

## مطالعه ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های کربنی حامل سیال با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای

انوشیروان فرشیدیان<sup>۱</sup>

استاد

مسعود گلزاری<sup>۲</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

در این مقاله به منظور مطالعه ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک جداره حامل سیال، براساس مدل پوسته استوانه‌ای دانیل و تئوری اصلاح شده تنش کوپل مدل جدیدی ارائه می‌گردد. این مدل جدید تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده بوده و قادر است اثرات اندازه لوله کربنی در مقیاس نانو را لحاظ کند. معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی متناظر با کمک اصل همپلتون بدست آمده و با استفاده از روش عددی مربعات تفاضلی اثرات سیال داخلی و سرعت آن، پارامتر مقیاس طول ماده، تغییرات دما، بستر الاستیکی و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس و محدوده پایداری نانولوله کربنی مذکور مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد.

واژه‌های راهنما: نانولوله کربنی، مدل پوسته، تئوری اصلاح شده تنش کوپل، سیال، تغییرات دما، ناپایداری، روش مربعات تفاضلی

### ۱- مقدمه

نانولوله‌های کربنی، استوانه‌هایی متشکل از مولکول‌های کربن با ساختار شش ضلعی منظم و تناوبی می‌باشند که در سال (۱۹۹۱) توسط ایجیما محقق ژاپنی کشف شدند [۱]. به دلیل خواص مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی، شیمیایی و الکتریکی جدید و استثنایی خود به سرعت در گستره وسیعی از کاربردها نظیر نانوپایپ‌های حامل سیال، سیستم‌های نانوالکترومکانیکی، دستگاه‌های نانوسیالی، سنسورهای بیولوژیکی و مولکولی، محرک‌ها، دستگاه‌های تصفیه سیال، دستگاه‌های تزریق دارو، انواع کامپوزیتها، مخازن سیال، اهرم میکروسکوپ نیروی اتمی، سلول‌های خورشیدی و موارد بسیار دیگری به کار گرفته شدند. بنابراین تجزیه و تحلیل مکانیکی آنها به یک زمینه مورد علاقه در پژوهش‌های سال‌های اخیر تبدیل شده است [۲-۴].

در زمینه نانوپزشکی، نانولوله‌های کربنی به عنوان سنسورهای زیستی برای شناسایی و از بین بردن سلول‌های سرطانی عمل می‌کنند. اتصال نانولوله‌ها به یک توالی خاص دی ان ای می‌تواند باعث اتصال به یک پروتئین در سلول سرطانی شود و اتصال هم سلولی به یک بخش دیگر از همان نانولوله می‌تواند یک پیکان

<sup>۱</sup> استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

راهنما برای حمله به سلول سرطانی و نابود کردن آن باشد تا خواص درمانی مورد نظر با به حداقل رساندن عوارض جانبی آن بهبود یابد [۵]. همچنین، نانولوله‌های کربنی به عنوان سوزن‌های نانومقیاسی برای تزریق مستقیم دارو به درون تومورها بکار می‌روند [۶]. همانطور که اشاره شد به این دلیل که از نانولوله‌های کربنی به عنوان انتقال دهنده دارو در دستگاه‌های انتقال دارو استفاده می‌شود، بنابراین ضروری است بر روی بافت‌های بیولوژیکی بدن جایگذاری شوند. از این رو، رفتار مکانیکی این بافت‌ها به عنوان بسترالاستیکی احاطه کننده نانولوله‌های کربنی و همچنین برآیند اثر متقابل آنها با ارتعاشات ناشی از عبور سیال از درون نانولوله‌های کربنی از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد که در مقاله حال حاضر مورد توجه قرار می‌گیرد.

مطالعه‌ی تئوری ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی حامل سیال برای اولین بار توسط Yoon و همکاران [۷] در سال (۲۰۰۵) انجام شد. آنها تئوری تیر اویلر-برنولی کلاسیک را برای مدل کردن خواص ارتعاشی نانولوله‌های حامل سیال دوسر مفصل و دوسر گیردار تعبیه شده درون بستر الاستیک بکار بردند. آنها به این نتیجه دست یافتند که فرکانس‌های اصلی نانولوله‌های مقید در دو انتها با افزایش سرعت جریان سیال کاهش می‌یابند و بنابراین سیستم در یک سرعت جریان بحرانی پایداری خود را از طریق کماتش از دست می‌دهد. در سال (۲۰۰۶)، Yoon و همکاران [۸] اثر جریان سیال داخلی را بر روی ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های یکسر گیردار-یکسر آزاد با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی کلاسیک مطالعه کردند و مشاهده کردند که بر خلاف نانولوله‌های مقید در دو انتها، نانولوله‌های یکسر گیردار-یکسر آزاد پایداری خود را از طریق ناپایداری فلاتر از دست می‌دهند زیرا در این حالت سیستم ناپایستار است. آنها همچنین اثر ماده‌ی الاستیک اطراف نانولوله را بر روی مشخصه‌های ارتعاشی بررسی کردند. Wang و همکاران [۹] مدلی را برای بررسی رفتار ارتعاشاتی یک نانولوله کربنی پر شده از سیال و جاسازی شده در بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفتند. آنها نشان دادند که بستر الاستیکی وینکلر فرکانس و محدوده پایداری نانولوله کربنی را افزایش می‌دهد.

از آنجا که نانولوله‌های کربنی بسیار کوچک هستند، اندازه گیری مستقیم خواص مکانیکی آنها بسیار مشکل است. بنابراین شبیه سازی‌های محاسباتی به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مطالعه رفتار مکانیکی آنها در نظر گرفته شده اند که به دو دسته ی عمده شبیه سازی دینامیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته تقسیم می‌شوند. به این دلیل که شبیه‌سازی مولکولی گران قیمت، پیچیده و وقت گیر است، به تازگی تئوری های پیوسته‌ی مکانیکی به طور گسترده و موفقیت آمیزی برای مطالعه رفتار مکانیکی نانولوله‌های کربنی همچون تغییر شکل‌های استاتیکی [۱۰]، کماتش [۱۱]، انتشار موج [۱۲]، ارتعاشات [۱۳] و تحلیل ناپایداری [۱۴] به کار گرفته می‌شوند. اگرچه مدل‌های پیوسته‌ی کلاسیک تا حدودی مناسب هستند، اما مقیاس‌های طولی مربوط به نانو سازه‌ها معمولاً به اندازه‌ای کوچک هستند که کاربرد مدل‌های پیوسته‌ی کلاسیک را زیر سوال می‌برند. در مقیاس‌های طولی کوچک اهمیت اثر اندازه مرتباً افزایش پیدا می‌کند و نمی‌تواند چشم‌پوشی شود. این مسئله چالش بزرگی را در مکانیک پیوسته‌ی کلاسیک بوجود آورده است. بنابراین، برای برخی مواد، تئوری پیوسته‌ی کلاسیک برای پیش‌بینی پاسخ سازه‌ها در مقیاس میکرو و نانو ممکن است مناسب نباشد و استفاده از تئوری‌های پیوسته‌ی مرتبه‌ی بالاتر که شامل پارامترهای مقیاس طولی ماده‌ی داخلی هستند اجتناب‌ناپذیر است [۱۵-۱۷]. در این رابطه Lee و Chang [۱۸] تئوری غیر

محلی را برای جذب اثر اندازه طول به کار گرفتند و اثر آن را بر فرکانس طبیعی و شکل مودهای متناظر بررسی کردند. بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، Wang و Ke [۱۹] مدل تیر تیموشنکو اصلاح شده را برای بررسی ارتعاشات و ناپایداری نانولوله کربنی حامل سیال به کار بردند. آنها نشان دادند که فرکانس و محدوده پایداری نانولوله بشدت تحت تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده قرار دارد.

پیشگیری از وقوع هر گونه ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی حامل جریان سیال که به عنوان یک نیاز کلیدی در سیستم‌ها و دستگاه‌های نانوسیالی مطرح شده است، به منظور عملکرد موفق این سیستم‌ها ضروری است ولی متأسفانه تاکنون در اکثر مطالعات گذشته این مهم کمتر مورد توجه قرار گرفته است. لذا در این مقاله اثر سینتیک سیال و برآیند اثر متقابل آن با بستر الاستیکی بر رفتار دینامیکی نانولوله مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین لازم به ذکر است اکثر مطالعات انجام شده در سال‌های اخیر تنها به مدلسازی نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری‌های مختلف مدل تیر اکتفا کرده‌اند و تنها ارتعاشات عرضی المان‌های این سازه‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. از این رو سهم مطالعاتی که از مدل پوسته استوانه‌ای جدار نازک برای مدلسازی دقیق و مناسب‌تر ارتعاشات نانولوله‌های کربنی که علاوه بر بررسی ارتعاشات عرضی، رفتار دینامیکی نانولوله‌ها را در راستاهای جانبی و شعاعی بررسی می‌کند، بسیار اندک هستند. لذا در این مقاله برای نخستین بار، معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر نانولوله کربنی حامل سیال با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای دانه و براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل مدلسازی شده است. معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی با کمک اصل همیلتون به دست می‌آیند که شامل اثرات سیال داخلی، پارامتر مقیاس طول ماده، تغییرات دما، بستر الاستیکی و شرایط مرزی مختلف شامل تکیه‌گاه‌های گیردار- آزاد، دوسر مفصل، دوسر گیردار و گیردار- مفصل می‌باشد. در ادامه با استفاده از روش عددی مربعات تفاضلی اثر پارامترهای فوق بر ارتعاشات و ناپایداری نانولوله کربنی حامل سیال مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد.

## ۲ - تئوری اصلاح شده تنش کوپل

برای اولین بار Yang [۲۰] در سال (۲۰۰۲) تئوری اصلاح شده تنش کوپل را پیشنهاد کرد، این تئوری جدید دو مزیت مهم نسبت به تئوری کلاسیک تنش کوپل دارد که اولی تقارن تانسور تنش کوپل بوده و دومی تعداد پارامترهای مقیاس طول ماده می‌باشد که در مدل اصلاح شده تنها یک عدد است و حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. اولین مزیت بامعرفی یک رابطه تعادل اضافی در روابط ساختاری برای ممان کوپل و دومی با استفاده از این واقعیت که چگالی انرژی کرنش تنها تابعی از کرنش و بخش متقارن تانسور انحناست، حاصل می‌شود. انرژی کرنش  $U_s$  برای یک ماده الاستیک خطی ایزوتروپ با حجم  $\Lambda$  طبق رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}) d\Lambda \quad (1)$$

که  $\boldsymbol{\varepsilon}$  تانسور کرنش،  $\boldsymbol{\sigma}$  تانسور تنش،  $\boldsymbol{\chi}$  تانسور متقارن انحناء و  $\mathbf{m}$  بخش عرضی تانسور تنش کوپل بوده و طبق روابط ۲ تا ۵ محاسبه می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2)$$

$$\chi = \frac{1}{2}[\nabla\theta + (\nabla\theta)^T] \quad (۳)$$

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon \quad (۴)$$

$$m = 2l^2\mu\chi \quad (۵)$$

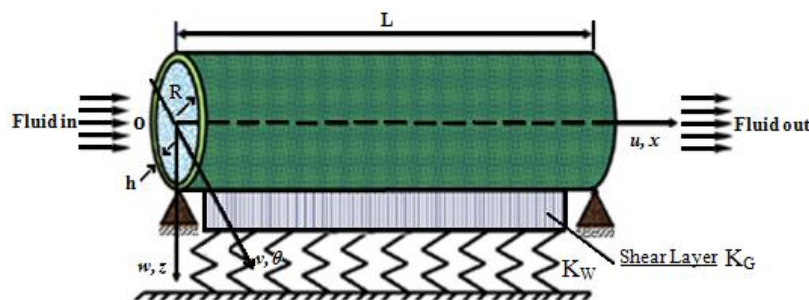
$\mathbf{u}$  بردار جابجایی،  $\mathbf{I}$  ماتریس واحد،  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه (لازم به ذکر است  $\mu$  به عنوان مدول برشی شناخته می‌شود) و  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده می‌باشند.  $\theta$  بردار چرخش است که از رابطه‌ی (۶) بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl}(\mathbf{u}) \quad (۶)$$

مشاهده می‌شود که در این تئوری تنها یک پارامتر مقیاس طول ماده  $l$  علاوه بر دو ثابت متعارف لامه، مورد نیاز می‌باشد. همچنین با توجه به رابطه‌ی (۵) پارامتر مقیاس طول  $l$  از نظر ریاضی مجذور نسبت مدول انحنا به مدول برشی است و از نظر فیزیکی اثر تنش کوپل را اندازه می‌گیرد [۲۱]. این پارامتر می‌تواند از پیچش استوانه‌ی بلند و باریک [۲۲] و تست خمشی [۲۳] تیرهای نازک در مقیاس میکرو یا نانو محاسبه شود.

### ۳- مدل‌سازی نانولوله کربنی حامل سیال

شکل (۱)، نانولوله کربنی الاستیک خطی ایزتروپ تک جداره و حامل جریان سیال داخلی را با مدول یانگ  $E$ ، مدول برشی  $G$ ، شعاع میانگین  $R$ ، ضخامت  $h$ ، طول  $L$  و نسبت پواسون  $\nu$  نشان می‌دهد که بر روی بستر الاستیکی جاسازی شده است. بستر الاستیکی از نوع مدل وینکلر-پاسترناک انتخاب شده است تا یک شبیه‌سازی واقعی و دقیقی بتوان از اثر متقابل نانولوله تک جداره با محیط الاستیک اطراف ایجاد کرد [۲۴]. سیال داخلی غیر لزج است و با سرعت  $U$  داخل نانولوله جاری است. لازم به ذکر است تغییر شکل‌ها نسبت به دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(x, \theta, z)$  تعریف می‌شود.



شکل ۱- نانولوله کربنی حامل سیال مدل شده با پوسته استوانه‌ای و جاسازی شده بر بستر الاستیکی وینکلر-پاسترناک

بر اساس فرض کیرشهوف-لاو، روابط جابجایی یک نقطه اختیاری از پوسته استوانه‌ای طبق رابطه (۷) بیان می‌شود [۲۵]:

$$U_1(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) - z \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x}$$

$$U_2(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) - z \frac{\partial w(x, \theta, t)}{R \partial \theta} \quad (7)$$

$$U_3(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t)$$

که  $t$  زمان برحسب ثانیه،  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  مولفه‌های کلی جابجایی یک نقطهٔ اختیاری و  $u$ ،  $v$  و  $w$  مولفه‌های جابجایی یک نقطه از سطح میانی پوسته به ترتیب در راستاهای محوری  $(x)$ ، جانبی  $(\theta)$  و شعاعی  $(z)$  می‌باشند. همچنین  $z$  فاصلهٔ یک نقطهٔ اختیاری از پوستهٔ استوانه‌ای نسبت به سطح میانی است. در ادامه مولفه‌های کلی کرنش برحسب کرنش سطح میانی طبق رابطهٔ (۸) برابر است با:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} - z \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta 0} - 2z \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad (8)$$

براساس تئوری پوستهٔ استوانه‌ای دائل می‌توان مولفه‌های کرنش سطح میانی را برحسب مولفه‌های جابجایی مطابق رابطهٔ (۹) بیان کرد. بنابراین:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{\theta 0} = \frac{\partial v}{R \partial \theta} - \frac{1}{R} w \quad \gamma_{x\theta 0} = \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

از جایگذاری رابطهٔ (۷) در (۶) مولفه‌های بردار چرخش مطابق زیر بدست می‌آید:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad \theta_\theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right) \quad (10)$$

در ادامه با ترکیب روابط (۸) و (۹) و همچنین روابط (۳) و (۱۰) مولفه‌های تانسور کرنش و انحنای بدست آمده سپس از جایگذاری آنها در رابطهٔ (۱) و انتگرال‌گیری از آن در طول ضخامت جدارهٔ پوسته، انرژی کرنشی نانولوله براساس مدل پوستهٔ استوانه‌ای دائل و تئوری اصلاح شده تنش کوپل مطابق رابطهٔ (۱۱) بدست می‌آید:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi L} \int_0^0 [N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} (\frac{\partial v}{\partial \theta} - w) - \frac{1}{R^2} M_{\theta\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + N_{x\theta} (\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{2}{R} M_{x\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + Y_{xx} \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} - \frac{Y_{\theta\theta}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{Y_{x\theta}}{2} (-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}) + \frac{Y_{xz}}{4} (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta}) + \frac{1}{4R} Y_{\theta z} (\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{R \partial \theta^2})] dx R d\theta \quad (11)$$

که برآیند تنش‌های محوری، خمشی و تنش کوپل به ترتیب برابر است با:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \quad Y_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} m_{ij} dz \quad i, j = x, \theta, z \quad (12)$$

به منظور محاسبهٔ انرژی جنبشی پوستهٔ استوانه‌ای بدون سیال می‌توان نوشت:

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p h \int_0^{2\pi L} \int_0^0 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx R d\theta \quad (13)$$

که  $\rho_P$  چگالی جرمی نانولوله کربنی است. همچنین به منظور محاسبه انرژی پتانسیل بسترالاستیکی وینکلر-پاسترناک داریم [۲۶]:

$$U_F = \frac{1}{2} K_w \int_0^{2\pi L} \int_0^R (w^2) dx R d\theta + \frac{1}{2} K_G \int_0^{2\pi L} \int_0^R \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right] dx R d\theta \quad (14)$$

که  $K_w$  مدول سفتی شعاعی وینکلر و  $K_G$  مدول سفتی برشی پاسترناک می باشد. در ادامه کار ناشی از فشار  $P$  سیال بر جداره داخلی نانولوله کربنی را می توان از رابطه (۱۵) حساب کرد:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi L} \int_0^R (P \times w) dx R d\theta \quad (15)$$

به منظور محاسبه فشار سیال داخلی فرض می شود سیال تراکم ناپذیر، غیر چرخشی و بدون لزجت است. همچنین به دلیل اینکه حرکت شعاعی سیال (که از مرتبه ضخامت پوسته است) بسیار کوچک است می توان از شرایط غیر خطی برای فشار سیال و شرایط مرزی در اثر متقابل سیال و پوسته استوانه ای صرف نظر کرد و فشار سیال را مطابق رابطه (۱۶) نوشت [۲۷]:

$$\begin{aligned} P &= -F_{mn} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \\ &= -\rho_f \frac{L}{m\pi} \frac{I_n \left( \frac{m\pi R}{L} \right)}{I'_n \left( \frac{m\pi R}{L} \right)} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \end{aligned} \quad (16)$$

$m$  نصف عدد موج طولی،  $n$  عدد موج جانبی،  $\rho_f$  چگالی جرمی سیال،  $U$  سرعت سیال در مرکز پوسته،  $I_n$  تابع بسل بهبود یافته نوع اول از مرتبه  $n$  و  $I'_n$  مشتق تابع بسل بهبود یافته نوع اول از مرتبه  $n$  نسبت به آرگومان خود می باشد.

همچنین برای انرژی کرنشی ناشی از تغییرات دما داریم:

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi L} \int_0^R \left[ N_{xx}^T \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{\theta\theta}^T \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right] dx R d\theta \quad (17)$$

که  $N_{\theta\theta}^T$  و  $N_{xx}^T$  به ترتیب نیروهای محوری و جانبی (نیرو بر واحد طول) ایجاد شده در پوسته استوانه ای به سبب تغییرات دما می باشند و از رابطه زیر محاسبه می شوند [۲۸]:

$$N_{xx}^T = -\frac{Eh\alpha_x}{1-\nu} \Delta T \quad N_{\theta\theta}^T = -\frac{Eh\alpha_\theta}{1-\nu} \Delta T \quad (18)$$

$\alpha_x$  و  $\alpha_\theta$  به ترتیب، ضریب انبساط حرارتی نانولوله کربنی در راستاهای محوری و جانبی بوده و همچنین  $\Delta T$  تغییرات دما را بیان می کند.

با استفاده از اصل همپلتون مطابق رابطه (۱۹) معادلات دینامیکی و شرایط مرزی حاکم بر ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی تک جداره حامل سیال و جاسازی شده بر بستر الاستیکی، با استفاده از مدل پوسته استوانه ای دائل و براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل بدست می آید.

$$\delta \int_0^t (U_{total} - T_P - W) = 0 \quad (19)$$

که  $\delta$  بیانگر تغییرات،  $U_{total}$  کل انرژی کرنشی (مجموع انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای، بسترالاستیکی و تغییرات دمایی)،  $T_s$  انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای بدون سیال و  $W$  کار ناشی از فشار سیال بر جداره داخلی پوسته استوانه‌ای است.

در ادامه از جایگذاری تغییرات کل انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار (که در پیوست مقاله محاسبه شده‌اند) در رابطه (۱۹) و صفر کردن ضرایب  $\delta u$ ،  $\delta v$  و  $\delta w$  معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی متناظر برحسب برآیند تنش‌های محوری، خمشی و تنش کوپل بدست می‌آید.

معادلات دینامیکی حاکم به ترتیب برای راستاهای محوری، جانبی و شعاعی برابر است با:

$$R \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Y_{\theta z}}{R \partial \theta^2} - \rho_p h R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (20-f)$$

$$\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{R}{4} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Y_{\theta z}}{\partial x \partial \theta} - \rho_p h R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (20-b)$$

$$R \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + N_{\theta\theta} + \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{R \partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 Y_{xx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 Y_{\theta\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{\partial x^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{\partial \theta^2} - RK_w w +$$

$$RK_G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) + N_{xx}^T R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{\theta\theta}^T \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta^2} - \rho_p h R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P = 0 \quad (20-p)$$

برای تکیه‌گاه یکسر گیردار-یکسر آزاد در  $x=0$ :

$$u(0, \theta, t) = v(0, \theta, t) = w(0, \theta, t) = \frac{\partial v(0, \theta, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(0, \theta, t)}{\partial x} = 0 \quad (21-f)$$

همچنین در  $x=L$ :

$$RN_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial \theta} = 0 \quad N_{x\theta} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4R} \frac{\partial Y_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \quad Y_{xz} = 0 \quad M_{xx} + \frac{1}{2} Y_{x\theta} = 0$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} - \frac{\partial Y_{xx}}{R \partial \theta} + \frac{\partial Y_{\theta\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial Y_{x\theta}}{2 \partial x} + K_G \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xx}^T \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (21-b)$$

برای تکیه‌گاه دوسر مفصل در  $x=0, L$ :

$$RN_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial \theta} = 0 \quad Y_{xz} = 0 \quad M_{xx} + \frac{1}{2} Y_{x\theta} = 0$$

$$v(x, \theta, t) = w(x, \theta, t) = 0 \quad (22)$$

برای تکیه‌گاه دوسر گیردار در  $x=0, L$ :

$$u(x, \theta, t) = v(x, \theta, t) = \frac{\partial v(x, \theta, t)}{\partial x} = w(x, \theta, t) = \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

برای تکیه‌گاه یکسر مفصل-یکسر گیردار در  $x=0$ :

$$RN_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial \theta} = 0 \quad v(0, \theta, t) = w(0, \theta, t) = 0$$

$$Y_{xz} = 0 \quad M_{xx} + \frac{1}{2} Y_{x\theta} = 0 \quad (24\text{-الف})$$

همچنین در  $x=L$ :

$$u(L, \theta, t) = v(L, \theta, t) = w(L, \theta, t) = 0 \quad \frac{\partial v(L, \theta, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(L, \theta, t)}{\partial x} = 0 \quad (24\text{-ب})$$

در ادامه به منظور محاسبه برآیند تنش‌ها ابتدا باید با توجه به رابطه (۴) مولفه‌های تانسور تنش برحسب مولفه‌های کرنش کل را بدست آورد. بنابراین داریم:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{\theta\theta}) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta\theta} + \nu \epsilon_{xx})$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{x\theta} \quad \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{z\theta} = 0 \quad (25)$$

سپس از جایگذاری روابط (۵)، (۸)، (۹)، (۲۵) در رابطه (۱۲) برآیند تنش‌ها مطابق زیر برابر است با:

$$N_{xx} = \frac{12}{h^2} D \left( -\frac{\nu w}{R} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad N_{\theta\theta} = \frac{12}{h^2} D \left( -\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$N_{x\theta} = \frac{6}{h^2} D (1-\nu) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (26)$$

$$M_{xx} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad M_{\theta\theta} = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

$$M_{x\theta} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad (27)$$

$$Y_{xx} = 2\bar{D} \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad Y_{\theta\theta} = -2\bar{D} \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad Y_{x\theta} = \bar{D} \left( \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad Y_{zz} = 0$$

$$Y_{xz} = \frac{1}{2} \bar{D} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} \right) \quad Y_{\theta z} = \frac{1}{2} \bar{D} \left( \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} \right) \quad (28)$$

که در روابط فوق  $D$  سفتی خمشی و  $\bar{D}$  به اصطلاح سفتی خمشی اضافی ناشی از در نظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس طول بوده و از رابطه (۲۹) بدست می‌آیند:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \bar{D} = Gl^2h = \frac{El^2h}{2(1+\nu)} \quad (29)$$

از جایگذاری روابط (۲۶) تا (۲۸) در رابطه (۲۰) معادلات حرکت برحسب مولفه‌های جابجایی سطح میانی پوسته بدست می‌آیند. بنابراین داریم:

$$12 \frac{RD}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{D(1-\nu)}{Rh^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{D}}{8R} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\bar{D}}{8R^3} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + 6 \frac{D(1+\nu)}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\bar{D}}{8} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta} +$$



$$\begin{aligned} & \frac{\bar{D}}{8R^2} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^3 \partial x} - 12 \frac{D\nu}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_p Rh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۳۰-الف) \\ & \frac{R\bar{D}}{8} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\bar{D}}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{\bar{D}}{8R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^3 \partial x} - 12 \frac{D}{h^2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - 6 \frac{DR(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6 \frac{D(1+\nu)}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \\ & \frac{\bar{D}}{8R} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial x^2} + 12 \frac{D}{Rh^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho_p Rh \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (۳۰-ب) \\ & \frac{R}{2} \left(D + \frac{\bar{D}}{2}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{2R^3} \left(D + \frac{\bar{D}}{2}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \left(\frac{2D+3\bar{D}}{2R}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} - 6 \frac{D\nu}{h^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 6 \frac{D}{Rh^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ & 6 \frac{D}{h^2 R} w - \frac{1}{2} \left(RN_{xx}^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{\theta\theta}^T \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta^2}\right) + \frac{R}{2} K_w w - \frac{R}{2} K_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}\right) + RF_{mn} U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\ & \frac{1}{2} F_{mn} R U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\rho_p Rh + RF_{mn}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۳۰-پ) \end{aligned}$$

#### ۴- حل با کمک روش عددی مربعات تفاضلی

روش عددی مربعات تفاضلی به عنوان یک ابزار محاسباتی مناسب برای مسائل مقدار ویژه مختلف شناخته می‌شود [۲۹]. اساس روش مربعات تفاضلی بر این است که مشتق تابع  $F$  به صورت ترکیب خطی وزن دار از تمامی مقادیر تابع در محدوده محاسباتی  $0 \leq x \leq L$  در نظر گرفته می‌شود [۳۰]. بنابراین داریم:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^n f(x_j) \quad (۳۱)$$

که برای مشتق مرتبه اول می‌توان نوشت:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{R(x_i)}{(x_i - x_j)R(x_j)} \quad i, j = 1, \dots, N; i \neq j \quad (۳۲)$$

$N$  تعداد نقاط محدوده محاسباتی است. در روابط فوق:

$$R(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (x_i - x_j) \quad (۳۳)$$

و برای مشتقات بالاتر  $n=2, 3, \dots, N-1$ :

$$C_{ij}^{(n)} = n \left( C_{ii}^{(n-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad C_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} \quad i, j = 1, \dots, N; j \neq i \quad (۳۴)$$

در روابط فوق هیچ محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه وجود ندارد و استفاده از این رابطه موجب صرفه-جویی زمان می‌شود. گزینه‌های مختلفی برای انتخاب موقعیت نقاط شبکه وجود دارد که ساده‌ترین روش انتخاب با فاصله برابر در راستای مختصات دامنه محاسباتی است. البته نشان داده شده توزیع غیر یکنواخت نقاط داخل شبکه نتایج بهتری را نسبت به نقاط شبکه با فواصل مساوی به دست می‌دهد. شو و ریچارد [۳۱]

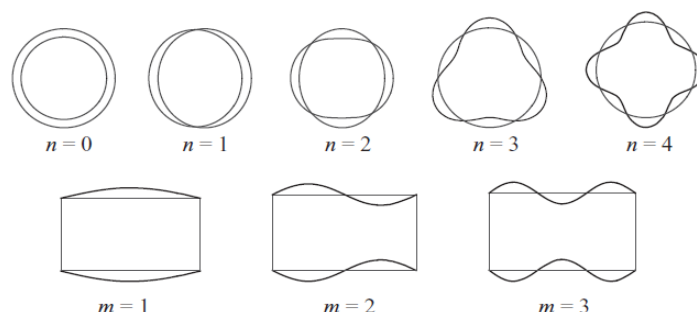
رابطه (۳۵) را برای انتخاب نقاط پیشنهاد کردند که به شبکه نقاط چبیشف-گوس-لاباتو معروف است. برت و ملیک نشان داده‌اند این شبکه نقاط برای محاسبات مکانیک ساختاری از دقت بالایی برخوردار است [۳۲].

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right\} \quad i=1, \dots, N \quad (35)$$

در ادامه با استفاده از روش جداسازی متغیرها می‌توان مولفه‌های جابجایی پوسته استوانه‌ای را برای شرایط مرزی کلی، مطابق رابطه (۳۶) تعریف کرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U(x, t) \cos(n\theta) & v(x, \theta, t) &= V(x, t) \sin(n\theta) \\ w(x, \theta, t) &= W(x, t) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (36)$$

لازم به ذکر است برخی از شکل مودهای متناظر با اعداد موج (m,n) در شکل (۲) نشان داده شده است.



**شکل ۲-** شکل مودهای متناظر با شماره موج‌های عرضی n و طولی m برای مدلسازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با تکیه‌گاه دوسر مفصل [۲۵].

سپس با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۶) می‌توان معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی متناظر را گسسته-سازی کرده (که در پیوست مقاله محاسبه شده‌اند) و در نهایت آنها را به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_a \\ \ddot{d}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_a \\ \dot{d}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_a \\ d_b \end{Bmatrix} = 0 \quad (37)$$

$d_b$  نقاط مرزی که شرایط مرزی بر آنها اعمال شده است و  $d_a$  باقی نقاط مجهول داخل دامنه است.

$$\begin{aligned} d_a &= \{U_2, \dots, U_{N-1}, V_3, \dots, V_{N-2}, W_3, \dots, W_{N-2}\}^T \\ d_b &= \{U_1, U_N, V_1, V_2, V_{N-1}, V_N, W_1, W_2, W_{N-1}, W_N\}^T \end{aligned} \quad (38)$$

برای ارتعاشات خود تحریک نانولوله حامل سیال، رابطه (۳۷) را می‌توان به فرم  $\{d_a, d_b\} = \{\bar{d}_a, \bar{d}_b\} e^{i\omega t}$  نوشت که  $\omega$  مقادیر ویژه فرکانسی و  $\{\bar{d}_a, \bar{d}_b\}$  دامنه‌ی مجهول نوسانات است. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۳۷) و حذف  $d_b$  مسئله مقدار ویژه به فرم کلی رابطه (۳۹) بدست می‌آید:

$$(\omega^2 M + \omega C + K) \bar{d}_a = 0 \quad (39)$$

که  $M$ ،  $C$  و  $K$  به ترتیب، ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی می باشند. ضروری است که ماتریس ضرایب صفر شود. یعنی:

$$\text{Det}|\omega^2 M + \omega C + K| = 0 \quad (40)$$

با حل دترمینان فوق مقادیر ویژه فرکانسی بدست می‌آید. لازم به ذکر است ممکن است این مقادیر مختلط باشند که در این صورت بخش موهومی آن  $\text{Im}(\omega)$  فرکانس طبیعی و بخش حقیقی  $\text{Re}(\omega)$  میرایی را نشان می‌دهد.

## ۵- نتایج و بحث

### ۵-۱- اعتبارسنجی نتایج

به منظور اعتبارسنجی و تایید صحت نتایج مدل پوسته استوانه‌ای دائل ارائه شده برای مدلسازی نانولوله کربنی تک جداره، ابتدا مقایسه‌ای بین نتایج این مقاله با نتایج سایر مقالات [۳۳] و [۳۴] انجام می‌شود. لازم به ذکر است یکی از مسائل اساسی در استفاده مناسب از مدلسازی‌های مکانیک پیوسته که در اکثر مطالعات قبلی کمتر مورد توجه قرار داشته است، تعریف مناسبی از ضخامت موثر جداره نانولوله کربنی می‌باشد. پیشنهادات متفاوتی در مطالعات مختلف بر روی انتخاب ضخامت جداره برای یک مدل پوسته استوانه‌ای پیوسته ارائه شده است. Yakobson و همکاران [۳۵] براساس نتایج تحلیل کمانشی نانولوله کربنی تک جداره بدست آمده با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مدل پوسته استوانه‌ای، مقدار ضخامت جداره  $h=0.066 \text{ nm}$  را پیشنهاد دادند. همچنین با منطبق کردن مدل پوسته استوانه‌ای از نتایج شبیه‌سازی اتمی نانولوله کربنی تک جداره، ضخامت موثر در محدوده  $0.062 \text{ nm} < h < 0.09 \text{ nm}$  پیشنهاد شده است [۳۶]. در محاسبات عددی ما، با توجه به گزارشات Wang و همکاران [۳۶]، مقدار ضخامت موثر مناسب  $h=0.066 \text{ nm}$  انتخاب می‌شود. سایر پارامترهای هندسی و مکانیکی عبارتند از:  $R=5 \text{ nm}$ ،  $Eh=360 \text{ j/m}^2$ ،  $\rho_{ph}=0.7718 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^2$  و  $l=0$  و  $v=0.2$ . جدول (۱) فرکانس طبیعی  $\text{Im}(\omega/2\pi)$  ارتعاشات نانولوله کربنی با تکیه‌گاه دوسر مفصل و بدون سیال را برای طول موج محوری بی‌بعد  $L/(mR)$  نشان می‌دهد.

**جدول ۱- مقایسه فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده بوسیله مدل کنونی با نتایج مدل‌های موجود**

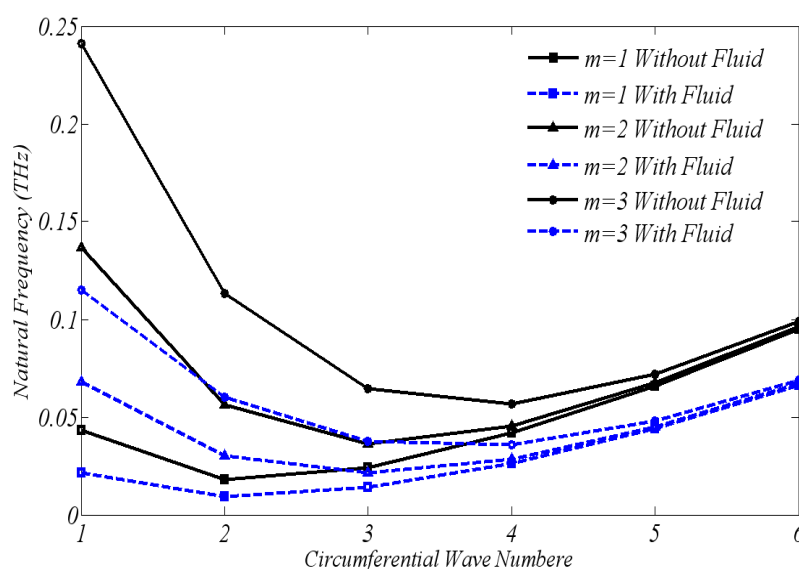
در منابع [۳۳] و [۳۴]،  $m=n=1$

| Frequency (Hz) |                       |                         |                         |
|----------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| $L/(mR)$       | Wang et al.[33]       | Fazlzadeh et al.[34]    | Present study           |
| 0.5            | $6.78 \times 10^{11}$ | $6.7789 \times 10^{11}$ | $6.7815 \times 10^{11}$ |
| 1              | $6.11 \times 10^{11}$ | $6.1134 \times 10^{11}$ | $6.1162 \times 10^{11}$ |
| 5              | $1.30 \times 10^{11}$ | $1.3543 \times 10^{11}$ | $1.3550 \times 10^{11}$ |
| 10             | $4.28 \times 10^{10}$ | $4.2749 \times 10^{10}$ | $4.2812 \times 10^{10}$ |
| 50             | $1.91 \times 10^9$    | $1.909 \times 10^9$     | $1.9319 \times 10^9$    |

مشاهده می‌شود که نتایج ارائه شده بوسیله مدل کنونی با درصد انحراف تقریباً کمتر از ۱٪ از تطابق خوبی با نتایج سایر مطالعات [۳۳] و [۳۴] برخوردار می‌باشد.

## ۵-۲- اثر سیال داخلی و سرعت آن

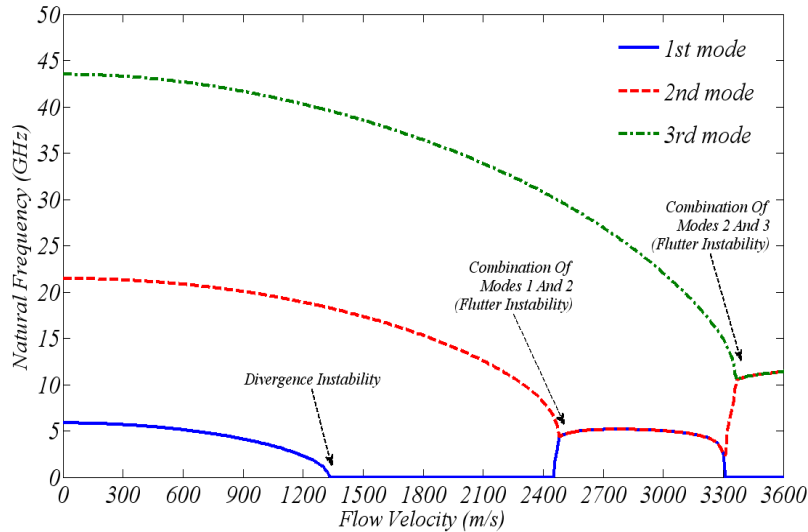
به منظور بررسی اثر سیال بر فرکانس طبیعی شماره موج‌های جانبی در شکل (۳)، فرکانس برحسب  $n$  برای مدهای اول تا سوم و برای دو حالت نانولوله خالی از سیال و نانولوله پر از سیال ساکن ( $U=0$ ) بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، فرکانس مدهای اول، دوم و سوم نانولوله خالی از سیال برای تمامی اعداد  $n$ ، بیشتر از زمانی است که نانولوله کربنی پر از سیال ساکن است و سیال داخلی فرکانس را به شدت تحت تاثیر قرار داده است. لازم به ذکر است برای هر دو حالت نانولوله، فرکانس پایه در  $n=2$  اتفاق می‌افتد.



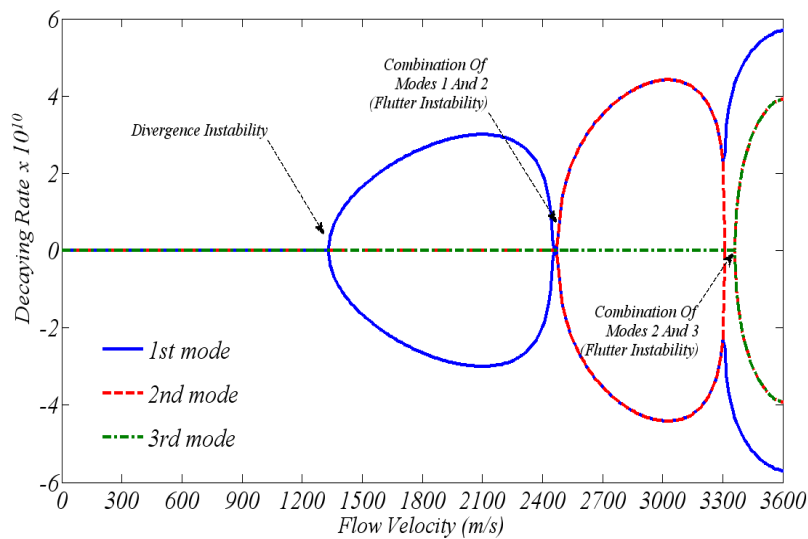
شکل ۳- فرکانس طبیعی سه مود اول نانولوله کربنی بدون سیال و با سیال ساکن  
برحسب عدد موج جانبی  $n$ ،  $L/d=5$

شکل (۴) فرکانس طبیعی و میرایی ارتعاشات خمشی نانولوله کربنی را برحسب سرعت سیال برای مدهای اول، دوم و سوم نشان می‌دهد. تکیه‌گاه از نوع دوسر مفصل انتخاب شده و سیال داخلی آب با چگالی  $\rho_f=1000 \text{ Kg/m}^3$  می‌باشد. همچنین در ابتدا از اثر اندازه، تغییرات دما و بستر الاستیکی صرف‌نظر شده است. همانطور که در شکل (۴-الف) مشاهده می‌شود با افزایش سرعت سیال، فرکانس مدهای اول، دوم و سوم کاهش می‌یابد تا اینکه برای مود اول در سرعت بحرانی  $U_{cr}=1330 \text{ m/s}$  به صفر می‌رسد. لازم به ذکر است سرعت بحرانی، سرعتی است که در آن فرکانس طبیعی مود اول صفر می‌شود و در همان سرعت در شکل (۴-ب) میرایی غیر صفر. در این لحظه، یک ناپایداری ساختاری استاتیکی اتفاق افتاده که ناپایداری کمانشی نام دارد و به موجب آن نانولوله کربنی ارتعاش نخواهد کرد و تنها دچار ناپایداری استاتیکی می‌شود. اما دو مود دیگر همچنان پایدارند. مشاهده می‌شود سرعت بحرانی که در آن ناپایداری کمانشی اتفاق افتاده به فرکانس طبیعی وابسته نیست. همچنین باید اشاره کرد که فرکانس در محدوده‌ای از سرعت سیال برای مود اول برابر صفر است در نتیجه سرعت بحرانی برای محدوده‌ای از سرعت سیال تعریف می‌شود نه برای یک

سرعت خاص. بنابراین برای نانولوله کربنی مورد نظر ناپایداری کمانشی برای مود اول در محدوده سرعت  $1330 \text{ m/s} < U_{cr} < 2450 \text{ m/s}$  اتفاق می‌افتد. لازم به ذکر است محدوده قبل از سرعت بحرانی را محدوده پایداری می‌گویند.



(الف)



(ب)

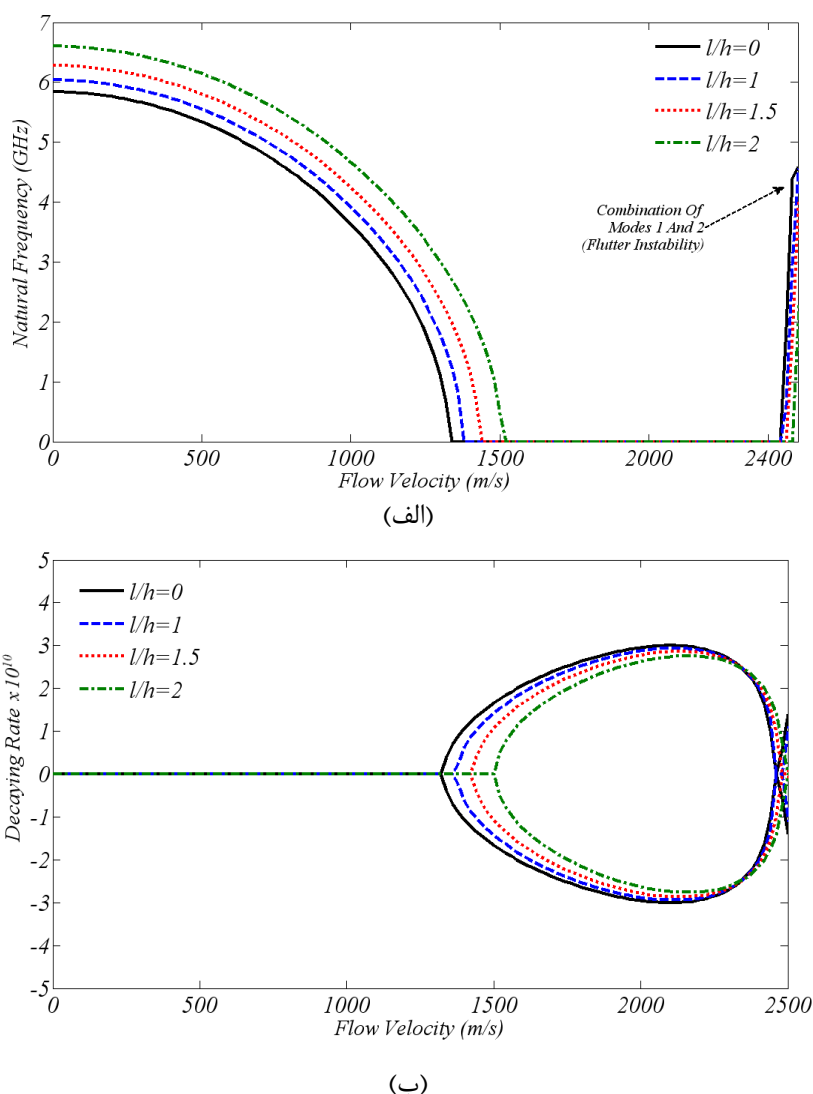
**شکل ۴-** مقادیر ویژه فرکانسی سه مود اول از ارتعاشات نانولوله کربنی برحسب سرعت سیال،  $L/d=10$ ،  $n=1$ . الف) فرکانس طبیعی، ب) میرایی

با افزایش سرعت سیال در  $U=2450 \text{ m/s}$ ، مود اول دوباره پایدار شده تا اینکه در سرعت  $U=2490 \text{ m/s}$  مقدار فرکانس و میرایی مود اول با مود دوم به یک مقدار کوپل شده و در نتیجه ناپایداری از نوع ناپایداری فلتر اتفاق می‌افتد که در نتیجه آن دامنه نوسانات رفته رفته افزایش یافته و به مقادیر بسیار بزرگی می‌تواند برسد. در محدوده ناپایداری فلتر فرکانس طبیعی تقریباً ثابت و مستقل از سرعت سیال می‌باشد. در ادامه با افزایش سرعت سیال تا  $U=3300 \text{ m/s}$  مود اول و دوم دوباره پایدار می‌شوند سپس در سرعت  $U=3380 \text{ m/s}$

مقادیر فرکانس و میرایی موده‌های دوم و سوم به یک مقدار کوپل شده و دوباره ناپایداری فلتری اتفاق می‌افتد. در ادامه بازم کویل شدن دو مود برای سایر موده‌های بالاتر به همین صورت می‌تواند ادامه داشته باشد.

### ۵-۳- اثر پارامتر مقیاس طول ماده

شکل (۵) فرکانس طبیعی و میرایی مود اول نانولوله کربنی را بر حسب سرعت سیال برای نسبت  $l/h$  های مختلف نشان می‌دهد. لازم به ذکر که از تغییرات دما و بستر الاستیکی صرف‌نظر شده است و همچنین  $l/h=0$  متناظر با مدل کلاسیک پوسته استوانه‌ای دائل می‌باشد. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی سیال به شدت تحت تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده قرار دارد بطوریکه در نظر نگرفتن آن تاثیر قابل توجهی بر نتایج دارد. همچنین نشان داده شده است مدل جدید فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی و به دنبال آن محدوده پایداری بزرگتری را نسبت به مدل کلاسیک پوسته استوانه‌ای پیش‌بینی می‌کند. بطوریکه با افزایش پارامتر مقیاس طول  $l$  فرکانس و محدوده پایداری بزرگتر می‌شود.



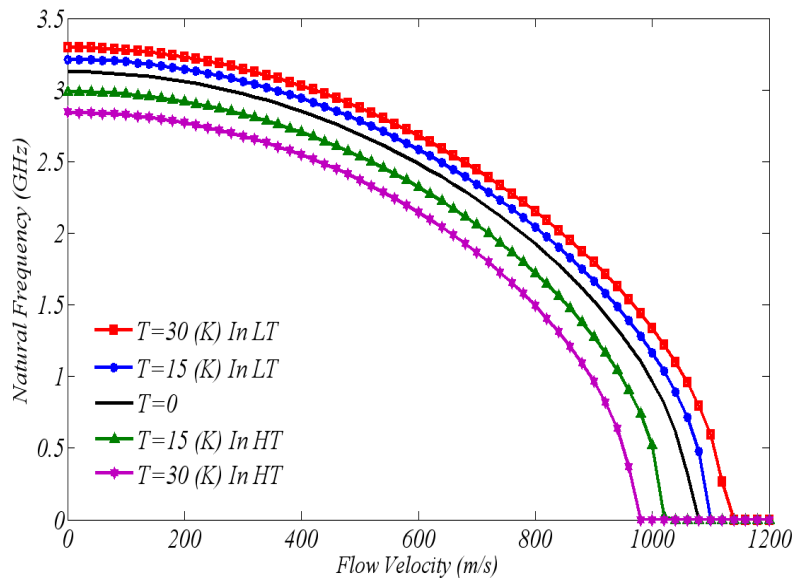
**شکل ۵-** اثر پارامتر مقیاس طول  $l$  بر مقادیر ویژه فرکانسی مود اول نانولوله کربنی

بر حسب سرعت سیال داخلی،  $n=1$ ،  $L/d=10$  nm،  $h=0.066$  nm، الف) فرکانس طبیعی، ب) میرایی

#### ۵-۴- اثر تغییرات دما

به منظور بررسی اثر تغییر دما بر مشخصه‌های ارتعاشی نانولوله کربنی حامل سیال با تکیه‌گاه دوسر مفصل، نسبت طول به قطر داخلی  $L/d=15$ ، نسبت  $l/h=1$ ، ضرایب انبساط حرارتی طولی  $\alpha_x=-1.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  و جانبی  $\alpha_\theta=-0.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  برای دماهای پایین (دمای اتاق) و  $\alpha_x=1.1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  و  $\alpha_\theta=0.8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  برای دماهای بالا در نظر گرفته می‌شود [۳۷].

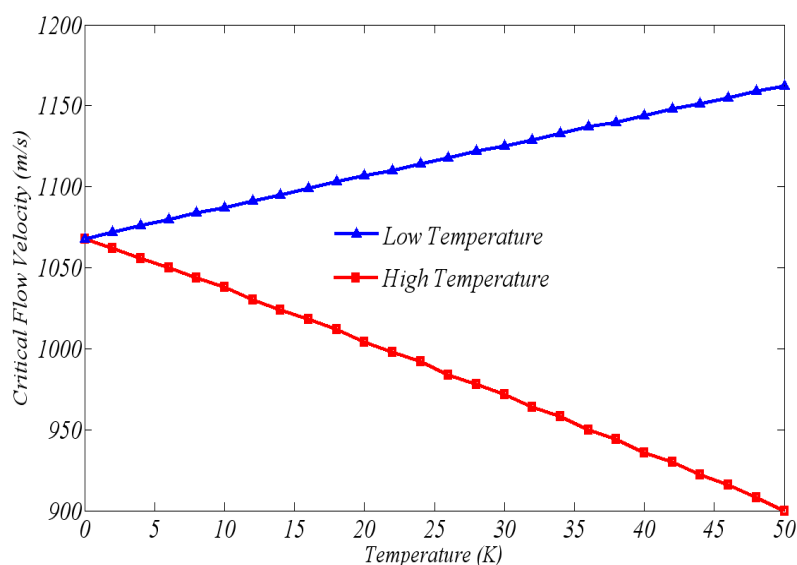
شکل (۶) اثر تغییرات دما بر فرکانس طبیعی و محدوده پایداری نانولوله کربنی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود اثر تغییرات دما با توجه به شرایط متفاوت است. به عبارتی دیگر نشان داده شده است که برای دماهای پایین تغییر دما منجر به افزایش فرکانس و محدوده پایداری می‌شود که با افزایش هر چه بیشتر تغییرات دما، فرکانس و محدوده پایداری بیشتر افزایش می‌یابد ولی برای دماهای بالا عکس این موضوع است. یعنی وجود تغییرات دما و افزایش آن منجر به کاهش هرچه بیشتر فرکانس و محدوده پایداری می‌گردد. همچنین مشاهده می‌شود که میزان تاثیر پذیری فرکانس از تغییرات دما در دماهای بالا بیشتر از دماهای پایین است.



شکل ۶- اثر تغییرات دما بر فرکانس و پایداری مود اول ارتعاشات نانولوله کربنی حامل جریان سیال

در دماهای پایین (اتاق) و دماهای بالا،  $n=1, K_w=K_G=0$

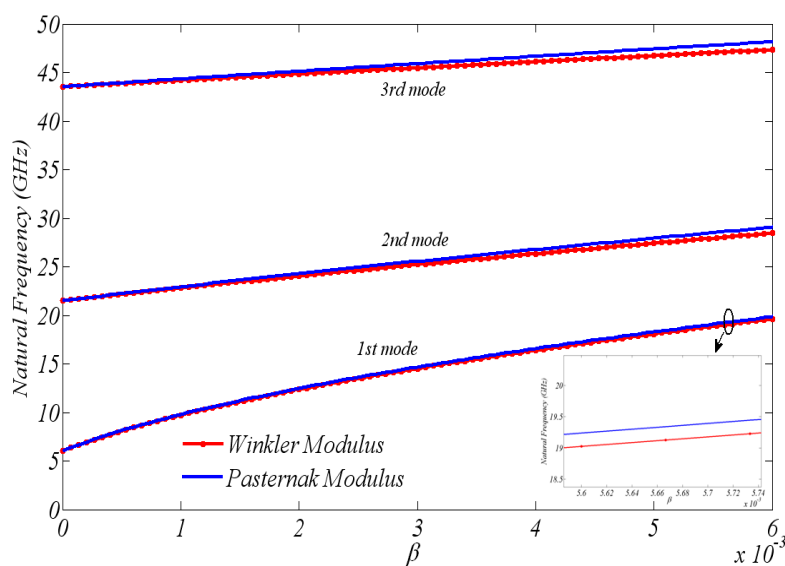
در شکل (۷) سرعت بحرانی سیال برحسب تغییرات دما برای هر دو شرایط تغییر دما در دماهای بالا و در دماهای پایین بدست آمده است. مشاهده می‌شود که برای دماهای پایین با افزایش تغییرات دما، سرعت بحرانی با شیب نسبتاً ثابتی افزایش پیدا کرده است که به موجب آن ناپایداری کمانشی در سرعت‌های بالاتر اتفاق افتاده است اما سرعت بحرانی برای تغییر دما در دماهای بالا، با شیب نسبتاً ثابتی کاهش داشته است که نشان می‌دهد ناپایداری کمانشی در سرعت‌های کمتری نسبت به حالتی که تغییرات دمایی نداریم، اتفاق می‌افتد. البته مشخص است که شیب کاهش سرعت بحرانی بیشتر از شیب افزایش آن می‌باشد. به عبارتی دیگر اثر تغییر دما بر محدوده پایداری نانولوله در دماهای بالا بیشتر از دماهای پایین است.



شکل ۷- سرعت بحرانی سیال بر حسب تغییرات دما برای دماهای بالا و پایین

### ۵-۵- اثر بستر الاستیکی

به منظور بررسی هم زمان اثر دو نوع بستر وینکلر و پاسترناک بر فرکانس طبیعی نانولوله کربنی با نسبت  $L/d=10$ ،  $l/h=1$  و  $U=0$ ، در شکل (۸) فرکانس طبیعی مودهای اول تا سوم بر حسب پارامتر بی بعد  $\beta$  برای هر دو مدل از بستر محاسبه شده است. مشاهده می شود برای مود اول، با افزایش  $\beta$  فرکانس با شیب بیشتری نسبت به دو مود دوم و سوم افزایش می یابد. همچنین برای یک مقدار معین از  $\beta$ ، بستر پاسترناک فرکانس را اندکی بیشتر از بستر وینکلر پیش بینی می کند. البته برای مود اول این اختلاف جزئی است ولی برای مودهای دوم و سوم با افزایش پارامتر  $\beta$  بیشتر می شود. لازم به ذکر است پارامتر بی بعد مدول سفتی وینکلر و برشی پاسترناک به ترتیب بر اساس روابط  $\beta=K_w R^2(1-\nu^2)/Eh$  و  $\beta=K_G(1-\nu^2)/Eh$  محاسبه می شود.



شکل ۸- فرکانس طبیعی سه مود اول نانولوله کربنی پر از سیال ساکن بر حسب پارامتر بی بعد  $\beta$

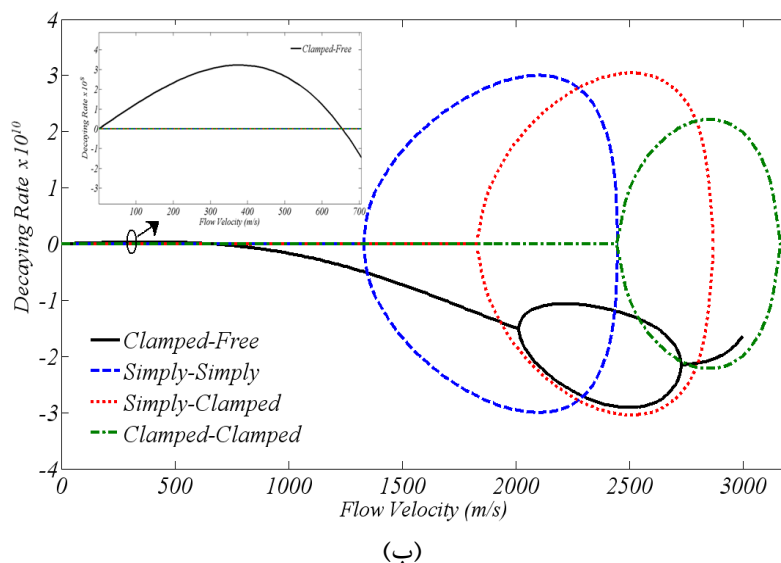
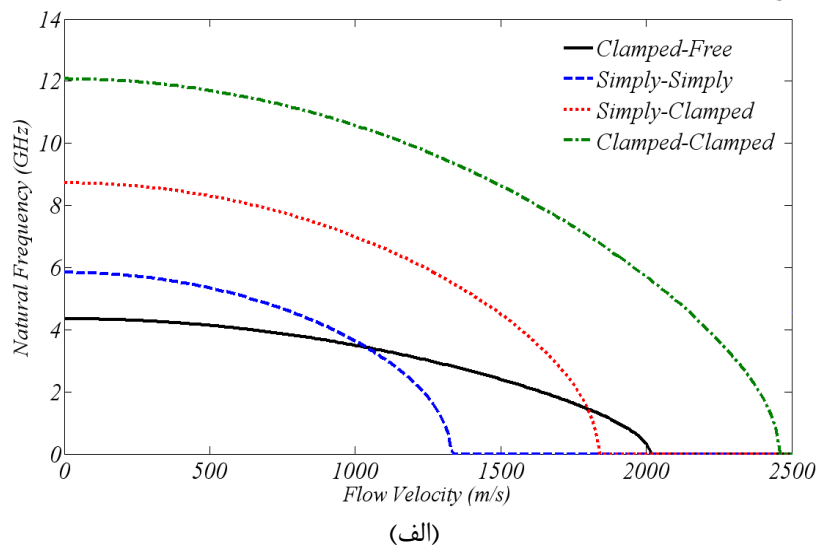
برای هر دو نوع بستر وینکلر و پاسترناک،  $n=1$ ،  $\Delta T=0$



## ۵-۶- اثر شرایط مرزی

شکل (۹) اثر شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی، میرایی و محدوده پایداری نانولوله کربنی حامل جریان سیال را با نسبت  $L/d=10$  و  $l=\Delta T=0$  برای چهار نوع تکیه‌گاه یکسر گیردار-یکسر آزاد، دوسر مفصل، یکسر گیردار-یکسر مفصل و دوسر گیردار نشان می‌دهد.

همانطور که مشاهده می‌شود برای هر چهار شرط مرزی، فرکانس و میرایی نانولوله کربنی به شدت تحت تاثیر سیال و سرعت آن قرار دارد. که البته مشاهده می‌شود برای سرعت‌های نسبتاً کم فرکانس تکیه‌گاه گیردار-آزاد، نسبت به سایر تکیه‌گاه‌ها کمتر تحت تاثیر سرعت سیال می‌باشد. اگرچه سرعت بحرانی تکیه‌گاه‌های دوسر مفصل، گیردار-مفصل و دوسر گیردار، سرعتی تعریف می‌شود که در آن فرکانس طبیعی مود اول صفر شده و هم زمان میرایی غیر صفر که در آن صورت برای مود اول ناپایداری از نوع کمانشی مشاهده می‌شود، ولی شرایط تعریف سرعت بحرانی و محدوده پایداری برای تکیه‌گاه گیردار-آزاد همانطور که مشاهده می‌شود متفاوت است.



شکل ۹- اثر سیال داخلی و سرعت آن بر فرکانس طبیعی و میرایی مود اول از ارتعاشات نانولوله کربنی برای شرایط مرزی مختلف،  $n=1$ ،  $K_w=K_G=0$ . (الف) فرکانس طبیعی، (ب) میرایی

از آنجایی که این نوع تکیه‌گاه ناپایداری از نوع کمانشی را به دلیل نوع شرایط مرزی خود تجربه نمی‌کند (در دو انتها مقید نیست) در آن تنها ناپایداری فلانتر اتفاق می‌افتد که در این حالت دیگر خبری از کوپل شدن دو مود نیست و سیستم ناپایستار است. زیرا همانطور در شکل (۹-ب) مشاهده می‌شود تا سرعت ۶۵۵ متر بر ثانیه میرایی غیر صفر و مقادیر مثبتی دارد، این بدان معناست که اگر در این محدوده از سرعت سیال ارتعاشات اتفاق بیافتد، سیال از نانولوله کربنی انرژی گرفته و رفته رفته دامنه نوسانات دمپ می‌شود و نانولوله پایدار می‌ماند ولی با افزایش بیشتر سرعت سیال از  $U_c=655$  m/s، مقادیر میرایی تغییر علامت داده و منفی می‌شود لذا در این محدوده از سرعت سیال، سیال به نانولوله کربنی انرژی می‌دهد و باعث افزایش دامنه نوسانات شده و ناپایداری فلانتر اتفاق می‌افتد. پس در این نوع از تکیه‌گاه سرعت بحرانی برابر سرعتی است که در آن میرایی از مقادیر مثبت به منفی تغییر علامت داده است.

سرعت بحرانی برای چهار شرط مرزی گیردار- آزاد، دوسر مفصل، گیردار-مفصل و دوسر گیردار به ترتیب، ۶۵۵، ۱۳۳۰، ۱۸۳۰، ۲۴۴۵ متر بر ثانیه می‌باشد در نتیجه کمترین محدوده پایداری را تکیه‌گاه گیردار-آزاد و بیشترین را تکیه‌گاه دوسر گیردار پیش‌بینی می‌کند. همچنین نشان داده شده است که سهم پایداری تکیه‌گاه گیردار-مفصل بیشتر از دوسر مفصل می‌باشد.

## ۶ - نتیجه‌گیری

در این مقاله، به منظور مطالعه ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله کربنی حامل سیال، با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای دانل و براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل مدل جدیدی ارائه شد که قادر بود اثرات اندازه مربوط به ساختار لوله کربنی در مقیاس نانو را لحاظ کند. بر این اساس معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل همپلتون به دست آمد و در ادامه به کمک روش عددی مربعات تفاضلی اثرات مربوط به سیال داخلی و سرعت آن، پارامتر مقیاس طول ماده، تغییرات دما، انواع بستر الاستیکی و شرایط مرزی مختلف شامل تکیه‌گاه‌های گیردار- آزاد، دوسر مفصل، دوسر گیردار و گیردار-مفصل بر فرکانس و ناپایداری نانولوله کربنی مورد مطالعه و بحث قرار گرفت. در ابتدا اعتبارسنجی از نتایج مدل جدید با سایر نتایج منابع موجود انجام و صحت نتایج تایید شد. از بررسی اثر سیال داخلی و سرعت آن مشاهده شد که سیال داخلی کمک به کاهش شدید فرکانس طبیعی نانولوله کربنی می‌کند. به طوری که برای سه مود اول مشاهده شد با افزایش سرعت سیال، فرکانس کاهش یافته تا اینکه برای مود اول در سرعت بحرانی به صفر می‌رسید و ناپایداری از نوع کمانشی اتفاق می‌افتاد. با بررسی اثر پارامتر مقیاس طول مشاهده شد رفتار دینامیکی نانولوله کربنی وابسته به اندازه است به طوری که مدل تعمیم یافته با تئوری اصلاح شده تنش کوپل، فرکانس و سرعت بحرانی و در نتیجه محدوده پایداری بزرگتری را نسبت به مدل کلاسیک پیش-بینی می‌کند. با بررسی اثر تغییرات دما نشان داده شد با افزایش تغییرات دما در دمای پایین (دمای اتاق) فرکانس و محدوده پایداری، بیشتر می‌شود و برای دماهای بالا، بلعکس، فرکانس و محدوده پایداری کاهش می‌یابد. با بررسی اثر بستر الاستیکی بر فرکانس نانولوله مشاهده شد که هر دو نوع بستر وینکلر و پاسترناک فرکانس را افزایش می‌دهند که البته سهم مدل پاسترناک اندکی بیشتر از وینکلر بود. با بررسی اثر شرایط مرزی مختلف مشاهده شد تکیه‌گاه گیردار-آزاد کمترین محدوده پایداری و تکیه‌گاه دوسر گیردار بیشترین

مقدار را پیش‌بینی می‌کند. همچنین در این حالت با بررسی میرایی نشان داده شد برای تکیه‌گاه گیردار- آزاد برخلاف تکیه‌گاه‌های دیگر که در مود اول ناپایداری کمانشی پیش‌بینی می‌شد و در سرعت بحرانی که به موجب آن فرکانس طبیعی صفر بود اتفاق می‌افتاد، در اینجا تنها ناپایداری فلاتر مشاهده می‌شود و در سرعت بحرانی اتفاق می‌افتد که به موجب آن میرایی از مقادیر غیر صفر مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد.

## مراجع

- [1] Iijima, S., "Helical Microtubules of Graphitic Carbon", *Nature*, Vol. 354, pp. 56–58, (1991).
- [2] Wang, Q., Liew, K.M., and Duan, W.H., "Modeling of the Mechanical Instability of Carbon Nanotubes", *Carbon*, Vol. 46, pp. 285–290, (2008).
- [3] Yan, Y., He, X.Q., Zhang, L.X., and Wang, C.M., "Dynamic behavior of Triple-walled Carbon Nanotubes Conveying Fluid ", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 1003–1018, (2009).
- [4] Natsuki, T., Lei, X.W., Ni, Q.Q., and Endo, M., "Free Vibration Characteristics of Double-walled Carbon Nanotubes Embedded in an Elastic Medium", *Physics Letters A*, Vol. 374, pp. 2670–2674, (2010).
- [5] Foldvari, M., and Bagonluri, M. "Carbon Nanotubes as Functional Excipients for Nanomedicines: II. Drug Delivery and Biocompatibility Issues", *Nanomedicine: Nanotechnology, Biology, and Medicine*, Vol. 4, pp. 183-200, (2008).
- [6] Khosravian, N., and Rafii-Tabar, H., "Computational Modelling of a Non-viscous Fluid Flow in a Multi-walled Carbon Nanotube Modelled as a Timoshenko Beam", *Nanotechnology*, Vol. 19, pp. 275703, (2008).
- [7] Yoon, J., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A., "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Composite Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1326–1336, (2005).
- [8] Yoon, C.Q., Ru, A., and Mioduchowski, A., "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes", *Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3337–3349, (2006).
- [9] Wang, X.Y., Wang, X., and Sheng, G.G., "The Coupling Vibration of Fluid-filled Carbon Nanotubes", *Journal of Physics Letters D: Apply Physics*, Vol. 40, pp. 2563-2572, (2007).
- [10] Wong, E.W., Sheehan, P.E., and Lieber, C.M., "Nanobeam Mechanics: Elasticity, Strength and Toughness of Nano-rods and Nanotubes", *Science*, Vol. 277, pp. 1971–1974, (1997).

- [11] Zhang, Y.Q., Liu, X., and Zhao, J.H., "Influence of Temperature Change on Column Buckling of Multi Walled Carbon Nanotubes", *Physics Letters A*, Vol. 372, pp. 1676–1681, (2008).
- [12] Yang, Y., Zhang, L., and Lim, C.W., "Wave Propagation in Double-walled Carbon Nanotubes on a Novel Analytically Nonlocal Timoshenko-beam Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330., pp. 1704–1717, (2011).
- [13] Elishakoff, I., and Pentaras, D., "Rapid Communication Fundamental Natural Frequencies of Double-walled Carbon Nanotubes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, pp. 652–664, (2009).
- [14] Yoon, J., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A., "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Composites Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1326–1336, (2005).
- [15] Ahangar, S., Rezazadeh, G.h., Shabani, R., Ahmadi, G., and Toloei, A., "On the Stability of a Microbeam Conveying Fluid Considering Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 7, pp. 327–342, (2011).
- [16] Zhen, Y., and Fang, B., "Thermal–mechanical and Nonlocal Elastic Vibration of Single-walled Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Computational Materials Science*, Vol. 49, pp. 276–282, (2010).
- [17] Wang, L., "Size-dependent Vibration Characteristics of Fluid-conveying Microtubes" *Journal of Fluid Structure*, Vol. 26, pp. 675-684, (2010).
- [18] Lee, H.L., and Chang, W.J., "Free Transverse Vibration of the Fluid-conveying Single-walled Carbon Nanotube using Nonlocal Elastic Theory", *Journal of Apply Physics*, Vol. 103, pp. 024302, (2008).
- [19] Ke, L.L., and Wang, Y.S., "Flow-induced Vibration and Instability of Embedded Double-walled Carbon Nanotubes Based on a Modified Couple Stress Theory", *Physica E*, Vol. 43, pp. 1031–1039, (2011).
- [20] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids Structure*, Vol. 39, pp. 2731–2743, (2002).
- [21] Ma, H.M., Gao, X.L., and Reddy, J.N, "A Microstructure-dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, pp. 3379-3391, (2008).
- [22] Chong, A.C.M., Yang, F., Lam, D.C.C., and Tong, P., "Torsion and Bending of Micron-scaled Structures", *Journal of Materials Research*, Vol. 16, pp. 1052-1058, (2001).
- [23] Stolken, J.S., and Evans, A.G., "A Microbend Test Method for Measuring the Plasticity Length Scale", *Acta Materialia*, Vol. 46, pp. 5109-5115, (1998).

- [24] Paliwal, D.N., Pandey, R.K., and Nath, T., "Free Vibrations of Circular Cylindrical Shell on Winkler and Pasternak Foundations", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 69, pp. 79–89, (1996).
- [25] Amabili, M., "*Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*", Cambridge University Press, New York, (2008).
- [26] Bakhtiari-Nejad, F., and Mousavi-Bideleh, M., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Prestressed Circular Cylindrical Shells on the Winkler/Pasternak Foundation", *Thin Walled Structures*, Vol. 53, pp. 26–39, (2012).
- [27] Karagiozis, K.N., Amabili, M., Padoussis, M.P., and Misra, A.K., "Nonlinear Vibrations of Fluid-filled Clamped Circular Cylindrical Shells", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 21, pp. 579–595, (2005).
- [28] Ghorbanpour Arani, A., Amir, S., Shajari, A.R., and Mozdianfard, M.R., "Electro-thermo-mechanical Buckling of DWBNNTs Embedded in Bundle of CNTs using Nonlocal Piezoelasticity Cylindrical Shell Theory", *Composites: Part B*, Vol. 43, pp. 195–203, (2012).
- [29] Bellman, R., Kashef, B.G., and Casti, J., "Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 40–52, (1972).
- [30] Shu, C., "*Differential Quadrature and its Application in Engineering*", Springer-verlag, London, (2000).
- [31] Shu, C., and Richards, B.E., "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", *International Journal for Numerical, Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 791-798, (1992).
- [32] Bert, C.W., and Malik, M., "Free Vibration Analysis of Thin Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method", *ASME Journal Pressure Vessel Tech*, Vol. 118, pp. 1-12, (1996).
- [33] Wang, C.Y., Ru, C.Q., and Mioduchowski A., "Applicability and Limitations of Simplified Elastic Shell Equations for Carbon Nanotubes", *Journal of Apply Mechanic*, Vol. 71, pp. 622–631, (2004).
- [34] Fazelzadeh, S.A., and Ghavanloo, E., "Nonlocal Anisotropic Elastic Shell Model for Vibrations of Single-walled Carbon Nanotubes with Arbitrary Chirality", *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 1016-1022, (2012).
- [35] Yakobson, B.I., Brabec, C.J., and Bernholc, J., "Nanomechanics of Carbon Tubes: Instabilities Beyond Linear Response", *Physical Review Letters*, Vol. 76, pp. 2511-2514, (1996).
- [36] Wang, L.F., Zheng, Q.S., Liu, J.Z., and Jiang, Q., "Size Dependence of the Thin-shell Model for Carbon Nanotubes", *Physical Review Letters*, Vol. 95, pp. 105501, (2005).

- [37] Ghorbanpour Arani, A., Mohammadimehr, M., Saidi, A.R., Shogaei, S., and Arefmanesh, A., "Thermal Buckling Analysis of Double-walled Carbon Nanotubes Considering the Small-scale Length Effect", Journal of Mechanical Engineering Science Part C, Vol. 225, pp. 248-256, (2010).

## فهرست نمادهای انگلیسی

- C : ماتریس میرایی  
 $C_{ij}^n$  : ضرایب وزنی مشتق مرتبه  $n$  ام در نقطه  $i$  در روش عددی DQ  
d : قطر داخلی  
D : سختی خمشی موثر  
 $\bar{D}$  : سفتی خمشی اضافی براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل  
E : مدول یانگ  
G : مدول برشی  
h : ضخامت پوسته استوانه‌ای  
I : ماتریس واحد  
 $I_n$  : تابع بسل بهبود یافته نوع اول از مرتبه  $n$   
 $K_G$  : مدول برشی پاسترناک بستر الاستیکی  
 $K_w$  : مدول سفتی وینکلر بستر الاستیکی  
 $\mathbf{K}$  : ماتریس سفتی  
 $l$  : پارامتر مقیاس طولی ماده براساس تئوری اصلاح شده تنش کوپل  
L : طول  
 $m_{ij}$  : تانسور تنش کوپل  
m : عدد موج طولی  
 $M_{ij}$  : گشتاور خمشی  
 $\mathbf{M}$  : ماتریس جرم  
n : عدد موج عرضی  
N : تعداد نقاط شبکه  
 $N_{ij}$  : برآیند نیروی محوری  
 $N_{xx}^T$  : نیروی محوری ناشی از تغییر دما  
 $N_{\theta\theta}^T$  : نیروی جانبی ناشی از تغییر دما  
P : فشار سیال  
R : شعاع میانگین پوسته استوانه‌ای  
t : زمان

T : انرژی جنبشی

$\Delta T$  : تغییر دما

u : تغییر مکان طولی

$U_s$  : چگالی انرژی کرنشی

$U_{total}$  : انرژی کرنشی کل

U : سرعت متوسط جریان سیال داخلی

$U_{Cr}$  : سرعت بحرانی سیال داخلی

$U_T$  : انرژی کرنشی تغییرات دما

$U_F$  : انرژی کرنشی بستر الاستیکی

v : تغییر مکان جانبی

w : تغییر مکان خمشی یا شعاعی

W : کار نیروی سیال

$(x, \theta, z)$  : مختصات راستاهای طولی، مماسی و شعاعی پوسته در سیستم استوانه‌ای

$Y_{ij}$  : برآیند تنش ممان کوپل

### نمادهای یونانی

$\alpha_x$  : ضریب انبساط حرارتی در جهت محوری

$\alpha_\theta$  : ضریب انبساط حرارتی در جهت جانبی

$\gamma_{ij}$  : کرنش برشی

$\epsilon_{ij}$  : تانسور کرنش

$\epsilon_{xx}$  : کرنش عمودی

$\theta_i$  : بردار چرخش

v : نسبت پواسون

$\rho$  : چگالی جرمی

$\sigma_{ij}$  : تانسور تنش

$\sigma_{xx}$  : تنش عمودی

$\tau_{x\theta}$  : تنش برشی

$\chi_{ij}$  : تانسور گرادیان چرخش

$\omega$  : فرکانس طبیعی ویژه

$\Lambda$  : حجم

پایین‌نویس‌ها

p : نانولوله

f : سیال

### پیوست‌ها

به منظور محاسبه تغییرات کل انرژی پتانسیل از روابط (۱۱)، (۱۴) و (۱۷) و به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t (U_P + U_T + U_F) dt &= \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Y_{\theta z}}{R^2 \partial \theta^2} \right) \delta u + \left( \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial^2 Y_{xz}}{4 \partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{\theta z}}{4 R \partial x \partial \theta} \right) \delta v - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{R^2 \partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{R \partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 Y_{xx}}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 Y_{\theta\theta}}{R \partial x \partial \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{2 R^2 \partial \theta^2} - K_w w + K_G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) + N_{xx}^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{\theta\theta}^T \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right] \delta w \right] dx R d\theta dt + \\ &\int_0^t \int_0^{2\pi} \left[ \left( N_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{R \partial \theta} \right) \delta u + \left( N_{x\theta} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{\theta z}}{R \partial \theta} \right) \delta v + \frac{1}{8} Y_{xz} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} - \frac{\partial Y_{xx}}{R \partial \theta} + \frac{\partial Y_{\theta\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial Y_{x\theta}}{2 \partial x} + K_G \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xx}^T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w - \left( M_{xx} + \frac{1}{2} Y_{x\theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^L R d\theta dt + \int_0^t \int_0^L \left[ \frac{N_{\theta\theta}}{R} \delta v + \frac{Y_{\theta z}}{4 R} \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( N_{x\theta} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{\theta z}}{\partial \theta} \right) \delta u - \frac{Y_{xz}}{4 R} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Y_{\theta z}}{4 R^2} \delta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial Y_{x\theta}}{2 \partial \theta} + K_G \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{\theta\theta}^T \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta w + \frac{1}{2 R} \left( -\frac{2}{R} M_{\theta\theta} + Y_{x\theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left( 2 M_{x\theta} - Y_{xx} + Y_{\theta\theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^{2\pi} R dx dt \quad (41) \end{aligned}$$

برای تغییرات انرژی جنبشی و کار با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t T_p dt &= \rho_p h \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \right] dx R d\theta dt + \rho_p h \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_0^L dx R d\theta \quad (42) \end{aligned}$$

$$\delta \int_0^t W dt = \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L (q_w \delta w) dx R d\theta dt + \int_0^t \int_0^{2\pi} [q_w^* \delta w]_0^L R d\theta dt \quad (43)$$

$q_w^*$  مولفه نیروی خارجی در راستای شعاعی بر واحد طول می‌باشد.

با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۶) و جایگذاری آنها در رابطه (۳۰) معادلات دینامیکی گسسته‌سازی شده با استفاده از روش مربعات تفاضلی مطابق زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{12RD}{h^2} + \frac{n^2 \bar{D}}{8R} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 U_j + \left( \frac{6Dn^2(1-\nu)}{Rh^2} + \frac{\bar{D}n^4}{8R^3} \right) U_i - \frac{n\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{ij}^3 V_j + \left( -\frac{6Dn(1+\nu)}{h^2} + \frac{n^3 \bar{D}}{8R^2} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 V_j + \frac{12\nu D}{h^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 W_j + \rho_p Rh \ddot{U}_i = 0 \quad (44-f) \end{aligned}$$



$$\frac{R\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{ij}^4 V_j - \left( \frac{6DR(1-\nu)}{h^2} + \frac{n^2\bar{D}}{8R} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 V_j + \frac{n\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{ij}^3 U_j + \left( \frac{6Dn(1+\nu)}{h^2} - \frac{n^3\bar{D}}{8R^2} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 U_j + \frac{12Dn^2}{Rh^2} V_i - \frac{12Dn}{Rh^2} W_i + \rho_P h R \ddot{V}_i = 0 \quad (پ-۴۴)$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \left( D + \frac{\bar{D}}{2} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^4 W_j - \frac{6\nu D}{h^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 U_j - \frac{6nD}{Rh^2} V_i - \left[ \left( \frac{2D+3\bar{D}}{2R} \right) n^2 + \frac{R}{2} N_{xx}^T + \frac{R}{2} K_G - \frac{R}{2} F_{mn} U^2 \right] \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 W_j + \left[ \frac{6D}{Rh^2} + \frac{Dn^4}{2R^3} + \frac{\bar{D}n^4}{4R^3} + \frac{RK_w}{2} + \frac{n^2}{2R} (N_{\theta\theta}^T + K_G) \right] W_i + \\ RF_{mn} U \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \dot{W}_i + \frac{R}{2} (\rho_P h + F_{mn}) \ddot{W}_i = 0 \quad (پ-۴۴) \end{aligned}$$

که (\*) بیانگر مشتق نسبت به زمان است. همچنین به طور مشابه می‌توان شرایط مرزی متناظر را گسسته‌سازی کرد. تکیه‌گاه یکسر گیردار - یکسر آزاد:

$$\begin{aligned} U_1 = V_1 = W_1 = \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 V_j = \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 W_j = 0 \\ \left( \frac{12RD}{h^2} + \frac{n^2\bar{D}}{8R} \right) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 U_j + \frac{n\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^2 V_j + \frac{12\nu n D}{h^2} V_N - \frac{12\nu D}{h^2} W_N = 0 \\ \frac{\bar{D}n}{8R} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^2 U_j - \left( \frac{\bar{D}n^3}{8R^3} - \frac{6Dn(1-\nu)}{Rh^2} \right) U_N + \frac{\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^3 V_j - \left( \frac{6D(1-\nu)}{h^2} + \frac{\bar{D}n^2}{8R^2} \right) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 V_j = 0 \\ \frac{n}{R} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 U_j + \sum_{j=1}^N C_{Nj}^2 V_j = 0 \\ \left( D + \frac{\bar{D}}{2} \right) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^2 W_j + \left( \frac{\bar{D}}{2R^2} - \frac{D\nu}{R^2} \right) n^2 W_N = 0 \\ - \left( \frac{RD}{2} + \frac{R\bar{D}}{4} \right) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^3 W_j + \left[ \left( \frac{D(\nu-2)}{2R} + \frac{7\bar{D}}{4R} \right) n^2 + \frac{R}{2} (K_G + N_{xx}^T) \right] \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 W_j = 0 \quad (۴۵) \end{aligned}$$

تکیه‌گاه دوسر مفصل:

$$\begin{aligned} \left( \frac{12RD}{h^2} + \frac{n^2\bar{D}}{8R} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 U_j + \frac{n\bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 V_j + \frac{12\nu n D}{h^2} V_i - \frac{12\nu D}{h^2} W_i = 0 \quad i=1, N \\ \frac{n}{R} \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 U_j + \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 V_j = 0 \quad i=1, N \end{aligned}$$

$$V_1 = V_N = W_1 = W_N = 0$$

$$\left( D + \frac{\bar{D}}{2} \right) \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 W_j + \left( \frac{\bar{D}}{2R^2} - \frac{D\nu}{R^2} \right) n^2 W_i = 0 \quad i=1, N \quad (۴۶)$$

تکیه‌گاه دوسر گیردار:

$$U_1 = U_N = V_1 = V_N = W_1 = W_N = \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 V_j = \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 V_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N C_{1j}^1 W_j = \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 W_j = 0 \quad (۴۷)$$

تکیه‌گاه یکسر مفصل - یکسر گیردار:

$$\left( \frac{12RD}{h^2} + \frac{n^2 \bar{D}}{8R} \right) \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 U_j + \frac{n \bar{D}}{8} \sum_{j=1}^N C_{1j}^2 V_j + \frac{12n\nu D}{h^2} V_1 - \frac{12\nu D}{h^2} W_1 = 0 \quad U_N = 0$$

$$\frac{n}{R} \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 U_j + \sum_{j=1}^N C_{1j}^2 V_j = 0 \quad \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 V_j = 0 \quad V_1 = V_N = 0$$

$$\left( D + \frac{\bar{D}}{2} \right) \sum_{j=1}^N C_{1j}^2 W_j + \left( \frac{\bar{D}}{2R^2} - \frac{D\nu}{R^2} \right) n^2 W_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N C_{Nj}^1 W_j = 0 \quad W_1 = W_N = 0 \quad (۴۸)$$

**Abstract**

In this paper, a novel model is proposed to study free vibration and instability of the single walled carbon nanotubes conveying fluid based on the Donnell-cylindrical shell model and the modified couple stress theory. This new model include only one material length scale parameter in which it ables to capture the effect of carbon tube size in the nano scale. Governing dynamical constitutive relations as well as the boundary conditions have obtained via the Hamilton principle. The mentioned constitutive relations have been solved using differential quadrature method (DQM). Moreover, the effect of internal fluid and its velocity have been investigated on the frequency changes and instability of the nanotube, the effect of material length scale parameter, temperature changes as well as surrounding elastic medium and different boundary condition have been studied too.