

فرمول‌بندی و آنالیز ارتعاشی ورق‌های چندلایه‌ی

متقارن عمودچین نوع لوی با روش المان محدود طیفی

در این تحقیق روش المان محدود طیفی برای آنالیز ارتعاشی ورق‌های مستطیلی چندلایه متقارن عمودچین نوع لوی بر اساس تئوری کلاسیک ورق لایه‌لایه ارائه شده است. فرمول‌بندی المان محدود طیفی شامل معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های پاره‌ای حرکت، میدان جابجایی طیفی، تابع‌های شکل دینامیکی و ماتریس المان طیفی می‌باشد. آنالیز ارتعاشی ورق مرکب در دو بخش ارتعاش آزاد و ارتعاش هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است. دقت نتیجه‌های بدست‌آمده از روش المان محدود طیفی با نتیجه‌های روش‌های المان محدود در حوزه زمان و تحلیلی مورد درست‌سنجی قرار گرفته است. نتیجه‌های بدست‌آمده بیانگر کاهش حجم محاسبه و دقت بالاتر پاسخ در روش المان محدود طیفی، در مقایسه با روش المان محدود در حوزه زمان، به ویژه در مسایل با محتوای فرکانسی بالا هستند.

حسام حاج حیدری^۱

کارشناسی ارشد

حمیدرضا میردامادی^۲

استادیار

واژه‌های راهنما: ورق چندلایه، متقارن عمودچین، المان محدود طیفی، ماتریس المان طیفی، تابع‌های شکل دینامیکی، روش نوار محدود، روش المان محدود

۱- مقدمه

سازه‌های مرکب از مواد مرکب با نسبت بالای مقاومت به وزن، مقاومت خستگی بالا و مقاومت در برابر خوردگی در مقایسه با مواد فلزی تشکیل می‌شوند. در سه دهه گذشته استفاده از ورق‌ها و پوسته‌های مرکب چندلایه در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله صنعت‌های هوافضا، خودرو و دریایی به سرعت افزایش یافته است. بنابراین امروزه آنالیز ارتعاشی ورق‌ها و پوسته‌های مرکب چندلایه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. مقاله‌های Leissa [۱]، Reddy [۲] و Kapania و Raciti [۳] مروری بر پیشرفت‌های انجام‌شده در این زمینه ارائه داده‌اند. چالش‌های بدست آوردن حل تحلیلی این سازه‌ها منجر به گسترش روش‌های عددی مختلفی شده است. روش المان محدود در حوزه زمان به دلیل توانایی‌های فراوان آن، از میان روش‌های گوناگون ارائه شده، بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. روش المان محدود در حوزه زمان افزون بر توانایی‌های چشم‌گیر، دارای نقاط ضعفی نیز هست که کاربرد آن را در برخی مسایل دچار مشکل می‌کند. یکی از محدودیت‌های روش المان محدود در حوزه زمان، استفاده از تابع‌های شکل استاتیکی

^۱ کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان h.hajheidari@me.iut.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

می‌باشد. این محدودیت هنگامی مشکل آفرین است که مسأله دینامیکی در دست حل از محتوای فرکانسی بالایی برخوردار باشد. در این گونه مسایل، استفاده از المان‌های ریزتر به ویژه در فرکانس‌های بالا برای بهبود دقت حل در روش المان محدود در حوزه زمان گریزناپذیر می‌باشد که این نکته به طور محسوس هزینه و زمان محاسبه را بالا می‌برد. یک دیدگاه جایگزین برای افزایش دقت حل، استفاده از تابع‌های شکلی است که نسبت به فرکانس ارتعاش سیستم تغییر کنند. این دیدگاه منجر به ارایه یک روش مدل‌سازی در حوزه فرکانس شده است که به نام روش المان محدود طیفی^۱ در ادبیات علمی شناخته می‌شود.

در سال (۱۹۸۸) Doyle [۴-۵] و Doyle و Farris [۶] نخستین بار از روش المان محدود طیفی برای مطالعه پخش امواج در سازه‌ها استفاده کردند. Lee و Lee [۷-۸] آنالیز ارتعاشی ورق همسانگرد تک‌لایه نوع لوی زیر بار متمرکز و گسترده را به کمک روش المان محدود طیفی انجام دادند. Baz [۹] یک میله با میراگر دوگان فعال- غیرفعال^۲ را با روش المان محدود طیفی مدل کرد. Lee و Kim [۱۰] مدل المان محدود طیفی یک تیر دولایه الاستیک/پیزوالکتریک را بر پایه دستگاه معادله‌های حرکت درهم‌گیر محوری- خمشی ارایه کردند. Lee و Kim [۱۱] یک تیر با میراگر دوگان فعال- غیرفعال را به کمک روش المان محدود طیفی مورد بررسی قرار دادند و نتیجه‌های بدست‌آمده را با نتیجه‌های روش المان محدود در حوزه زمان مقایسه کردند. Wang و Wereley [۱۲] ماتریس المان طیفی را برای تیرهای با میراگر غیرفعال ویسکوالاستیک استخراج کردند و نتیجه‌های بدست‌آمده از روش المان محدود طیفی برای فرکانس و پاسخ فرکانسی را با روش المان محدود در حوزه زمان مقایسه کردند. Mahapatra و Gopalakrishnan [۱۳] یک مدل المان محدود طیفی برای آنالیز پخش موج درهم‌گیر محوری- خمشی- برشی در تیرهای چندلایه ضخیم ارایه کردند. در ادامه Lee [۱۴-۱۵] مسایل بیشتری را با این روش مورد بررسی قرار داد.

با وجود آن که مطالعات بسیاری بر روی روش المان محدود طیفی صورت پذیرفته، فرمول‌بندی سازه‌های دوبعدی از جمله ورق به کمک روش المان محدود طیفی تا کنون کمتر مورد بررسی قرار گرفته است، به گونه‌ای که تحقیق‌های انجام‌شده، تاکنون محدود به ورق‌های همسانگرد تک‌لایه می‌باشند. در این تحقیق فرمول‌بندی المان طیفی برای ورق‌های مستطیلی چندلایه متقارن عمودچین^۳ نوع لوی بر مبنای تئوری کلاسیک ورق‌های لایه‌لایه ارایه شده است. بر این اساس نخست در بخش دوم، معادله دیفرانسیل حرکت حاکم بر ورق چندلایه متقارن عمودچین نوشته می‌شود. سپس فرمول‌بندی المان محدود طیفی این ورق در بخش سوم ارایه می‌شود. در این بخش با استفاده از روش نوار محدود^۴ [۱۶] و حل لوی [۱۷]، معادله دوبعدی ورق به معادله‌ای یک‌بعدی گسسته‌سازی شده و سپس به کمک الگوریتم تبدیل فوریه سریع^۵ معادله دیفرانسیل معمولی یک‌بعدی حرکت به حوزه فرکانس نگاشته می‌شود. تابع‌های شکل دینامیکی از حل دقیق این معادله در حوزه فرکانس بدست می‌آیند و سرانجام ماتریس المان طیفی استخراج می‌شود. در

¹ Spectral Finite Element Method (SFEM)

² Hybrid Active- Passive Damping

³ Symmetric Cross-Ply Laminated Plates

⁴ Finite Strip Method

⁵ Fast Fourier Transform (FFT)

پایان با حل چند مثال عددی از حل ارتعاش آزاد و هارمونیک ورق چندلایه متقارن عمودچین، نتیجه‌های این روش در مقایسه با روش تحلیلی و روش المان محدود در حوزه زمان سنجیده می‌شود.

۲- معادله‌های حرکت

در تحقیق پیش‌رو تئوری کلاسیک ورق لایه‌لایه انتخاب شده است. معادله‌های حرکت حاکم بر یک ورق چندلایه متقارن همسانگرد عمودچین با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شوند [۱۷].

$$\begin{aligned} & -D_{11} \frac{\partial^4 w_0(x, y, t)}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0(x, y, t)}{\partial y^4} + f(x, y, t) \\ & = I_0 \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$w_0(x, y, t)$ جابجایی عرضی میان-صفحه ورق چندلایه و $f(x, y, t)$ بارگذاری عرضی گسترده بر روی ورق می‌باشند. هم‌چنین (I_0, I_2) گشتاورهای اینرسی جرمی از مرتبه‌های صفر و دو، و D_{ij} درایه‌های ماتریس سختی خمشی^۱ ورق چندلایه متقارن نامیده می‌شوند.

۳- فرمول‌بندی المان محدود طیفی

چالش اصلی پیاده‌سازی روش المان محدود طیفی در ورق‌ها، تبدیل معادله‌های دیفرانسیل حرکت دو بعدی به معادله‌های دیفرانسیل یک بعدی می‌باشد. برای این نکته از حل لوی و روش نوار محدود استفاده می‌شود. در روش نوار محدود، ورق مستطیلی به چندین نوار تقسیم می‌شود که با فرض حل لوی در راستای طولی هر نوار محدود، معادله‌های دیفرانسیل دوبعدی حرکت حاکم، به معادله‌های دیفرانسیل یک بعدی تبدیل می‌شوند. این تبدیل سیستم دوبعدی به یک سیستم یک‌بعدی در مورد شکل‌های هندسی مانند مستطیل (اعضای عمود برهم) به راحتی قابل پیاده‌سازی است ولی برای شکل‌های هندسی مانند مثلث روش تحلیل پیچیده خواهد شد. در پایان با تعریف المان‌های محدود طیفی در راستای عمود بر نوارهای محدود و سرهم‌سازی این المان‌ها، فرمول‌بندی المان محدود طیفی برای ورق‌ها ارائه می‌شود. بنابراین به کمک روش حل لوی می‌توان جابجایی و نیروی گسترده عرضی ورق مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو لبه روبروی هم و شرایط مرزی دلخواه در دو لبه دیگر را به صورت زیر ارائه کرد (شکل (۱) را ببینید).

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x, t) \sin(k_{ym}y) \quad (2)$$

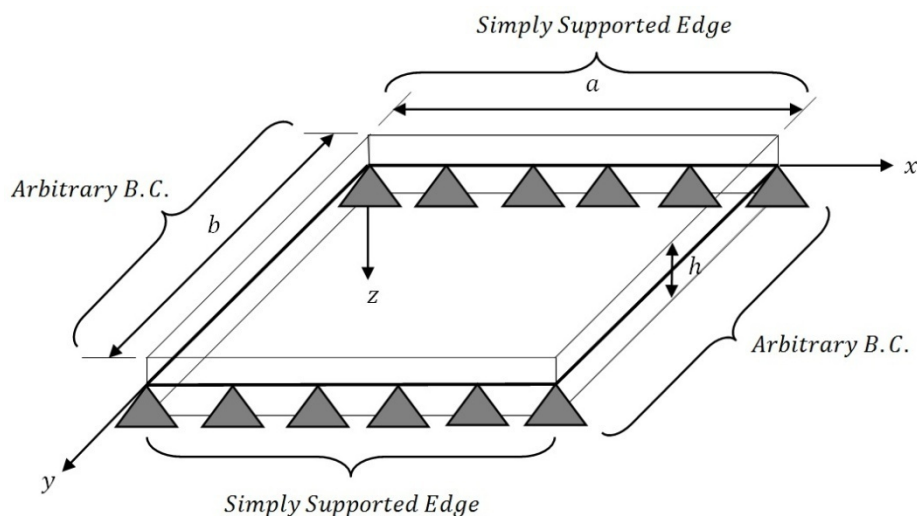
$$f(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x, t) \sin(k_{ym}y) \quad (3)$$

¹ Bending Stiffness Matrix

کمیت‌های $W_m(x, t)$ و $F_m(x, t)$ به ترتیب میدان جابجایی عرضی مودی و نیروی گسترده عرضی مودی نامیده می‌شوند. k_{ym} عدد موج در راستای محور y و مربوط به مود m ام روش نوار محدود است که در زیر تعریف شده است.

$$k_{ym} = \frac{m\pi}{b} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

میدان جابجایی عرضی (۲)، شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $y = 0$ و $y = b$ برای یک ورق چندلایه با تئوری کلاسیک ورق لایه‌لایه (ورق نوع لوی) را برآورده می‌کند.



شکل ۱- یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی لوی

به کمک تبدیل فوریه گسسته^۱ بر رابطه‌های (۲) و (۳)، این رابطه‌ها به حوزه فرکانس تبدیل می‌شوند و متغیر زمان در آن‌ها جای خود را به فرکانس می‌دهد.

$$w_0(x, y, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(x, k_{xnm}) \sin(k_{ym}y) e^{i\omega_n t} \quad (5)$$

$$F(x, y, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}(x, k_{xnm}) \sin(k_{ym}y) e^{i\omega_n t} \quad (6)$$

ω_n فرکانس زاویه‌ای n امین نقطه نمونه برداری و N تعداد نقطه‌های نمونه برداری می‌باشد. تعداد N متناسب با فرکانس نایکوئیست^۲ انتخاب می‌شود. $W_{nm}(x, k_{xnm})$ و $F_{nm}(x, k_{xnm})$ به ترتیب میدان جابجایی عرضی مودی-طیفی و نیروی گسترده عرضی مودی-طیفی می‌باشند.

با جایگذاری رابطه‌های (۵) و (۶) در معادله دیفرانسیل با مشتق‌های پاره‌ای (۱)، این معادله به معادله‌های دیفرانسیل معمولی در حوزه فرکانس تبدیل می‌شود.

¹ Discrete Fourier Transform

² Nyquist Frequency

$$\begin{aligned}
 & -D_{11} \frac{d^4 W_{nm}}{dx^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})k_{ym}^2 \frac{d^2 W_{nm}}{dx^2} - D_{22}k_{ym}^4 W_{nm} + F_{nm}(x, k_{xnm}) \\
 & = -\omega_n^2 I_0 W_{nm} + \omega_n^2 I_2 \left(\frac{d^2 W_{nm}}{dx^2} - k_{ym}^2 W_{nm} \right)
 \end{aligned} \quad (7)$$

حل عمومی دستگاه معادله‌های دیفرانسیل معمولی (۷) در شرایط همگن، ارتعاش آزاد ($F_{nm} = 0$) عبارت است از:

$$W_{nm}(x, k_{xnm}) = a_{nm} e^{k_{xnm}x} \quad (8)$$

k_{xnm} بیانگر عدد موج در راستای مختصه x است. با جایگذاری رابطه (۸) در معادله (۷) به رابطه زیر دست می‌یابیم.

$$\{D_{11}k_{xnm}^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})k_{ym}^2 k_{xnm}^2 + D_{22}k_{ym}^4 - \omega_n^2 I_0 + \omega_n^2 I_2(k_{xnm}^2 - k_{ym}^2)\}a_{nm} = 0 \quad (9)$$

با توجه به این که معادله (۹) به ازای همه مقادیرهای ضریب a_{nm} برقرار می‌باشد، داریم.

$$D_{11}k_{xnm}^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})k_{ym}^2 k_{xnm}^2 + D_{22}k_{ym}^4 - \omega_n^2 I_0 + \omega_n^2 I_2(k_{xnm}^2 - k_{ym}^2) = 0 \quad (10)$$

رابطه (۱۰) یک چندجمله‌ای مرتبه ۴ بر حسب عددهای موج k_{xnm} می‌باشد که به نام معادله پراکنش^۱ یا طیفی شناخته می‌شود. ریشه‌های این چندجمله‌ای در رابطه (۱۱) نوشته شده است.

$$\begin{aligned}
 k_{xnm1,2} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_1}} \\
 k_{xnm3,4} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_1}}
 \end{aligned} \quad (11)$$

α_1 ، α_2 و α_3 به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= D_{11} \\
 \alpha_2 &= -2(D_{12} + 2D_{66})k_{ym}^2 + \omega_n^2 I_2 \\
 \alpha_3 &= D_{22}k_{ym}^4 - \omega_n^2 I_0 - \omega_n^2 I_2 k_{ym}^2
 \end{aligned} \quad (12)$$

میدان جابجایی عرضی مودی- طیفی با محاسبه عددهای موج در راستای x بدست می‌آید.

$$W_{nm} = \sum_{i=1}^4 a_{nmi} e^{k_{xnm}i x} = \mathbf{E}_{nm}^T(x, k_{xnm}) \mathbf{a}_{nm} \quad (13)$$

بردارهای \mathbf{E}_{nm}^T و \mathbf{a}_{nm} به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\mathbf{E}_{nm}^T(x, k_{xnm}) = [e^{k_{xnm1}x} \quad e^{k_{xnm2}x} \quad e^{k_{xnm3}x} \quad e^{k_{xnm4}x}] \quad (14)$$

$$\mathbf{a}_{nm} = [a_{nm1} \quad a_{nm2} \quad a_{nm3} \quad a_{nm4}]^T \quad (15)$$

¹ Dispersion Relation

با تعریف درجه‌های آزادی بر روی المان طیفی می‌توان همانند روش المان محدود در حوزه زمان، ماتریس المان ایجاد کرد با این تفاوت که در این حالت ماتریس المان محدود طیفی وابسته به فرکانس می‌باشد. برای تشکیل ماتریس المان محدود طیفی در ورق‌ها نیاز به معرفی بردار درجه‌های آزادی گرهی مودی-طیفی و بردار نیروی گرهی مودی-طیفی می‌باشد. در ادامه به استخراج ماتریس المان طیفی ورق‌های متقارن عمودچین پرداخته می‌شود.

۳-۱- بردار درجه‌های آزادی گرهی مودی-طیفی

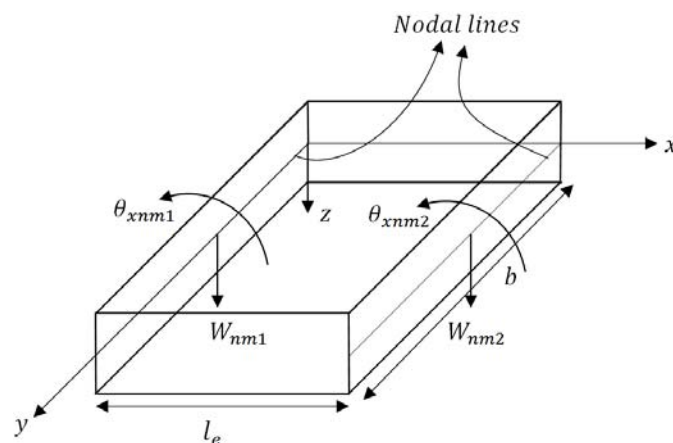
با توجه به شکل (۲) بردار درجه‌های آزادی گرهی مودی-طیفی برای یک نوار محدود طیفی در رابطه (۱۶) بیان می‌شود.

$$\mathbf{d}_{nm} = \begin{Bmatrix} W_{nm1} \\ \theta_{xnm1} \\ W_{nm2} \\ \theta_{xnm2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{nm}(0, k_{xnm}) \\ -\theta_{xnm}(0, k_{xnm}) \\ W_{nm}(l_e, k_{xnm}) \\ -\theta_{xnm}(l_e, k_{xnm}) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{nm}(k_{xnm}) \mathbf{a}_{nm} \quad (16)$$

که ماتریس \mathbf{H}_{nm} برای ورق‌های چندلایه متقارن عمودچین به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{H}_{nm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_{xnm1} & k_{xnm2} & k_{xnm3} & k_{xnm4} \\ e^{k_{xnm1}l_e} & e^{k_{xnm2}l_e} & e^{k_{xnm3}l_e} & e^{k_{xnm4}l_e} \\ k_{xnm1}e^{k_{xnm1}l_e} & k_{xnm2}e^{k_{xnm2}l_e} & k_{xnm3}e^{k_{xnm3}l_e} & k_{xnm4}e^{k_{xnm4}l_e} \end{bmatrix} \quad (17)$$

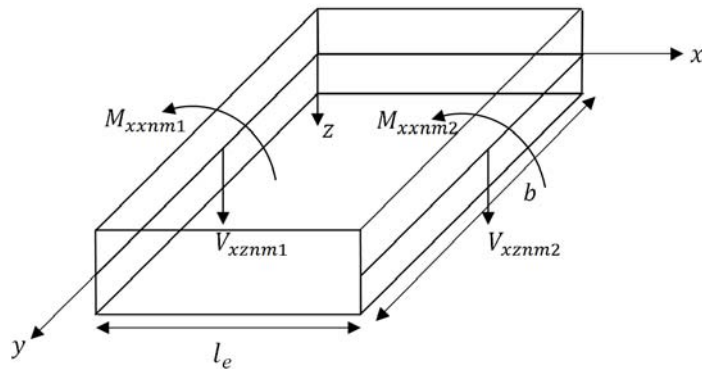
l_e بیانگر طول المان طیفی (در راستای عمود بر نوار ورق) می‌باشد.



شکل ۲- درجه‌های آزادی گرهی مودی-طیفی روی یک نوار از ورق

۳-۲- بردار نیروهای گرهی مودی-طیفی

همان‌گونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود و با رعایت قراردادهای علامت در تئوری ورق‌ها، بردار نیروهای گرهی مودی-طیفی به شکل رابطه (۱۸) نوشته می‌شود.



شکل ۳- مولفه های نیروهای گرهی متناظر با درجه های آزادی گرهی مودی- طیفی روی یک نوار از ورق

$$\mathbf{f}_{nm} = \begin{Bmatrix} V_{xznm1} \\ M_{xxnm1} \\ V_{xznm2} \\ M_{xxnm2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V_{xznm}(0, k_{xnm}) \\ -M_{xxnm}(0, k_{xnm}) \\ V_{xznm}(l_e, k_{xnm}) \\ M_{xxnm}(l_e, k_{xnm}) \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_{nm}(k_{xnm}) \mathbf{a}_{nm} \quad (18)$$

برآیند گشتاور خمشی مودی- طیفی و نیروی برشی برون صفحه مودی- طیفی به ترتیب در رابطه های (۱۹) و (۲۰) بیان می شوند.

$$M_{xx}(x, y, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} M_{xxnm}(x, k_{xnm}) \sin(k_{ym}y) e^{i\omega n t} \quad (19)$$

$$V_{xz}(x, y, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} V_{xznm}(x, k_{xnm}) \sin(k_{ym}y) e^{i\omega n t} \quad (20)$$

با قراردادن رابطه های مربوط به کمیت های V_{xznm} و M_{xxnm} [۱۷] در رابطه (۱۸) ماتریس \mathbf{D}_{nm} بدست می آید.

$$\mathbf{D}_{nm} = \begin{Bmatrix} D_{11} \mathbf{E}'''^T_{nm}(0, k_{xnm}) + [-(D_{12} + 4D_{66})k_{ym}^2 + \omega_n^2 I_2] \mathbf{E}'^T_{nm}(0, k_{xnm}) \\ D_{11} \mathbf{E}''^T_{nm}(0, k_{xnm}) - D_{12} k_{ym}^2 \mathbf{E}^T_{nm}(0, k_{xnm}) \\ -D_{11} \mathbf{E}'''^T_{nm}(l_e, k_{xnm}) + [(D_{12} + 4D_{66})k_{ym}^2 - \omega_n^2 I_2] \mathbf{E}'^T_{nm}(l_e, k_{xnm}) \\ -D_{11} \mathbf{E}''^T_{nm}(l_e, k_{xnm}) + D_{12} k_{ym}^2 \mathbf{E}^T_{nm}(l_e, k_{xnm}) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

۳-۳- ماتریس المان طیفی

ماتریس المان طیفی \mathbf{S}_{nm} به ازای مود نوار محدود m ام و فرکانس نمونه برداری n ام، از ترکیب دو رابطه (۱۶) و (۱۸) استخراج می شود.

$$\mathbf{f}_{nm} = \mathbf{D}_{nm} \mathbf{H}_{nm}^{-1} \mathbf{d}_{nm} = \mathbf{S}_{nm}(k_{xnm}) \mathbf{d}_{nm} \Rightarrow \mathbf{S}_{nm}(k_{xnm}) = \mathbf{D}_{nm} \mathbf{H}_{nm}^{-1}(k_{xnm}) \quad (22)$$

ماتریس المان طیفی می‌تواند در روندی مشابه روش المان محدود در حوزه زمان برای کل سازه سرهم‌سازی شود و پس از پیاده‌سازی شرایط مرزی متناظر، ماتریس المان طیفی یا ماتریس سختی دینامیکی جهانی سیستم سازه‌ای بدست می‌آید.

$$\mathbf{f}_{gnm} = \mathbf{S}_{gnm}(k_{xnm})\mathbf{d}_{gnm} \quad (23)$$

زیرنویس g کمیت‌ها را برای یک سیستم جهانی مشخص می‌کند.

۳-۴- تابع‌های شکل دینامیکی

برخلاف روش المان محدود در حوزه زمان، در روش المان محدود طیفی از تابع‌های شکل وابسته به فرکانس استفاده می‌شود. این‌ها به نام تابع شکل دینامیکی شناخته می‌شوند. تابع‌های شکل دینامیکی \mathbf{N}_{nm}^T از حل دقیق معادله حرکت حاکم در حوزه فرکانس (۷) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{nm} &= \mathbf{E}_{nm}^T(x, k_{xnm})\mathbf{H}_{nm}^{-1}(k_{xnm})\mathbf{d}_{nm} = \mathbf{N}_{nm}^T(x, k_{xnm})\mathbf{d}_{nm} \\ \Rightarrow \mathbf{N}_{nm}^T(x, k_{xnm}) &= \mathbf{E}_{nm}^T(x, k_{xnm})\mathbf{H}_{nm}^{-1}(k_{xnm}) \end{aligned} \quad (24)$$

۴- حل عددی و درست‌سنجی نتیجه‌ها

۴-۱- ارتعاش آزاد

فرکانس‌های طبیعی با صفر قراردادن دترمینان ماتریس المان محدود طیفی جهانی در رابطه (۲۳) بدست می‌آیند.

$$\det(\mathbf{S}_{gnm}(\omega_{Natural})) = 0 \quad (25)$$

به دلیل جبری نبودن رفتار این دترمینان نسبت به متغیر فرکانس، می‌بایست از روش‌های عددی ریشه‌یابی [۱۸] برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی استفاده کرد. در این تحقیق روش دو نیم‌سازی^۱ به کار گرفته شده است.

در جدول (۱) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای یک ورق مربعی عمودسانگرد^۲ تک‌لایه و یک ورق مربعی سه لایه متقارن عمودچین با تکیه‌گاه‌های ساده برای نسبت‌های مختلف مدول الاستیسیته بدست آمده‌اند. ویژگی‌های هر لایه از ورق‌های چندلایه عمودچین در جدول (۱) در رابطه (۲۶) بیان شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتیجه‌های بدست‌آمده تنها با دو المان طیفی در روش المان محدود طیفی، بر نتیجه‌های بدست آمده از یک روش تحلیلی دقیق [۱۷] منطبق هستند.

$$\frac{E_1}{E_2} = \{10, 20\}, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \quad G_{23} = 0.6E_2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (26)$$

هم‌چنین فرکانس‌های اصلی بی‌بعد یک ورق متقارن عمودچین ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) برای شرایط مرزی و نسبت مدول الاستیسیته مختلف در جدول (۲) محاسبه شده است. ویژگی‌های هر لایه از این ورق چندلایه عمود

^۱ Bisection Method

^۲ Orthotropic

چین در رابطه (۲۷) آمده است. همان گونه که مشاهده می شود نتیجه های بدست آمده باز هم انطباق کامل بر نتیجه های روش تحلیلی [۱۷] دارند که توانایی این روش را در شرایط مرزی مختلف نیز نشان می دهد.

$$\frac{E_1}{E_2} = \{10, 20, 30\}, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (27)$$

جدول ۱- فرکانس های طبیعی بی بعد ورق های مربعی چندلایه متقارن عمودچین با تکیه گاه های ساده برای نسبت های مختلف مدول الاستیسیته

$$\left(\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn}(b^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_{22}}\right)$$

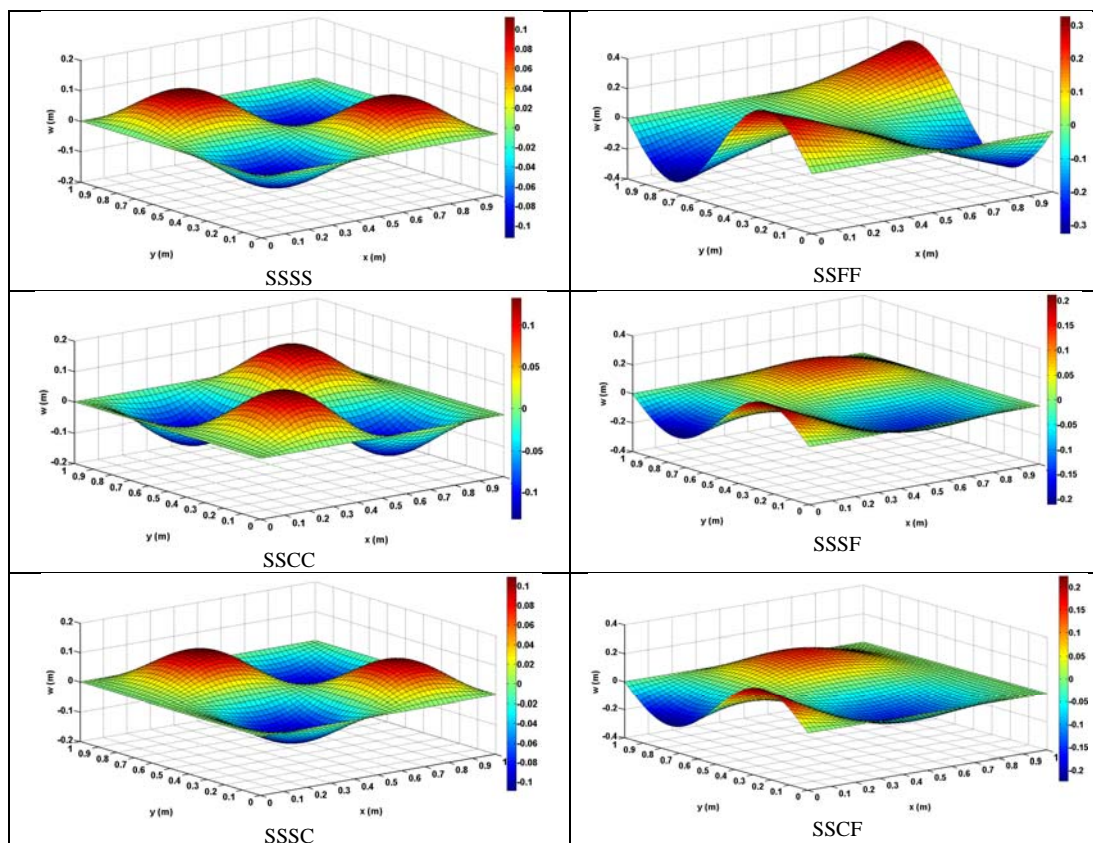
$\frac{E_1}{E_2}$	(Spectrum, Mode) (n, m)	0°		(0°/90°/0°)	
		Analytical Solution[17]	Present Solution (SFEM) (2 elements)	Analytical Solution[17]	Present Solution (SFEM) (2 elements)
10	(1, 1)	3.672	3.6725	2.519	2.5193
	(1, 2)	5.996	5.9958	4.986	4.9859
	(1, 3)	10.648	10.6484	9.783	9.7832
	(2, 1)	13.075	13.0748	8.515	8.5150
	(2, 2)	14.690	14.6901	10.077	10.0774
	(2, 3)	18.181	18.1810	13.783	13.7828
	(3, 1)	28.868	28.8685	18.704	18.7037
	(3, 2)	30.258	30.2581	19.911	19.9107
	(3, 3)	33.053	33.0528	22.674	22.67403
20	(1, 1)	4.847	4.8470	2.638	2.6384
	(1, 2)	6.781	6.7805	4.917	4.9171
	(1, 3)	11.111	11.1105	9.637	9.6370
	(2, 1)	18.193	18.1927	9.354	9.3547
	(2, 2)	19.388	19.3881	10.554	10.5536
	(2, 3)	22.153	22.1534	13.826	13.8259
	(3, 1)	40.539	40.5394	20.752	20.7521
	(3, 2)	41.542	41.5425	21.578	21.5778
	(3, 3)	43.623	43.6233	23.746	23.7455

جدول ۲- فرکانس های اصلی بی بعد ورق مربعی متقارن عمودچین (0°/90°/0°) برای شرایط مرزی متفاوت در راستای y و نسبت های مدول الاستیسیته مختلف

$$\left(\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}\right)$$

$\frac{E_1}{E_2}$	SS	SC	CC	FF	FS	FC	
10	Present Solution (SFEM)	10.6499	15.1991	21.1183	3.2935	4.0882	5.4194
	Analytical Solution[17]	10.650	15.199	21.118	3.294	4.443	5.419
20	Present Solution (SFEM)	13.9482	20.6100	29.1659	3.7214	4.4429	6.5146
	Analytical Solution[17]	13.948	20.610	29.166	3.721	4.443	6.515
30	Present Solution (SFEM)	16.6047	24.8704	35.4307	4.1055	4.7701	7.4445
	Analytical solution[17]	16.605	24.870	35.431	4.106	4.770	7.445

با توجه به این که روش المان محدود طیفی می‌تواند به عنوان یک روش دقیق نام‌برده شود، در این قسمت شکل مود ورق مرکب مربعی تک لایه با ویژگی‌های بیان شده در رابطه (۲۶) و با نسبت مدول الاستیسیته ۱۰ در شرایط مرزی مختلف در شکل (۴) ترسیم شده است. یادآوری می‌شود که شکل مودهای بدست‌آمده از روش المان محدود طیفی تنها با در نظر گرفتن حداکثر دو المان طیفی استخراج شده‌اند.



شکل ۴- شکل مود $(n, m) = (2, 2)$ ورق مرکب مربعی تک لایه با شرایط مرزی مختلف

۴-۲- پاسخ هارمونیک

پس از محاسبه پاسخ در حوزه فرکانس توسط رابطه (۲۳)، به کمک الگوریتم وارون تبدیل فوریه سریع^۱ پاسخ حوزه فرکانس به حوزه زمان تبدیل می‌شود.

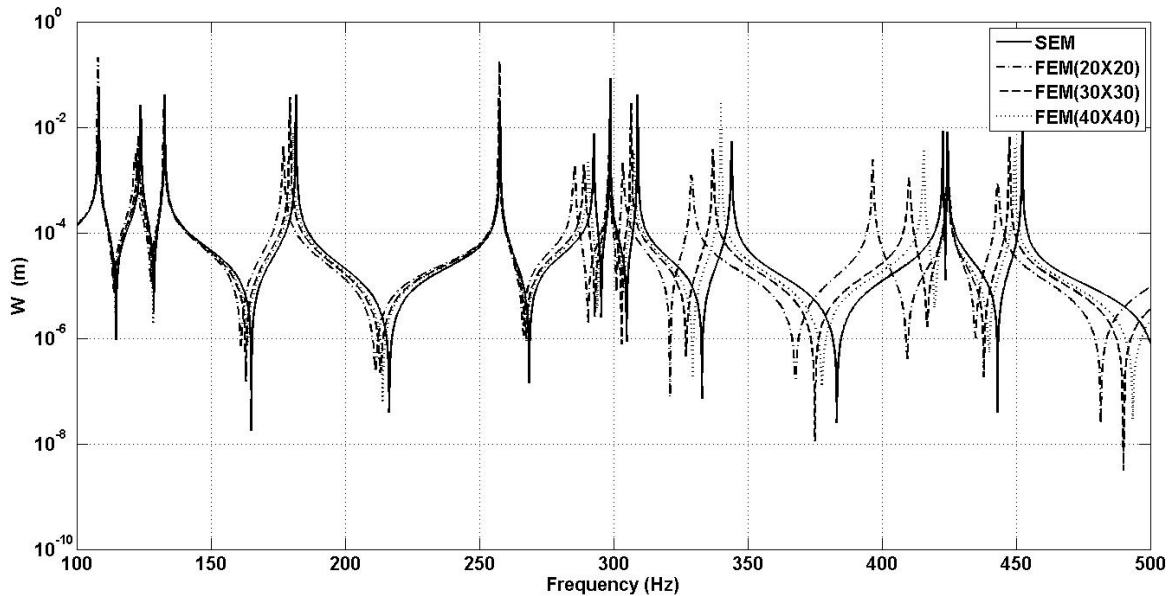
مقایسه نمودار پاسخ فرکانسی دو روش المان محدود طیفی و المان محدود در حوزه زمان برای یک ورق مربعی متقارن عمودچین $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ با تکیه‌گاه‌های ساده زیر بارگذاری متمرکز هارمونیک در مرکز ورق در شکل (۵) نشان داده شده است. ویژگی‌های در نظر گرفته‌شده برای هر لایه از ورق متقارن عمودچین در جدول (۳) آمده است. در روش المان محدود در حوزه زمان، از المان ۱۲ درجه آزادی ورق [۱۷] استفاده شده است. همان گونه که از نمودارهای پاسخ فرکانسی پیداست در فرکانس‌های بالا اختلاف روش المان

¹ Inverse Fast Fourier Transform (IFFT)

محدود طیفی به عنوان یک حل دقیق با روش المان محدود در حوزه زمان به گونه‌ای محسوس افزایش می‌یابد.

جدول ۳- ویژگی‌های مکانیکی هر لایه از ورق متقارن عمودچین $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$

$E_1 = 200 \text{ GPa}$	$E_2 = 10 \text{ GPa}$	$G_{12} = G_{13} = 5 \text{ GPa}$	$G_{23} = 6 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.25$
$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$	$h = 0.01 \text{ m}$	$h_1 = h_3 = \frac{h}{4}$	$h_2 = \frac{h}{2}$	$a = b = 2 \text{ m}$



شکل ۵- مقایسه نمودار پاسخ فرکانسی مرکز ورق متقارن عمودچین با تکیه‌گاه‌های ساده زیر نیروی متمرکز

هارمونیک با دامنه 100 N در مرکز آن با دو روش المان محدود طیفی و المان محدود در حوزه زمان

نتیجه‌گیری

در این تحقیق فرمول‌بندی المان محدود طیفی ورق‌های چندلایه متقارن عمودچین با استفاده از تابع‌های شکل دینامیکی استخراج شد. تابع‌های شکل دینامیکی از حل معادله موج حاکم بر ورق چندلایه متقارن عمودچین محاسبه شدند. دقت بالای روش المان محدود طیفی به ویژه در مسایل با محتوای فرکانسی بالا، در مقایسه با روش تحلیلی و روش المان محدود در حوزه زمان ارزیابی شد. در کاربردهای پخش امواج مانند پایش تندرستی سازه‌ها، که بارگذاری سازه محتوای فرکانسی بالایی دارد و سهم مدهای بالا در پاسخ زیاد می‌باشند، به خاطر تقسیم‌بندی ورق به المان‌های زیاد برای رسیدن به دقت مورد نظر، روش المان محدود در حوزه زمان با مشکل هزینه و زمان محاسبه مواجه می‌باشد. حال آن که در روش المان محدود طیفی این محاسبه می‌تواند تنها با دو المان انجام می‌شود. مقایسه نتیجه‌های آنالیز ارتعاش آزاد و هارمونیک در روش المان محدود طیفی، در مقایسه با روش تحلیلی و روش المان محدود در حوزه زمان، نشان داد که در مسایل با محتوای فرکانسی بالا، نه تنها حجم و هزینه محاسبه در روش المان محدود طیفی در مقایسه با روش المان محدود در حوزه زمان بسیار کمتر می‌باشد، بلکه دقت پاسخ‌های بدست‌آمده از روش المان محدود

طیفی بسیار بالاتر از روش المان محدود در حوزه زمان می‌باشد. روش المان محدود طیفی، سهم موده‌های فرکانس بالا را به دقت روش تحلیلی تسخیر می‌کند.

مراجع

- [1] Leissa, A.W., "Advances in Vibration, Buckling and Postbuckling Studies on Composite Plates", Composite and Structures, Vol. 63, pp. 312-334, (1981).
- [2] Reddy, J.N., "A Review of the Literature on Finite Element Modeling of Laminated Composite Plates", Shock Vibration Digest, Vol. 17, pp. 3-8, (1985).
- [3] Kapania, R.K., and Raciti, S., "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part II: Vibrations and Wave Propagation", Shock Vibration Digest, Vol. 27, pp. 935-946, (1989).
- [4] Doyle, J.F., "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation", International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 3, pp. 1-5, (1988).
- [5] Doyle, J.F., "*Wave Propagation in Structures*", Springer-verlag, New York, (1989).
- [6] Doyle, J.F., and Farris, T.N., "A Spectrally Formulated Finite Element for Flexural Wave Propagation in Beams", International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 5, pp.99-107, (1990).
- [7] Lee, U., and Lee, J., "Vibration Analysis of the Plate Subject to Distributed Dynamic Loads by using Spectral Element Method", KSME International Journal, Vol. 12, pp. 565-571, (1998).
- [8] Lee, U., and Lee, J., "Spectral-Element Method for Levy-type Plates Subject to Dynamic Loads", Journal of Engineering and Mechanics, Vol. 125, pp. 243-247, (1999).
- [9] Baz, A., "Spectral Finite-element Modeling of the Longitudinal Wave Propagation in Rods Treated with Active Constrained Layer Damping", Smart Material and Structures, Vol. 9, pp. 372-377, (2000).
- [10] Lee, U., and Kim, J., "Dynamics of Elastic-Piezoelectric Two-layer Beams using Spectral Element Method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 4403-4417, (2000).
- [11] Lee, U., and Kim, J., "Spectral Element Modeling for the Beams Treated with Active Constraining Layer Damping", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 5679-5702, (2001).

- [12] Wang, G., and Wereley, N.M., "Spectral Finite Element Analysis of Sandwich Beams with Passive Constrained Layer Damping", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, pp. 376-386. (2002).
- [13] Mahapatra, D.R., and Gopalakrishnan, S., "A Spectral Finite Element Model for Analysis of Axial-flexural-shear Coupled Wave Propagation in Laminated Composite Beams", *Computers and Structures*, Vol. 59, pp. 67-88. (2003).
- [14] Lee, U., and Lee, Ch., "Spectral Element Modeling for Extended Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 993-1002, (2009).
- [15] Lee, U., "*Spectral Element Method in Structural Dynamics*", John Wiley & Sons, Inc., New York, (2009).
- [16] Cheung, Y.K., and Tham, L.G., "*The Finite Strip Method*", Boca Raton: CRC Press, (1997).
- [17] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*", Boca Raton: CRC Press, (2004).
- [18] Burden, R.L., and Faires, J.D., "*Numerical Analysis*", Boston: Pws-Kent Publishing Company, (1989).
- [19] Bathe, J.N., "*Finite Element Procedures*", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, (1996).

فهرست نمادهای انگلیسی

a	اندازه بعد ورق در راستای مختصه x [m]
b	اندازه بعد ورق در راستای مختصه y [m]
d_{nm}	بردار درجه‌های آزادی گرهی مودی- طیفی [m]
d_{gnm}	بردار درجه‌های آزادی گرهی مودی- طیفی جهانی [m]
D_{ij}	درایه‌های ماتریس سختی خمشی [(N.m)/rad]
E_1	مدول الاستیسیته در راستای مادی ۱ [N/m ²]
E_2	مدول الاستیسیته در راستای مادی ۲ [N/m ²]
f	بارگذاری عرضی گسترده [N/m ²]
f_{nm}	بردار نیروهای گرهی مودی- طیفی [N]
f_{gnm}	بردار نیروهای گرهی مودی- طیفی جهانی [N]
F_m	نیروی گسترده عرضی مودی [N/m ²]
F_{nm}	نیروی گسترده عرضی مودی- طیفی [N/m ²]

G_{ij}	مدول‌های برشی ماده مرکب در صفحه‌های مختصات مادی $[N/m^2]$
h	ضخامت کل ورق $[m]$
h_i	ضخامت لایه i ام از ورق چندلایه $[m]$
I_1	گشتاور اینرسی جرمی مرتبه یک $[kg/m^2]$
I_2	گشتاور اینرسی جرمی مرتبه دو $[kg]$
k_{ym}	عدد موج در راستای مختصه y و مربوط به مود m $[rad/m]$
k_{xnm}	عدد موج در راستای مختصه x و مربوط به مود m و طیف n $[rad/m]$
l_e	طول المان طیفی در راستای مختصه x $[m]$
m	مود مربوط به گسسته‌سازی نوار محدود
M_{xx}	برآیند گشتاور خمشی $[(N.m)/m]$
M_{xxnm}	برآیند گشتاور خمشی مودی-طیفی $[(N.m)/m]$
N	تعداد نقطه‌های نمونه‌برداری
n	طیف مربوط به نقطه‌های نمونه‌برداری
N_{nm}^T	تابع‌های شکل دینامیکی مودی-طیفی (بی‌بعد)
S_{nm}	ماتریس المان طیفی مودی-طیفی $[N/m]$ و $[(N.m)/rad]$
S_{gnm}	ماتریس المان طیفی جهانی مودی-طیفی $[N/m]$ و $[(N.m)/rad]$
t	زمان $[s]$
V_{xz}	نیروی برشی برون صفحه $[N/m]$
V_{xznm}	نیروی برشی برون صفحه مودی-طیفی $[N/m]$
w_0	جابجایی عرضی میان-صفحه ورق چندلایه $[N]$
W_m	میدان جابجایی عرضی مودی $[m]$
W_{nm}	میدان جابجایی عرضی مودی-طیفی $[m]$

نمادهای یونانی

θ_{xnm}	مشتق مکانی جابجایی عرضی ورق (شیب میان-صفحه در راستای x) $[rad]$
ω_n	فرکانس زاویه‌ای n امین نقطه نمونه‌برداری $[rad/s]$
ω_{nm}	فرکانس زاویه‌ای طبیعی مربوط به مود m و طیف n $[rad/s]$
$\bar{\omega}_{nm}$	فرکانس زاویه‌ای طبیعی بی‌بعد مربوط به مود m و طیف n
ρ	چگالی ورق $[kg/m^3]$

Abstract

In this research, spectral element method has been presented for vibration analysis of a symmetric cross-ply laminated rectangular Levy-type plate based on classical plate lamination theory (CLPT). Formulation of spectral finite element method (SFEM) includes partial differential equations of motion, spectral displacement field, dynamic shape functions, and spectral element matrix. Both free vibration and harmonic response are performed using the formulated elements for the composite plate. The accuracy of spectral element model is validated by corresponding results from time-domain finite element solutions and exact solutions. The results indicate the reduced computations and higher accuracy of spectral finite element method in comparison with those of time-domain finite element method, particularly for problems of higher frequency content.