

کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های استوانه‌ای FGM براساس تئوری تنش کوپلی اصلاح شده

راهب غلامی^۱

دانشجوی دکترا

ابوالفضل درویزه^۲

استاد

رضا انصاری^۳

دانشیار

یوسف غلامی^۴

دانشجوی کارشناسی

کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های استوانه‌ای هوشمند (FGM) با ارائه یک مدل پوسته وابسته ابعادی براساس تئوری تنش کوپلی اصلاح شده (MCST) بررسی شده است. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات مرتبه بالا و شرایط مرزی بدست می‌آیند. سپس، روش حل ناویر برای پیش‌بینی بار کمانش بحرانی میکروپوسته‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده استفاده شده است. همچنین، با بیان معادلات حاکم به صورت معادلات Mathieu-Hill و استفاده از روش Bolotin، پایداری دینامیکی میکروپوسته‌ها تحت بار نوسانی فشاری محوری بررسی شده است. تأثیر ضریب بار استاتیکی، پارامتر مقیاس طول بی‌بعد، شاخص گرادیانی ماده، نسبت طول به شعاع و نسبت طول به ضخامت بر بار کمانشی و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه های راهنما: میکروپوسته‌های استوانه‌ای هوشمند، کمانش محوری، پایداری دینامیکی، تئوری تنش کوپلی اصلاح شده، اثرات اندازه

۱- مقدمه

ضخامت سازه‌هایی همانند تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها که در ابزارها و سیستم‌هایی در ابعاد میکرو استفاده می‌شوند، عموماً در مقیاس میکرو و نانو می‌باشند. میکروپوسته‌ها یکی اجزایی هستند که برای طراحی و ساخت سیستم‌های میکرو استفاده می‌شوند. به عنوان نمونه، Meschet و همکاران [۱] یک استراتژی برای طراحی و ساخت میکروکپسول‌هایی بر پایه بیوسنسورهای فلورسان ارائه داده‌اند. همچنین، Mescher و همکاران [۲] فرآیند طراحی، ساخت و نتایج آزمایشگاهی یک سیستم میکروالکترومکانیکی جدید به صورت میکروپوسته فرو الکتریک فراصوت را ارائه کرده‌اند. اثرات وابسته ابعادی میکروسازه‌ها در فلزات و پلیمرها در نتایج آزمایشگاهی مشاهده شده‌اند [۳-۵]. تئوری‌های متداول محیط پیوسته بر پایه الاستیسیته کلاسیک به دلیل فقدان مقیاس‌های طولی قادر به توضیح پدیده وابسته ابعادی نیستند. این ناتوانی، محققان را به سمت

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان rahegholami@gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان adarvizeh@guilan.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

^۴ دانشجوی کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای محیط پیوسته که شامل ثابت‌های مادی اضافی هستند، سوق می‌دهد. بدلیل قابلیت محاسباتی در ارائه نتایج دقیق و قابل مقایسه با مدل‌های پایه اتمی، مدل‌های محیط پیوسته اصلاح شده یکی از روش‌های کاربردی برای بررسی رفتار نانو و میکروسازه‌ها می‌باشند. تئوری‌های محیط پیوسته وابسته ابعادی مختلفی که قابلیت در نظر گرفتن اثرات اندازه را دارند، به منظور بررسی پاسخ‌های مکانیکی سازها در مقیاس نانو و میکرو ارائه شده‌اند [۱۲-۶].

یکی از این تئوری‌های مرتبه بالا که به منظور در نظر گرفتن اثرات اندازه استفاده می‌شود، تئوری تنش کوپلی ارائه شده توسط Mindlin و Tiersten [۱۳] و Koiter [۱۴] است که شامل چهار پارامتر مقیاس طول مادی (دو پارامتر کلاسیک و دو پارامتر اضافی) می‌باشد. تحقیقات متنوعی به منظور بررسی اثرات اندازه براساس تئوری تنش کوپلی انجام شده است [۲۲-۱۵]. Yang و همکاران [۲۳] معتقدند که علاوه بر معادلات تعادل کلاسیک نیروها و گشتاورها، معادله‌ی تعادل دیگری برای المان‌های مادی باید در نظر گرفته شود. این معادله‌ی اضافی، تعادل گشتاورهای کوپلی می‌باشد. سپس، نتیجه گرفته شد که این معادله تعادل اضافی دلالت بر تقارن تنسور تنش کوپلی دارد. بنابراین، با اصلاح معادلات ساختاری تئوری تنش کوپلی، معادلات ساختاری جدیدی که تنها شامل یک پارامتر مقیاس طول مادی اضافی است، ارائه شد که تئوری تنش کوپلی اصلاح شده^۱ (MCST) نامیده می‌شود.

در سال‌های اخیر، تحقیقات مختلفی براساس MCST برای بررسی رفتار دینامیکی میکروتیرها صورت گرفته است [۳۳-۲۴]. به عنوان مثال، Ma و همکاران [۲۷] یک مدل تیر تیموشنکو وابسته ابعادی براساس MCST ارائه کرده‌اند. ارتعاشات آزاد و کمانش میکروتیرها در محیط حرارتی با استفاده از MCST توسط Ke و همکاران [۲۸] بررسی شده است. همچنین، ارتعاشات آزاد ورق میندلین براساس یک مدل وابسته ابعادی براساس MCST و به کمک روش ریتز توسط Ke و همکاران [۲۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.

در مطالعه حاضر، کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های FGM بررسی می‌شود. بدین منظور، بر پایه‌ی تئوری تنش کوپلی اصلاح شده و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته^۲، یک مدل وابسته ابعادی پوسته که شامل پارامتر مقیاس طول مادی است و قابلیت در نظر گرفتن اثر اندازه را دارد، ارائه می‌شود. مدل پوسته غیرکلاسیک بدست آمده با صفر قرار دادن پارامتر مقیاس طول ماده قابل تقلیل به یک مدل پوسته کلاسیک است. خواص ماده توسط رابطه‌ی الگوی Mori-Tanaka^۳ و درجه بندی شده در راستای ضخامت فرض می‌شود.

با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم مرتبه بالا و شرایط مرزی مرتبط به دست می‌آیند. سپس، با استفاده از روش حل ناویر که در آن جابجایی‌های تعمیم یافته به صورت توابع مثلثاتی که شرایط مرزی میکروپوسته‌ها با تکیه‌گاه‌های ساده را ارضا می‌کند، مشخصه‌های کمانش محوری میکروپوسته‌های FGM بررسی می‌شود. همچنین، با در نظر گرفتن بار فشاری محوری به صورت یک تابع تناوبی، با بیان معادلات حاکم به صورت معادلات Mathieu-Hill و استفاده از روش Bolotin، مناطق ناپایداری دینامیکی مشخص می‌شوند. نتایج عددی برای نشان دادن اثرات ضریب بار استاتیکی، شماره مود محوری، پارامتر مقیاس طول

¹ Modified couple stress theory

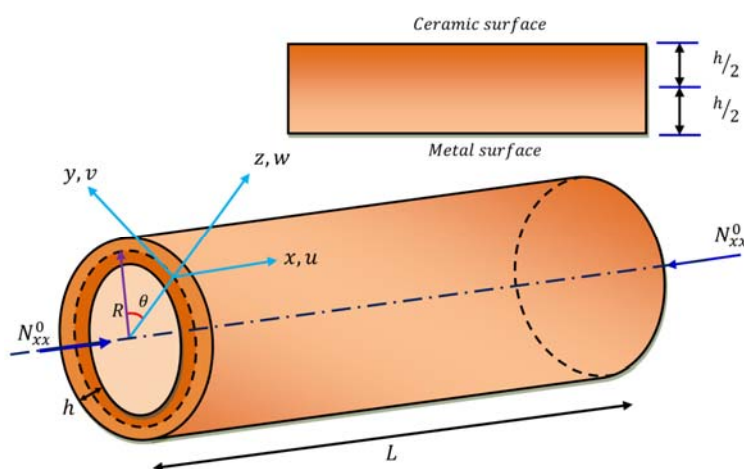
² First-order shear deformation shell theory

³ Mori-Tanaka scheme

بی‌بعد، شاخص گرادیانی ماده، نسبت های طول به شعاع و نسبت طول به ضخامت ارائه می‌گردد.

۲- فرمول بندی معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط

مطابق شکل (۱)، یک میکروپوسته استوانه‌ای FGM به طول L ، شعاع میانی R و ضخامت یکنواخت h که در معرض یک بار محوری N_{xx}^0 قرار دارد را در نظر بگیرید. همانگونه که در شکل نشان داده شده است، یک سیستم مختصاتی منحنی‌الخط با مختصات x ، y و z که به ترتیب بیانگر جهت‌های محوری، محیطی و شعاعی است، بر روی سطح میانی پوسته استوانه‌ای تعریف می‌شود.



شکل ۱- شکل شماتیک یک میکروپوسته استوانه‌ای FGM: سیستم مختصات، هندسه و پارامترهای سینماتیکی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته، جابجایی یک نقطه دلخواه پوسته در راستای محورهای x ، y و z را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} u_x &= u(t, x, y) + z \psi_x(t, x, y), & u_y &= v(t, x, y) + z \psi_y(t, x, y), \\ u_z &= w(t, x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

که t بیانگر زمان، u ، v و w بیانگر جابجایی سطح میانی، ψ_x دوران سطح میانی حول محور x و ψ_y دوران سطح میانی حول محور y می‌باشند.

۲-۱- تئوری تنش کوپلی اصلاح شده (MCST)

در تئوری‌های کلاسیک، چگالی انرژی کرنشی به صورت تابعی از کرنش در نظر گرفته شده است ولی در مطالعات الاستیسیته نشان داده شده است که با در نظر گرفتن گرادیان کرنش‌ها می‌توان انرژی کرنشی را برای مواد خطی و ایزوتروپیک براساس تنش کوپلی اصلاح شده به فرم بصورت زیر نوشت [۲۳]

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dv \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۳)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}); \quad \theta_i = \frac{1}{2}[\text{curl}(\mathbf{u})]_i \quad (۴)$$

براساس این تئوری، چگالی انرژی کرنشی علاوه بر تنسور کرنش، تابعی از گرادیان بردار دوران می‌باشد. این تنسورها با دو ثابت مادی کلاسیک برای مواد الاستیک خطی و ایزوتروپیک و یک پارامتر مقیاس طول مستقل مشخص می‌شوند. در رابطه‌ی (۲)–(۴)، ε_{ij} مولفه‌های کرنش کلاسیک و χ_{ij}^s مولفه‌های گرادیان دوران متقارن می‌باشند. همچنین، u_i و θ_i به ترتیب بیانگر مولفه‌های بردار جابجایی \mathbf{u} و بردار دوران $\boldsymbol{\theta}$ می‌باشند.

معادلات ساختاری برای مواد الاستیک خطی و ایزوتروپیک را می‌توان به فرم زیر بیان کرد [۲۳]

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad m_{ij}^s = 2\mu l^2 \chi_{ij}^s. \quad (۵)$$

پارامتر m^s تنسور گرادیان دوران متقارن، l پارامتر مقیاس طول مادی مستقل اضافی مربوط به گرادیان‌های دوران متقارن و پارامترهای λ و μ ثابت‌های مادی لانه می‌باشند.

۲-۲- خواص مواد میکروپوسته‌های استوانه‌ای FGM

همانطور که در شکل (۱) نشان داده است، مواد میکروپوسته FGM در راستای ضخامت پوسته درجه‌بندی شده‌اند و سطح داخلی ($z = -h/2$) و سطح خارجی ($z = h/2$) به ترتیب از فلز و سرامیک خالص ساخته شده‌اند. خواص مکانیکی FGM به خاطر تغییر تدریجی کسر حجمی مواد سازنده، به صورت پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. براساس تکنیک همگن‌سازی و الگوی Mori-Tanaka، خواص مؤثر مواد میکروپوسته FGM را می‌توان محاسبه کرد. مدول حجمی مؤثر K_e و مدول برشی μ_e براساس الگوی Mori-Tanaka را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد [۳۴]

$$\frac{K_e - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + V_m (K_c - K_m)/(K_c + 4K_m/3)} \quad (۶)$$

$$\frac{\mu_e - \mu_m}{\mu_c - \mu_m} = \frac{V_c}{1 + V_m (\mu_c - \mu_m)/[\mu_m + \mu_m (9K_m + 8\mu_m)/(6(K_m + 2\mu_m))]} \quad (۷)$$

که K و V به ترتیب بیانگر مدول حجمی و کسر حجمی می‌باشند. همچنین، پانویس‌های m و c به ترتیب بیانگر فازهای فلزی و سرامیکی می‌باشد.

برای بیان تغییرات کسر حجمی مواد، توابع مختلفی را می‌توان مورد استفاده قرار داد. در اینجا، کسر حجمی فازهای فلزی و سرامیکی با استفاده از تابع توانی ساده به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۵]

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k, \quad V_m(z) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k \quad (۸)$$

که k شاخص کسر حجمی می‌باشد. از این رو، خواص مادی مؤثر مهم نظیر مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν و چگالی جرمی ρ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$E(z) = \frac{9K_e\mu_e}{3K_e + \mu_e}, \quad \nu(z) = \frac{3K_e - 2\mu_e}{6K_e + 2\mu_e}, \quad \rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad (۹)$$

۲-۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

با جایگذاری رابطه‌ی (۱) در روابط (۳) و (۴)، مؤلفه‌های تنسور کرنش و تنسور گرادیان دوران متقارن را می‌توان بدست آورد. با در نظر گرفتن این نکته که تئوری پوسته Donnell [۳۶] بر این فرض استوار است که ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع انحنا خیلی کوچک می‌باشد؛ به عبارتی دیگر $h/R \ll 1$ و $|z/R| \ll 1$ او با تقریب $1 \approx (1 + z/R)$ ، با قرار دادن رابطه‌ی (۱) در معادله‌ی (۳)، مؤلفه‌های غیر صفر تنسور کرنش برابرند با

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{v}{R} \right) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

همچنین مؤلفه‌های دوران المان‌های مادی در میکروپوسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\psi_y}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \left(\frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{R} \psi_y \right), \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right), \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی (۴) و اعمال تقریب‌های ذکر شده برای تئوری Donnell، مؤلفه‌های تنسور گرادیان دوران به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{yy}^s = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right), \\ \chi_{zz}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \chi_{xy}^s = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \\ \chi_{xz}^s &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\psi_y}{R} \right) + \frac{z}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right), \\ \chi_{yz}^s &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\psi_x}{R} \right) + \frac{z}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (۱۲)$$

با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۲) در معادلات ساختاری (۵)، مؤلفه‌های تنسور تنش کلاسیک و تنسور تنش کوپلی بدست می‌آیند.

با فرض اینکه Π_C و Π_{NC} به ترتیب انرژی‌های کرنشی متناظر با تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپلی اصلاح شده باشند، انرژی کرنشی کل میکروپوسته را می‌توان به صورت $\Pi_S = \Pi_C + \Pi_{NC}$ نوشت

$$\Pi_C = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + M_{xx} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + N_{yy} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + M_{yy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + M_{xy} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{v}{R} \right) \right\} dA \quad (13)$$

$$\Pi_{NC} = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \frac{Y_{xx}}{2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Y_{yy}}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) + \frac{Y_{zz}}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{Y_{xy}}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \frac{Y_{xz}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\psi_y}{R} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{H_{xz}}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) \right\} dA \quad (14)$$

نیروهای منتجه عمودی (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) ، نیروهای منتجه برشی (Q_x, Q_y) ، گشتاورهای منتجه (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) ، نیروهای منتجه مرتبه بالا $(Y_{xx}, Y_{yy}, Y_{zz}, Y_{xy}, Y_{xz}, Y_{yz})$ و گشتاورهای منتجه مرتبه بالا (H_{xz}, H_{yz}) در پیوست (الف) تعریف شده‌اند. کار خارجی ناشی از بار محوری N_{xx}^0 برابر است با

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_A N_{xx}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (15)$$

همچنین، انرژی جنبشی میکروپوسته FGM را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dz dA \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + I_2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA \\
&\quad \{I_0, I_1, I_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \{1, z, z^2\} dz \quad (17)
\end{aligned}$$

اکنون، با استفاده از اصل همیلتون و با محاسبه ی تغییرات u, v, w, ψ_x, ψ_y و سپس، انتگرال گیری جز به جز، معادلات حاکم و شرایط مرزی را می توان بدست آورد. معادلات حاکم عبارتند از

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial y^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial (Y_{xx} - Y_{yy})}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} + \frac{Y_{xz}}{R^2} + \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \\
&+ \frac{Q_y}{R} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 (Y_{xx} + Y_{yy})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\
&- \frac{N_{yy}}{R} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial (Y_{zz} - Y_{yy})}{\partial y} - \frac{Y_{yz}}{R} - \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\
&- Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (Y_{xx} - Y_{zz})}{\partial x} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} - \frac{Y_{xz}}{R} + \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial x \partial y} \right) \\
&= I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (22)
\end{aligned}$$

و شرایط مرزی به صورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
\delta u = 0 \text{ یا } \left(N_{xx} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{xy} + \frac{Y_{yy} - Y_{zz}}{2R} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \right) n_y = 0, \\
\delta u_{,x} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{xz}}{4} \right) n_y = 0, \quad \delta u_{,y} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{xz}}{4} \right) n_x + \left(\frac{Y_{yz}}{2} \right) n_y = 0, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\delta v = 0 \text{ یا } \left(N_{xy} + \frac{Y_{xx} - Y_{yy}}{2R} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} \right) n_x + \left(N_{yy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} + \frac{Y_{xy}}{2R} \right) n_y = 0, \quad (24)$$

$$\delta v_{,x} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{xz}}{2} \right) n_x + \left(\frac{Y_{yz}}{4} \right) n_y = 0, \quad \delta v_{,y} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{yz}}{4} \right) n_x = 0,$$

$$\delta w = 0 \text{ یا } \left(N_{xx}^0 \frac{\partial w}{\partial x} + Q_x - \frac{Y_{yz}}{2R} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial (Y_{yy} - Y_{xx})}{\partial y} \right) n_x + \left(Q_y + \frac{Y_{xz}}{2R} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial (Y_{xx} - Y_{yy})}{\partial x} \right) n_y = 0, \quad (25)$$

$$\delta w_{,x} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{xy}}{2} \right) n_x + \left(\frac{Y_{yy} - Y_{xx}}{4} \right) n_y = 0,$$

$$\delta w_{,y} = 0 \text{ یا } \left(\frac{Y_{yy} - Y_{xx}}{4} \right) n_x + \left(\frac{Y_{xy}}{2} \right) n_y = 0,$$

$$\delta \psi_x = 0 \text{ یا } \left(M_{xx} - \frac{Y_{xy}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{xz}}{\partial y} \right) n_x$$

$$+ \left(M_{xy} + \frac{Y_{zz} - Y_{yy}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\partial H_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{yz}}{\partial y} \right) n_y = 0, \quad (26)$$

$$\delta \psi_{x,x} = 0 \text{ یا } \left(\frac{H_{xz}}{4} \right) n_y = 0, \quad \delta \psi_{x,y} = 0 \text{ یا } \left(\frac{H_{xz}}{4} \right) n_x + \left(\frac{H_{yz}}{2} \right) n_y = 0,$$

$$\delta \psi_y = 0 \text{ یا } \left(M_{xy} + \frac{Y_{xx} - Y_{zz}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\partial H_{yz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{xz}}{\partial x} \right) n_x$$

$$+ \left(M_{yy} + \frac{Y_{xy}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\partial H_{yz}}{\partial x} \right) n_y = 0, \quad (27)$$

$$\delta \psi_{y,x} = 0 \text{ یا } \left(\frac{H_{xz}}{2} \right) n_x + \left(\frac{H_{yz}}{4} \right) n_y = 0, \quad \delta \psi_{y,y} = 0 \text{ یا } \left(\frac{H_{yz}}{4} \right) n_x = 0.$$

بنابراین، براساس تنش کوپلی اصلاح شده، معادلات حاکم وابسته ابعادی یک میکروپوسته استوانه‌ای بدست آمده است. با قرار دادن پارامتر مقیاس طول مادی برابر با صفر، معادلات کلاسیک و شرایط مرزی متناظر با آن براساس تئوری پوسته Donnell بدست می‌آید. قابل ذکر است که شرایط مرزی بدست آمده فوق تمام حالت‌های ممکن شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک برای میکروپوسته‌های استوانه‌ای را فراهم می‌آورد. معادلات بدست آمده فوق را برحسب مؤلفه‌های جابجایی هم بیان کرد که در پیوست (ب) آورده شده است.

۳- حل ناویر برای میکروپوسته‌های FGM تحت تکیه‌گاه‌های ساده

در این قسمت، برپایه حل ناویر، معادلات حاکم مرتبه بالا حل می‌شوند. برای بررسی کمانش و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های استوانه‌ای تحت تکیه‌گاه‌های ساده، جابجایی‌های تعمیم یافته به گونه‌ای انتخاب

می‌شوند که شرایط مرزی زیر برای تکیه‌گاه ساده را ارضا کند

$$N_{xx} - \frac{Y_{xz,y}}{4} = u_{,x} = v = w = \frac{Y_{xy}}{2} = M_{xx} - \frac{Y_{xy}}{2} - \frac{H_{xz,y}}{4} = \psi_{x,x} = \psi_y = 0 \quad (28)$$

از این رو، مؤلفه‌های جابجایی که شرایط مرزی فوق را ارضا می‌کنند، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$\begin{pmatrix} u(t, x, y) \\ v(t, x, y) \\ w(t, x, y) \\ \psi_x(t, x, y) \\ \psi_y(t, x, y) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U(t) \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \\ V(t) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \\ W(t) \sin(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \\ \Psi_x(t) \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \\ \Psi_y(t) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \end{pmatrix} \quad (29)$$

که $\beta_m = m/R$ ، $\alpha_n = n\pi/L$ و ω بیانگر فرکانس طبیعی می‌باشد و n و m به ترتیب شماره موده‌های محوری و محیطی می‌باشند. با جایگذاری روابط فوق در معادلات حاکم، معادله ی زیر بدست می‌آید :

$$(\mathbf{K} + N_{xx}^0(t)\mathbf{K}_g)\mathbf{d} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

که \mathbf{K} ، \mathbf{K}_g و \mathbf{M} به ترتیب ماتریس سفتی، ماتریس سفتی هندسی و ماتریس جرم هستند که همگی ماتریس های 5×5 هستند و $\mathbf{d} = [U, V, W, \Psi_x, \Psi_y]^T$ مؤلفه‌های غیرصفر ماتریس‌های فوق به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} K_{11} &= -A_{11}\alpha_n^2 - A_{55}\beta_m^2 - A_{55}l^2\beta_m^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{4} \right), \\ K_{12} = K_{21} &= \alpha_n\beta_m(A_{55} + A_{12}) - \frac{\alpha_n\beta_mA_{55}l^2}{4} \left(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{1}{R^2} \right), \\ K_{13} = K_{31} &= \frac{A_{12}\alpha_n}{R} - \frac{A_{55}l^2\alpha_n\beta_m^2}{2R}, \\ K_{14} = K_{41} &= -B_{11}\alpha_n^2 - B_{55}\beta_m^2 + \frac{\beta_m^2l^2}{4} \left(\frac{5A_{55}}{R} - B_{55}(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \right), \\ K_{15} = K_{51} &= \alpha_n\beta_m(B_{55} + B_{12}) + \frac{\alpha_n\beta_ml^2}{4} \left(\frac{A_{55}}{R} - B_{55}(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \right), \\ K_{22} &= -A_{55}\alpha_n^2 - \frac{k_sA_{55}}{R^2} - A_{11}\beta_m^2 - \frac{A_{55}l^2}{4} \left(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{1}{R^2} + \alpha_n^2 \right), \\ K_{23} = K_{32} &= -\frac{\beta_m(k_sA_{55} + A_{11})}{R} - \frac{A_{55}\beta_ml^2}{4R} \left(\frac{1}{R} + \beta_m^2 + 3\alpha_n^2 \right), \\ K_{24} = K_{42} &= \alpha_n\beta_m(B_{55} + B_{12}) - \frac{B_{55}l^2}{4} (\alpha_n^2 + \beta_m^2) + \frac{\alpha_n\beta_ml^2}{4R} (2A_{55} + \frac{B_{55}}{R}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{25} = K_{52} &= \frac{k_s A_{55}}{R} - \beta_m^2 B_{11} - \alpha_n^2 B_{55} + \frac{A_{55} l^2}{4R^3} - \frac{(\beta_m^2 + \alpha_n^2) l^2}{4} \left(\frac{A_{55}}{R} + B_{55} \alpha_n^2 \right) \\
 &\quad + \frac{l^2 \alpha_n^2}{4R} \left(\frac{B_{55}}{R} - 2A_{55} \right), \\
 K_{33} &= -k_s A_{55} (\alpha_n^2 + \beta_m^2) - \frac{A_{11}}{R^2} - \frac{A_{55} l^2}{4} \left((\beta_m^2 - \alpha_n^2)^2 + \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)}{R^2} \right), \\
 K_{34} = K_{43} &= \alpha_n \left(\frac{B_{12}}{R} - k_s A_{55} \right) + \frac{A_{55} \alpha_n l^2}{4} \left(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{1}{R^2} \right), \\
 K_{35} = K_{53} &= \beta_m \left(k_s A_{55} - \frac{B_{11}}{R} \right) + \frac{\beta_m A_{55} l^2}{4} \left(3\alpha_n^2 - \beta_m^2 + \frac{1}{R^2} \right).
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

$$K_{g_{33}} = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \tag{۳۲}$$

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = -I_0, \tag{۳۳}$$

$$M_{14} = M_{41} = M_{25} = M_{52} = -I_1, \quad M_{44} = M_{55} = -I_2.$$

۳-۱- کمانش محوری

با صرف نظر از ترم‌های اینرسی و فرض $N_{xx}^0(t) = -P_{cr}$ که P_{cr} معرف بار کمانشی بحرانی است، معادله‌ی (۳۰) به معادلات تعادل مسئله کمانش استاتیکی میکروپوسته‌های FGM کاهش می‌یابد

$$\{\mathbf{K} - P_{cr} \mathbf{K}_g\} \mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{۳۴}$$

بار بحرانی بی بعد را می‌توان به صورت $\bar{P}_{cr} = P_{cr}/A_{110}$ تعریف نمود که A_{110} مقدار A_{11} برای پوسته فلزی همگن می‌باشد.

۳-۲- پایداری دینامیکی

برای بررسی پایداری دینامیکی، بار تحریک فشاری متناوبی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$N_{xx}^0(t) = -(\alpha + \beta \cos(\Omega t)) P_{cr} \tag{۳۵}$$

پارامترهای α و β به ترتیب معرف ضرایب بارهای استاتیکی و دینامیکی هستند. هم‌چنین، Ω بیانگر فرکانس تحریک است. قابل ذکر است که فرکانس تحریک بی بعد به صورت $\Theta = \Omega L \sqrt{I_{00}/A_{110}}$ می‌توان بیان شود که I_{00} مقدار I_0 برای پوسته فلزی همگن می‌باشد.

با قرار دادن رابطه‌ی (۳۵) در معادله‌ی (۳۰)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$(\mathbf{K} + (\alpha + \beta \cos(\Omega t)) P_{cr} \mathbf{K}_g) \mathbf{d} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}. \tag{۳۶}$$

این معادله بیانگر یک سیستم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب تناوبی از نوع Mathieu–Hill است. براساس تئوری معادلات خطی، مرز بین پاسخ‌های پایدار و ناپایدار با دوره زمانی T_0 و $2T_0$ شکل می‌گیرد که $T_0 = 2\pi/\Omega$ است. Bolotin [۳۷] ثابت کرده است که جواب‌های معادله Mathieu–Hill با دوره زمانی

با $2T_0$ تخمین مرتبه اول را می‌توان به فرم زیر بیان کرد

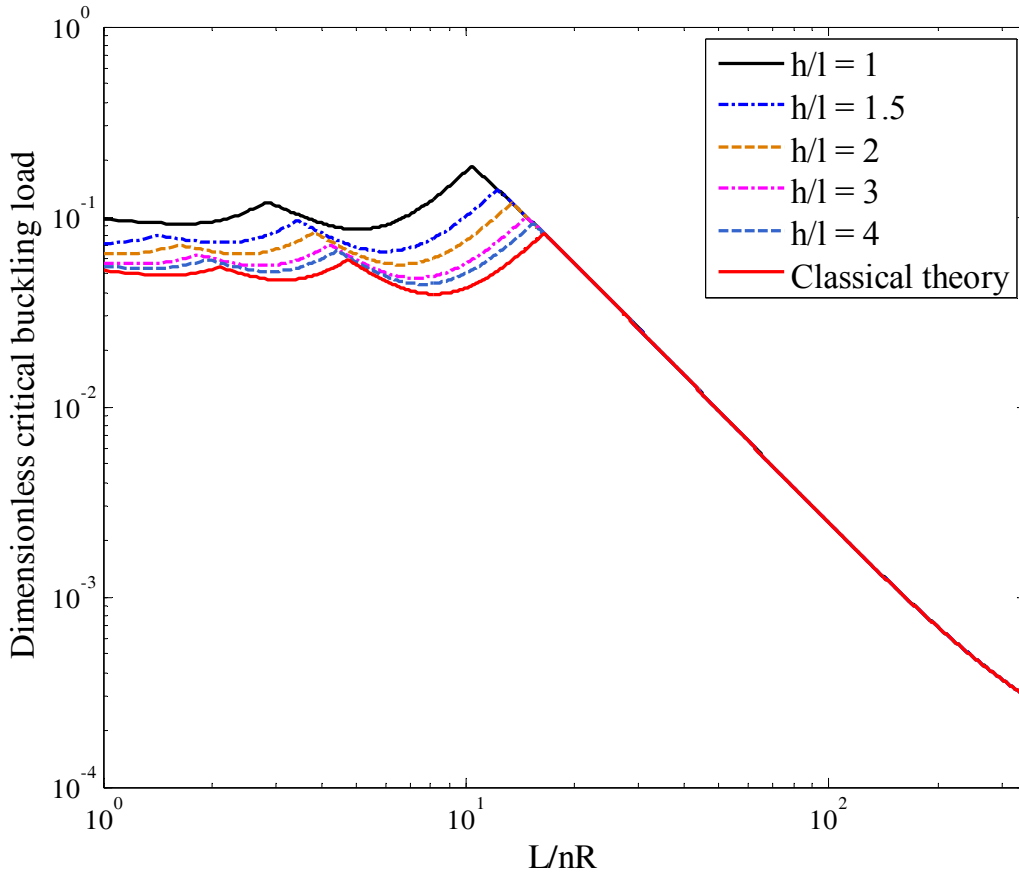
$$\det \left[\mathbf{K} - P_{cr} \left(\alpha \pm \frac{\beta}{2} \right) \mathbf{K}_g - \frac{\Omega^2}{4} \mathbf{M} \right] = 0. \quad (37)$$

برای حل مساله، کفایت فرکانس تحریک بحرانی Ω از دترمینان قبلی بدست آید. با استفاده از الگوریتم مقدار ویژه، برای یک مقدار مشخص α ، تغییرات مقدار ویژه Ω برحسب β را می‌توان بدست آورد. رسم تغییرات در صفحه $\beta - \Theta$ مناطق ناپایدار دینامیکی میکروپوسته‌های FGM تحت بار تناوبی محوری را مشخص می‌کند.

۴- نتایج عددی

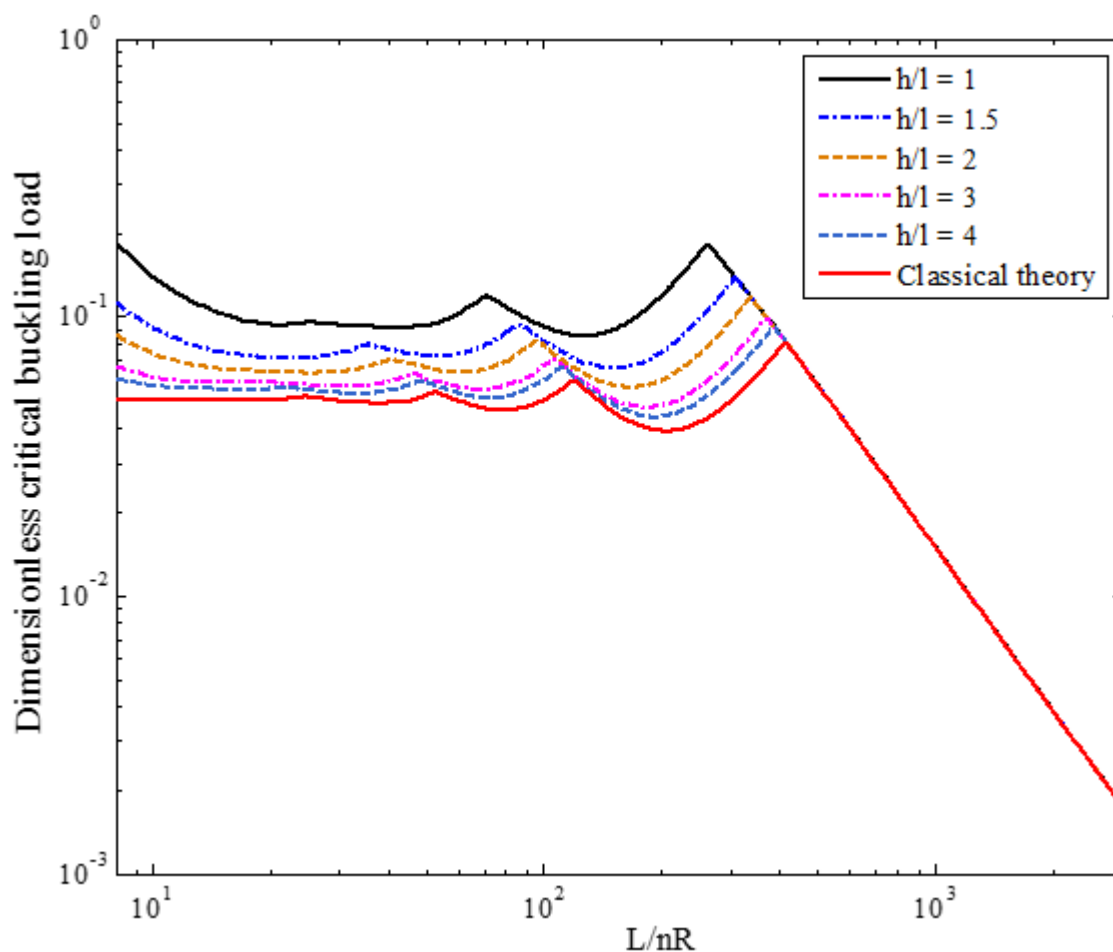
میکرو پوسته FGM تشکیل شده از آلومینیم (Al) و سرامیک (SiC) با خواص ماده $E_m = 70 \text{ GPa}$ ، $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$ و $\nu_m = 0.3$ برای Al و $E_c = 427 \text{ GPa}$ ، $\rho_c = 3100 \text{ kg/m}^3$ و $\nu_c = 0.17$ برای SiC در نظر گرفته می‌شود [۳۴]. سطوح داخلی و خارجی میکروپوسته به ترتیب فلز و سرامیک خالص در نظر گرفته می‌شود.

پارامتر $2\mu l^2$ یک مدول مرتبه بالا است که می‌تواند به عنوان مدول چرخشی در نظر گرفته شود که نشان دهنده‌ی پایداری مواد در برابر گرادین چرخشی المان‌های آن است. برای یافتن مقیاس پارامتر طول l ایپوکسی همگن یا میکرو پوسته FGM، آزمایش‌هایی مانند تست خمشی میکرو و تست پیچشی میکرو نیاز می‌باشند [۳۸، ۵، ۴]. پارامتر مقیاس طول یک میکروتیر همگن آیزنتروپیک به طور آزمایشگاهی توسط Lam و همکاران [۳۸] $l = 17.6 \mu m$ بدست آمده است. با این وجود، تاکنون هیچ داده آزمایشگاهی برای تعیین پارامتر مقیاس طول میکروپوسته‌های FGM وجود ندارد. بنابراین، برای تحلیل عددی، پارامتر مقیاس طول $l = 15 \mu m$ فرض می‌شود.



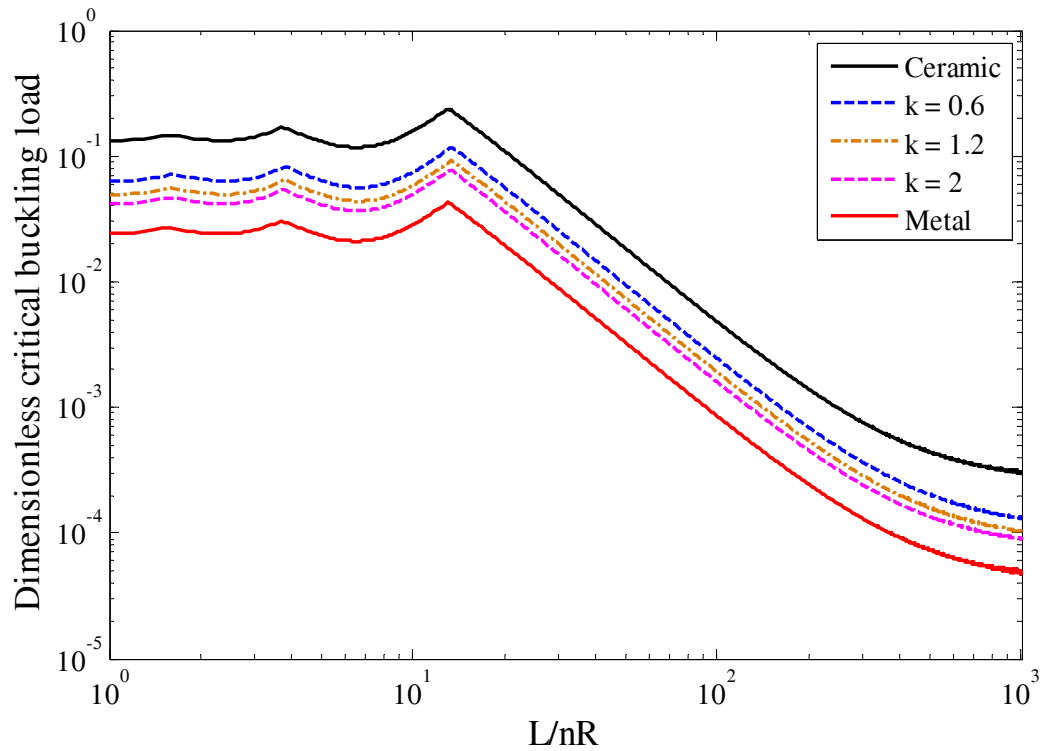
شکل ۲- تغییرات بار کمانشی محوری بحرانی بی بعد برحسب ضریب طول به شعاع برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد ($k = 0.6, R/h = 25$)

نمودارهای رسم شده در شکل‌های (۲) و (۳) بار کمانشی بحرانی بی‌بعد به ترتیب برحسب نسبت طول به شعاع و طول به ضخامت برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی‌بعد را نشان می‌دهد. همچنین، نتایج عددی متناظر با تئوری کلاسیک برای مقایسه در شکل رسم شده است. بار خمشی پیش‌بینی شده توسط مدل پوسته ابعادی بزرگتر از مقدار پیش‌بینی شده متناظر مدل کلاسیک پوسته است. نشان داده شده است در مواقعی که ضخامت پوسته در حدود پارامتر مقیاس طول است، تفاوت زیادی بین بارهای کمانشی پیش‌بینی شده توسط دو مدل وجود دارد. این موضوع بیانگر این است که مدل میکروپوسته وابسته ابعادی مقاومت خمشی بیشتری نسبت به مدل کلاسیک دارد. دلیل این امر این است که در MCST تنش‌های کوپلی برای ایجاد گرادیان دوران نیاز می‌باشد. با این وجود، با افزایش ضخامت میکروپوسته از این اختلاف می‌توان صرف‌نظر کرد. همچنین یافت می‌شود که برای مقادیر بزرگ L/nR و L/nh ، اثر اندازه تأثیری بر رفتار کمانش محوری میکروپوسته‌ها ندارد و مقادیر بار کمانش محوری بحرانی بی‌بعد برای همه مقادیر h/l یکسان است؛ چرا که در این نواحی پوسته به مانند یک تیر عمل می‌کند و مشخصه‌های کمانشی آن باید با یک مدل تیر بررسی شود.



شکل ۳- تغییرات بار کمانشی محوری بحرانی بی بعد بر حسب ضریب طول به ضخامت برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد ($k = 0.6, R/h = 25$)

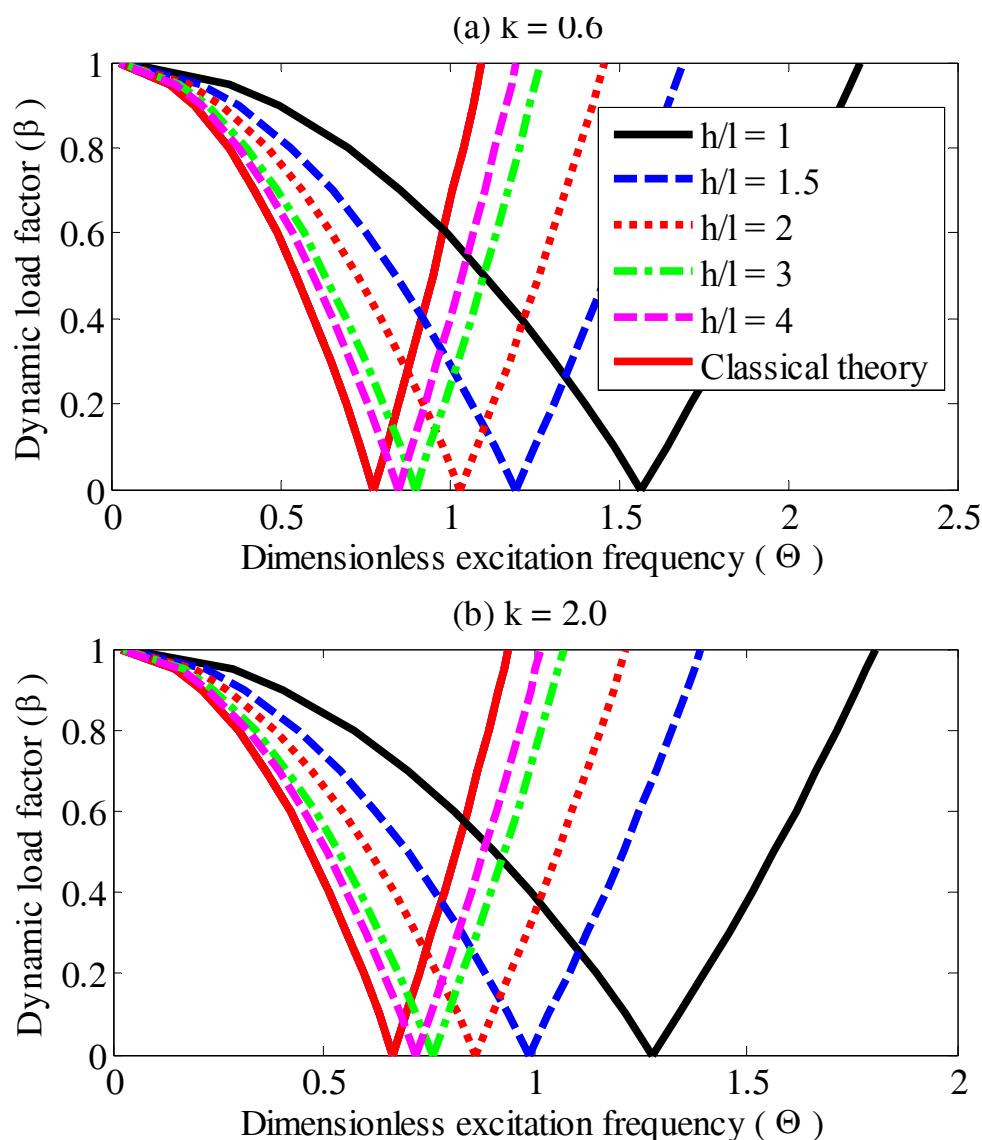
شکل (۴) نشان‌دهنده اثر شاخص گرادیانی ماده بر بار کمانش محوری بحرانی بی‌بعد است. نشان داده شده است که با افزایش شاخص گرادیانی ماده بار کمانشی بحرانی کوچکتر می‌شود. دلیل این امر این است که مقاومت خمشی پوسته با فلز خالص بسیار کمتر از پوسته سرامیکی است و هر چه درصد حجمی ماده سرامیکی در پوسته افزایش یابد، مقاومت خمشی پوسته و در نتیجه آن بار کمانش محوری بحرانی افزایش می‌یابد.



شکل ۴- تأثیر شاخص گرادیانی ماده بر بار کمانشی محوری بحرانی بی بعد ($h/l = 2, R/h = 25$)

شکل (۵) نشان‌دهنده‌ی اثر پارامتر مقیاس طول بر ناپایداری میکروپوسته است که برای دو مقدار مختلف k رسم شده است. در یک ضریب با دینامیکی مشخص، با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد فرکانس تحریک بی‌بعد و منطقه ناپایداری کاهش می‌یابند.

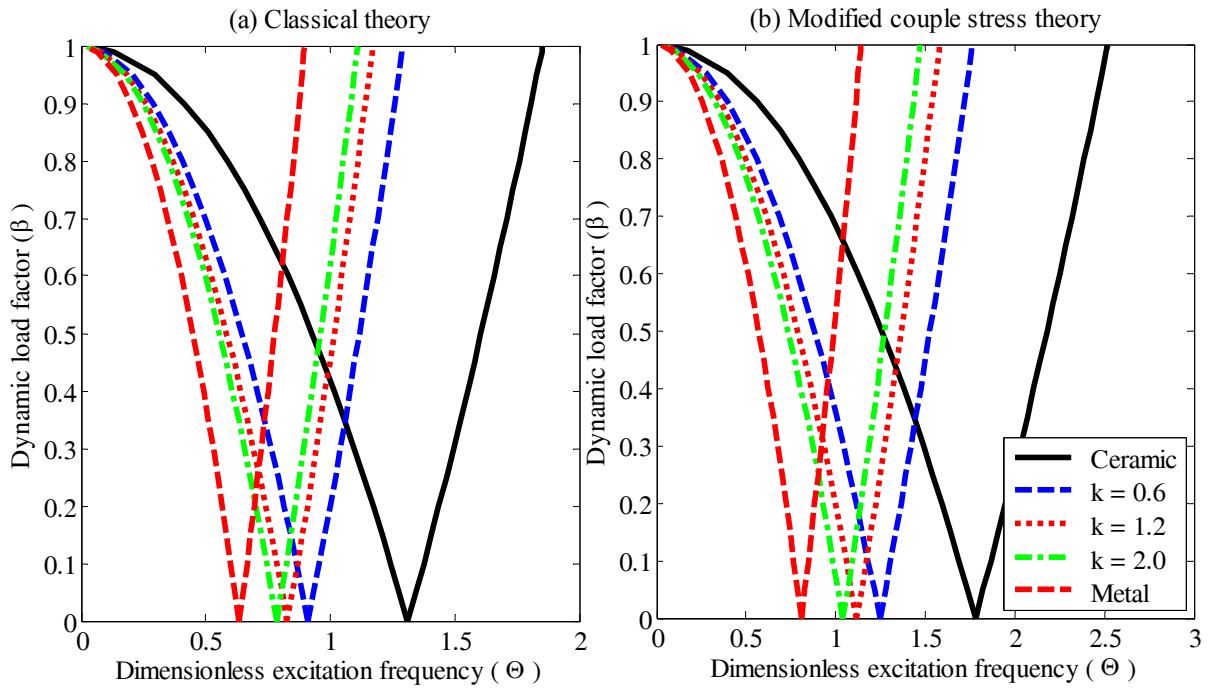
نتیجه می‌شود که به دلیل مقاومت خمشی کمتر، یک میکروپوسته FGM با پارامتر مقیاس طول بزرگتر یا یک میکروپوسته کلاسیک در مقایسه با میکروپوسته‌ها با پارامتر مقیاس طول کوچکتر در فرکانس‌های تحریک کوچکتر مستعد ناپایداری دینامیکی هستند.



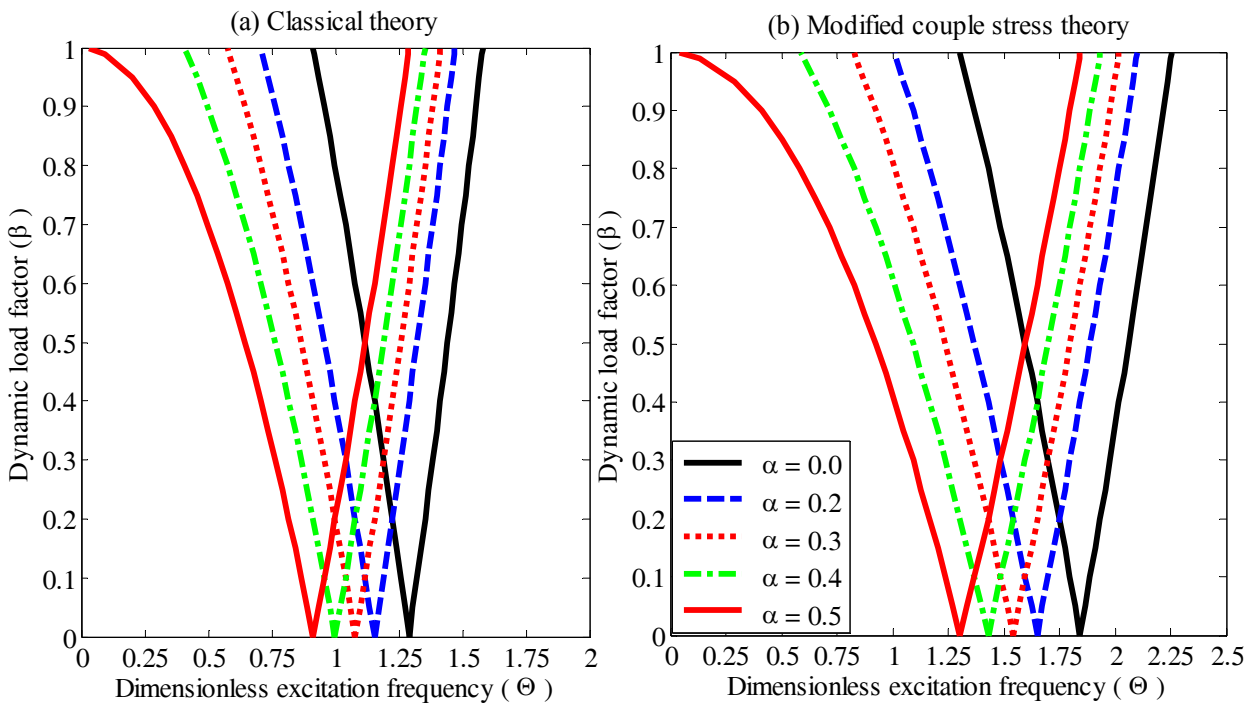
شکل ۵- اثر پارامتر مقیاس طول بی بعد بر ناپایداری یک میکروپوسته

$$(k = 0.6, R/h = 25, L/R = 10, \alpha = 0.5) \text{ FGM}$$

اثر شاخص گرادیانی ماده بر پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های FGM در شکل (۶) نشان داده شده است. با افزایش k مبدأ مناطق ناپایداری به سمت فرکانس های تحریکی بی بعد کوچکتر سوق داده می شود و پهنای منطقه ناپایدار در یک ضریب بار دینامیکی مشخص کاهش می یابد. همچنین، مشاهده می شود که مدل پوسته کلاسیک پیش بینی دست بالایی برای پهنای منطقه ناپایداری ویژه برای مقادیر کوچک شاخص گرادیانی ماده دارد.



شکل ۶- اثر شاخص گرادیانی ماده بر پایداری دینامیکی یک میکروپوسته FGM (الف) تئوری کلاسیک، (ب) تئوری تنش کوپلی اصلاح شده ($R/h = 20, L/R = 10, h/l = 2, \alpha = 0.5$)



شکل ۷- اثر ضریب با استاتیکی بر پایداری دینامیکی یک میکروپوسته FGM (الف) تئوری کلاسیک، (ب) تئوری تنش کوپلی اصلاح شده ($k = 0.6, R/h = 20, L/R = 10, h/l = 1$)

اثر ضریب بار استاتیکی α بر پایداری دینامیک میکروپوسته‌های FGM در شکل (۷) نشان داده شده است. با افزایش ضریب بار استاتیکی، مناطق ناپایداری پهن‌تر می‌شود و به سمت مبدأ مختصات سوق می‌یابد. لازم به ذکر است که $\alpha = 0.0$ بیانگر حالتی است که بار محوری استاتیکی وجود ندارد.

۵- نتیجه‌گیری

کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های FGM بر اساس تئوری تنش کوپلی اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت. یک مدل پوسته مرتبه اول برشی وابسته ابعادی شامل یک مقیاس پارامتر طول داخلی ماده ارائه شد تا به صورت موثری اثر مقیاس کوچک بر خصوصیات کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های FGM را نشان دهد. با به‌کارگیری اصل همیلتون، معادلات حاکم مرتبه بالا و شرایط مرزی وابسته کلاسیک و غیرکلاسیک به دست آمد. سپس، از حل ناویر برای یافتن پاسخ کمانش محوری و پایداری دینامیکی میکروپوسته‌های FGM با شرایط تکیه‌گاهی ساده استفاده شد. ملاحظه شد که در پارامترهای مقیاس طول کوچک تفاوت فاحشی بین رفتار کمانشی و پایداری دینامیکی پیش‌بینی شده توسط مدل تنش کوپلی اصلاح شده و مدل کلاسیک وجود دارد. همچنین، مشخص شد که با افزایش شاخص گرادیانی ماده، مبدأ مناطق ناپایداری به سمت فرکانس‌های تحریک کوچکتر سوق پیدا می‌کند و پهنای مناطق ناپایداری در یک ضریب بار دینامیکی مشخص کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش ضریب بار استاتیکی، مناطق ناپایداری دینامیکی پهن‌تر شده و به سمت مبدأ مختصات سوق پیدا می‌کند.

مراجع

- [1] Meschet, M.J., Brown, J.Q., Guice, K.B., and Lvov, Y.M., "Polyelectrolyte Microshells as Carriers for Fluorescent Sensors: Loading and Sensing Properties of a Ruthenium-based Oxygen Indicator", *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, Vol. 2, pp. 411-416, (2002).
- [2] Mescher, M.J., Houston, K., Bernstein, J.J., Kirkos, G.A., Cheng, J., and Cross, L.E., "Novel MEMS Microshell Transducer Arrays for High-resolution Underwater Acoustic Imaging Applications", *Sensors*, Vol. 1, pp. 541-546, (2002).
- [3] Chong, A.C.M., and Lam, D.C.C., "Strain Gradient Plasticity Effect in Indentation Hardness of Polymers", *Journal of Materials Research*, Vol. 14, pp. 4103-4110, (1999).
- [4] Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., and Hutchinson, J.W., "Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment", *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, pp. 475-487, (1994).
- [5] Stolken, J.S., and Evans, A.G., "Microbend Test Method for Measuring the Plasticity Length Scale", *Acta Metallurgical Materialia*, Vol. 46, pp. 5109-5115, (1998).
- [6] Ansari, R., Sahmani, S., and Arash, B., "Nonlocal Plate Model for Free Vibrations of Single-layered Graphene Sheets", *Physics Letters A*, Vol. 375, pp. 53-62, (2010).

- [7] Ansari, R., Sahmani, S., and Rouhi, H., "Axial Buckling Analysis of Single-walled Carbon Nanotubes in Thermal Environments via Rayleigh-Ritz Technique", *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 3050-3055, (2011).
- [8] Ansari, R., Rouhi, H., and Sahmani, S., "Calibration of the Analytical Nonlocal Shell Model for Vibrations of Double-walled Carbon Nanotubes with Arbitrary Boundary Conditions using Molecular Dynamics", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, pp. 786-792, (2011).
- [9] Ansari, R., Gholami, R., and Darabi, M. A., "A Nonlinear Timoshenko Beam Formulation Based on Strain Gradient Theory", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, pp. 195-211, (2012).
- [10] Ansari, R., Rouhi, H., and Sahmani, S., "Thermal Effect on Axial Buckling Behavior of Multi-walled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Shell Model", *Physica E*, Vol. 44, pp. 373-378, (2011).
- [11] Ansari, R., Gholami, R., and Sahmani, S., "Free Vibration of Size-dependent Functionally Graded Microbeams Based on a Strain Gradient Theory", *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 221-228, (2011).
- [12] Sahmani, S., and Ansari, R., "On the Free Vibration Response of Functionally Graded Higher-order Shear Deformable Microplates Based on the Strain Gradient Elasticity Theory", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 430-442, (2013).
- [13] Mindlin, R.D., and Tiersten, H.F., "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp. 415-448, (1962).
- [14] Koiter, W.T., "Couple Stresses in the Theory of Elasticity I and II", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, B*, Vol. 67, pp. 17-44, (1964).
- [15] Eringen, A.C., and Suhubi, E.S., "Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solid-I", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 2, pp. 189-203, (1964).
- [16] Eringen, A.C., and Suhubi, E.S., "Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solid-II", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 2, pp. 389-404, (1964).
- [17] Mindlin, R.D., "Micro-Structure in Linear Elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 51-78, (1964).
- [18] Toupin, R.A., "Theory of Elasticity with Couple Stresses", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 17, pp. 85-112, (1964).
- [19] Mindlin, R.D., "Second Gradient of Strain and Surface Tension in Linear Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, pp. 417-438, (1965).
- [20] Mindlin, R.D., and Eshel, N.N., "On First Strain-gradient Theories in Linear Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 109-124, (1968).

- [21] Eringen, A.C., "On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves", *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703-4710, (1983).
- [22] Vardoulaksi, I., Exadaktylos, G., and Kourkoulis, S.K., "Bending of Marble with Intrinsic Length Scales: A Gradient Theory with Surface Energy and Size Effects", *Journal De Physique*, Vol. 8, pp. 399-406, (1998).
- [23] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2731-2743, (2002).
- [24] Xia, W., Wang, L., and Yin, L., "Nonlinear Non-classical Microscale Beams: Static Bending, Postbuckling and Free Vibration", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, pp. 2044-2053, (2010).
- [25] Asghari, M., Rahaeifard, M., Kahrobaian, M.H., and Ahmadian, M.T., "The Modified Couple Stress Functionally Graded Timoshenko Beam Formulation", *Materials and Design*, Vol. 32, pp.1435-1443, (2011).
- [26] Ke, L.L., and Wang, Y.S., "Size Effect on Dynamic Stability of Functionally Graded Microbeams Based on a Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 342-350, (2011).
- [27] Ma, H.M., Gao, X. L., and Reddy, J.N., "A Microstructure-dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, pp. 3379-3391, (2008).
- [28] Ke, L.L., Wang, Y.S., and Wang, Z.D., "Thermal Effect on Free Vibration and Buckling of Size-dependent Microbeams", *Physica E*, Vol. 43, pp.1387-1393, (2011).
- [29] Ke, L. L., Wang, Y. S., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Free Vibration of Size-dependent Mindlin Microplates Based on the Modified Couple Stress Theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 94-106, (2012).
- [30] Papargyri-Beskou, S., Tsinopoulos, S. V., and Beskos, D. E., "Wave Propagation in and Free Vibrations of Gradient Elastic Circular Cylindrical Shells", *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 1789-1807, (2012).
- [31] Lazopoulos, K.A., and Lazopoulos, A.K., "Nonlinear Strain Gradient Elastic Thin Shallow Shells", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, pp. 286-292, (2011).
- [32] Papargyri-Beskou, S., and Beskos, D.E., "Stability Analysis of Gradient Elastic Circular Cylindrical Thin Shells", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, pp. 1379-1385, (2009).
- [33] Altenbach, J., Altenbach, H., and Eremeyev, V.A., "On Generalized Cosserat-type Theories of Plates and Shells: A Short Review and Bibliography", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, pp. 73-92, (2010).

- [34] Ganapathi, M., "Dynamic Stability Characteristics of Functionally Graded Materials Shallow Spherical Shells", *Composite Structures*, Vol. 79, pp. 338–343, (2007).
- [35] Fares, M.E., Elmarghany, M.K., and Atta, D., "An Efficient and Simple Refined Theory for Bending and Vibration of Functionally Graded Plates", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 296–305, (2009).
- [36] Donnell, L.H., "*Beam, Plates and Shells*", McGraw-Hill, New York, USA, (1976).
- [37] Bolotin, V.V., "*The Dynamic Stability of Elastic Systems*", San Francisco, Holden-Day, (1964).
- [38] Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C. M., Wang, J., and Tong, P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477–1508, (2003).

فهرست نمادهای انگلیسی

- L : طول استوانه
- R : شعاع میانی سیلندر
- h : ضخامت استوانه
- N_{xx}^0 : بار محوری وارد بر استوانه
- E : مدول یانگ (نیوتن بر متر مربع)
- h : ضخامت پوسته استوانه ای
- u_i : مولفه‌های بردار جابجایی \mathbf{u}
- K_e : مدول حجمی مؤثر
- n : عدد موج طولی
- m : عدد موج محیطی
- N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} : نیروهای منته‌جه عمودی
- Q_x, Q_y : نیروهای منته‌جه برشی
- M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} : گشتاورهای منته‌جه
- $Y_{xx}, Y_{yy}, Y_{zz}, Y_{xy}, Y_{xz}, Y_{yz}$: نیروهای منته‌جه مرتبه بالا
- H_{xz}, H_{yz} : گشتاورهای منته‌جه مرتبه بالا
- x : محور مختصات طولی استوانه
- u : جابجایی طولی پوسته
- v : جابجایی محیطی پوسته
- y : محور مختصات محیطی استوانه
- V_c, V_m : کسر حجمی فلز و سرامیک

W : جابجایی شعاعی پوسته
 Z : محور مختصات شعاعی استوانه
 m^S : تانسور گرادیان دوران متقارن

نمادهای یونانی

ε_{ij} : مولفه‌های کرنش کلاسیک
 θ_i : مولفه‌های بردار دوران θ
 μ_e : مدول برشی مؤثر
 K_θ, K_S : کرنش‌های خمشی (انحناء) پوسته استوانه‌ای
 $K_{S\theta}$: کرنش چرخشی (انحنای عمودی)
 ν : ضریب پواسون
 ρ : چگالی پوسته
 σ_{ij} : مولفه‌های تنش کلاسیک
 ψ_x : دوران سطح میانی حول محور x
 ψ_y : دوران سطح میانی حول محور y
 χ_{ij}^S : مؤلفه‌های تانسور گرادیان دوران متقارن
 K : توان کسر حجمی ماده هوشمند

پیوست‌ها

پیوست (الف): با معرفی پارامترهای زیر

$$\begin{aligned} \{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\lambda + 2\mu)\{1, z, z^2\}dz, \{A_{12}, B_{12}, D_{12}\} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \lambda\{1, z, z^2\}dz, \{A_{55}, B_{55}, D_{55}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu\{1, z, z^2\}dz. \end{aligned}$$

نیروهای منته‌عمودی (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) ، نیروهای منته‌برشی (Q_x, Q_y) ، گشتاورهای منته‌بالا (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) ، نیروهای منته‌مرتبه بالا $(Y_{xx}, Y_{yy}, Y_{zz}, Y_{xy}, Y_{xz}, Y_{yz})$ و گشتاورهای منته‌مرتبه بالا (H_{xz}, H_{yz}) بر حسب مؤلفه‌های جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + A_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + B_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ N_{yy} &= A_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + B_{11} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ N_{xy} &= A_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ Q_x &= k_s A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), Q_y = k_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{v}{R} \right), \\ M_{xx} &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ M_{yy} &= B_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) + D_{11} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ M_{xy} &= B_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ Y_{xx} &= A_{55} l^2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ Y_{yy} &= A_{55} l^2 \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right], \\ Y_{zz} &= A_{55} l^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ Y_{xy} &= \frac{A_{55} l^2}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{xz} &= \frac{A_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\psi_y}{R} \right) + \frac{B_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right), \\
 Y_{yz} &= \frac{A_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\psi_x}{R} \right) + \frac{B_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right), \\
 H_{xz} &= \frac{B_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\psi_y}{R} \right) + \frac{D_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right), \\
 H_{yz} &= \frac{B_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\psi_x}{R} \right) + \frac{D_{55}l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right).
 \end{aligned}$$

پیوست (ب): معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابجایی

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{55}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + B_{55} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
 + (B_{12} + B_{55}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{A_{55}l^2}{2R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{A_{55}l^2}{4} \left(\frac{\partial^2 (\nabla^2 v)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 (\nabla^2 u)}{\partial y^2} \right) \\
 + \frac{B_{55}l^2}{4} \left(\frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_x)}{\partial y^2} \right) + \frac{A_{55}l^2}{4R^2} \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
 + \frac{A_{55}l^2}{4R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - 5 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_{55} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (B_{12} + B_{55}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \\
 + B_{55} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \left(\frac{k_s A_{55}}{R} + \frac{A_{55}l^2}{4R^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{v}{R} \right) \\
 + \frac{A_{55}l^2}{4} \left(\frac{\partial^2 (\nabla^2 u)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 (\nabla^2 v)}{\partial x^2} \right) + \frac{A_{55}l^2}{4R^2} \left(\nabla^2 v - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
 - \frac{A_{55}l^2}{4R} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{B_{55}l^2}{4} \left(\frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_x)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_y)}{\partial x^2} \right) \\
 + \frac{B_{55}l^2}{4R^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) + \frac{A_{55}l^2}{4R} \left(2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \nabla^2 \psi_y \right) \\
 = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{ب}$$

$$\begin{aligned}
 k_s A_{55} \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{A_{11}}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 - \frac{B_{11}}{R} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_{55}l^2}{4R^2} \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{پ}$$

$$\begin{aligned}
 & + l^2 A_{55} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} - \frac{1}{4R} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{1}{4R} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial x^2} \right) \\
 & + \frac{A_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial(\nabla^2 \psi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\nabla^2 \psi_y)}{\partial y} - \nabla^4 w \right) = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
 B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{55}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + B_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 - k_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + D_{55} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} \right) + \frac{A_{55} l^2}{4} \left(\nabla^2 \psi_x - \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x} \right) \\
 + \frac{B_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^2(\nabla^2 v)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(\nabla^2 u)}{\partial y^2} \right) + \frac{A_{55} l^2}{4R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) - \frac{B_{55} l^2}{2R} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
 + \frac{3A_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} \right) + \frac{D_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^2(\nabla^2 \psi_y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(\nabla^2 \psi_x)}{\partial y^2} \right) \quad (ت) \\
 + \frac{B_{55} l^2}{4R^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{B_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \\
 + \frac{D_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^4 \psi_x}{\partial y \partial x^3} - \frac{\partial^4 \psi_y}{\partial x^4} \right) + \frac{A_{55} l^2}{4R} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 = I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 B_{11} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + B_{55} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + (D_{12} + D_{55}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \\
 + D_{55} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \left(k_s A_{55} + \frac{A_{55} l^2}{4R^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{v}{R} \right) \\
 + \frac{A_{55} l^2}{4} \left(3 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
 + \frac{A_{55} l^2}{4} \left(\nabla^2 \psi_y + \frac{\nabla^2 v}{R} - \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \right) \quad (ث) \\
 + \frac{B_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^2(\nabla^2 u)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(\nabla^2 v)}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
 + \frac{D_{55} l^2}{4} \left(\frac{\partial^2(\nabla^2 \psi_x)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(\nabla^2 \psi_y)}{\partial x^2} \right) = I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Abstract

Based on the modified couple stress theory, a size-dependent first-order shear deformation shell model is developed to investigate the axial buckling and dynamic stability of functionally graded microshells. The newly presented shell model capable of capturing the size effects. The higher-order governing equations and corresponding boundary conditions are obtained by using Hamilton's principle. Afterward, using the Navier solution and Bolotin's method, the axial buckling behavior and dynamic instability regions of simply-supported microshells are determined. A parametric study is presented to study the effects of various parameters such as the static load factor, dimensionless length scale parameter, material property gradient index, length-to-radius and length-to-thickness aspect ratios on the axial buckling and dynamic stability responses of microshells.