه‌های ماتریس و بردارها در رابطه (۲۹) عبارتند از

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{bmatrix}$$

که در رابطه بالا  $B_{ij}$  بصورت زیر است.

$$B_{ij} = \frac{\pi}{m} \begin{bmatrix} K_{ij}(s_1, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(s_1, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(s_1, p_m)\Delta_i(p_m) \\ K_{ij}(s_2, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(s_2, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(s_2, p_m)\Delta_i(p_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ij}(s_{m-1}, p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(s_{m-1}, p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(s_{m-1}, p_m)\Delta_i(p_m) \\ \delta_{ij}\Delta_i(p_1) & \delta_{ij}\Delta_i(p_2) & \cdots & \delta_{ij}\Delta_i(p_m) \end{bmatrix}$$

$$g_{zj}(p_n) = [g_{1xj}(p_1) \quad g_{1xj}(p_2) \quad \cdots \quad g_{1xj}(p_m) \quad g_{2xj}(p_1) \quad g_{2xj}(p_2) \quad \cdots \quad g_{2xj}(p_m) \\ g_{1yj}(p_1) \quad g_{1yj}(p_2) \quad \cdots \quad g_{1yj}(p_m) \quad g_{2yj}(p_1) \quad g_{2yj}(p_2) \quad \cdots \quad g_{2yj}(p_m)]^T$$

$$q_j(s_r) = [\sigma_{1y}(x_j(s_1), y_j(s_1)) \quad \sigma_{1y}(x_j(s_2), y_j(s_2)) \cdots \sigma_{1y}(x_j(s_{m-1}), y_j(s_{m-1})) \quad 0 \\ \sigma_{2y}(x_j(s_1), y_j(s_1)) \quad \sigma_{2y}(x_j(s_2), y_j(s_2)) \cdots \sigma_{2y}(x_j(s_{m-1}), y_j(s_{m-1})) \quad 0 \\ \sigma_{1x}(x_j(s_1), y_j(s_1)) \quad \sigma_{1x}(x_j(s_2), y_j(s_2)) \cdots \sigma_{1x}(x_j(s_{m-1}), y_j(s_{m-1})) \quad 0 \\ \sigma_{2x}(x_j(s_1), y_j(s_1)) \quad \sigma_{2x}(x_j(s_2), y_j(s_2)) \cdots \sigma_{2x}(x_j(s_{m-1}), y_j(s_{m-1})) \quad 0]^T \quad (31)$$

که در آن  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر می باشد و  $T$  در مفهوم ترانهاده بردار می باشد. پارامتر مهمی که در مکانیک شکست مورد استفاده قرار می گیرد ضرائب شدت تنش در نوک ترکها می باشد. ضریب شدت تنش برای ترک  $i$ ام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می شود. پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترک های احاطه شده در محیط بایستی روابطی ارائه نمود که به کمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش را در نوک ترکها بر حسب دانسیته نابجایی محاسبه نمود. در نهایت ضرایب شدت تنش برای ترک  $i$ ام بصورت زیر بدست می آیند.

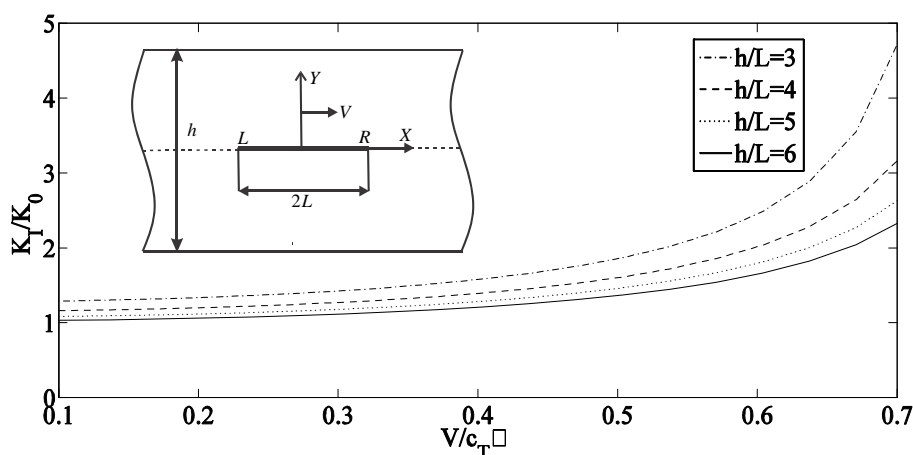
$$\begin{cases} k_{ILj} \\ k_{ILLj} \end{cases} = \frac{2\mu}{1+k} ([x'_j(-1)]^2 + [y'_j(-1)]^2)^{\frac{1}{4}} \begin{cases} g_{1yj}(-1) \\ g_{1xj}(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{IRj} \\ k_{IRj} \end{cases} = \frac{2\mu}{1+k} ([x'_j(1)]^2 + [y'_j(1)]^2)^{\frac{1}{4}} \begin{cases} g_{1yj}(1) \\ g_{1xj}(1) \end{cases} \quad j=1,2,\dots,N \quad (32)$$

#### ۴- نتایج و مثالهای عددی

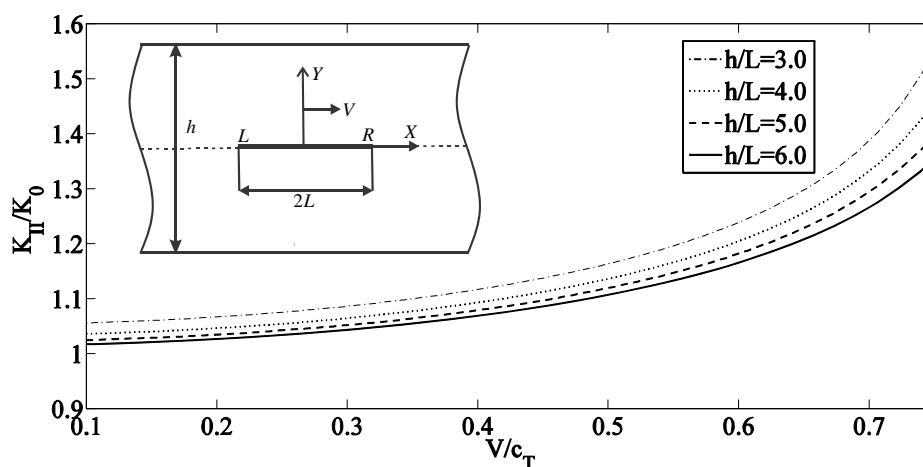
با استفاده از حل نابجایی درون صفحه ای بدست آمده مثال هایی از باریکه تضعیف شده بوسیله چندین ترک متحرک ارائه شده است. لازم به یادآوری است که در مثال های حل شده  $V$  بیانگر سرعت حرکت ترک در باریکه است. برای بی بعد سازی ضرایب شدت تنش در مود یک و دو بترتیب از  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{L}$  و  $K_0 = \tau_0 \sqrt{L}$  که بیانگر ضرایب شدت تنش در صفحه نامحدود حاوی یک ترک بطول  $2L$  تحت بارگذاری کششی و برشی واقع در دوردست، استفاده شده است.

به عنوان اولین مثال یک ترک متحرک به طول  $2L$  واقع در خط مرکزی باریکه را در نظر بگیرید. لبه های ترک تحت تنش کششی یکنواخت  $\sigma_{yy} = \sigma_0$  است. تغییرات ضرائب شدت تنش دو نوک ترک متحرک در مود اول شکست بر حسب سرعت بی بعد برای ضخامت های مختلف بی بعد شده باریکه در شکل (۲) رسم شده است. بطوریکه ملاحظه می شود با افزایش سرعت حرکت ترک این ضرائب افزایش می یابند. در ضمن برای باریکه با ضخامت های بیشتر بدلیل دوری مرزها از سطوح ترک ضرائب شدت تنش کوچکتری مشاهده شده است. در این مثال بخاطر دور شدن دو نوک ترک از مرز باریکه گرادیان میدان تنش در نوک های ترک ضعیفتر شده و باعث کاهش ضریب شدت تنش برای دو نوک ترک می شود.



شکل ۲- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد در مود اول بر حسب سرعت بی بعد

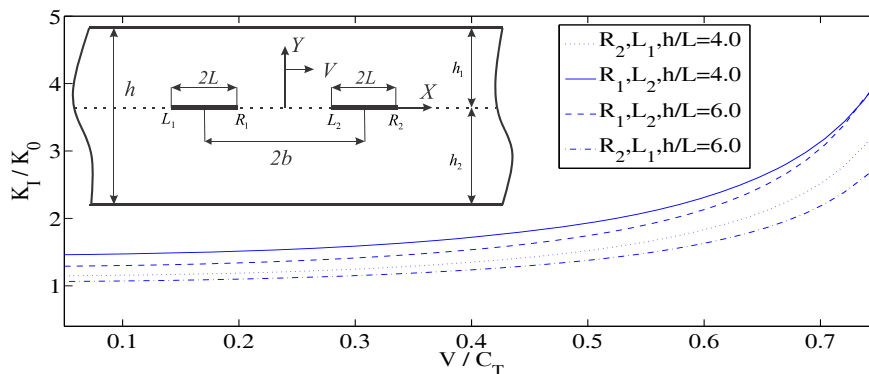
در شکل (۳) تغییرات ضرائب شدت تنش دو نوک ترک متحرک مثال قبل، برای باریکه تحت بار برشی یکنواخت واقع در مرز باریکه بر حسب سرعت بی بعد  $V/c_T$  برای ضخامت های مختلف باریکه ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت حرکت ترک این ضرائب افزایش می یابند. در ضمن برای باریکه با ضخامت بیشتر رفتاری همانند بارگذاری در مود اول مشاهده شده است.



شکل ۳- تغییرات ضرائب شدت تنش در مود دوم بر حسب سرعت بی بعد حرکت ترک

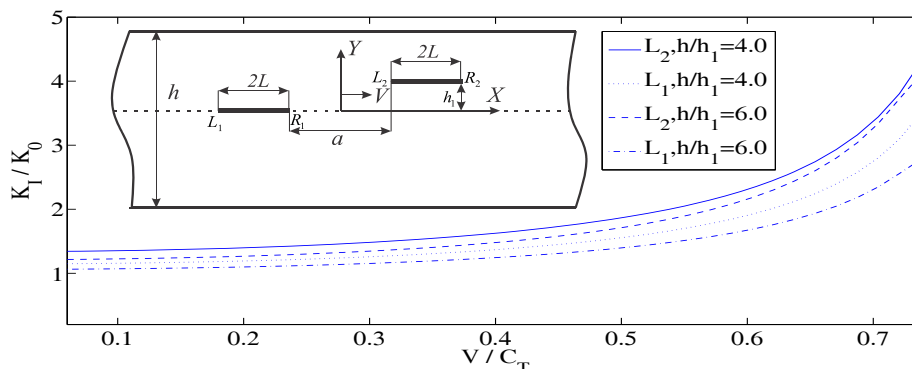
در شکل (۴) نمودار تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد برای بارگذاری در مود اول برای دو ترک هم طول و همراستا که در وسط باریکه قرار دارند برحسب  $\frac{V}{c_T}$  رسم گردیده است. در این مسأله طول دو ترک  $2L = 2$  ثابت باقی مانده، فاصله مراکز دو ترک  $2b = 2.5$  می باشد و همچنین سرعت حرکت آنها در هر مرحله تغییر می کند. به دلیل تقارن مسأله نسبت به محور  $y$  ضرایب شدت تنش در نوک  $R_1$  با  $L_2$  و هم چنین  $R_2$  با  $L_1$  با هم برابر است.

همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت حرکت ترک این ضرائب شدت تنش افزایش می یابند. در ضمن برای باریکه با ضخامت بیشتر بدلیل کاهش گرادیان تنش در نوک ترک ها ضرائب شدت تنش کوچکتری در مقایسه با باریکه نازکتر حاصل می گردد. ملاحظه می شود که نوک های  $R_1$  و  $L_2$  بعلت نزدیک بودن به یکدیگر دارای اندر کنش بالاتری بوده، در نتیجه دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می باشند.



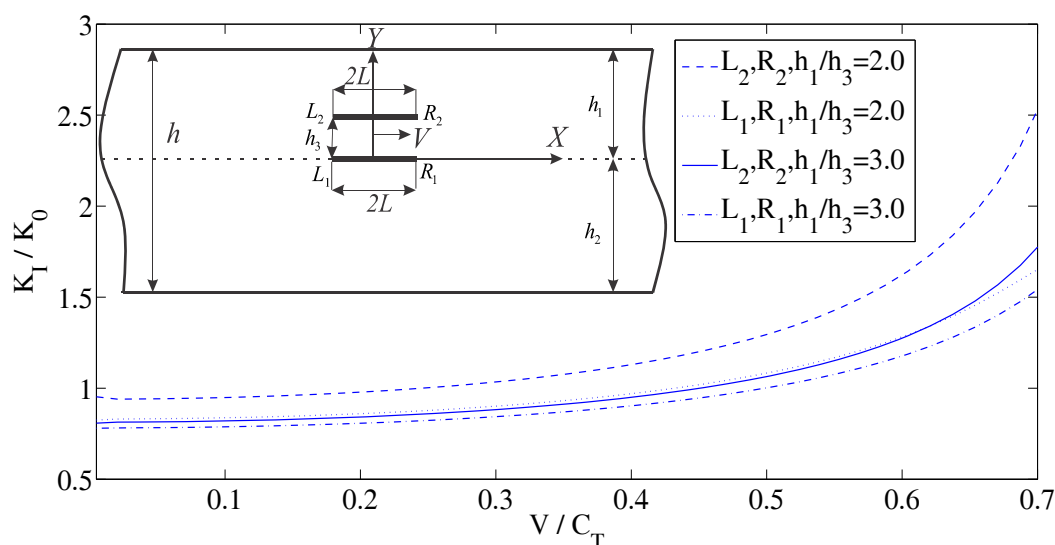
شکل ۴- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود اول بر حسب سرعت بی بعد برای دو ترک هم راستا

در مثالی دیگر باریکه تحت بارگذاری یکنواخت کششی ( $\sigma_{yy} = \sigma_0$ ) توسط دو ترک موازی، به طول  $2L = 1$  با فواصل مختلف از مرز های باریکه تضعیف شده است. در این مساله فاصله نوکهای ترک از یکدیگر  $a = 0.5$  می باشد. نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب سرعت بی بعد برای دو ترک که به فاصله عمودی  $h_1$  از یکدیگر قرار دارند در شکل (۵) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت حرکت ترک این ضرائب افزایش می یابند.



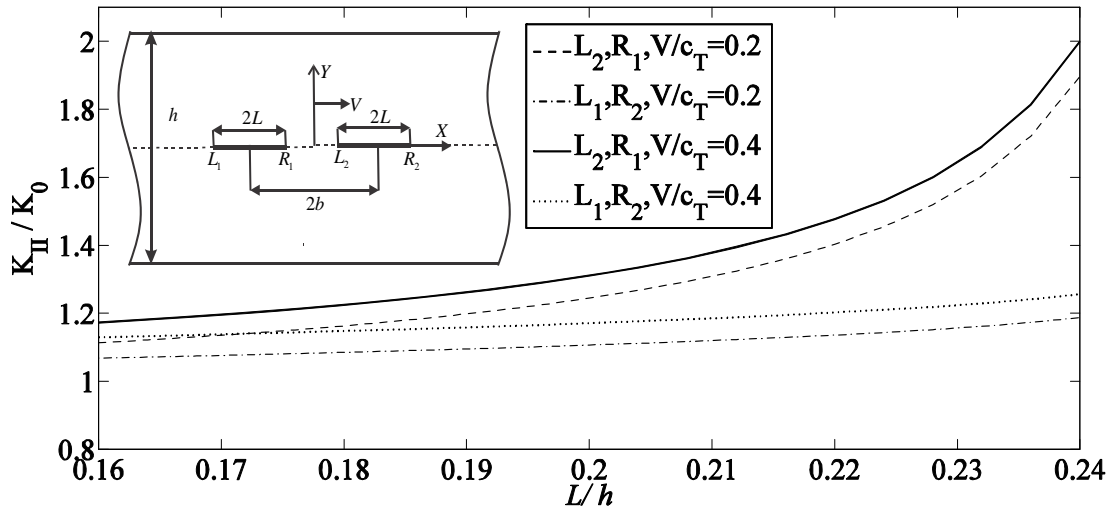
شکل ۵- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود اول بر حسب سرعت بی بعد برای دو ترک پله ای

در مثال بعدی باریکه تضعیف شده بوسیله دو ترک موازی به طول  $2L$  و موازی با مرز باریکه در نظر گرفته می شود. باریکه تحت بارگذاری یکنواخت کششی ( $\sigma_{yy} = \sigma_0$ ) قرار دارد. یکی از ترک ها روی خط مرکزی باریکه قرار گرفته ( $h_1$ )، در حالیکه ترک دوم در بالای ترک اول به فاصله  $h_3$  و موازی با آن قرار دارد. نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب سرعت بی بعد شده برای دو ترک رسم شده است. به دلیل تقارن ضریب شدت تنش در دو نوک ترک با هم برابر است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت حرکت ترک ضرایب افزایش می یابند. ملاحظه می گردد که با افزایش سرعت ترک ضرایب شدت تنش با نرخ بیشتری افزایش می یابند. همچنین با نزدیک شدن نوکهای  $L_2$  و  $R_2$  به مرز باریکه، گرادیان تنش اطراف در ادامه باریکه حاوی دو ترک هم راستای موازی با مرز را بررسی می کنیم.



شکل ۶- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود اول بر حسب سرعت بی بعد برای دو ترک موازی

در شکل (۷) نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود دوم برای مقادیر مختلف سرعت بی بعد دو ترک هم طول و هم راستا که هر دو در وسط باریکه قرار دارند بر حسب طول بی بعد ترک  $\frac{L}{h}$  رسم شده است. در این مسأله سرعت حرکت در هر مرحله ثابت باقی مانده و طول آنها تغییر می کند. فاصله مراکز ترکها از یکدیگر  $2b = 2.5$  می باشد. به دلیل تقارن مسأله نسبت به محور  $y$  ضرایب شدت تنش در نوک  $R_1$  با  $L_2$  و هم چنین  $R_2$  با  $L_1$  یکسان می باشند. با افزایش طول ترک و سرعت بی بعد شده ضرایب شدت تنش افزایش می یابند. ملاحظه می شود که نوک های نزدیک بعلاوه نزدیک بودن به یکدیگر دارای اندرکنش بالاتری بوده و در نتیجه دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می باشند.



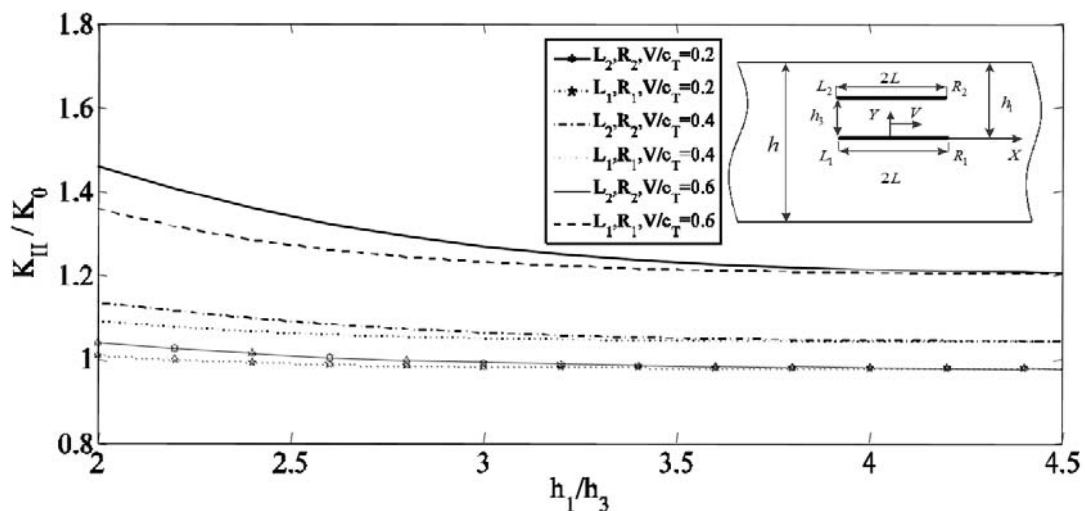
شکل ۷- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود دوم بر حسب طول بی بعد برای دو ترک هم راستا

به عنوان آخرین مثال دو ترک هم طول موازی که با سرعت های مساوی  $V$  و در فاصله  $h_3$  از یکدیگر قرار گرفته اند در شکل (۸) مورد بررسی قرار گرفته است و نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب طول بی بعد شده  $\frac{h_1}{h_3}$  در مود دوم برای دو ترک رسم شده است ( $h_1 = h/2$ ،  $h = h_1 + h_2$  و  $h_2 = h/2$ ). با افزایش

$\frac{h_1}{h_3}$  به دلیل کاهش تاثیر مرز بر روی ترک ها ضرایب شدت تنش کاهش می یابد.

ولی در طول بی بعد ثابت با افزایش سرعت ضرایب شدت تنش نیز افزایش می یابد. و هم چنین در یک سرعت بی بعد شده مشخص و در  $\frac{h_1}{h_3}$  ثابت ضرایب شدت تنش  $R_2$  و  $L_2$  بیشتر از  $R_1$  و  $L_1$  می باشد و این به

دلیل نزدیکی به مرز باریکه می باشد.



شکل ۸- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد در مود دوم برای دو ترک موازی



## ۵- نتیجه گیری

روش های تحلیلی مختلفی برای محاسبه میدان تنش در محیط های تضعیف شده توسط ترک متحرک مورد استفاده قرار می گیرند از جمله این روشها، می توان به روش توابع تنش مختلط، استفاده از تبدیلات انتگرالی و توابع گرین اشاره نمود. استفاده از حل نابجایی دارای این مزیت است که روش حل تابع تعداد، هندسه و الگوی قرارگیری ترکها نسبت به هم نمی باشد. همچنین حل مسائل ترک با روش های توابع تنش مختلط و یا استفاده از تبدیلات انتگرالی از نوع مسائل شرط مرزی ترکیبی است ولی در روش توزیع نابجایی شرط مرزی تنها از نوع تغییر مکان بوده و مساله محیط همبند با شرایط مرزی ساده که حل آن به مراتب ساده تر از مساله مقدار مرزی ترکیبی است، انجام می شود. با توجه به مثال های حل شده نتایج زیر بدست می آیند:

۱. ضرائب شدت تنش بی بعد در بارگذاری مود اول و دوم با افزایش سرعت بی بعد افزایش می یابند.
۲. ضرائب شدت تنش بی بعد نوک ترک تحت تأثیر طول ترک می باشد، بطوریکه افزایش طول ترک این ضرائب را افزایش می دهد.
۳. ضرائب شدت تنش برای نوک های نزدیک هم به دلیل اندر کنش متقابل آنها بر یکدیگر نسبت به نوک های دور از هم بیشتر است.

## مراجع

- [1] Volterra, V., "Sur Pe'quilibre Des Carps Elastiques Multiplement Connexes, Annales Scientifiques De l'Ecole Normale Superiure", Paris, Series 3, Vol. 24, pp. 401-517, (1907).
- [2] Das, S., and Patra, B., "Moving Griffith Crack at the Interface of Two Dissimilar Orthotropic Half Plane", Engineering Fracture Mechanics Vol. 54. No. 4, pp. 523-531, (1996).
- [3] Chen, Z. T., Karihaloo, B. L., and Yu, S. W., "A Griffith Crack Moving Along the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials", International Journal of Fracture, Vol. 91, pp. 197-203, (1998).
- [4] Das, S., and Patra, B., "Stress Intensity Factors for Moving Interfacial Crack between Bonded Dissimilar Fixed Orthotropic Layers", Computers and Structures, Vol. 69, pp. 459-472, (1998).
- [5] Li, X. F., and Wu, X. F., "A Moving Mode-III Crack at the Interface between Two Dissimilar Piezoelectric Materials", International Journal of Engineering Science, Vol. 38, pp. 1219-1234, (2000).
- [6] Gonzalez, C. R., and Mason, J. J., "Dynamic Stress Intensity Factor for a Propagating Semi-infinite Crack in Orthotropic Materials", International Journal of Engineering Science, Vol. 39, pp. 15-38, (2001).

- [7] Meguid, S. A., Wang, X. D., and Jiang, L. Y., "On the Dynamic Propagation of a Finite Crack in Functionally Graded Materials", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 1753-1768, (2002).
- [8] Bi, X.S., Cheng, J., and Chen, X. L., "Moving Crack for Functionally Graded Material in an Infinite Length Strip under Anti-plane Shear", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 39, pp. 89-97, (2003).
- [9] Zhou, and Zeng, T., "Crack Propagation in a Functionally Graded Strip under the Plane Loading", *International Journal of Fracture* Vol. 126, pp. 39-55, (2004).
- [10] Das, S., "Interaction of Moving Interface Collinear Griffith Cracks under Anti-plane Shear", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 7880-7890, (2006).
- [11] Cheng, Z., and Zhong, Z., "Analysis of a Moving Crack in a Functionally Graded Strip between Two Homogeneous Layers", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 1038-1046, (2007).
- [12] Cheng, Z., "Crack Propagating in Functionally Graded Coating with Arbitrarily Distributed Material Properties Bonded to Homogeneous Substrate", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, pp. 437-446, (2010).
- [13] Cheng, Z., Gao, D., and Zhong, Z., "A Moving Interface Crack between two Dissimilar Functionally Graded Strips under Plane Deformation with Integral Equation Methods", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, pp. 267-273, (2012).
- [14] Bagheri, R., and Ayatollahi, M., "Multiple Moving Cracks in a Functionally Graded Strip", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 4677-4686, (2012).
- [15] Korsunsky, A. M., and Hills, D. A., "The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei", Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 210, No.1, pp. 23-31, (1996).
- [16] Erdogan, F., Gupta, G. D., and Cook, T. S., "*Numerical Solution of Singular Integral Equations, Method of Analysis and Solution of Crack Problems*", Edited by G. C. Sih, Noordhoff, Leyden, Holland, (1973).
- [17] Faal, R. T., Fotuhi, A. R., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., "Antiplane Stress Analysis of an Isotropic Wedge with Multiple Cracks", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4535-4550, (2004).

## فهرست نمادهای انگلیسی

تابع محدود و پیوسته	$g_{z,j}(p)$
تعداد نقاط روی ترک	$m$
محل اعمال نابجائی	$p$
محل بررسی تنش	$s$
نصف طول ترک $i$ ام	$l_i$
مختصات وسط ترک $i$ ام	$x_{0i}, y_{0i}$
ضخامت باریکه	$h$
نصف ضخامت باریکه	$h_1$
فاصله مرکز ترک تا وجه پایینی باریکه	$h_2$
مختصات متحرک	$x, y$
مختصات ثابت	$X, Y$
بردار برگرز	$b_z$
تابع دانسیته نابجائی بر حسب متغیر بی بعد	$B_{z,j}(p)$
ضرایب شدت تنش مد یک و دو	$K_{II}, K_I$
کرنل معادله انتگرالی	$k_{ij}(s, p)$
تعداد ترک در باریکه	$N$
زمان	$t$
معادلات پارامتری ترک	$x_i = \alpha_i(s), y_i = \beta_i(s)$

## پیوست

$$\alpha = \sqrt{1 - (V/c_L)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - (V/c_T)^2}$$

$$p = -\lambda + (\lambda + 2\mu)(1 - (V/c_L)^2)$$

$$t = -(\lambda + 2\mu) + \lambda(1 - (V/c_L)^2)$$

$$q = 2\mu\sqrt{1 - (V/c_T)^2}$$

$$s = 2\sqrt{1 - (V/c_L)^2}$$

$$r = 2 - (V/c_T)^2$$

$$M_1 = \frac{(sq + pr)}{2ps}$$

$$M_2 = \frac{(sq - pr)}{2ps}$$

$$K_1 = \frac{(L_8L_1 - L_4L_5)}{(L_3L_8 + L_4L_7)}$$

$$K_2 = \frac{(L_8L_2 - L_4L_6)}{(L_3L_8 + L_4L_7)}$$

$$K_3 = \frac{(L_1L_7 + L_3L_5)}{(L_4L_7 + L_3L_8)}$$

$$K_4 = \frac{(L_2L_7 + L_3L_6)}{(L_4L_7 + L_3L_8)}$$

$$Z_1 = M_1K_1e^{\omega h_2(\alpha-\beta)} + M_2e^{\omega h_2(\alpha+\beta)}K_3$$

$$Z_2 = M_1K_2e^{\omega h_2(\alpha-\beta)} + M_2K_4e^{\omega h_2(\alpha+\beta)}$$

$$Z_3 = M_2K_1e^{-\omega h_2(\alpha+\beta)} + M_1K_3e^{-\omega h_2(\alpha-\beta)}$$

$$Z_4 = M_2K_2e^{-\omega h_2(\alpha+\beta)} + M_1K_4e^{-\omega h_2(\alpha-\beta)}$$

$$L_1 = pM_1e^{\omega h_1(\beta-\alpha)} + pM_2e^{\omega h_1(\alpha+\beta)} - q$$

$$L_2 = -pM_2e^{-\omega h_1(\alpha+\beta)} - pM_1e^{\omega h_1(\alpha-\beta)} + q$$

$$L_3 = pM_1e^{\omega h_2(\alpha-\beta)} + pM_2e^{-\omega h_2(\alpha+\beta)} - q$$

$$L_4 = pM_2e^{\omega h_2(\alpha+\beta)} + pM_1e^{-\omega h_2(\alpha-\beta)} - q$$

$$L_5 = -sM_1e^{\omega h_1(\beta-\alpha)} + sM_2e^{\omega h_1(\beta+\alpha)} + r$$

$$L_6 = sM_2e^{-\omega h_1(\beta+\alpha)} - sM_1e^{\omega h_1(\alpha-\beta)} + r$$

$$L_7 = sM_1e^{\omega h_2(\alpha-\beta)} - sM_2e^{-\omega h_2(\alpha+\beta)} - r$$

$$L_8 = -sM_2e^{\omega h_2(\alpha+\beta)} + sM_1e^{-\omega h_2(\alpha-\beta)} - r$$

$$\Delta_1 = -\omega M_1e^{\omega h_1(\beta-\alpha)} - \omega M_2e^{\omega h_1(\beta+\alpha)} + \omega\beta + \omega Z_1 + \omega Z_3 - \omega\beta K_1 - \omega\beta K_3$$

$$\Delta_2 = \omega M_2e^{-\omega h_1(\alpha+\beta)} + \omega M_1e^{\omega h_1(\alpha-\beta)} - \omega\beta + \omega Z_2 + \omega Z_4 - \omega\beta K_2 - \omega\beta K_4$$

$$\Delta_3 = \omega\alpha M_1e^{\omega h_1(\beta-\alpha)} - \omega\alpha M_2e^{\omega h_1(\beta+\alpha)} - \omega - \omega\alpha Z_1 + \omega\alpha Z_3 + \omega K_1 - \omega K_3$$

$$\Delta_4 = -\omega\alpha M_2 e^{-\omega h_1(\beta+\alpha)} + \omega\alpha M_1 e^{\omega h_1(\alpha-\beta)} - \omega - \omega\alpha Z_2 + \omega\alpha Z_4 + \omega K_2 - \omega K_4$$

$$F_1 = \left[ \frac{\Delta_4}{\Delta_4\Delta_1 - \Delta_2\Delta_3} \right]$$

$$F_2 = \left[ \frac{\Delta_2}{\Delta_4\Delta_1 - \Delta_2\Delta_3} \right]$$

$$F_3 = \left[ \frac{\Delta_3}{\Delta_3\Delta_2 - \Delta_1\Delta_4} \right]$$

$$F_4 = \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta_3\Delta_2 - \Delta_1\Delta_4} \right]$$

**Abstract**

In this paper, analyses of several finite cracks with constant length (Yoffe-type crack) propagating in an isotropic strip were studied. The distributed dislocation technique is used to carry out stress analysis in an isotropic strip containing moving cracks under in-plane loading. The Galilean transformation is employed to express the wave equations in terms of coordinates that are attached to the moving crack. The solution of a moving edge dislocation is obtained in an isotropic strip by means of Fourier transform method. The stress components reveal the familiar Cauchy singularity at the location of dislocation. Finally several examples are solved and the numerical results for the stress intensity factor are obtained. The influences of the geometric parameters, the thickness of the isotropic strip, the crack size and speed have significant effects on the stress intensity factors of crack tips which are displayed graphically.