

## ارائه حل تحلیلی جدید برای بررسی رفتار

### ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال

موسی رضائی<sup>۱</sup>

دانشیار

وحید عرب‌ملکی<sup>۲</sup>

کارشناس ارشد

در پژوهش حاضر، یک روش تحلیلی بر اساس حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی به منظور آنالیز ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال ارائه شده است. با اعمال روش پیشنهادی به معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات عرضی لوله حاوی سیال و در نظر گرفتن شرایط مرزی، معادله فرکانسی لوله حاوی سیال استخراج شده است. نشان داده شده است که معادله فرکانسی تابعی از مشخصات هندسی و مکانیکی لوله و نیز چگالی و سرعت سیال می‌باشد. نتایج تحلیل نشان می‌دهد که افزایش سرعت سیال باعث افت فرکانس‌های طبیعی لوله می‌شود و در سرعت بحرانی سیال، فرکانس طبیعی اول برابر صفر شده و سیستم ناپایدار می‌گردد. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از نتایج تئوری و تجربی موجود به اثبات رسیده است. همچنین، تطابق بسیار خوب نتایج حل تحلیلی ارائه شده با نتایج تئوری و تجربی موجود، دقت و کارایی بالای روش پیشنهادی را به اثبات می‌رساند.

واژه‌های راهنما: لوله حاوی سیال، آنالیز ارتعاشی، سری‌های توانی، سرعت بحرانی

#### ۱- مقدمه

لوله‌ها و خطوط لوله‌های طولانی حاوی سیال کاربردهای گسترده‌ای در نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها، مجتمع‌های پتروشیمی، سازه‌های دریایی و سکوه‌های نفت دارند. از اوایل سال (۱۹۵۰) به دنبال مشاهده مشکلات ناشی از ارتعاش لوله‌های خطوط انتقال نفت، مطالعه تئوری رفتار دینامیکی لوله‌های حاوی سیال اهمیت ویژه‌ای یافت. بسیاری از محققان [۱-۸] به مدل‌سازی و بررسی رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال تحت شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف پرداخته‌اند. در یکی از جامع‌ترین مطالعات صورت پذیرفته Païsoussis [۹،۱۰] به جمع‌آوری اقدامات و تحقیقات انجام شده در زمینه مطالعه رفتار ارتعاش عرضی و ارائه مدل‌های مختلف لوله‌های حاوی سیال پرداخته است.

با توجه به اینکه معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال به صورت معادله دیفرانسیل پاره‌ای شامل مشتقات ترکیبی نسبت به متغیرهای زمان و مکان می‌باشد، بنابراین روشی برای حل دقیق این معادله ارائه نشده است. با وجود اینکه Housner [۱۱] موفق به ارائه روشی برای حل تقریبی معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها شد اما روش پیشنهادی وی از دقت کمتری برخوردار بوده و قابل اعمال به سایر شرایط مرزی نمی‌باشد. به علت پیچیدگی و دقت کم روش ارائه

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تبریز [m\\_rezaee@tabrizu.ac.ir](mailto:m_rezaee@tabrizu.ac.ir)

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ملکان [vahid\\_maleki@ymail.com](mailto:vahid_maleki@ymail.com)

شده توسط Housner، محققان به ارائه روش‌هایی برای حل معادله حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی لوله‌های حاوی سیال پرداخته‌اند. از این روش‌ها می‌توان به روش‌های تقریبی مانند روش گالرکین [۱۳، ۱۲]، روش اغتشاشات [۱۴] و همچنین روش‌های عددی از قبیل روش ماتریس انتقال [۱۵]، روش‌های المان محدود [۱۶-۱۸]، روش DQM<sup>۱</sup> [۱۹]، روش DTM<sup>۲</sup> [۲۰، ۲۱] و ... اشاره نمود.

Sadeghi و Karimi-Dona [۱۶] با استفاده از روش المان محدود به بررسی رفتار دینامیکی لوله‌های حاوی سیال پرداخته‌اند. آنها با استفاده از اصل همیلتون معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی لوله حاوی سیال را استخراج کرده و سپس به بررسی اثر سرعت سیال و جرم متحرک بر رفتار ارتعاشی لوله حاوی سیال پرداخته‌اند. مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی نشان می‌دهد که حداکثر خطای محاسبه فرکانس طبیعی اول و دوم به ترتیب 2.5% و 7% می‌باشد. نتایج تحقیق مزبور نشان می‌دهد که با افزایش سرعت سیال، فرکانس‌های طبیعی لوله کاهش می‌یابد طوری که در سرعت سیال  $25.15 \text{ m/s}$  فرکانس طبیعی اول برابر صفر شده و سیستم ناپایدار می‌شود. Lees [۱۴] با استفاده از روش اغتشاشات به بررسی اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی و پایداری لوله‌های حاوی سیال پرداخته است. نتایج ایشان نشان می‌دهد که استفاده از روش اغتشاشات با دقت مرتبه دوم قادر به پیش‌بینی اثر پارامترهای سیال بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال می‌باشد. Wang و Zang [۲۰] با استفاده از روش DTM به ارائه روش تحلیلی جدیدی برای بررسی رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال و با مدنظر قرار دادن شرایط مرزی مختلف پرداختند. آنها با استفاده از روش DTM فرکانس‌های طبیعی لوله و سرعت بحرانی سیال را محاسبه نموده و با نتایج موجود مورد مقایسه قرار دادند. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روش DTM با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال را پیش‌بینی می‌کند.

با توجه به اینکه حل‌های تحلیلی امکان بررسی پارامترهای مختلف فیزیکی بر رفتار سیستم‌ها را به سهولت در اختیار می‌گذارد بنابراین استفاده از روش‌های حل تحلیلی نسبت به روش‌های عددی ترجیح داده می‌شود. در جدیدترین مطالعه انجام شده Xu و همکاران [۲۲] با استفاده از روش HPM<sup>۳</sup> به ارائه روش تحلیلی به منظور بررسی اثرات سیال بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال پرداختند. آنها با استفاده از روش HPM به بررسی تأثیر سیال بر فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداخته و نتایج را با نتایج تحلیلی و تست‌های تجربی موجود مقایسه کردند. این مقایسه نشان می‌دهد که خطای محاسبه فرکانس طبیعی با استفاده از روش مزبور برای سرعت‌های بالای سیال در حدود 4% می‌باشد. ماهیت پیچیده این روش و دشواری آن برای حل معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی لوله حاوی سیال به ازای شرایط مرزی مختلف، قابلیت استفاده از روش ارائه شده برای تحلیل ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال را محدود ساخته است.

در پژوهش حاضر، روش تحلیلی جدیدی برای تحلیل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی لوله‌های حاوی سیال ارائه شده، و پس از استخراج معادله فرکانسی به بررسی اثر سرعت سیال بر رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال پرداخته شده است. مقایسه بین نتایج حاصل از روش ارائه شده و نتایج تئوری

<sup>1</sup> Differential Quadrature Method

<sup>2</sup> Differential Transform Method

<sup>3</sup> Homotopy Perturbation Method

و تجربی موجود در ادبیات فن، نشان می‌دهد که روش جدید ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل، ضمن سادگی و قابلیت اعمال به انواع معادلات دیفرانسیل خطی، رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای مؤثر از جمله سرعت سیال پیش‌بینی می‌کند.

## ۲- روش حل معادلات به کمک سری‌های توانی

در اکثر مسائل مهندسی، روش ساده و معمول برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل وجود ندارد و حتی نمی‌توان جواب معادله دیفرانسیل را به صورت تحلیلی به دست آورد. در این موارد یکی از روش‌های ممکن برای استخراج جواب، استفاده از سری‌های توانی می‌باشد. معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$ م خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$P_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + P_0(x) y(x) = 0 \quad (1)$$

اگر  $P_n x_0 \neq 0$  باشد  $x_0$  نقطه عادی معادله است یعنی توابع  $\frac{P_j x}{P_n x}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  در نقطه  $x_0$  تحلیلی هستند و می‌توان آنها را به صورت سری‌های توانی بسط داد [۲۳]. اگر  $x_0$  نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۱) باشد، آنگاه هر جواب معادله در نقطه  $x_0$  تحلیلی بوده و می‌توان جواب معادله را به صورت زیر در نظر گرفت [۲۴]:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \quad (2)$$

در رابطه اخیر با تعیین ثابت‌های مجهول  $a_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$  می‌توان جواب‌هایی از معادله (۱) را به دست آورد. شعاع همگرایی جواب‌های معادله (۱) به صورت سری توانی، بزرگتر یا مساوی مینیمم شعاع همگرایی سری‌های تیلور توابع  $\frac{P_j x}{P_n x}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  حول نقطه  $x_0$  می‌باشد [۲۴].

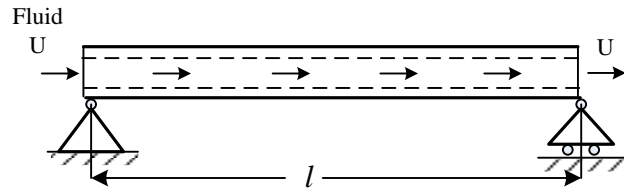
اگر  $y_1, y_2, \dots, y_n$  جواب‌های مستقل خطی معادله (۱) باشند، در اینصورت ترکیب خطی این جواب‌ها، جواب معادله دیفرانسیل (۱) خواهد بود، یعنی جواب کلی معادله دیفرانسیل مزبور را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۳]:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n \quad (3)$$

که در آن  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  ضرایب ثابتی هستند که با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. در بخش بعد با استفاده از روش مورد بحث به تحلیل ارتعاشات عرضی لوله حاوی سیال پرداخته خواهد شد.

## ۳- معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی لوله حاوی سیال

مطابق شکل (۱)، لوله حاوی سیال به طول  $l$  را در نظر بگیرید که سرعت عبور سیال از آن  $U$  می‌باشد.



شکل ۱- لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

با صرف‌نظر کردن از اثرات ویسکوزیته سیال و با فرض سیال تراکم ناپذیر و سرعت یکنواخت سیال، معادله ارتعاش عرضی لوله حاوی سیال را با استفاده از اصل همپلتون می‌توان به صورت زیر استخراج کرد [۲۵]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho A U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۴)$$

در رابطه اخیر،  $EI$  صلبیت خمشی لوله،  $\rho$  جرم واحد حجم سیال،  $A$  مساحت سطح مقطع لوله حاوی سیال،  $U$  سرعت جریان سیال و  $M$  مجموع جرم واحد طول لوله و سیال می‌باشد. Paisoussis و Gregory [۲۶] با استفاده از روش گالرکین و مودهای ترکیبی روشی را برای حل معادله دیفرانسیل اخیر ارائه دادند. همچنین، Housner [۱۱] با استفاده از سری فوریه و روش گالرکین، جواب معادله اخیر را برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به صورت زیر به دست آورده است:

$$w_j(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega_j t + \sum_{n=2,4,6,\dots} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_j t \quad (۵)$$

که در آن  $\omega_j$  فرکانس طبیعی متناظر با شکل مود  $j$ ام می‌باشد. به دلیل پیچیدگی و محدودیت این روش، استفاده از آن برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت لوله حاوی سیال مناسب نمی‌باشد. روش پیشنهادی در مقاله مذکور فقط قادر به پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی اول و دوم می‌باشد و فرکانس طبیعی اول محاسبه شده به صورت زیر می‌باشد [۱۱]:

$$\left( \frac{\omega_1}{\omega_N} \right)^2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \left[ 1 - \left( \frac{U}{U_c} \right)^2 \right] \left[ 4 - \left( \frac{U}{U_c} \right)^2 \right]} \quad (۶)$$

در رابطه اخیر،  $\omega_N$  فرکانس طبیعی اول لوله در غیاب جریان سیال،  $U_c$  سرعت بحرانی سیال که منجر به کمپانسیون لوله می‌شود و  $\alpha$  ضریب ثابتی است.  $\omega_N$ ،  $U_c$  و  $\alpha$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\omega_N = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad U_c = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \alpha = 8.5 - \left( \frac{U}{U_c} \right)^2 \left[ 2.5 + \frac{128 \rho A}{9\pi^2 M} \right] \quad (۷)$$

در تحقیق حاضر، با استفاده از روش سری‌های توانی پیشنهاد شده، به بررسی رفتار ارتعاشی لوله حاوی سیال می‌پردازیم. با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر:

$$\eta = \frac{w}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{M}} \frac{t}{l^2}, \quad u = Ul \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad \beta = \frac{\rho A}{M} \quad (۸)$$

معادله دیفرانسیل (۱۱) را می‌توان برحسب متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{\partial^4 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (9)$$

برای حل معادله اخیر، پاسخ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\eta(\xi, \tau) = y(\xi) e^{i\Omega\tau} \quad (10)$$

در رابطه فوق  $\xi$  شکل مود ارتعاشی و  $\Omega$  فرکانس طبیعی بی‌بعد لوله حاوی سیال می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله (۹) و با تقسیم رابطه به دست آمده بر  $e^{i\Omega\tau}$ ، معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} + u^2 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + 2i\Omega u \sqrt{\beta} \frac{dy(\xi)}{d\xi} - \Omega^2 y(\xi) = 0 \quad (11)$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهار می‌باشد و با مقایسه آن با معادله (۱) مشاهده می‌شود که معادله اخیر در کلیه نقاط تحلیلی می‌باشد و شعاع همگرایی جواب به صورت سری توانی بی‌نهایت است. بنابراین بر اساس روش حل با سری‌های توانی، جواب معادله را می‌توان به صورت زیر در گرفت:

$$y(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n \xi^n + R \quad (12)$$

که در آن  $R$  باقیمانده می‌باشد. با توجه به اینکه شعاع همگرایی سری فوق بی‌نهایت است، بنابراین با افزایش تعداد جملات سری باقیمانده به صفر میل خواهد نمود. با جایگذاری جواب فرضی اخیر در معادله (۱۱) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^N n(n-1)(n-2)(n-3)a_n \xi^{n-4} + u^2 \sum_{n=0}^N n(n-1)a_n \xi^{n-2} + 2iu\Omega \sqrt{\beta} \sum_{n=0}^N n a_n \xi^{n-1} - \Omega^2 \sum_{n=0}^N a_n \xi^n = 0 \quad (13)$$

مجموع‌های فوق را طوری بازنویسی می‌کنیم که توان  $\xi$  در همه آنها برابر  $n$  باشد. اگر  $n$  را در مجموع اول به  $k+4$  و در مجموع دوم به  $k+2$  و در مجموع سوم به  $k+1$  تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{k=-4}^{N-4} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} \xi^k + u^2 \sum_{k=-2}^{N-2} (k+1)k a_{k+2} \xi^k + 2iu\Omega \sqrt{\beta} \sum_{k=-1}^{N-1} (k+1)a_{k+1} \xi^k - \Omega^2 \sum_{k=0}^N a_k \xi^k = 0 \quad (14)$$

پس از مرتب سازی رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{N-4} \left\{ (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} + u^2 (k+2)(k+1)a_{k+2} + 2iu\Omega \sqrt{\beta} (k+1)a_{k+1} - \Omega^2 a_k \right\} \xi^k = 0 \quad (15)$$

با بسط رابطه اخیر و مرتب سازی آن برحسب توان‌های  $\xi$  می‌توان نوشت:

$$P_0(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) \xi^0 + P_1(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) \xi^1 + \dots + P_N(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) \xi^N = 0 \quad (16)$$

در رابطه اخیر، توابع  $P_0(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N)$ ،  $P_1(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N)$  و ... توابع چند جمله‌ای برحسب مجهول‌های  $a_n$ ،  $n = 0, 1, \dots, N$  می‌باشند که در ضمیمه الف آورده شده است. برای اینکه تساوی فوق به ازای جمیع مقادیر  $\xi$  برقرار باشد بایستی ضرایب توان‌های مختلف  $\xi$  در طرفین رابطه فوق برابر باشد. از برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف  $\xi$ ، دستگاه معادلات جبری خطی  $N - 4$  معادله‌ای با  $N$  مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} P_0(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0 \\ P_1(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0 \\ \vdots \\ P_{N-4}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

همان طور که از دستگاه معادلات فوق مشخص است چهار مجهول اضافی وجود دارد که می‌بایست این مجهولات به گونه‌ای تعیین شوند که اولاً جواب‌های مستقل خطی به دست آیند و ثانیاً جواب‌های به دست آمده در معادله (۱۱) صدق کرده و شرایط مرزی حاکم را ارضا کنند. از حل دستگاه معادلات جبری اخیر می‌توان کلیه ضرایب مجهول  $a_n$ ،  $n = 4, 5, \dots, N$  را بر حسب چهار ضریب  $a_0, a_1, a_2, a_3$  به دست آورد. در ضمیمه الف حل دستگاه معادلات (۱۷) برای یک حالت ساده،  $N = 8$ ، آورده شده است. با جایگذاری ضرایب به دست آمده در رابطه (۱۲) و پس از مرتب سازی برحسب چهار ضریب مذکور، جواب معادله (۱۱) به صورت سری توانی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$y(\xi) = a_0 y_1(\xi) + a_1 y_2(\xi) + a_2 y_3(\xi) + a_3 y_4(\xi) \quad (18)$$

در رابطه اخیر  $y_j$ ،  $j = 1, 2, 3, 4$ ،  $\xi$  جواب‌های مستقل خطی معادله (۱۱) می‌باشند و  $a_n$ ،  $n = 0, 1, 2, 3$  ضرایب ثابتی هستند که از اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. به عنوان مثال اگر جواب معادله با یک چند جمله‌ای از درجه  $N = 6$  تقریب زده شود، در اینصورت جواب‌های خصوصی مستقل خطی معادله (۱۱) به ازای مقادیر  $u = 0.16$  و  $\beta = 0.35$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} y_1(\xi) &= 1 - 0.0417\omega^2 \xi^4 + 0.00004\omega^2 \xi^6 \\ y_2(\xi) &= \xi - 0.0081\omega \xi^4 - 0.0083\omega^2 \xi^5 + 0.000007\omega \xi^6 \\ y_3(\xi) &= \xi^2 - 0.0022\omega \xi^4 - 0.0032\omega \xi^5 + (0.000002 - 0.00288\omega^2) \xi^6 \\ y_4(\xi) &= \xi^3 - 0.0013\omega \xi^5 - 0.0016\omega \xi^6 \end{aligned} \quad (19)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، چهار جواب خصوصی به دست آمده برای معادله ارتعاشی حاکم بر لوله حاوی سیال مستقل خطی می‌باشند.

#### ۴- معادله فرکانسی لوله حاوی سیال

برای استخراج معادله فرکانسی، لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را که در شکل ۱ نشان داده شده است در نظر بگیرید. با استفاده از مختصه‌های بی‌بعد بیان شده در رابطه (۸)، شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$y(\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = 0, \quad y(\xi)|_{\xi=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (20)$$

با اعمال شرایط مرزی اخیر به رابطه (۱۸) به چهار معادله جبری برحسب ضرایب مجهول  $a_n, n = 0, 1, 2, 3$  می‌رسیم که می‌توان به صورت ماتریسی زیر بیان کرد:

$$[\Delta]\{a_n\} = 0 \quad (21)$$

در رابطه اخیر، عناصر ماتریس ضرایب  $\Delta$  به مشخصات هندسی، مکانیکی و شرایط مرزی لوله بستگی دارد. برای داشتن جواب غیر بدیهی، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر شود. از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله فرکانسی به دست می‌آید که ریشه‌های این معادله، فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال را در اختیار می‌گذارد.

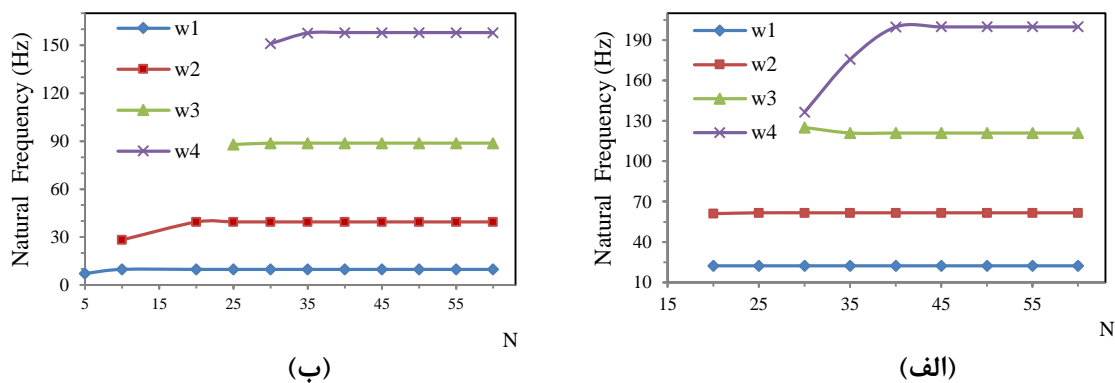
#### ۵- نتایج تحلیلی

به منظور نشان دادن مزیت و دقت روش ارائه شده برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش عرضی لوله‌های حاوی سیال، فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال را به دست آورده و با نتایج تئوری و تجربی موجود در تحقیقات پیشین مورد مقایسه قرار می‌دهیم. فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال به سرعت سیال وابسته است. هنگامی که سرعت سیال برابر صفر باشد ( $u = 0$ ) در آن صورت فرکانس‌های طبیعی لوله به صورت حل دقیق قابل محاسبه می‌باشد. به منظور مقایسه، ابتدا حالتی را که سرعت سیال برابر صفر است مورد بررسی قرار داده و فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال را با فرکانس‌های به دست آمده از حل دقیق معادله (۱۱) مقایسه می‌کنیم که نتایج در جدول (۱) ارائه شده است. با توجه به جدول (۱) مشاهده می‌شود که نتایج روش پیشنهادی در این مقاله با نتایج حاصل از حل دقیق سازگاری کامل دارد. همچنین در این جدول فرکانس‌های طبیعی اول و دوم با نتایج روش Housner [۱۱] و نتایج حاصل از روش المان محدود ارائه شده در مرجع [۲۲] به ازای  $\beta = 0.32$  و سرعت‌های مختلف سیال مقایسه شده است. این جدول نشان می‌دهد که روش جدید ارائه شده با دقت مناسبی فرکانس‌های طبیعی لوله‌های حاوی سیال را به ازای بازه گسترده‌ای از سرعت سیال پیش‌بینی می‌کند. در جدول (۱) نتایج مربوط به روش پیشنهادی در این مقاله به ازای  $N = 55$  حاصل شده است و همانطور که ملاحظه می‌شود این نتایج با نتایج حاصل از حل دقیق معادله دیفرانسیل تا چهار رقم اعشار کاملاً یکسان هستند.

**جدول ۱-** فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای  $\beta = 0.32$ 

Nondimensional Flow velocity, $u$		0	0.022	0.036
1 <sup>st</sup> mode (Hz)	FEM [22]	4.3732	4.2921	4.1441
	Proposed Method	4.3732	4.2941	4.1380
	Housner's results	4.3732	4.2971	4.1576
	Exact solution [27]	4.3732	--	--
2 <sup>nd</sup> mode (Hz)	FEM [22]	17.7928	17.4171	17.2816
	Proposed Method	17.7928	17.4440	17.3092
	Housner's results	17.7928	17.3922	17.2122
	Exact solution [27]	17.7928	--	--

برخلاف روش ارائه شده توسط Housner، روش پیشنهادی ارائه شده در مقاله حاضر محدودیتی از نظر تعداد فرکانس‌های طبیعی و نوع شرایط مرزی لوله حاوی سیال ندارد. در شکل (۲) همگرایی چهار فرکانس طبیعی لوله حاوی سیال با دو حالت تکیه‌گاهی، تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و تکیه‌گاه یکسرگیردار، برحسب تعداد جملات در رابطه (۱۲) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود فرکانس‌های طبیعی بالا برخلاف فرکانس‌های طبیعی پایین با در نظر گرفتن جملات بیشتر به جواب‌های واقعی همگرا می‌شوند. بعلاوه، همچنان که از منحنی‌های ارائه شده در شکل (۲) مشاهده می‌شود، دقت روش با افزایش تعداد جملات سریعاً بهبود یافته و در نظر گرفتن صرفاً ۴۵ جمله از سری توانی، منجر به حل با دقت مطلوب می‌شود.

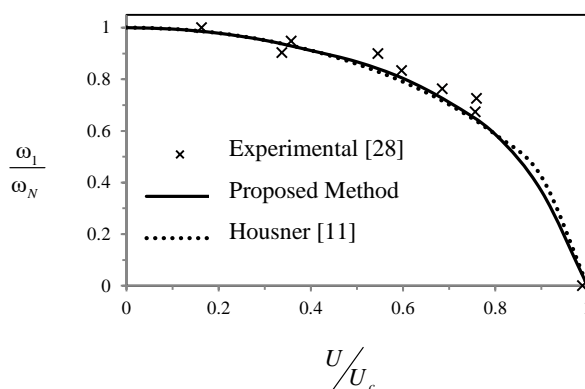
**شکل ۲-** همگرایی چهار فرکانس طبیعی اول لوله حاوی سیال به ازای  $\beta = 0.32$ ، الف) لوله یکسرگیردار،

ب) لوله با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

به منظور تأیید دقت مدل ارائه شده، در شکل (۳) فرکانس طبیعی اول لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، به دست آمده با استفاده از روش ارائه شده با نتایج تجربی Runyan و Dodds [۲۸] و همچنین نتایج Housner که در رابطه (۶) بیان شد مورد مقایسه قرار گرفته است. در این شکل تغییرات نسبت

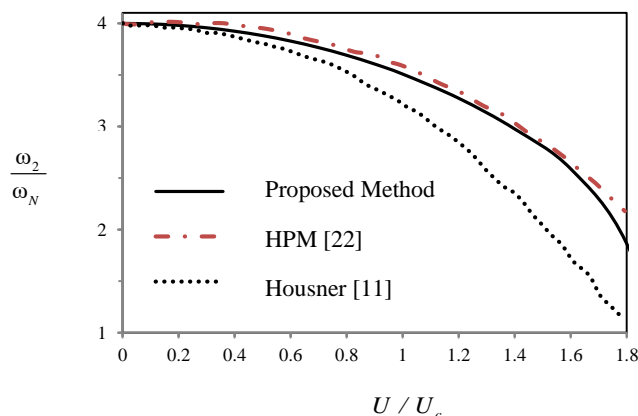


فرکانس طبیعی اول (نسبت فرکانس طبیعی لوله حاوی سیال به فرکانس طبیعی  $\omega_N$  بیان شده در رابطه ۷) برحسب سرعت بی‌بعد سیال به دست آمده از سه روش اخیر رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که در مورد ارتعاشی اول، نتایج تقریباً یکسانی از دو روش تئوری مذکور حاصل می‌شود و مقایسه با نتایج تجربی بر صحت روش جدید ارائه شده در این مقاله صحت می‌گذارد.



شکل ۳- تغییرات نسبت فرکانس طبیعی اول لوله حاوی سیال برحسب سرعت بی‌بعد سیال

همچنین در شکل (۴) تغییرات نسبت فرکانس طبیعی دوم لوله حاوی سیال با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برحسب سرعت بی‌بعد سیال نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود علاوه بر این که روش ارائه شده نسبت به روش HPM [۲۲] ساده‌تر بوده و محدودیت‌های روش مزبور را ندارد، با دقت بهتری رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال را پیش‌بینی می‌کند و قابل اعمال به لوله‌های حاوی سیال با شرایط مرزی مختلف می‌باشد.



شکل ۴- تغییرات نسبت فرکانس طبیعی دوم لوله حاوی سیال برحسب سرعت بی‌بعد سیال

## نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل، در تحقیق حاضر از روش حل معادلات با استفاده از سری‌های توانی، روشی برای حل معادله حاکم بر ارتعاش عرضی لوله حاوی سیال ارائه شد. بررسی رفتار ارتعاش عرضی لوله‌های حاوی سیال با استفاده از روش ارائه شده و مقایسه فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با نتایج تئوری و تجربی موجود در ادبیات فن علاوه بر صحت‌گذاری بر دقت روش ارائه شده، نشان

می‌دهد که این روش با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال را پیش‌بینی می‌کند و محدودیت‌ها و پیچیدگی‌های روش‌های حل قبلی را ندارد. نتایج نشان می‌دهد که جریان سیال باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال می‌شود و با افزایش سرعت سیال، افت فرکانس‌های طبیعی بیشتر می‌شود، طوری که در سرعت بحرانی سیال، فرکانس‌های طبیعی لوله حاوی سیال برابر صفر شده و باعث ناپایداری سیستم می‌شود.

## مراجع

- [1] Païdousiss, M. P., and Li, G. X., "Pipe Conveying Fluid: A Model Dynamical Problem", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, pp. 137-204, (1993).
- [2] Liu, L., and Xuan, F., "Flow-induced Vibration Analysis of Supported Pipes Conveying Pulsating Fluid using Precise Integration Method", *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-15, (2010).
- [3] Weaver, D. S., "On the Stability of Thin Pipes with an Internal Flow", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No. 4, pp. 399-410, (1973).
- [4] Bao-hui, L., Shan, D. H., Hong-bo, Z., Yong-shou, L., and Zhu-fend, Y., "Free Vibration Analysis of Multi-span Pipe Conveying Fluid with Dynamic Stiffness Method", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 241, pp. 666-671, (2011).
- [5] Guo, C.Q., Zhang, C.H., and Païdoussis, M.P., "Modification of Equation of Motion of Pipe Conveying Fluid for Laminar and Turbulent Flow Profiles", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 26, pp. 793-803, (2010).
- [6] Ibrahim, C., "Approximate Calculation of Eigenvalues with the Method of Weighted Residuals-collocation Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 160, pp. 401-410, (2005).
- [7] Sweilam, N. H., and Khader, M. M., "Approximate Solutions to the Nonlinear Vibrations of Multiwalled Carbon Nanotubes using Adomian Decomposition Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, pp. 495-505, (2010).
- [8] Mao, Q., and Pietrzko, S., "Free Vibration Analysis of Stepped Beams by using Adomian Decomposition Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, pp. 3429-3441, (2010).
- [9] Païdousiss, M. P., "*Fluid Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*", Vol. 1, Academic Press Inc., London (1998).
- [10] Païdousiss, M. P., "*Fluid Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*", Vol. 2, Elsevier Academic Press, London, (2004).
- [11] Housner, G.W., "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid", *Journal of Applied. Mechanics*, Vol. 19, pp. 205-208, (1952).

- [12] Lai, X., and Yirang, Y., "Galerkin Alternating-direction Methods for a Kind of Nonlinear Hyperbolic Equations on Nonrectangular Regions", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 187, pp. 1063–1075, (2007).
- [13] Yi-min, H., Yong-shou, L., Dao-hui, L., Yan-jiang, L., and Zhu-feng, Y., "Natural Frequency Analysis of Fluid Conveying Pipeline with Different Boundary Conditions", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, pp. 461–467, (2010).
- [14] Lees, A. W., "A Perturbation Approach to Analyze the Vibration of Structures Conveying Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 222, No. 4, pp. 621-634, (1999).
- [15] Bao-hui, L., Hangh-shan, G., Hong-bo, Z., Yong-shou, L., and Zhu-feng, Y., "Free Vibration Analysis of Multi-span Pipe Conveying Fluid with Dynamic Stiffness Method", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 241, pp. 666–671, (2011).
- [16] Sadeghi, M., H. Karimi-Dona, M., "Dynamic Behavior of a Fluid Conveying Pipe Subjected to a Moving Sprung Mass – An FEM-state Space Approach", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 88, pp. 123-131, (2011).
- [17] Sinha, J. K., Singh, S., and Rao, R., "Finite Element Simulation of Dynamic Behavior of an Open Ended Cantilever Pipe Conveying Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 1, pp. 189-194, (2001).
- [18] Seo, Y. S., Jeong, W. B., and Jeong, S. H., "Finite Element Analysis of Forced Vibration for a Pipe Conveying Harmonically Pulsating Fluid", *JSME International Journal*, Vol. 48, No. 4, pp. 688-694, (2005).
- [19] Lin, W., and Qiao, N., "In-plane Vibration Analyses of Curved Pipes Conveying Fluid using the Generalized Differential Quadrature Rule", *Computers and Structures*, Vol. 86, pp. 133–139, (2008).
- [20] Ni, Q., Zhang, Z. L., and Wang, L., "Application of the Differential Transformation Method to Vibration Analysis of Pipes Conveying Fluid", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, No. 6, pp. 7028-7038, (2011).
- [21] Chen, C., and Chen, S., "Application of the Differential Transformation Method to a Non-linear Conservative System", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 154, pp. 431–441, (2004).
- [22] Xu, M. R., Xu, S. P., and Guo, H. Y., "Determination of Natural Frequencies of Fluid-Conveying Pipes using Homotopy Perturbation Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol 60, pp. 520-527, (2010).
- [23] Jeffrey, A., "*Advanced Engineering Mathematics*", Harcourt Academic Press, USA, (2002).
- [24] Greenberg, M. D., "*Advanced Engineering Mathematics*", Prentice Hall Inc. New Jersey, (1998).

- [25] Lee, S. I., and Chung, J., “New non-linear Modeling for Vibration Analysis of a Straight Pipe Conveying Fluid”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2, pp. 313-325, (2002).
- [26] Gregory, R.W., and Païdoussis, M.P., “Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid”, *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 293, pp. 512-527, (1966).
- [27] Gatti, P. L., and Ferrari, V., “Applied Structural and Mechanical Vibrations Theory Methods and Measuring Instrumentation”, E & FN Spon, London, (1999).
- [28] Dodds, H. L., and Runyan, H., “Effect of High-velocity Fluid Flow in the Bending Vibrations and Static Divergence of a Simply Supported Pipe”, *NASA Technical Note D-2870*, (1965).

### فهرست نمادهای انگلیسی

مساحت سطح مقطع لوله	$A$
ثابت‌های مجهول پاسخ فرضی	$A_i, a_i$
صلبیت خمشی	$EI$
مجموع جرم واحد طول لوله و سیال	$M$
تعداد جملات پاسخ فرضی	$N$
ضرایب معادله دیفرانسیل	$P_i(x)$
باقیمانده سری توانی	$R$
زمان	$t$
سرعت سیال	$U$
سرعت بی‌بُعد سیال	$u$
سرعت بحرانی سیال	$U_c$
خیز عرضی لوله در جهت $y$	$w$
مختصه‌های مکانی	$x, y$

### نمادهای یونانی

ثابت بدون بُعد	$\alpha$
جرم بی‌بُعد	$\beta$
ماتریس ضرایب	$[\Delta]$
مختصه‌های بی‌بُعد مکانی	$\eta, \xi$
جرم واحد حجم سیال	$\rho$
فرکانس طبیعی بی‌بُعد	$\Omega$
فرکانس طبیعی متناظر با شکل مود $i$ ام	$\omega_i$
فرکانس طبیعی اول لوله در غیاب سیال	$\omega_N$

## ضمیمه الف

ضرایب توان‌های مختلف  $\xi$  در رابطه (۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} \xi^0 : & 24a_4 + 2u^2a_2 + 2iu\Omega\sqrt{\beta}a_1 - \Omega^2a_0 \\ \xi^1 : & 120a_5 + 6u^2a_3 + 4iu\Omega\sqrt{\beta}a_2 - \Omega^2a_1 \\ \xi^2 : & 360a_6 + 12u^2a_4 + 6iu\Omega\sqrt{\beta}a_3 - \Omega^2a_2 \\ \xi^3 : & 860a_7 + 2u^2a_5 + 2iu\Omega\sqrt{\beta}a_4 - \Omega^2a_3 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \xi^N : & (N+1)(N+2)(N+3)(N+4)a_{N+4} - u^2(N+1)(N+2)a_{N+2} \\ & + 2iu\Omega\sqrt{\beta}(N+1)a_{N+1} - \Omega^2a_N = 0 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن  $N=8$ ، از حل معادلات اخیر ضرایب مجهول  $a_n$ ،  $n=4,5,\dots,N$  بر حسب چهار ضریب  $a_1, a_0, a_3$  و  $a_2$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{1}{12}u^2a_2 - \frac{1}{12}ui\Omega\sqrt{\beta}a_1 + \frac{1}{24}\Omega^2a_0 \\ a_5 &= -\frac{1}{20}u^2a_3 - \frac{1}{30}ui\Omega\sqrt{\beta}a_2 + \frac{1}{120}\Omega^2a_1 \\ a_6 &= -\frac{1}{60}ui\Omega\sqrt{\beta}a_3 + \left(\frac{1}{360}u^4\right) + \frac{1}{360}\Omega^2a_2 + \frac{1}{360}u^3i\Omega\sqrt{\beta}a_1 - \frac{1}{720}u^2\Omega^2a_0 \\ a_7 &= \left(\frac{1}{840}u^4 + \frac{1}{8400}\Omega^2\right)a_3 + \frac{1}{360}u^3i\Omega\sqrt{\beta}a_2 - \left(\frac{1}{5040}u^2\Omega^2 + \frac{1}{1260}u^2\Omega^2\beta\right)a_1 - \frac{1}{2520}ui\Omega^3\sqrt{\beta}a_0 \\ a_8 &= \frac{1}{1680}u^3i\Omega\sqrt{\beta}a_3 - \left(\frac{1}{20160}u^6 + \frac{1}{10080}u^2\Omega^2 + \frac{1}{5040}u^2\Omega^2\beta\right)a_2 - \left(\frac{1}{20160}u^5i\Omega\sqrt{\beta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{20160}ui\Omega^3\sqrt{\beta}\right)a_1 + \left(\frac{1}{40320}u^4\Omega^2 + \frac{1}{40320}\Omega^4\right)a_0 \end{aligned}$$

**Abstract**

In this paper, an analytical method based on the power series is proposed for vibration analysis of a pipe conveying fluid. By applying the proposed method to the equation governing the lateral vibration of a pipe conveying fluid and considering the boundary conditions, the frequency equation of the system is derived. It is shown that the frequency equation is a function of the geometric dimensions, mechanical properties of the pipe and the density and velocity of the fluid. The results show that by increasing the fluid flow velocity, the natural frequencies of the pipe decrease, and when the fluid velocity approaches to the critical velocity, the fundamental natural frequency approaches zero, and instability occurs. Also, the results have been validated by those reported in the literature. There is a good agreement between the results obtained through the proposed method and the experimental data reported in the literature.