

شرایط مرزی برپایه مشخصه‌ها برای تحلیل جریان تراکم ناپذیر داخل کانال در عبور از پله

نحوه اعمال شرایط مرزی در روش‌های حل عددی به دلیل تاثیر مستقیم بر دقت جوابها و سرعت همگرایی، از اهمیت زیادی برخوردار است. در جریانهای تراکم ناپذیر لزوج، به دلیل شرط عدم لغزش روی مرزهای جامد، مولفه‌های سرعت روی این مرزها صفر است و فشار روی مرز با استفاده از برونمایی سلول‌های نزدیک مرز به دست می‌آید. در مقاله حاضر روش جدیدی بر مبنای مشخصه‌های معادلات برای تخمین فشار در روی مرزهای جامد ارائه شده است. به منظور ارزیابی روش جدید، جریان داخل کانال در عبور از پله در اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور یک برنامه کامپیوتری بر اساس روش تراکم پذیری مصنوعی و طرح محاسباتی برپایه مشخصه‌ها (CB) نوشته شده است. مقایسه روش جدید محاسبه فشار روی مرز جسم و روش قدیمی برونمایی فشار از سلول‌های داخل محدوده حل، نشان دهنده سرعت همگرایی بالاتری برای روش جدید می‌باشد. همانطور که در ادبیات فن نیز گزارش شده است، طرح محاسباتی برپایه مشخصه‌ها (CB)، اساسا دارای روند همگرایی کندی می‌باشد که با اعمال روش مشخصه‌های ارائه شده برای مرزهای جامد تا حدودی سرعت همگرایی روش محاسباتی افزایش خواهد یافت.

کامیار زمزمیان^۱

استادیار

واژه‌های راهنما: جریان تراکم ناپذیر، تراکم پذیری مصنوعی، معادلات ناویر-استوکس، مشخصه‌ها، شرایط مرزی

۱- مقدمه

مفهوم تراکم پذیری مصنوعی (Artificial compressibility) برای اولین بار توسط Chorin و به منظور حل پایای معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر ابداع شد [۱]. با این تکنیک، معادلات پیوستگی و مومنتوم برای ایجاد امکان روش زمانروی (time marching)، با اضافه کردن یک جمله مجازی به معادله پیوستگی به یکدیگر کوپل می‌شوند و معادلات از ماهیت بیضوی به هذلولوی تبدیل می‌شوند. در طول حل زمانروی، شرط تراکم ناپذیری تضعیف می‌شود اما در نهایت با رسیدن به جواب پایا، جمله اضافه شده در معادله پیوستگی به صفر میل کرده و جوابهای واقعی تراکم ناپذیر حاصل می‌شوند. انتخاب پارامتر تراکم پذیری مصنوعی تاثیری بر جوابهای نهایی نداشته و تنها روند همگرایی به حالت پایا را تحت تاثیر قرار می‌دهد. طرح‌های محاسباتی مختلفی برای گسسته‌سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار گرفته

است که از آن جمله می‌توان به روش‌های مرکزی [۲] یا روش‌های بالادستی مانند [۳-۶] اشاره داشت. با مراجعه به تاریخچه طرح‌های محاسباتی می‌توان دریافت که روش مشخصه‌ها ابتدا برای تحلیل معادلات تراکم‌پذیر مورد استفاده قرار گرفتند. اضافه کردن جمله تراکم‌پذیری مصنوعی در روش ابداعی توسط Chorin، سبب شد که معادلات جریانهای تراکم‌ناپذیر نیز توسط روش مشخصه‌ها مورد تحلیل قرار گیرند. برای اولین بار، Drikakis و همکاران روابط یک بعدی مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی را برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در روش حجم محدود در شبکه بندی باسازمان مورد استفاده قرار دادند [۷]. توسعه روش مذکور برای جریانهای سه بعدی در مرجع [۸] و به همراه روش شبکه چندگانه در مرجع [۹] انجام شده است. روش ایشان توسط Zhao و همکاران برای شبیه‌سازی جریانهای تراکم‌ناپذیر به همراه انتقال حرارت در شبکه‌های بی‌سازمان دو و سه بعدی توسعه داده شد [۱۰-۱۴]. این روش‌ها بر مبنای محاسبه متغیرهای جریان در امتداد مسیرهای یک بعدی مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی در جهت عمود بر مرز مشترک بین دو سلول با استفاده از مقادیر آنها در زمان قبل می‌باشد. روش CB (characteristic based) ذکر شده توسط محققان زیادی برای محاسبه طیف وسیعی از جریانهای تراکم‌ناپذیر مورد استفاده قرار گرفته است. ضعف اصلی روش CB نرخ همگرایی ذاتی کند آن است که در مراجع مختلف نیز به آن اشاره شده است [۱۵-۱۷]. برای معادلات تراکم‌ناپذیری مصنوعی اخیراً روشی برپایه مشخصه‌های چندبعدی معادلات نیز توسط نویسندگان ارائه شده است که در مقالاتی نظیر [۲۴-۲۶] قابل مشاهده می‌باشد.

در خصوص شرایط مرزی اعمال شده در حل معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس با تراکم‌پذیری مصنوعی، به دلیل شرط عدم لغزش روی مرزهای جامد، مولفه‌های سرعت روی این مرزها صفر است و فشار روی مرز با استفاده از برونیابی سلول‌های نزدیک مرز محاسبه شده است که در مراجع مختلف مانند [۵، ۶، ۱۴-۱۰، ۱۵] دیده می‌شود. در مورد جریان‌های تراکم‌پذیر، ثابت شده است که انعکاس موج‌های اکوستیک از مرزهای داخلی در طول حل، بر سرعت همگرایی تأثیر می‌گذارد [۱۸] که این مساله در مورد معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی نیز صادق می‌باشد. با توجه به این مساله، در این مقاله یک روش جدید برپایه مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی به منظور محاسبه فشار در روی مرز جامد ارائه شده است. آزمایش‌های عددی نشان می‌دهند که روش جدید سرعت همگرایی را در تمامی موارد بهبود می‌بخشد.

۲- روابط مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی

در این مقاله مشخصه‌های معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی با روشی ساده و مشابه با معادلات تراکم‌پذیر استخراج شده‌اند. با در نظر گرفتن معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی در حالت یک بعدی و بدون جملات لزجی سمت راست، داریم (همانطور که در مقالاتی مانند [۱۰-۱۴] انجام شده است):

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

معادلات بالا به همراه دیفرانسیل پارامترهای سیال (فشار و سرعت) تبدیل به دستگاه معادلات زیر می شوند:

$$\begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & u \\ 0 & 0 & dt & dx \\ dt & dx & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial p / \partial t \\ \partial p / \partial x \\ \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{bmatrix} \quad (2)$$

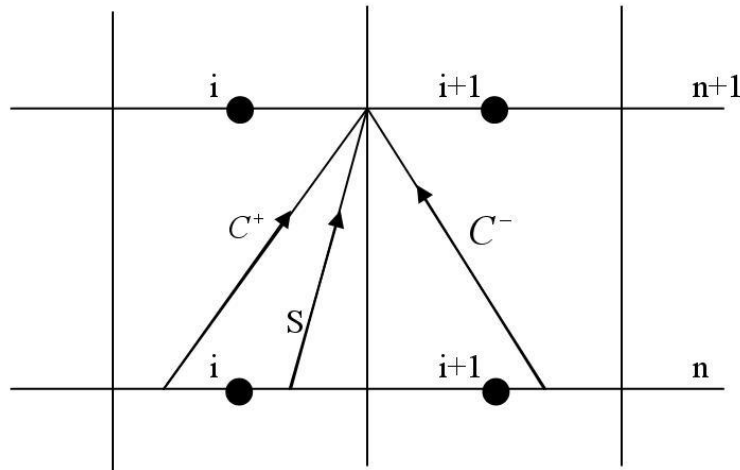
برای استخراج مسیرهای مشخصه که مشتقات مرتبه اول در روی آنها تعریف نشده هستند، با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} S: & \frac{dx}{dt} = u \\ C^+: & \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + 4\beta}) \\ C^-: & \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 + 4\beta}) \end{cases} \quad (3)$$

مسیرهای بالا، مسیرهای مشخصه معادلات تراکم پذیری مصنوعی هستند. مسیر S خط جریان سیال و مسیرهای C^+ , C^- موج های اکوستیک مجازی هستند که در محدوده حل منتشر می شوند. از معادلات (۲) مشخص است که موج C^+ همواره از چپ و C^- همواره از راست به نقطه مورد نظر می رسند (شکل ۱) که این مساله با ماهیت فروصوتی جریان مطابقت دارد.

با قراردادن روابط (۳) در معادلات (۲) مشابه آنچه که در جریان تراکم پذیر برای حصول روابط مشخصه انجام می شود، با حذف مشتقات جزئی و باقی ماندن دیفرانسیل های کامل، روابط سازگاری مربوط به مسیرهای مشخصه به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} du - \frac{1}{2\beta}(u - \sqrt{u^2 + 4\beta})dp = 0 & \text{along } C^+ \\ du - \frac{1}{2\beta}(u + \sqrt{u^2 + 4\beta})dp = 0 & \text{along } C^- \end{cases} \quad (4)$$



شکل ۱- ساختار مشخصه معادلات تراکم پذیری مصنوعی

۳- معادلات حاکم

معادلات ناویر- استوکس دوبعدی برای جریان تراکم ناپذیر نیوتونی تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \quad (5)$$

که در آن :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial x \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial y \end{bmatrix}$$

در روابط بالا \mathbf{W} بردار متغیرهای اولیه جریان و \mathbf{F}, \mathbf{G} و \mathbf{R}, \mathbf{S} به ترتیب بردارهای شار جابجایی و لزج می باشند. β پارامتر تراکم پذیری مصنوعی و Re نشانگر عدد رینولدز می باشد. معادلات (5) به شکل بی بعد نوشته شده اند که بی بعد سازی توسط پارامترهای زیر انجام شده است:

$$(x, y) = (x^*/l^*, y^*/l^*), t = \frac{t^*}{l^*/U_{ref}}, (u, v) = (u^*/U_{ref}, v^*/U_{ref}), p = \frac{p^* - p_{ref}}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (6)$$

بالانویس * نشانگر پارامترهای با بعد و پانویس ref نشانگر مقادیر مرجع است. معادلات (5) در شکل حجم محدود گسسته شده و با استفاده از قضیه انتگرال Green به صورت زیر نوشته می شوند:

$$A_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^4 (\mathbf{F}\Delta y - \mathbf{G}\Delta x)_k = \sum_{k=1}^4 (\mathbf{R}\Delta y - \mathbf{S}\Delta x)_k \quad (7)$$

که در آن A_{ij} نشانگر مساحت سلول محاسباتی است.

۴- طرح محاسباتی

روابط مشخصه های ارائه شده در قسمت ۲ در جهت عمود بر مرز مشترک بین دو سلول، به منظور ایجاد طرح محاسباتی برپایه مشخصه ها (CB) مورد استفاده قرار می گیرد. اگر (n_x, n_y) نشان دهنده بردار عمود بر مرز مشترک دو سلول باشد، متغیرهای جریان روی مرز مشترک دو سلول از روابط زیر محاسبه می شوند. این روابط از معادلات سازگاری مربوط به مسیرهای مشخصه معادلات تراکم پذیری مصنوعی به دست می آیند که اثبات آنها در مراجع [۱۴-۱۰] قابل مشاهده است:

$$\begin{cases} u = fn_x + u^0 n_y^2 - v^0 n_x n_y \\ v = fn_y + v^0 n_x^2 - u^0 n_y n_x \\ p = p^1 - \lambda^1 [(u - u^1)n_x + (v - v^1)n_y] \end{cases} \quad (8)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= un_x + vn_y \\ \lambda^1 &= \lambda^0 + C \\ \lambda^2 &= \lambda^0 - C \\ C &= \sqrt{(\lambda^0)^2 + \beta} \\ f &= \frac{1}{2C} [(p^1 - p^2) + n_x (\lambda^1 u^1 - \lambda^2 u^2) + n_y (\lambda^1 v^1 - \lambda^2 v^2)] \end{aligned} \quad (9)$$

در مرز مشترک بین دو سلول، متغیرهای جریان در زمان جدید با استفاده از روابط فوق محاسبه می شوند. مقادیر متغیرها در زمان قبل با استفاده از روش بالادست برحسب علامت λ ها و میانبایی مرتبه دوم به صورت زیر محاسبه می شوند (sign تابع علامت است که تعریف آن در زیر آمده است):

$$\phi^j = \frac{1}{2} [(1 + \text{sign}(\lambda^j))\phi_L + (1 - \text{sign}(\lambda^j))\phi_R] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \phi_L &= \phi_i + 0.25\phi_{i+1} - 0.25\phi_{i-1} \\ \phi_R &= \phi_{i+1} + 0.25\phi_i - 0.25\phi_{i+2} \\ \text{sign}(\lambda) &= \begin{cases} +1 & \text{if } \lambda \geq 0 \\ -1 & \text{if } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط بالا ϕ نماد عمومی برای متغیرهای جریان می باشد.

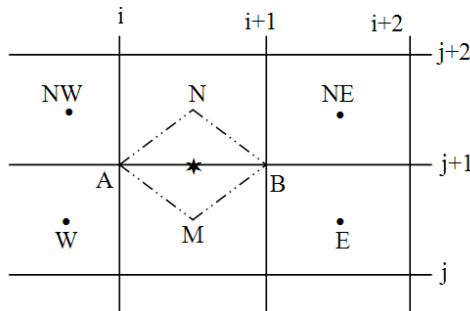
برای تخمین بردارهای شار لزج در معادلات ناویر-استوکس، نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه اول پارامترهای جریان در مرز مشترک بین دو سلول است. در این تحقیق، گسسته سازی معمولی مرکزی برای تخمین جملات لزج در مرز مشترک دو سلول مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال، مشتق مرتبه اول در روی وجه AB در شکل (۲) با انتگرالگیری روی یک شبکه ثانویه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{AB} &= \frac{1}{S'} \iint_{S'} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS = \frac{1}{S'} \oint_{\partial S'} \phi dy = \frac{1}{S'} \sum_{k=1}^4 \phi_k \Delta y_k \\ &= \frac{1}{S'} [0.5(\phi_N + \phi_A) \Delta y_{AN} + 0.5(\phi_N + \phi_B) \Delta y_{NB} \\ &\quad + 0.5(\phi_B + \phi_M) \Delta y_{BM} + 0.5(\phi_M + \phi_A) \Delta y_{MA}] \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{1}{4} [y_{i,j+1} + y_{i,j+2} + y_{i+1,j+2} + y_{i+1,j+1}] \\ y_M &= \frac{1}{4} [y_{i,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j}] \\ \phi_A &= \frac{1}{4} [\phi_{NW} + \phi_N + \phi_M + \phi_W] \\ \phi_B &= \frac{1}{4} [\phi_N + \phi_{NE} + \phi_E + \phi_M] \end{aligned} \quad (13)$$

که در ϕ یکی از پارامترهای جریان است.



شکل ۲- شبکه ثانویه برای محاسبه جملات لزج

معادلات گسسته شده مکانی تشکیل یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی را می دهند که در زمان توسط یک روش صریح رانگ- کوتای مرتبه چهار انتگرالگیری می شوند. معادلات گسسته شده زمانی به شکل زیر هستند:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{Q} = 0 \quad (14)$$

که در آن \mathbf{Q} یک عملگر غیرخطی متشکل از جملات جابجایی و لزج است. طرح رانگ- کوتای مرتبه چهارم مورد استفاده در این تحقیق، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(0)} &= \mathbf{W}^{(n)}, & \mathbf{W}^{(1)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{Q}^{(0)} \\ \mathbf{W}^{(2)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{Q}^{(1)}, & \mathbf{W}^{(3)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \Delta t \mathbf{Q}^{(2)} \\ \mathbf{W}^{(4)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{Q}^{(0)} + 2\mathbf{Q}^{(1)} + 2\mathbf{Q}^{(2)} + \mathbf{Q}^{(3)}) \end{aligned} \quad (15)$$

بیشینه مقدار گام زمانی Δt از شرط پایداری که بر روی عدد کورانت CFL اعمال می شود، محاسبه می شود. عدد CFL به صورت زیر تعریف شده است:

$$CFL = \left[\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + \beta} \right] \frac{\Delta t}{\Delta l} \quad (16)$$

که در آن Δl برابر با کمترین فاصله بین مرکز سلول مورد نظر تا مراکز سلول های مجاور است.

۵- شرایط مرزی

همانطور که در بخش ۱ مقاله نیز ذکر شد، در جریان های لزج، مولفه های سرعت روی مرز جامد به خاطر شرط عدم لغزش صفر هستند و فشار روی مرز جامد با استفاده از برونمایی فشار از سلول های نزدیک مرز محاسبه می شود که در مراجع مختلف مانند [۵، ۶، ۱۴-۱۵] دیده شده است. به منظور برونمایی عمدتاً رابطه زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

$$p_b = 1.5p_i - 0.5p_{i-1} \quad (17)$$

که در آن p_b فشار در روی مرز جامد و p_i ، p_{i-1} فشار در سلول های مجاور مرز می باشند (شکل (۳)).

در این مقاله از روابط مشخصه های معادلات تراکم پذیری مصنوعی استفاده شده و روشی برای تخمین فشار روی مرز جامد ارائه شده است. به عنوان مثال اگر شرط مرزی دیوار در سمت راست را در نظر بگیریم (شکل (۳))، تنها موج اکوستیک C^+ (مسیر مشخصه C^+ در روابط (۳) از داخل محدوده حل و از زمان قبل به مرز در زمان حاضر می رسد. با در نظر گرفتن رابطه سازگاری مربوط به C^+ (رابطه (۴)) و گسسته سازی آن روی مسیر C^+ داریم:

$$u_b - u_o - \frac{1}{2\beta} \left(u_i - \sqrt{u_i^2 + 4\beta} \right) (p_b - p_o) = 0 \quad (18)$$

در رابطه بالا، "b" مربوط به مرز و "o" مربوط به زمان قبل (n) می باشد (شکل (۳)). با حل معادله بالا برحسب p_b و باتوجه به این که به خاطر شرط عدم لغزش $u_b = 0$ داریم:

$$p_b = \frac{1}{2} \left(u_i + \sqrt{u_i^2 + 4\beta} \right) u_o + p_o \quad (19)$$

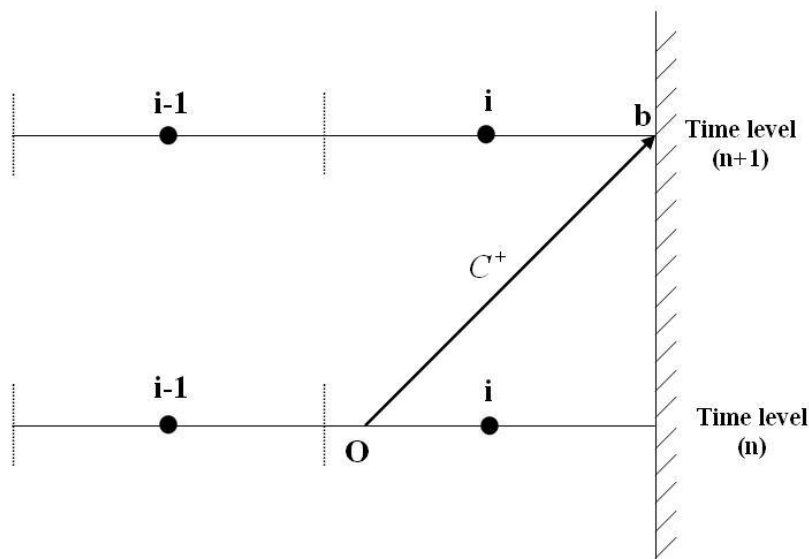
به همین ترتیب اگر شرط مرزی دیوار در سمت چپ جریان واقع شود، موج اکوستیک C^- را در نظر گرفته و رابطه سازگاری مربوط به آن را بین نقطه روی مرز و داخل محدوده گسسته سازی می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$p_b = \frac{1}{2} \left(u_i - \sqrt{u_i^2 + 4\beta} \right) u_o + p_o \quad (20)$$

فشار در روی مرز جامد با استفاده از معادلات (۱۹) یا (۲۰) تخمین زده می‌شود. برای شرط مرزی با تقریب مرتبه دوم، میانگین دو سلول مجاور مرز به عنوان مقدارهای u_o, p_o در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در رابطه (۱۹)، u_o, p_o به شکل زیر تخمین زده می‌شوند:

$$\phi_o = 0.5(\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (21)$$

که در آن ϕ مقدار " u " یا " p " می‌باشد.

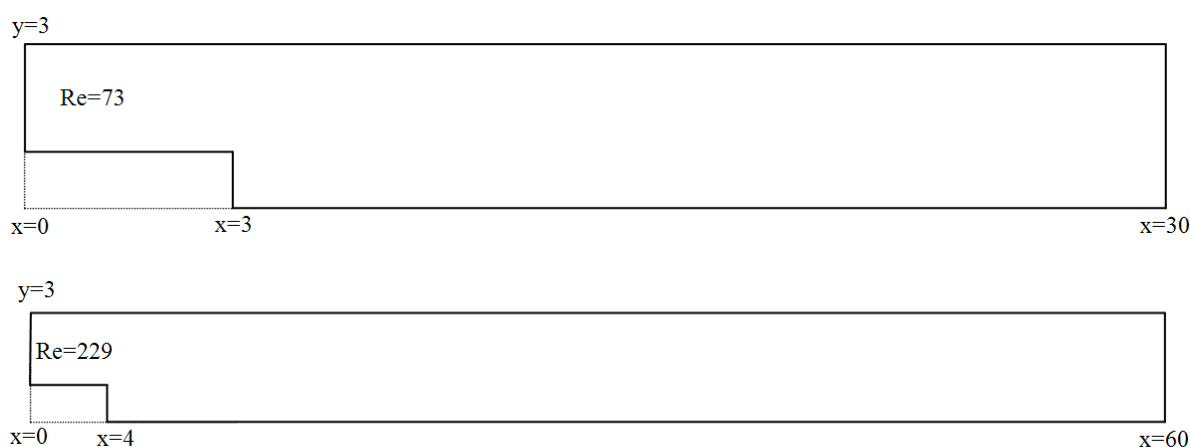


شکل ۳- طرح روش برپایه مشخصه‌ها برای محاسبه فشار روی مرز جامد

۶- نتایج و بحث

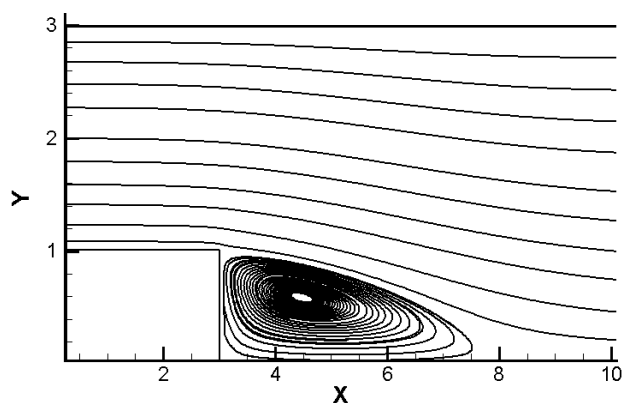
به منظور ارزیابی روش جدید ارائه شده برای برونمایی فشار روی مرز جامد، جریان داخل یک کانال طویل با حضور یک پله که مقطع جریان را به صورت ناگهانی افزایش می‌دهد، مورد بررسی قرار گرفته است. در این قسمت نتایج حاصل از روش جدید تخمین فشار روی مرز با داده‌های تجربی جریان روی پله مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین به منظور ارزیابی عملکرد روش ارائه شده، روند همگرایی این روش در اعداد رینولدز و شبکه‌های مختلف با روش برونمایی معمول فشار مقایسه شده است. هندسه مساله با توجه به

شرایط آزمایش تجربی انجام شده توسط [۱۹] Denham & Patrik انتخاب شده است. داده های تجربی ایشان در مراجع مختلفی مانند [۲۰-۲۲] برای اعتبار سنجی روشهای عددی مورد استفاده قرار گرفته اند. مطابق با مرجع مذکور، جریان روی پله در دو عدد رینولدز ۷۳ و ۲۲۹ مورد بررسی قرار گرفته است که سطح مقطع کل کانال به ورودی کانال برابر با ۱/۵ است. عدد رینولدز با توجه به ارتفاع پله و سرعت متوسط جریان در ورودی کانال محاسبه شده است. در مورد عدد رینولدز ۷۳، مرز ورودی در فاصله ۳ برابر ارتفاع پله از سطح مقطع پله و مرز دور خروجی در فاصله ۲۷ برابر ارتفاع پله از سطح مقطع پله در نظر گرفته شده است. در عدد رینولدز ۲۲۹، مرز ورودی در فاصله ۴ برابر و مرز دور خروجی در فاصله ۵۶ برابر ارتفاع پله از سطح مقطع پله در نظر گرفته شده است. در شکل (۴) هندسه حل عددی در دو عدد رینولدز مورد بحث نشان داده شده است.

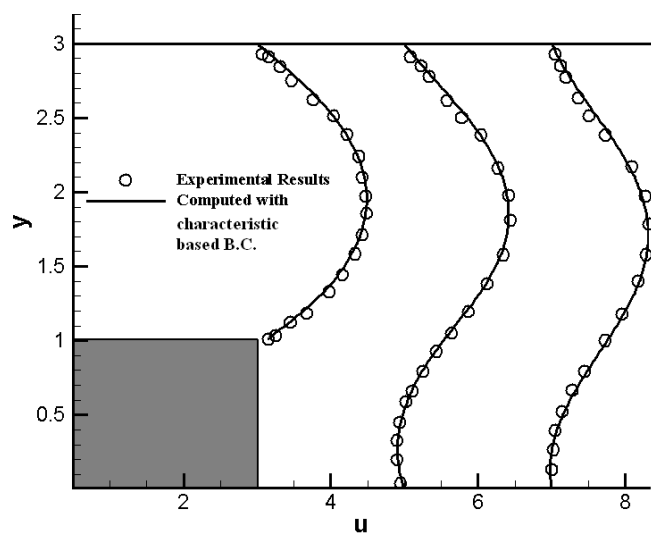


شکل ۴- جریان روی پله در اعداد رینولدز ۷۳ و ۲۲۹

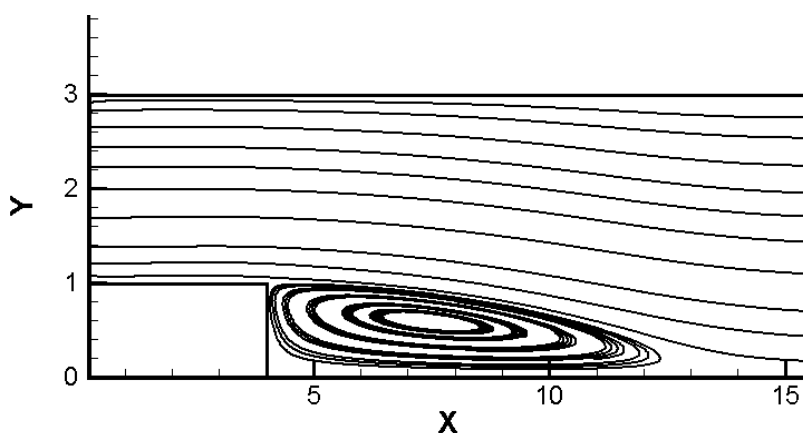
در شکل های (۵) و (۶) نتایج به دست آمده برای خطوط جریان و مولفه سرعت u در عدد رینولدز ۷۳ با استفاده از روش جدید تخمین فشار روی مرزهای جامد برای شبکه ای شامل 18×90 سلول در ورودی کانال و 162×135 سلول در کل مقطع کانال نشان داده شده است. در شکل های (۷) و (۸) این نتایج برای عدد رینولدز ۲۲۹ و در شبکه ای شامل 24×90 سلول در ورودی کانال و 336×135 سلول در کل مقطع کانال دیده می شود. همانطور که در شکل های (۶) و (۸) دیده می شود، نتایج حاصل از روش جدید محاسبه فشار روی مرز جامد با روش مشخصه ها نتایج خوبی را در مقایسه با داده های تجربی [۱۹] Denham & Patrik ارائه می دهد. همچنین جریان تراکم ناپذیر در $Re=800$ که عدد رینولدز بحرانی برای جریان روی پله است، با استفاده از روش جدید محاسبه فشار روی مرزهای جامد مورد تحلیل قرار گرفته است. در این حالت سطح مقطع کل کانال به ورودی کانال برابر با ۲ است. عدد رینولدز با توجه به کل سطح مقطع کانال و سرعت متوسط جریان در ورودی کانال محاسبه شده است. مرز ورودی در فاصله ۲ برابر کل سطح مقطع کانال و مرز دور خروجی در فاصله ۲۸ برابر کل سطح مقطع کانال از مقطع پله در نظر گرفته شده است. در شکل های (۹) و (۱۰) نتایج حاصله در $Re=800$ با نتایج عددی [۲۳] Gartling مقایسه شده و توافق خوبی بین نتایج مشاهده می شود.



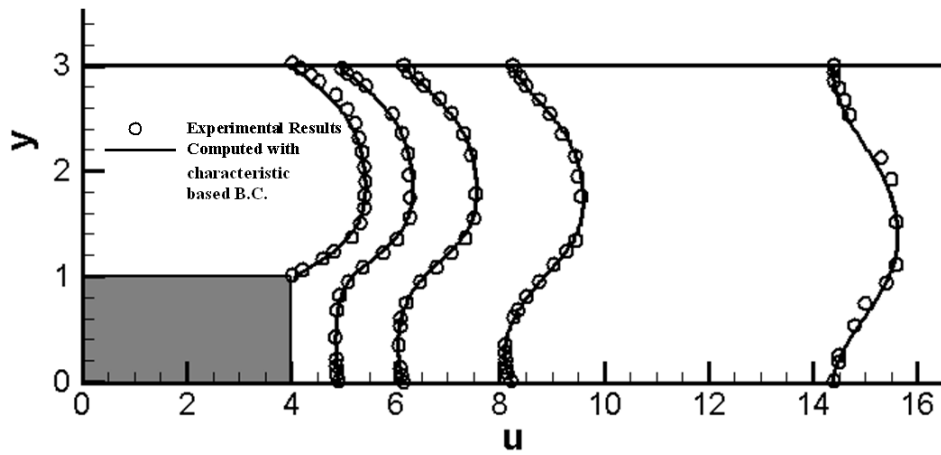
شکل ۵- خطوط جریان حاصل از روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه‌ها برای $Re=73$ در شبکه‌ای شامل ۲۳۴۹۰ سلول



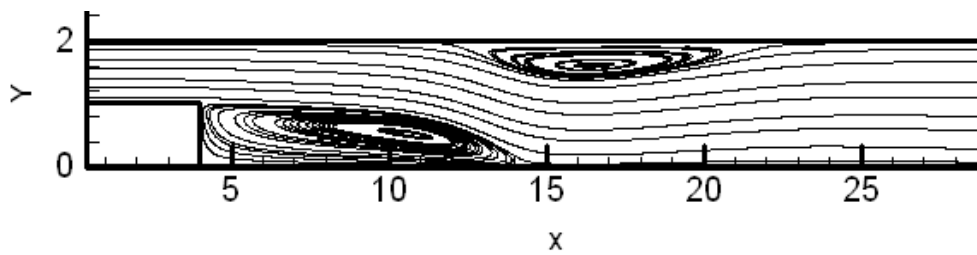
شکل ۶- مقایسه مقادیر محاسبه شده با روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه‌ها برای مولفه سرعت u در مقاطع مختلف از کانال با نتایج تجربی [۱۹] Denham & Patrik در $Re=73$



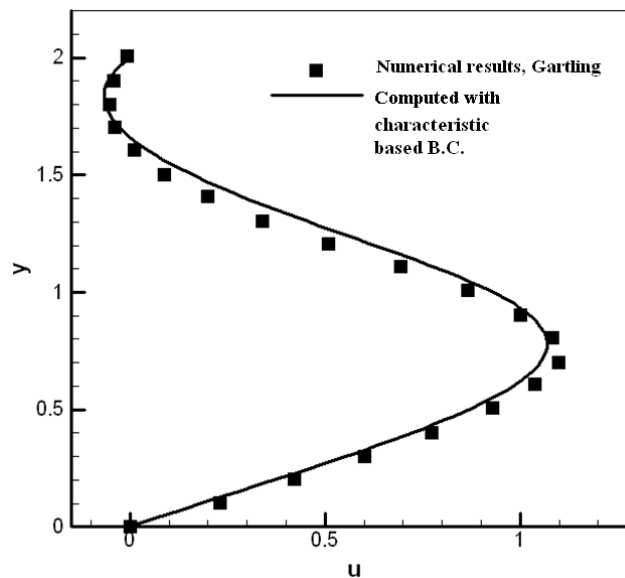
شکل ۷- خطوط جریان حاصل از روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه‌ها برای $Re=229$ در شبکه‌ای شامل ۴۷۵۲۰ سلول



شکل ۸- مقایسه مقادیر محاسبه شده با روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه ها برای مولفه سرعت u در مقاطع مختلف از کانال با نتایج تجربی [۱۹] در $Re=229$ در Denham & Patrik



شکل ۹- خطوط جریان حاصل از روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه ها در $Re=800$

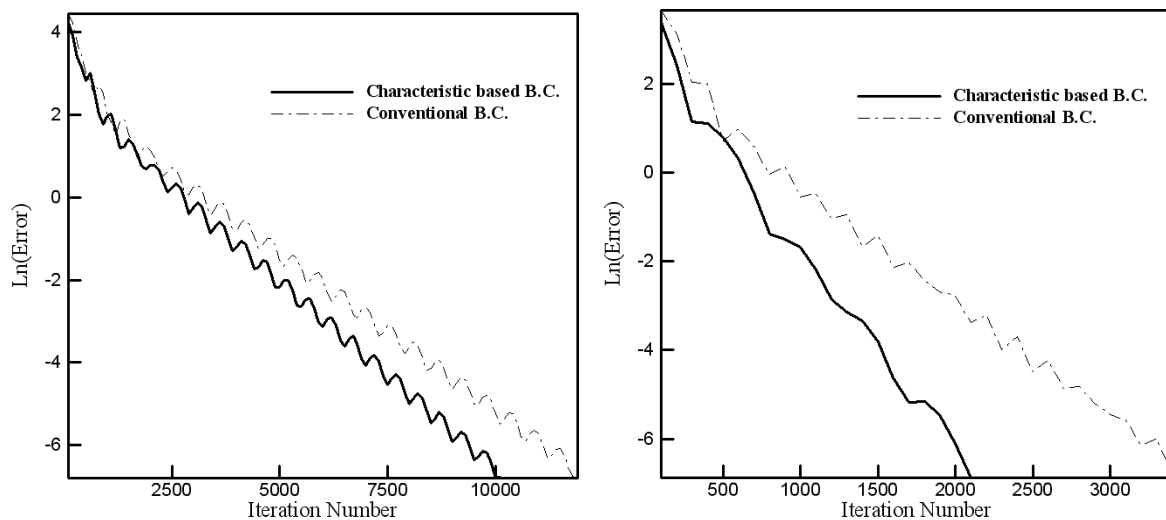


شکل ۱۰- مقایسه مقادیر محاسبه شده با روش جدید محاسبه شرایط مرزی براساس مشخصه ها برای مولفه سرعت u در مقطع $x=9$ از کانال با نتایج عددی [۲۳] در $Re=800$ در Gartling

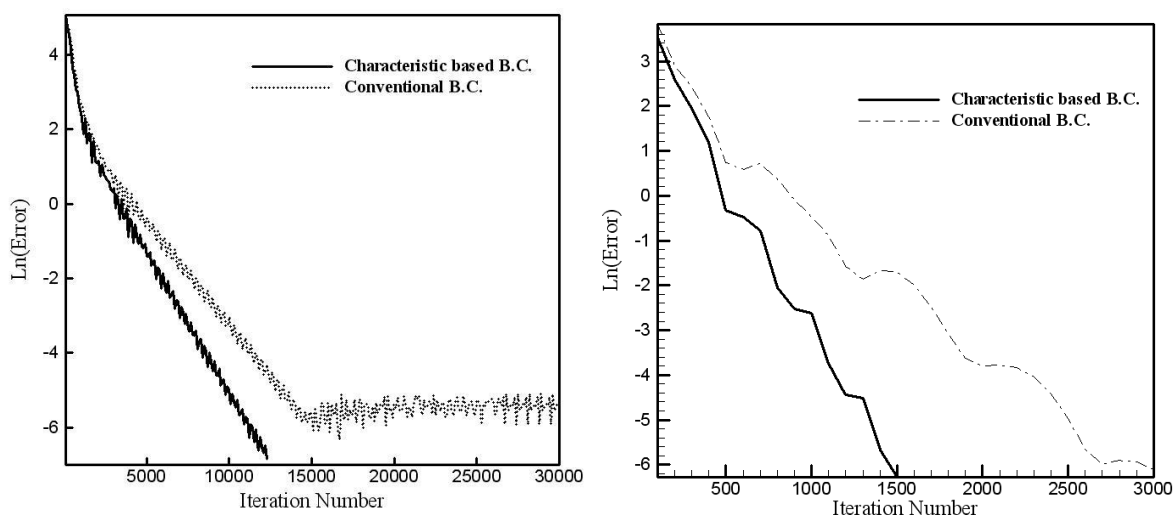
به عنوان مقایسه سرعت همگرایی روش جدید شرایط مرزی براساس مشخصه‌ها با روش موجود برونمایی از سلول‌های مجاور مرز، برای اعداد رینولدز مورد بحث دو شبکه درشت و ریز در نظر گرفته شده است. معیار همگرایی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{Error} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{IM} \sum_{j=1}^{JM} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n)^2}}{\Delta t} \quad (22)$$

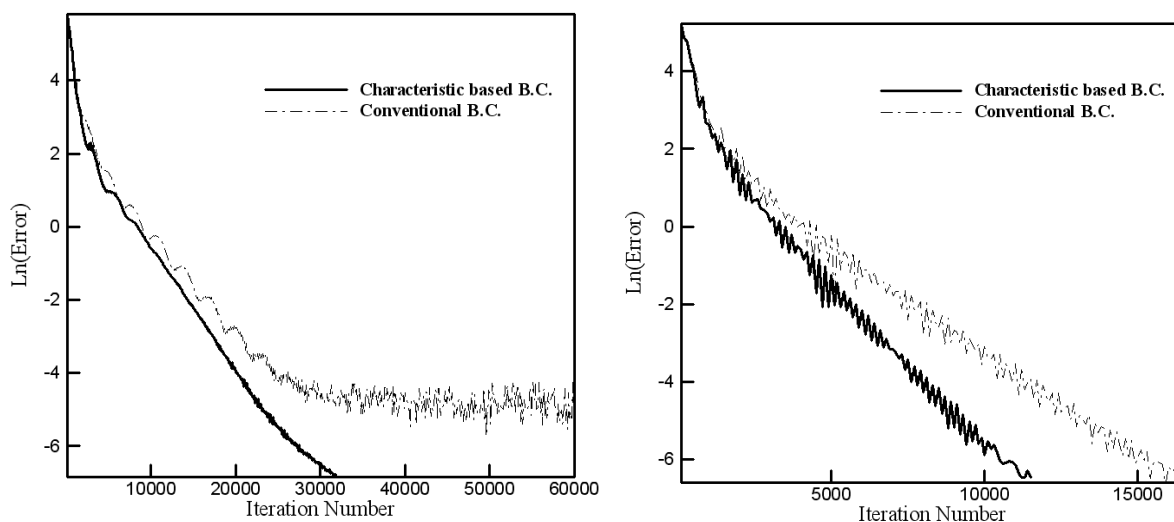
در رابطه بالا i و j اندیس‌های مکانی، n اندیس زمانی تکرار، IM, JM تعداد سلول‌ها در جهت‌های مختصات هستند. معیار همگرایی رسیدن Error به مقدار 10^{-3} در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) تاریخچه همگرایی دو روش در اعداد رینولدز ۷۳، ۲۲۹ و ۸۰۰ در دو شبکه مختلف مقایسه شده است. همانطور که در این نمودارها ملاحظه می‌شود، روش جدید محاسبه فشار روی مرز جامد براساس مشخصه‌ها نسبت به روش معمول برونمایی در تمامی موارد سرعت همگرایی بیشتری را دارد. بالاخص روش معمول برونمایی در برخی موارد برای شبکه‌های ریز دارای مشکل همگرایی می‌باشد (شکل‌های (۱۲) و (۱۳)) و مانده‌ها پس از مقدار مشخصی دائماً نوسان کرده و کاهش نمی‌یابند در حالی که در روش جدید ارائه شده چنین مشکلی ملاحظه نمی‌شود.



شکل ۱۱- مقایسه تاریخچه همگرایی دو روش برای $Re=73$ و دو شبکه شامل ۳۱۳۲ و ۲۳۴۹۰ سلول



شکل ۱۲- تاریخچه همگرایی دو روش برای $Re=229$ و دو شبکه شامل ۵۲۸۰ و ۴۷۵۲۰ سلول



شکل ۱۳- تاریخچه همگرایی دو روش برای $Re=800$ و دو شبکه شامل ۱۶۷۰۴ و ۳۷۵۸۴ سلول

۷- نتیجه گیری

در مقاله حاضر یک روش جدید بر اساس مشخصه های معادلات تراکم پذیری مصنوعی برای محاسبه فشار روی مرزهای جامد ارائه شده است. با توجه با اینکه نحوه اعمال شرایط مرزی روی ایجاد و گسترش موج های خطا و میرایی آنها در طول حل عددی تاثیر مستقیم دارد، می تواند همگرایی را سرعت بخشیده یا آن را به تعویق اندازد. به همین خاطر محاسبه شرایط مرزی با استفاده از مشخصه ها که منطبق بر اصول فیزیکی جریان می باشد نسبت به برونیابی ساده از سلول های مجاور مرز، سرعت همگرایی را بهبود می بخشد که این مساله در مقاله حاضر در مورد جریان روی پله در سه عدد رینولدز مختلف و شبکه های درشت و ریز نشان داده شده است. همچنین نتایج حاصل از روش جدید محاسبه شرایط مرزی با داده های تجربی و عددی موجود در ادبیات فن مقایسه شده و در تمامی موارد توافق خوبی بین آنها مشاهده می شود.

مراجع

- [1] Chorin, A. J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, pp. 12– 26, (1967).
- [2] Farmer, J., Martinelli, L., and Jameson, A., "Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface", *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 1175-1182, (1994).
- [3] Rogers, S.E., and Kwak, D., "Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations", *AIAA Journal*, Vol. 29, pp. 603-610, (1991).
- [4] Liu, C., Zheng, X., and Sung, C.H., "Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 139, pp. 35-57, (1998).
- [5] Kallinderis, Y., and Ahn, H.T., "Incompressible Navier–Stokes Method with General Hybrid Meshes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 210, pp. 75-108, (2005).
- [6] Yuan, L., "Comparison of Implicit Multigrid Schemes for Three-dimensional Incompressible Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 177, pp. 134-155, (2002).
- [7] Drikakis, D., Govatsos, P.A., and Papantonis, D.E., "A Characteristic Based Method for Incompressible Flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, pp. 667-685, (1994).
- [8] Drikakis, D., "A Parallel Multiblock Characteristic Based Method for Three-dimensional Incompressible Flows", *Advances in Engineering Software*, Vol. 26, pp.111-119, (1996).
- [9] Drikakis, D., Iliev, O.P., and Vassileva, D.P., "A Nonlinear Multigrid Method for the Three-dimensional Incompressible Navier–Stokes Equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, pp. 301-321, (1998).
- [10] Zhao, Y., and Zhang, B., "A High-order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow and Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 733-756, (2000).
- [11] Tai, C. H., and Zhao, Y., "Parallel Unsteady Incompressible Viscous Flow Computations using an Unstructured Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, pp. 277-311, (2003).
- [12] Tai, C. H., Zhao, Y., and Liew, K.M., "Parallel Computation of Unsteady Three-dimensional Incompressible Viscous Flow using an Unstructured Multigrid Method", *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 2425-2436, (2004).
- [13] Tai, C.H., Zhao, Y., and Liew, K.M., "Parallel-multigrid Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows using a Matrix-free Implicit Method and High-resolution Characteristics-based Scheme", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 3949-3983, (2005).

- [14] Tai, C.H., Zhao, Y., and Liew, K.M., "Parallel Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows Around Moving Rigid Bodies using an Immersed Object Method with Overlapping Grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, pp. 151-172, (2005).
- [15] Neofytou, P., and Drikakis, D., "Non-Newtonian Flow Instability in a Channel with a Sudden Expansion", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 111, pp. 127-150, (2003).
- [16] Neofytou, P., Drikakis, D., and Leschziner, M.A., "Study of Newtonian and Non Newtonian Fluid Flow in a Channel with a Moving Indentation", in: Sajjadi, Nash, Rampling (Eds.), *Proceedings of the IMA Conference on Cardiovascular Flow Modelling with Application to Clinical Medicine*, Salford, UK, 1998, Clarendon Press, Oxford, (1999).
- [17] Neofytou, P., "Revision of the Characteristics-based Scheme for Incompressible Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 222, pp. 475-484, (2007).
- [18] Mazaheri, K., "Numerical Wave Propagation and Steady-state Solutions", Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering and Scientific Computing, University of Michigan (Ann Arbor), (1992).
- [19] Denham, M.K., and Patrik, M.A., "Laminar Flow Over a Downstream-facing Step in a Two-dimensional Flow Channel", *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, Vol. 52, pp. 361-367, (1974).
- [20] Nithiarasu, P., "An Efficient Artificial Compressibility (AC) Scheme Based on the Characteristic Based Split (CBS) Method for Incompressible Flows", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 1815-1845, (2003).
- [21] Nithiarasu, P., Mathur, J.S., Weatherill, N.P., and Morgan, K., "Three-dimensional Incompressible Flow Calculations using the Characteristic Based Split (CBS) Scheme", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 44, pp. 1207-1229, (2004).
- [22] Shapiro, E., and Drikakis, D., "Non-conservative and Conservative Formulations of Characteristics-based Numerical Reconstructions for Incompressible Flows", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 1466-1482, (2006).
- [23] Gartling, D.K., "A Test Problem for Outflow Boundary Condition-flow Over a Backward Facing Step", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, 953-967, (1990).
- [24] Hashemi, M.Y., and Zamzamin, K., "A Multidimensional Characteristic-based Method for Making Incompressible Flow Calculations on Unstructured Grids", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 259, pp. 752-759, (2014).
- [25] Zamzamin, K., and Razavi, S.E., "Multidimensional Upwinding for Incompressible Flows Based on Characteristics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 8699-8713, (2008).

- [26] Razavi, S.E., Zamzamian, K., and Farzadi, A., "Genuinely Multidimensional Characteristic-based Scheme for Incompressible Flows", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, pp. 929-949, (2008).

فهرست نمادهای انگلیسی

- CFL: عدد کورانت
 C^+, C^- : مسیرهای مشخصه
 F: بردار شار جابجایی در جهت x
 G: بردار شار جابجایی در جهت y
 p: فشار
 p_b : فشار در روی مرز جامد
 u_O, p_O : فشار و سرعت در محل برخورد خط مشخصه با زمان قبل
 R: بردار شار لزج در جهت x
 S: بردار شار لزج در جهت y
 S' : سطح سلول ثانویه
 u, v: مولفه های سرعت کارتزین
 U: بردار متغیرهای اولیه
 x_n : جهت عمود بر مرز بین دو سلول
 (n_x, n_y) : بردار عمود بر مرز مشترک دو سلول
 Error: خطای محاسباتی

نمادهای یونانی

- β : ضریب تراکم پذیری مصنوعی
 Δt : گام زمانی
 ϕ : نماد نوعی برای متغیرهای اولیه جریان
 ρ : چگالی
 λ : شیب خطوط مشخصه

Abstract

The present study proposes a new characteristic based wall boundary condition for incompressible Navier-Stokes equations using artificial compressibility correction. Traditionally, for estimating the pressure on solid walls, ordinary extrapolation from inner cells of domain is used. It has been shown in this study that by using characteristic boundary condition on solid walls, the convergence rate is improved in comparison with old extrapolating method for pressure. For this purpose, a computer code using CB scheme has been developed for numerical tests in the case of incompressible flow over a backward facing step. Also, obtained results with new proposed boundary condition show good agreement with experimental and numerical data in the literature.