

# تحلیل جریان یک و دو بعدی غیرلزج و دو بعدی لزج توسط روش حفظ انرژی جنبشی

علی جوادی<sup>۱</sup>

دانشجوی دکترا

این مقاله، در مرحله اول روش حفظ انرژی جنبشی (KEP) را معرفی می کند و سپس معادلات این روش برای حالت دو بعدی با تقارن محوری تعیین می شود. روش KEP معادلات را به گونه ای جداسازی می کند که پایستاری کلی انرژی جنبشی تضمین شود. اگر در جریان شوک اتفاق بیفتند، عملگرهای شوک به معادلات اضافه شده که تغییرات انرژی جنبشی کل بر اثر شوک را محاسبه و به معادلات می افزاید، اما بر خلاف روش های پیشین، وجود این عبارت ها در دیگر بخش های حل با گرادیان فشار کم، ضرورت ندارد. این روش، با افزایش تعداد نقاط، به سمت دقیق شدن کامل نتایج نزدیک شده و برای شبیه سازی جریان های آشفته واقعی بسیار مناسب است. در این مقاله، به مقایسه برخی روش های اتلاف مصنوعی و بالادست، با روش حفظ انرژی جنبشی پرداخته شده است. برای این منظور، جریان های یک بعدی غیرلزج داخل شیپوره همگرا - و اگرا و دو بعدی غیرلزج در داخل کانال شامل برآمدگی و جریان دو بعدی لزج با تقارن محوری روی یک صفحه تحت بررسی می شود. نشان داده شده که روش KEP، با افزایش تعداد نقاط شبکه، حل دقیق تری را ارائه می کند و برخلاف روش های پیشین محدودیتی در افزایش تعداد نقاط ندارد.

محمود پسندیده فرد<sup>۲</sup>

دانشیار

واژه های راهنمای روش حفظ انرژی جنبشی، جداسازی معادلات پایستاری، روش های اتلاف مصنوعی و بالادست

## ۱- مقدمه

همان طور که از تاریخچه روش های دینامیک سیالات محاسباتی پیداست، همواره تلاش زیادی برای ابداع روش هایی با نوسانات فیزیکی و خطای محاسباتی پایین صورت گرفته است. خطاهای کوچک در برقراری پایستاری جرم، در مسائل دارای شوک، می تواند باعث خطاهای بزرگ در حل میدان جریان شود [۱]. افزودن عبارت اتلاف مصنوعی نیز، قانون پایستاری جرم را زیر سوال می برد. روشی که عبارت اتلاف مصنوعی کمتری به معادلات بیافزاید، از نظر برقراری قوانین پایستاری، قابل اعتمادتر است.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، دانشجوی دکترا، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد alijavadi91@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد fard\_m@um.ac.ir

روش مورد بررسی در این مقاله، روش حفظ انرژی جنبشی<sup>۱</sup> (KEP) است. در این روش برای محاسبه شار موجود در معادلات پایستاری، از مقدار متوسط کمیت‌های موجود در عبارت مربوط به متغیر حالت استفاده می‌شود [۲]. به عنوان مثال، اگر برای نشان دادن مقدار متوسط  $q$  بین دو نقطه  $j+1$  و  $j$  از نماد زیر استفاده شود :

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(q_{j+1} + q_j) \quad (1)$$

مقدار کمیت  $\rho u$  در محاسبه شار، به شرح زیر است :

$$(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u} \quad (2)$$

به طور کلی تشخیص دقیق مقدار یک کمیت خاص، مثل انرژی جنبشی توسط یک روش، دلیل بر ارائه نتایج دقیق‌تر توسط آن روش نیست. اما کنترل مقدار انرژی جنبشی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هونین و معین<sup>۲</sup> [۳]، درباره اهمیت تخمین مقدار انرژی جنبشی در جریان‌های آشفته بحث کرده‌اند. اهمیت مقدار انرژی جنبشی کل و حفظ آن، در مدل سازی جریان‌های آشفته است که در آنها ابعاد خیلی کوچک (ابعاد گردابه‌های جریان)، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت جریان لزج، نشان داده می‌شود که امواج شوک می‌توانند با شبکه‌بندی ریزتر رفع شوند که در این حالت عدد رینولذ سلول باید کمتر از دو باشد [۴]. نکته آخر، انتخاب بهترین روش گام زمانی است. مقدار انرژی جنبشی یا هر کمیت دیگر بایستی با یک طرح گام زمانی ضمنی از نوع کرانک-نیکلسون<sup>۳</sup> حفظ شود [۵]. برای محاسبه بردار حالت می‌توان از مقدار میانگین آن بین آغاز و پایان یک گام زمانی استفاده کرد.

$$\hat{U}_j = \frac{1}{2}(U_j^{n+1} + U_j^n) \quad (3)$$

اندیس  $n$  نشان‌دهنده تعداد گام‌های زمانی است. لازمه برقراری معادله (۳)، گام‌زنی داخلی در هر بازه یا گام زمانی است. برای جلوگیری از برنامه‌نویسی پیچیده‌تر و صرف هزینه بیشتر، روش تغییرات کلی از بین رونده شو<sup>۴</sup> [۶] مورد استفاده قرار گرفته است. معادله گام زمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dU}{dt} + R(U) = 0 \quad (4)$$

که در آن  $R(U)$  مقدار باقیمانده را مشخص می‌کند. برای حل مساله در یک گام زمانی از روش چندمرحله-ای زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{(0)} - \Delta t R(U^{(0)}) \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^{(0)} + \frac{1}{4}U^{(1)} - \frac{1}{4}\Delta t R(U^{(1)}) \\ U^{(3)} &= \frac{1}{3}U^{(0)} + \frac{2}{3}U^{(2)} - \frac{2}{3}\Delta t R(U^{(2)}) \end{aligned} \quad (5)$$

در این مقاله که بر اساس روش KEP ارائه شده توسط جیمسون بنا نهاده شده [۲]، روش حفظ انرژی جنبشی (KEP) و نحوه جداسازی معادلات آن در دو قسمت جریان یک بعدی غیرلزج و جریان دوبعدی با تقارن محوری لزج آورده شده است.

<sup>1</sup> Kinetic Energy Preserving Scheme

<sup>2</sup> Honein & Moin

<sup>3</sup> Crank-Nicolson

<sup>4</sup> Shu's Total Variation Diminishing Scheme

## ۲- معرفی روش حفظ انرژی جنبشی

### ۲-۱- جریان یک بعدی غیرلزج

معادلات اویلر یک بعدی مانند زیر است :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

که در آن بردار حالت و بردار شار به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن  $\rho$  چگالی،  $u$  سرعت،  $p$  فشار،  $E$  انرژی و  $H$  انتالپی می‌باشد. متغیر  $k$  (انرژی جنبشی مخصوص)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \rho \frac{u^2}{2} \quad (8)$$

با مشتق‌گیری از  $k$  نسبت به  $t$  و با توجه به قاعده مشتق حاصلضرب دو عبارت، عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{u^2}{2} \right) = u \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9)$$

با توجه به معادله پایستاری (۶) و با جایگزینی مقادیر بردار حالت و شار از معادله (۷)، عبارات زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \quad (10)$$

اگر مشتق‌های زمانی موجود در معادله (۹)، به کمک عبارت (۱۰) با مشتق مکانی جایگزین شود، معادله (۱۱) به دست می‌آید [۷]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left( p + \rho \frac{u^2}{2} \right) \right\} + p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

با انتگرال‌گیری از عبارت فوق، معادله پایستاری کلی انرژی جنبشی به دست می‌آید. لازم به ذکر است که انتگرال‌گیری از شار روی المان سطح صورت می‌گیرد.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} k dV = - \int_{\partial\Omega} \left[ u \left( p + \rho \frac{u^2}{2} \right) \right] n dS + \int_{\Omega} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV \quad (12)$$

روش KEP معادلات را به گونه‌ای جداسازی می‌کند که معادله پایستاری کلی انرژی جنبشی (۱۲) تایید شود. برای این منظور از فرم جداسازی شده معادلات پیوستگی و مومنتوم (معادلات ۱۳ و ۱۴)، استفاده می‌شود.

$$\Delta x_j \frac{d\rho_j}{dt} + (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta x_j \frac{d}{dt} (\rho u)_j - (\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u^2)_{j-\frac{1}{2}} - (\rho u^2)_{j-\frac{1}{2}} + p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (14)$$

اگر معادله (۱۳) در  $\frac{u_j^2}{2}$  و معادله (۱۴) در  $u_j$  ضرب شده، معادلات از هم کم شده و روی کل بازه جمع بسته شود، عبارت زیر به دست می‌آید [۷].

$$\sum_{j=1}^n \Delta x_j \frac{d}{dt} \left( \rho_j \frac{u_j^2}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{u_1^2}{2}(\rho u)_{\frac{1}{2}} + u_1(\rho u^2)_{\frac{1}{2}} + u_1 p_{\frac{1}{2}} + \frac{u_n^2}{2}(\rho u)_{n+\frac{1}{2}} - u_n(\rho u^2)_{n+\frac{1}{2}} - u_n p_{n+\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2}(\rho u)_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^2 - u_j^2) - (\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} p_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) \end{aligned} \quad (15)$$

هر عبارت قسمت اول از جمع بالا، می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\left\{ \left( (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} + u_j}{2} \right) - (\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}} \right\} (u_{j+1} - u_j) \quad (16)$$

اگر برای نقاط داخلی عبارت زیر برقرار باشد:

$$(\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}} = (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} + u_j}{2} \quad (17)$$

و برای نقاط مرزی:

$$\begin{aligned} (\rho u)_{\frac{1}{2}} &= \rho_1 u_1, (\rho u^2)_{\frac{1}{2}} = \rho_1 u_1^2, p_{\frac{1}{2}} = p_1 \\ (\rho u)_{n+\frac{1}{2}} &= \rho_n u_n, (\rho u^2)_{n+\frac{1}{2}} = \rho_n u_n^2, p_{n+\frac{1}{2}} = p_n \end{aligned} \quad (18)$$

معادله (۱۵)، حاصل از ترکیب معادلات پیوستگی و مومنتوم، به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Delta x_j \left( \rho_j \frac{u_j^2}{2} \right) &= u_1 \left( p_1 + \rho_1 \frac{u_1^2}{2} \right) - u_n \left( p_n + \rho_n \frac{u_n^2}{2} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n p_{j+\frac{1}{2}} (u_{j+1} - u_j) \end{aligned} \quad (19)$$

که شکل جداسازی شده معادله پایستاری کلی انرژی جنبشی (۱۲) می‌باشد. برای نشان دادن مقدار میانگین  $q$ ، بین نقاط  $j$  و  $j+1$ ، از نماد زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(q_{j+1} + q_j) \quad (20)$$

برای محاسبه فشار در سطح سلول، از مقدار متوسط آن بین نقاط  $j$  و  $j+1$  استفاده می‌شود.

$$p_{j+\frac{1}{2}} = \bar{p} \quad (21)$$

اگر مقدار شار در سطح سلول، به صورت معادله (۲) در نظر گرفته شود، با توجه به معادلات (۲) و (۱۷)، رابطه زیر برای محاسبه شار به دست می‌آید:

$$(\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u}^2 \quad (22)$$

به طور مشابه:

$$(\rho u H)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u} \bar{H} \quad (23)$$

لازم به ذکر است که روش KEP برای محاسبه شار انرژی محدودیتی در نظر نمی‌گیرد. معادله (۲۳) صرفا برای ایجاد یک رابطه مشترک، برای محاسبه مقادیر شارهای پیوستگی، مومنتوم و انرژی آورده شده است [۷]. البته می‌توان مقادیر مختلف شار را به گونه‌ای دیگر محاسبه نمود، به طوری که شرایط معادله (۱۷) همچنان برقرار باشد. به عنوان مثال می‌توان به جای معادلات (۲)، (۲۲) و (۲۳)، معادلات زیر را جایگزین نمود.

$$(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u} \quad (24)$$

$$(\rho u^2)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u} \bar{u} \quad (25)$$

$$(\rho u H)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\rho} \bar{u} \bar{H} \quad (26)$$

معادلات (۲)، (۲۲) و (۲۳)، معادلات اساسی برای محاسبه شار، در روش KEP می‌باشند. در قسمت بعد، نحوه محاسبه شار در روش KEP برای جریان دوبعدی با تقارن محوری لزج آورده شده است.

## ۲-۲- جریان دوبعدی با تقارن محوری لزج

فرم پایستاری معادلات، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^i(U)}{\partial x^i} = S \quad (27)$$

که در آن بردار حالت  $U$ ، بردار شار  $F$  و بردار چشم  $S$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ \rho E \end{bmatrix}, F^i = \begin{bmatrix} \rho v^i \\ \rho v^i v^1 - \sigma^{i1} + p \delta^{i1} \\ \rho v^i v^2 - \sigma^{i2} + p \delta^{i2} \\ \rho v^i H - v^j \sigma^{ij} - q^j \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

تنش‌های برشی و عمودی بدون بعد، با استفاده از تئوری استوکس [۸] و کمیت‌های بی‌بعد شارهای حرارتی  $q^i$  در معادله انرژی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$q^i = - \frac{\mu}{Re_\infty(\gamma-1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x^i} \quad (29)$$

در روابط ذکر شده،  $T$ ،  $p$  و  $\rho$  مقادیر محلی دما، فشار و چگالی جریان سیال می‌باشند.  $Pr$  عدد پرنتل،  $M_\infty$  عدد ماخ جریان آزاد و  $Re_\infty$  عدد رینولدز جریان آزاد می‌باشند. کمیت لزجت نیز به صورت  $\mu$  نشان داده شده است.

با تعریف متغیر  $k$  به عنوان انرژی جنبشی مخصوص به صورت زیر:

$$k = \rho \frac{v^{i^2}}{2}, \frac{\partial k}{\partial u} = \left[ -\frac{v^{i^2}}{2}, v^1, v^2, 0 \right] \quad (30)$$

مشابه روندی که در قسمت قبل بیان گردید، با مشتق‌گیری از  $k$  نسبت به زمان، معادله (۳۱) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^{i^2} \right) = v^i \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) - \frac{v^{i^2}}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (31)$$

با جایگزینی مشتق زمانی با مکانی و با توجه به معادله پایستاری و بردارهای حالت و شار، معادله (۳۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ v^j \left( p + \rho \frac{v^{i^2}}{2} \right) + v^i \sigma^{ij} \right\} = p \frac{\partial v^j}{\partial x^j} - \sigma^{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \quad (32)$$

با انتگرال‌گیری از عبارت فوق، معادله (۳۳) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} k dV &= - \int_{\partial \Omega} \left[ v^j \left( p + \rho \frac{v^i}{2} \right) - v^i \sigma^{ij} \right] n^j dS \\ &+ \int_{\Omega} \left( p \frac{\partial v^j}{\partial x^j} - \sigma^{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) dV + \int_{\Omega} v \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} dV \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن  $n^i$  بردار عمود بر سطح و  $dS$  المان سطح و  $dV$  المان حجم می‌باشند. معادله (۳۳)، معادله پایستاری کلی انرژی جنبشی را برای جریان دوبعدی با تقارن محوری لزج نشان می‌دهد. حال معادلات به روش حجم محدود جداسازی می‌شوند. برای هر گره  $o$ ، نقاط همسایه، با  $p$  نشان داده می‌شود. همچنین سطحی که گره  $o$  را از گره همسایه  $p$  جدا می‌کند، با  $A_{op}$  مشخص می‌شود. ضمن این‌که  $n_{op}^i$ ، نشان‌دهنده بردار عمود بر سطح است و اندیس  $i$  جهت این بردار را نشان می‌دهد. می‌توان روابط زیر را برای حجم کنترل نوشت:

$$n_{op}^i = -n_{po}^i \quad (34)$$

$$S_{op}^i = A_{op} n_{op}^i \quad (35)$$

$$S_o^i = - \sum_p S_{op}^i \quad (36)$$

همچنین معادله کلی پایستاری به فرم زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} vol_o \frac{\partial U_o}{\partial t} + \sum_p F_{op}^i \cdot n_{op}^i A_{op} &= vol_o S_o \\ vol_o \frac{\partial U_o}{\partial t} + \sum_p F_{op}^i \cdot S_{op}^i &= vol_o S_o \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن بردار حالت، بردار شار و بردار چشم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_o = \begin{bmatrix} \rho_o \\ \rho_o v_o^1 \\ \rho_o v_o^2 \\ \rho_o E_o \end{bmatrix}, F_{op}^i = \begin{bmatrix} (\rho v^i)_o \\ (\rho v^i v^1)_{op} + (p \delta^{i1} - \sigma^{i1})_{op} \\ (\rho v^i v^2)_{op} + (p \delta^{i2} - \sigma^{i2})_{op} \\ (\rho v^i H)_{op} + (v^j \sigma^{ij} + q^j)_{op} \end{bmatrix}, S_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \right)_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

می‌توان نشان داد که اگر روابط زیر برقرار باشد [۷]:

$$(\rho v^i v^j)_{op} = \frac{1}{2} (\rho v^i)_{op} (v_p^j + v_o^j) \quad (39)$$

$$(p \delta^{ij} - \sigma^{ij})_{op} = \frac{1}{2} (p \delta^{ij} - \sigma^{ij})_o + \frac{1}{2} (p \delta^{ij} - \sigma^{ij})_p \quad (40)$$

$$\left( \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \right)_{op} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \right)_o + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \right)_p \quad (41)$$

معادله پایستاری کلی (۳۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_o vol_o k_o &= - \sum_b S_b^j \left( v_b^j \left( p_b + \rho_b \frac{v_b^{i^2}}{2} \right) - v_b^i \sigma_b^{ij} \right) \\ &+ \sum_o \left( p_o \sum_p \frac{v_o^i + v_p^i}{2} S_{op}^i \right) - \sum_o \left( \sigma_o^{ij} \sum_p \frac{v_o^i + v_p^i}{2} S_{op}^i \right) + \sum_o \left( \frac{\sigma^{22} - \sigma^{33} - p}{y} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

که فرم جداسازی شده معادله پایستاری کلی انرژی جنبشی (۳۳) می‌باشد. اندیس  $b$  نشان‌دهنده نقاط مرزی است. برای متغیر فرضی  $q$ ، مقدار متوسط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{q}_{op} = \frac{q_o + q_p}{2} \quad (43)$$

در نتیجه

$$(\rho v^i v^j)_{op} = (\rho v^i)_{op} \bar{v}_{op}^j \quad (44)$$

می‌توان مقدار شار را به گونه‌های مختلفی تعیین کرد که پایستاری کلی انرژی جنبشی تضمین شود. به عنوان مثال:

$$(\rho v^i)_{op} = \bar{\rho}_{op} \bar{v}_{op}^i \quad (45)$$

$$(\rho v^i)_{op} = \overline{\rho v^i}_{op} \quad (46)$$

به طور مشابه:

$$(\rho v^i v^j)_{op} = \bar{\rho}_{op} \bar{v}_{op}^i \bar{v}_{op}^j \quad (47)$$

$$(\rho v^i H)_{op} = \bar{\rho}_{op} \bar{v}_{op}^i \bar{H}_{op} \quad (48)$$

شرایط لازم برای محاسبه شار، در روش KEP برای جریان دوبعدی تقارن محوری لزج، در معادلات (۳۹) تا (۴۱) بیان گردید. مانند حالت یک بعدی غیرلزج، برای محاسبه شار، از مقادیر متوسط کمیت‌های موجود در معادلات پایستاری استفاده می‌شود.

### ۳- ارائه نتایج و تحلیل

در این قسمت، عملکرد روش KEP برای جریان‌های یک بعدی و دوبعدی در مقایسه با روش‌های اسکالر<sup>۱</sup> [۸]، ماتریسی<sup>۲</sup> [۹]، کاسپ<sup>۳</sup> [۱۰] و رو<sup>۴</sup> مرتبه اول و مرتبه سوم [۱۱] مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

#### ۳-۱- جریان یک بعدی غیرلزج داخل شیپوره همگرا- واگرا

شکل (۱) هندسه مورد بررسی را نشان می‌دهد. معادله منحنی شیپوره به صورت زیر است [۱۱]:

$$y = y_{min} + (y_{max} - y_{min})x^2 \quad (-0.33 \leq x \leq 1) \quad (48)$$

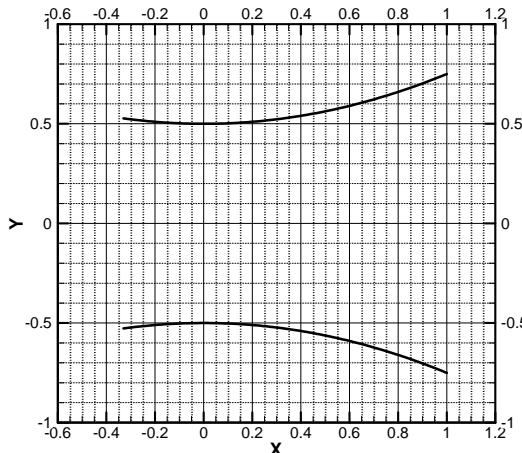
<sup>1</sup> SCDS

<sup>2</sup> MADS

<sup>3</sup> CUSP

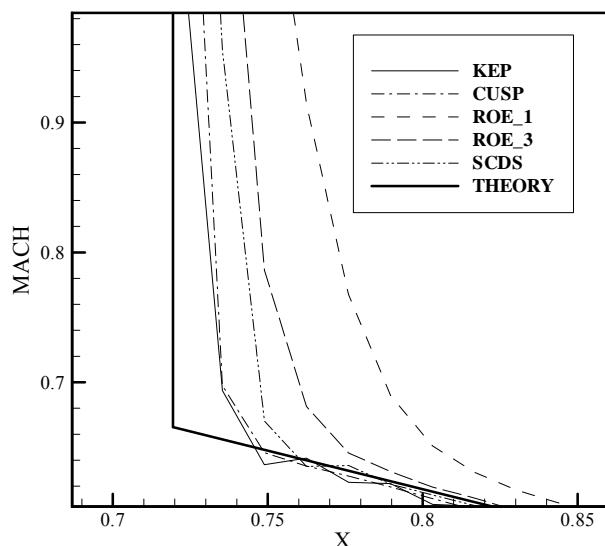
<sup>4</sup> ROE

در رابطه بالا  $y_{min} = 0.75$  و  $y_{max} = 0.25$  با توجه به نسبت مساحت  $A_2/A^*$  تعیین می‌شود. سطح ورودی با  $A_1$ ، سطح خروجی با  $A_2$  و گلوگاه با  $A^*$  نشان داده می‌شود. سرعت شیپوره را می‌توان توسط نسبت فشار پشت به فشار سکون و نسبت  $A_2/A^*$  کنترل کرد. اگر نسبت فشار پشت به فشار ورودی  $0.75/0.25 = 3$  و نسبت  $A_2/A^*$  برابر  $1/5$  در نظر گرفته شود، در این حالت عدد ماخ در داخل شیپوره به حدود  $1/6$  رسیده و سپس یک شوک عمودی در داخل شیپوره اتفاق می‌افتد.



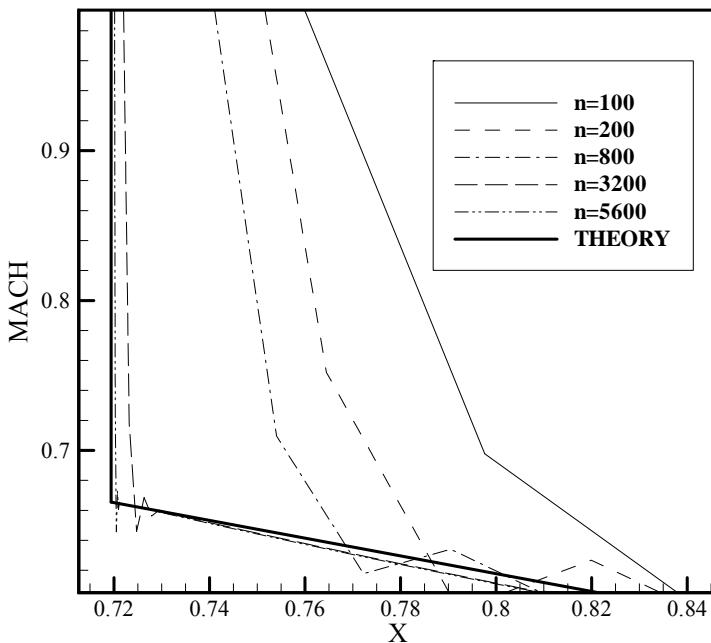
شکل ۱- شکل هندسی مساله اول

شکل (۲)، تغییرات عدد ماخ در شیپوره را برای طرح‌های اتلاف مصنوعی و بالادست و روش KEP و در نزدیکی شوک نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود روش KEP، بعد از شوک کمی نوسان دارد. روش روی (Roe) مرتبه اول، موج ضربه‌ای را ضخیم نشان می‌دهد. روش روی (Roe) مرتبه سه شوک را تیزتر نشان می‌دهد و هیچ‌گونه نوسانی در نزدیکی شوک مشاهده نمی‌شود. عملکرد طرح کاسپ، در تعیین محل وقوع شوک و ضخامت شوک قابل قبول است. با توجه به شکل (۲) و مقایسه روش‌های مختلف با حل تئوری، روش KEP محل وقوع شوک را نسبت به سایر روش‌ها بهتر نشان می‌دهد.



شکل ۲- نمودار عدد ماخ در نزدیکی شوک برای نسبت فشار  $0.75/0.25 = 3$  و نسبت مساحت  $1/5$  ( $n=100$ )

شکل (۳)، اثر افزایش تعداد نقاط شبکه را روی نتایج روش KEP نشان می‌دهد (نسبت فشار پشت به فشار ورودی برابر  $0.75$  و  $A_2/A^* = 1/5$ ). با ریزتر کردن شبکه، روش مذکور حل دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. این در حالیست که در دیگر روشها با افزایش زیاد تعداد نقاط حل ناپایدار می‌شود.



شکل ۳- اثر افزایش نقاط روی روش KEP برای نسبت فشار  $0.75$  و نسبت مساحت  $1/5$

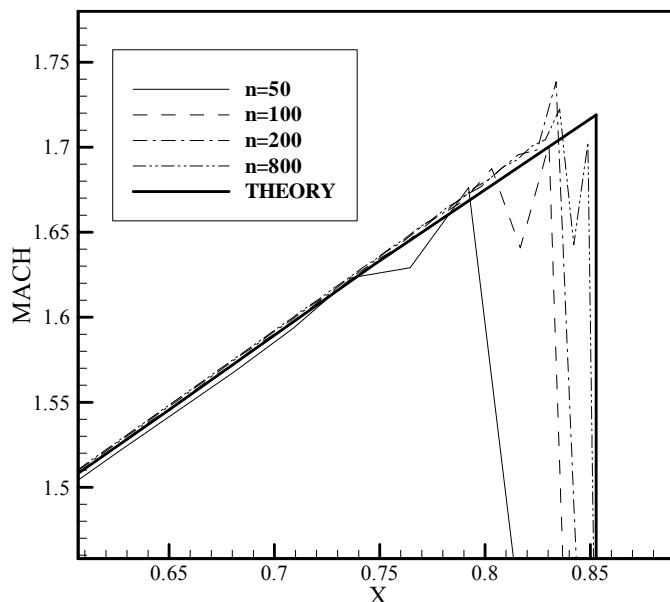
در شکل (۴) اثر افزایش نقاط برای روش اسکالار آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، برای روش KEP، برای تعداد نقاط ( $n=5600$ ) هنوز حل واگرا نشده است. ولی در روش اسکالار از تعداد نقاط ( $n=800$ ) به بعد حل واگرا می‌شود و بنابراین در نمودار شکل (۴) نتایج تا این تعداد نقاط شبکه آورده شده است. علاوه بر این با توجه به شکلهای (۳) و (۴) نوسانات زیادتری در روش اسکالار نسبت به روش KEP برای تعداد نقاط بالاتر مشاهده می‌شود.

با توجه به قانون اول ترمودینامیک و معادله پیوستگی، در یک جریان پایدار آدیاباتیک، مقدار انتالپی سکون و دبی جرمی ثابت است. ولی در روش‌های عددی به دلیل وجود خطاهای عددی، مقدار این کمیت‌ها تغییر می‌کند. در ادامه به بررسی تغییرات کمیت‌های مذکور پرداخته می‌شود. ابتدا حالتی بررسی می‌شود که در داخل نازل شوک اتفاق نمی‌افتد. در این حالت، نسبت فشار پشت به فشار ورودی برابر  $0.93$  و  $A_2/A^* = 1/5$  در نظر گرفته می‌شود.

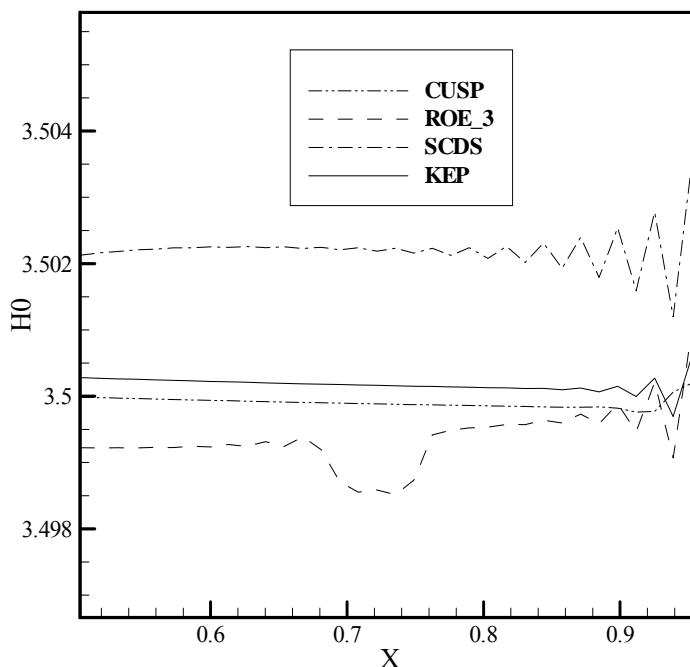
شکل (۵)، مقدار تغییرات انتالپی سکون را برای روش‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۵)، مشاهده می‌شود که تغییرات انتالپی سکون در دو روش KEP و کاسپ نسبت به سایر روشها کمتر است و از این نظر این دو روش نسبت به سایر روش‌ها برتری دارند. البته در روش KEP نسبت به سایر روش‌ها و از جمله روش کاسپ، نوسانات انتالپی کمتری در قسمت انتهای نمودار مشاهده می‌شود.

شکل (۶) تغییرات دبی جرمی بر حسب مکان برای نسبت فشار  $0.96$  و نسبت مساحت  $3$  که در آن یک شوک قوی رخ داده است، را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه بیشتر بودن مقدار دبی جرمی به نوعی نشان دهنده

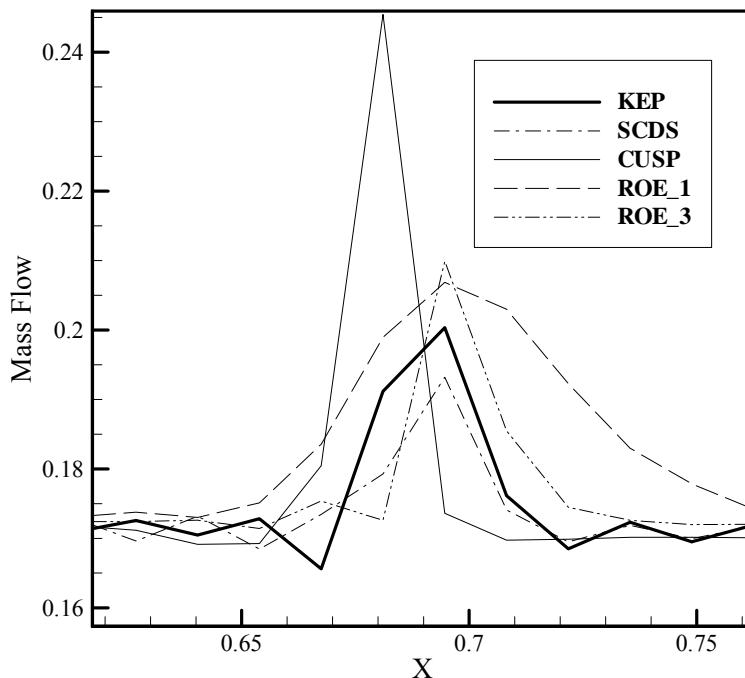
بیشتر بودن عبارت اتلاف مصنوعی اضافه شده در روش مذکور می‌باشد [۱۱]، می‌توان استنباط کرد که روش اسکالر، بیشترین عبارت اتلافی را اضافه می‌کند. همچنین نوسانات موجود در این طرح نشان‌دهنده میزان نامناسب اضافه کردن عبارت اتلاف مصنوعی برای این روش است. روش KEP نسبت به سایر روش‌ها تغییرات دبی کمتری را نشان می‌دهد.



شکل ۴- اثر افزایش نقاط روی روش اسکالر برای نسبت فشار  $0.7/0.5$  و نسبت مساحت  $1/5$



شکل ۵- تغییرات انthalپی سکون برای حالت بدون شوک برای نسبت فشار  $0.93/0.93$  و نسبت مساحت  $1/5$  ( $n=100$ )



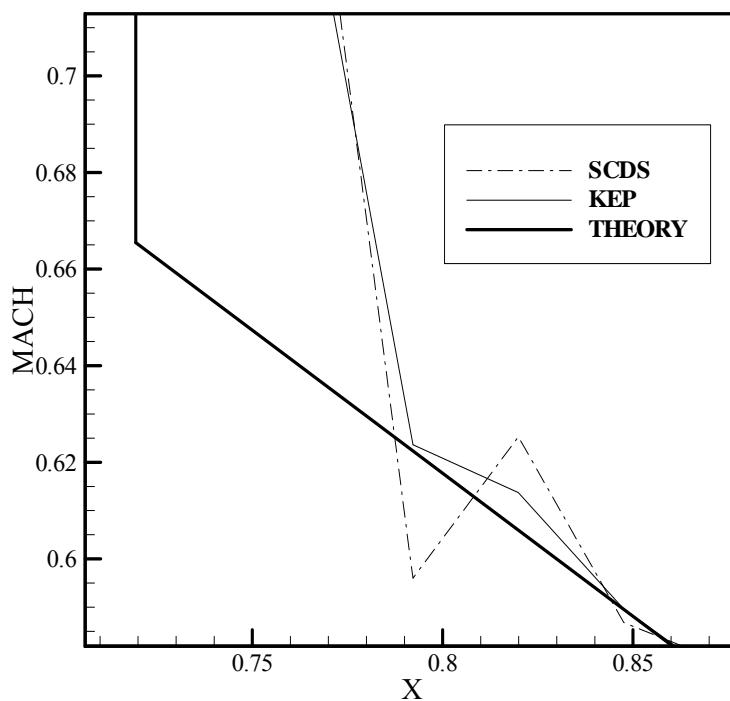
شکل ۶- تغییرات دبی جرمی برای نسبت فشار  $0.6/0.0$  و نسبت مساحت ۳ (n=100)

همان‌طور که نمودارهای قبلی نشان دادند، روش KEP برای تعداد نقاط کم نتایج خوبی ارائه می‌دهد. اما با افزایش تعداد نقاط است که این طرح به سمت دقیق‌تر پیش می‌رود و اساساً برای مدل کردن جریان‌های آشفته واقعی که دارای گردابه‌هایی با ابعاد خیلی کوچک هستند، مناسب می‌باشد.

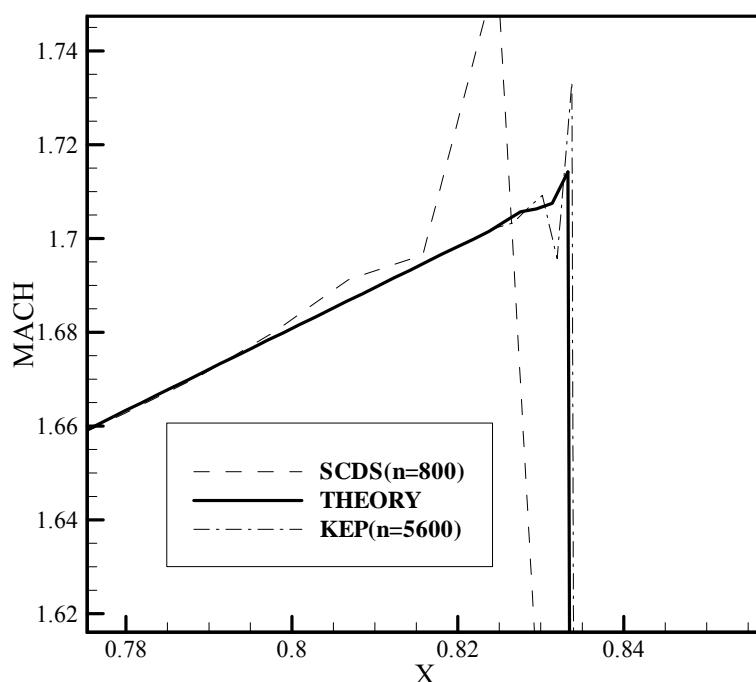
در این قسمت به مقایسه دو روش اسکالار و KEP برای دو حالت تعداد نقاط خیلی کم و خیلی زیاد پرداخته شده است تا مزیت مهم روش KEP در کاربرد آن برای تعداد نقاط بالای شبکه نمایان شود. شکل (۷) به مقایسه دو روش برای تعداد نقاط کم (n=75) پرداخته است. نوسانات حل در روش KEP نسبت به روش اسکالار کمتر است.

شکل (۸) به مقایسه دو روش برای تعداد نقاط زیاد پرداخته است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط از (n=800) به بعد در روش اسکالار حل واگرا خواهد شد. اما در روش KEP با افزایش تعداد نقاط (n=5600) می‌توان حل دقیق‌تر و بدون واگرایی داشت که مزیت مهم روش KEP در کاربرد آن برای تعداد نقاط زیاد شبکه را نشان می‌دهد.

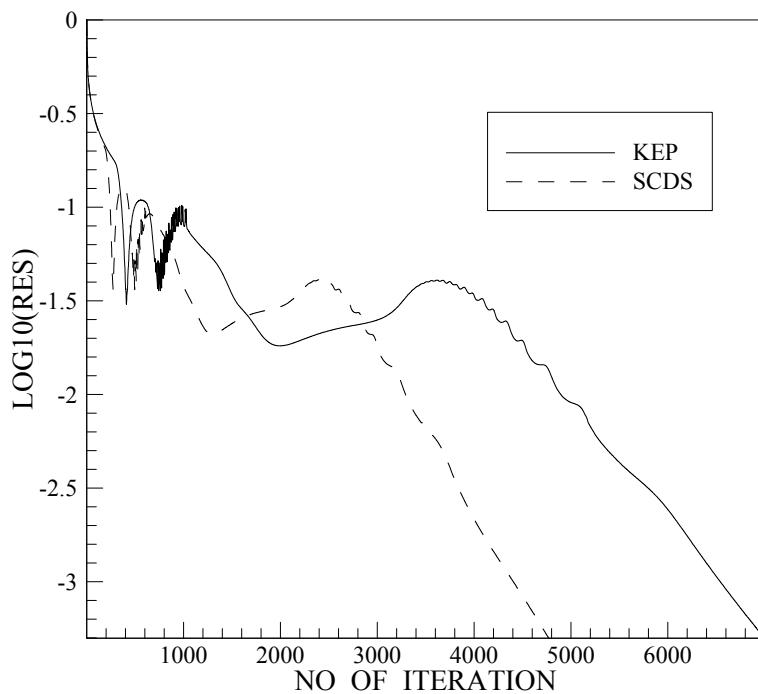
شکل (۹) آهنگ همگرایی روش‌های KEP و اسکالار را برای تعداد نقاط n=800 نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که آهنگ همگرایی روش KEP نسبت به روش اسکالار کمتر است. روش KEP نسبت به روش اسکالار، عبارت از تلاف مصنوعی کمتری به معادلات می‌افزاید که باعث می‌شود همگرایی کندر صورت گیرد.



شکل ۷- مقایسه روش‌های KEP و اسکالر برای تعداد نقاط کم ( $n=75$ ) برای نسبت فشار  $0/75$  و نسبت مساحت  $1/5$



شکل ۸- مقایسه روش‌های KEP و اسکالر برای تعداد نقاط زیاد برای نسبت فشار  $0/7$  و نسبت مساحت  $1/5$



شکل ۹- آهنگ همگرایی مساله اول برای نسبت فشار  $0/75$  و نسبت مساحت  $1/5$  (n=800)

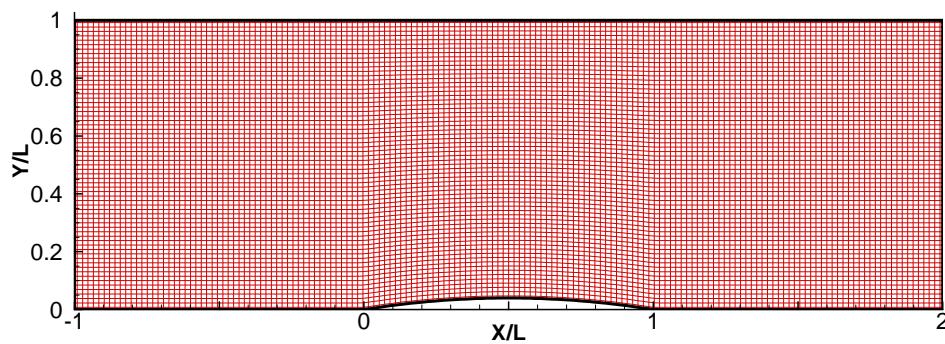
در یک جمعبندی کلی برای جریان یک بعدی غیرلزج، همان‌طور که پیداست، روش KEP قادر است با افزایش تعداد نقاط و با توجه به عبارت اتلاف مصنوعی مناسب، نتایجی با دقت بالاتر در محل شوک، ارائه دهد.

### ۲-۳- جریان دوبعدی غیرلزج داخل کanal شامل برآمدگی

شکل (۱۰) هندسه مورد بررسی را نشان می‌دهد. در اینجا نسبت دو برابر ضخامت برآمدگی در بیشترین قسمت آن به طول وتر برابر  $0/08$  می‌باشد. جریان ورودی مافوق صوت و با ماخ  $1/65$  می‌باشد. شرایط مرزی به این صورت تعریف شده‌اند که در قسمت ورودی، سرعت‌ها در جهت جریان برابر سرعت جریان آزاد می‌باشد. همچنین چگالی و فشار، برابر چگالی و فشار جریان آزاد در نظر گرفته شده است. مقادیر سرعت‌ها، چگالی و فشار در مقطع خروجی برابر مقادیر محاسبه شده در گره ماقبل آخر در نظر گرفته شده است. در دیواره پایینی چگالی و فشار برابر همین پارامترها در گره بالایی و سرعت در امتداد عمود بر دیواره برابر صفر فرض شده است. شبکه با تعداد نقاط  $147*51$  برای بررسی نتایج درنظر گرفته شده است.

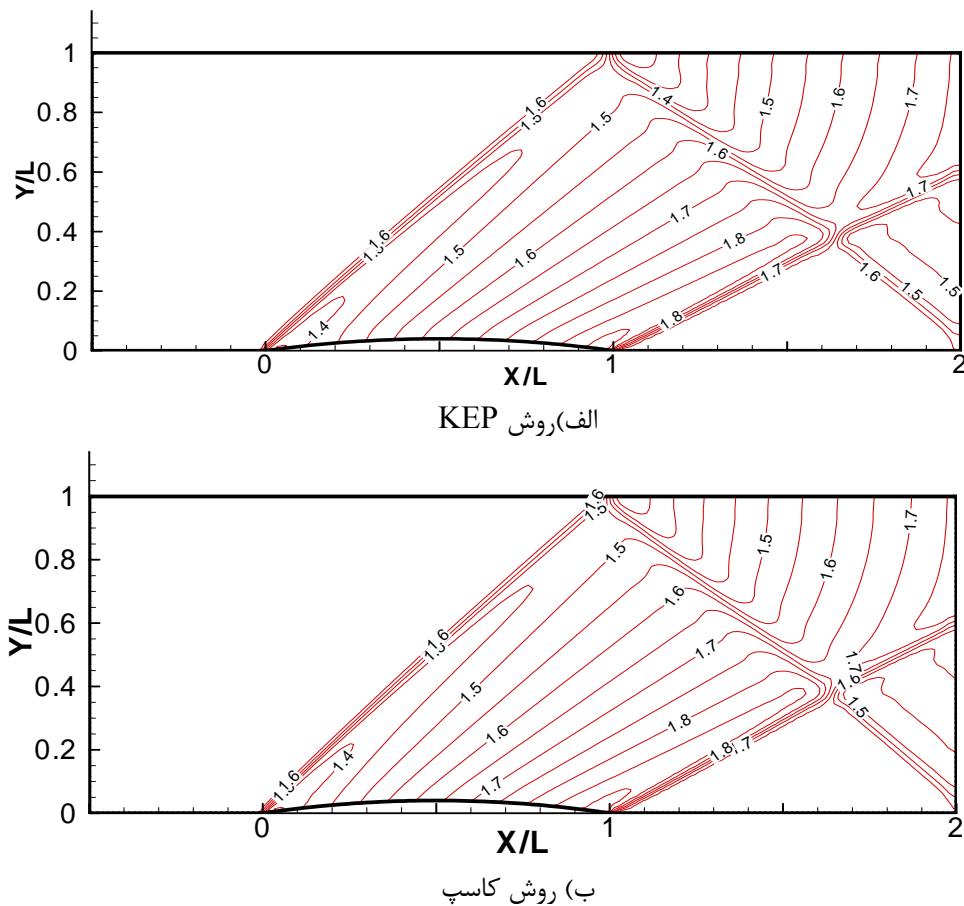
شکل (۱۱) تغییرات عدد ماخ در کل حوزه حل را با استفاده از روش KEP و روش کاسپ نشان می‌دهد. شکل (۱۲)، نشان دهنده عدد ماخ روی برآمدگی برای طرح‌های مختلف است. نتایج روش‌های مختلف با نتایج کار ایدلمان<sup>۱</sup> و همکاران [۱۲]، مقایسه شده است. با دقت در این شکل مشخص می‌شود که طرح کاسپ نسبت به دیگر طرح‌ها، در محدوده شوک دقت بیشتری نشان می‌دهد. در این طرح در نزدیکی شوک، نمودارها به خط عمود نزدیکتر می‌شوند که نشان از دقت بالای این طرح است. ولی برای نقاط دور از شوک

<sup>۱</sup> Eidelman

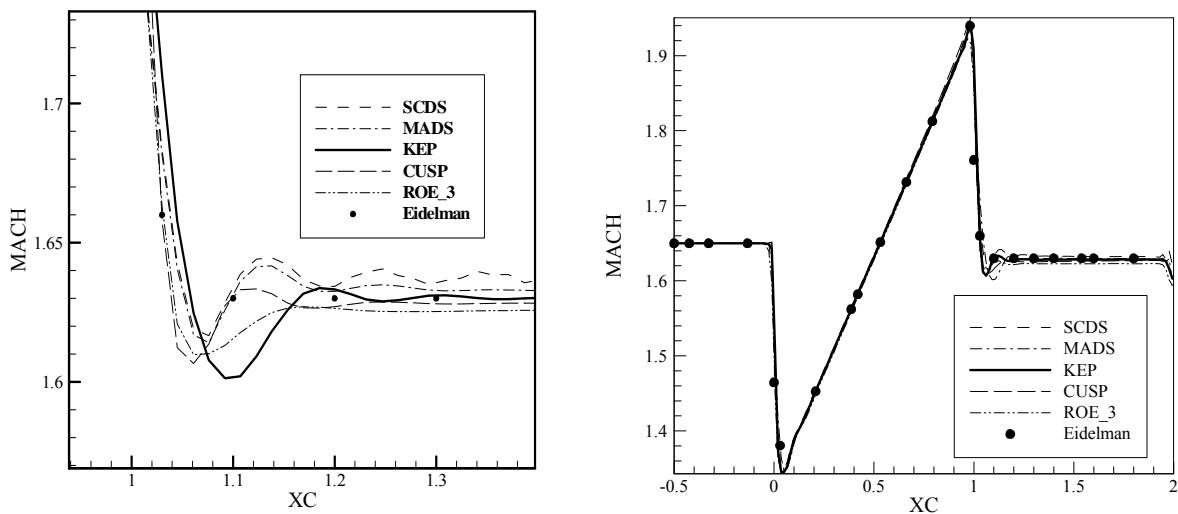


شکل ۱۰- شکل هندسه مورد بررسی مساله دوم

در روش KEP ، در مقایسه با سایر طرح‌های مذکور، به خصوص طرح اسکالر نتایج دقیق‌تر است. مشاهده می‌شود که طرح کاسپ در محل شوک و طرح KEP در نقاط بعد از شوک همپوشانی بهتری با نتایج ایدلمن دارد.



شکل ۱۱- خطوط ماخ ثابت در کل حوزه حل ( $M_{\infty} = 1.65$ )

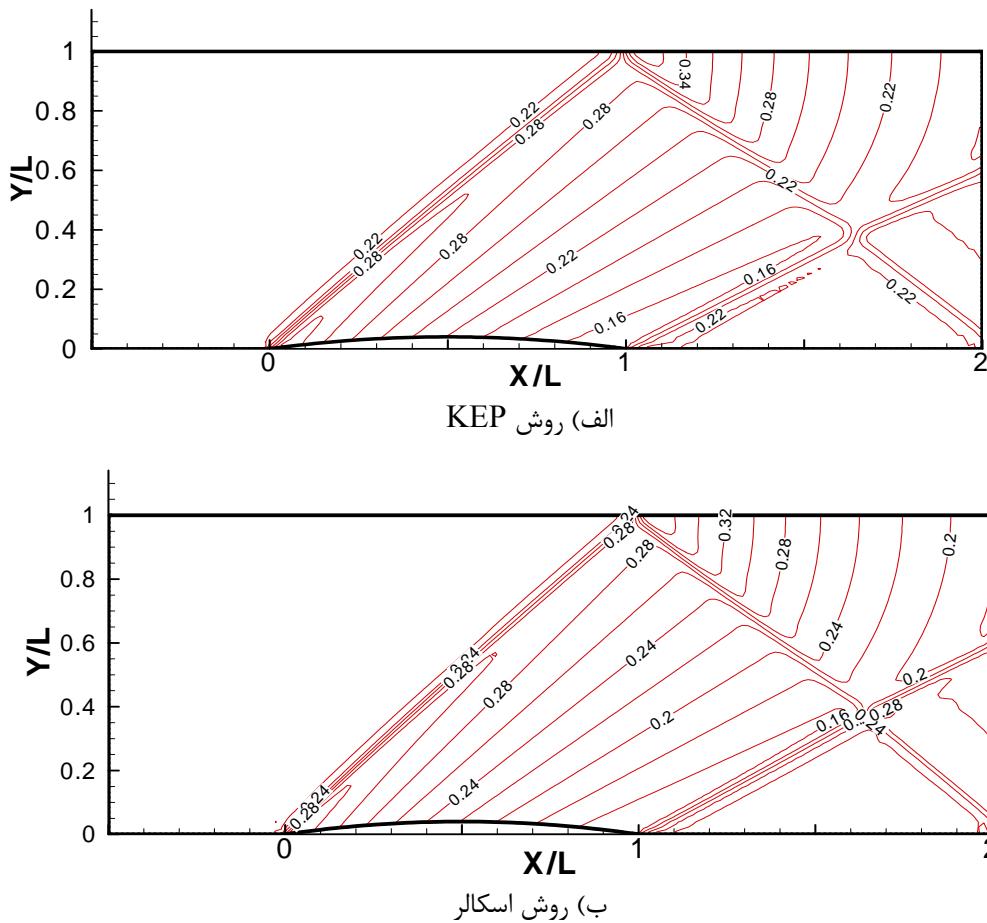


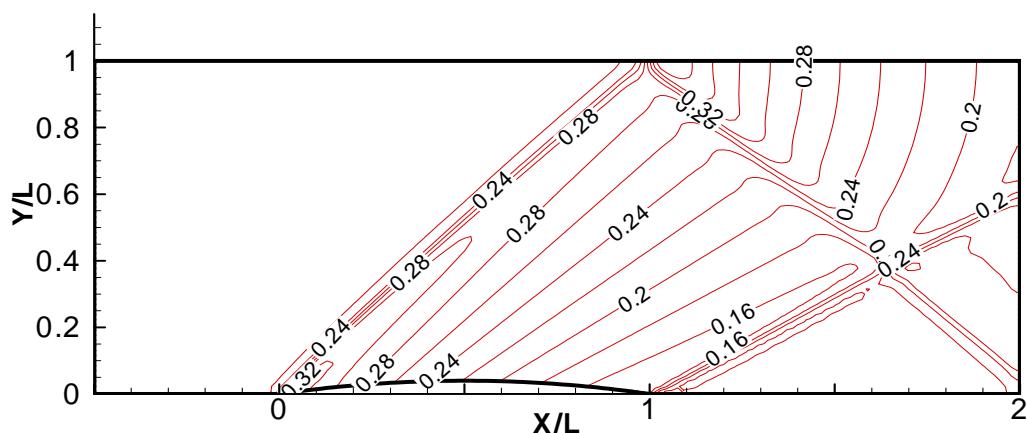
ب) تغییرات عدد ماخ در نزدیکی شوک

الف) تغییرات عدد ماخ روی سطح برآمدگی

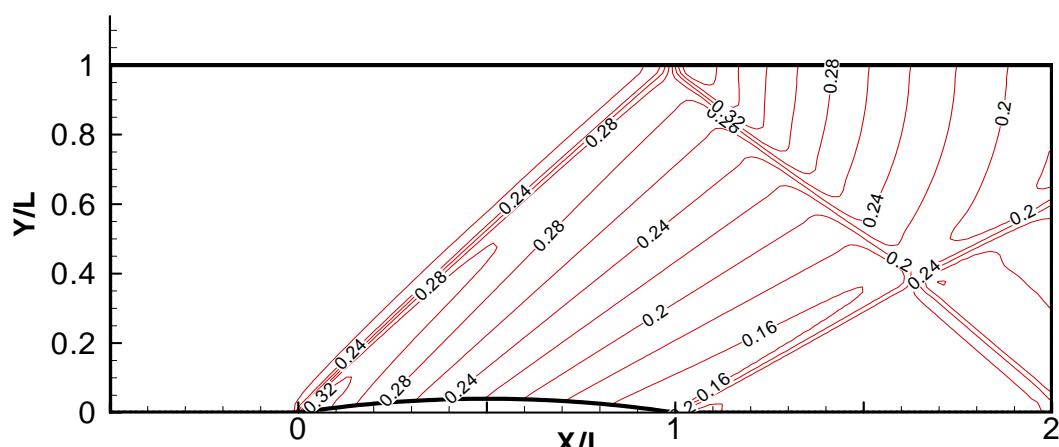
شکل ۱۲- نمودار عدد ماخ روی سطح برآمدگی ( $M_\infty = 1.65$ )

شکل (۱۳)، تغییرات فشار را در کل حوزه حل و برای روش KEP و سایر طرح‌ها نشان می‌دهد. شکل (۱۴)، نشان دهنده تغییرات ضریب فشار روی برآمدگی برای طرح‌های مختلف است. نتایج مربوط به تغییرات فشار مشابه نتایج مربوط به تغییرات عدد ماخ است.



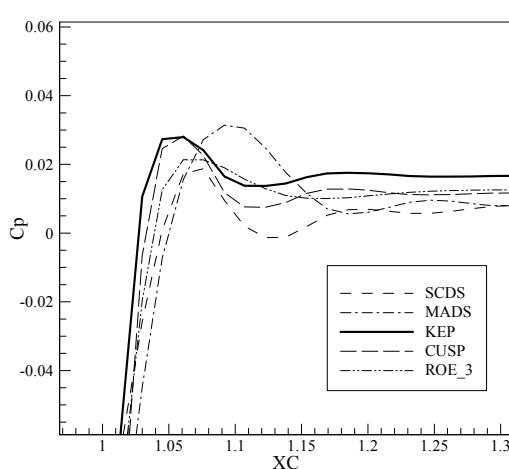


ج) روش کاسپ

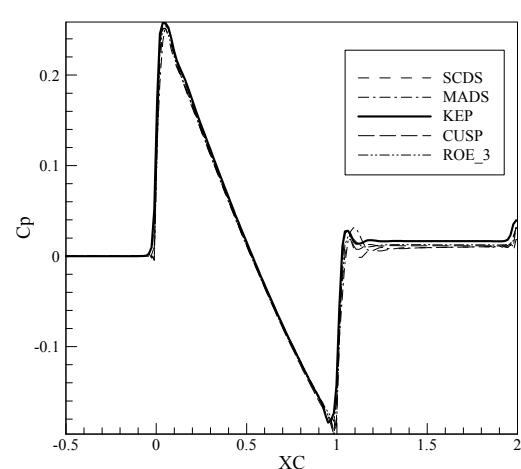


د) روش رو مرتبه سوم

**شکل ۱۳** - خطوط هم فشار در کل حوزه حل ( $M_\infty = 1.65$ )



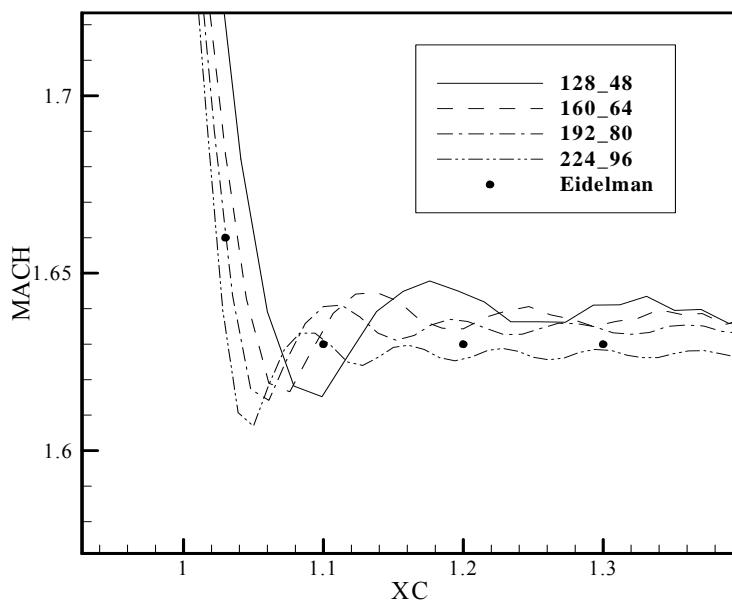
ب) تغییرات ضریب فشار در نزدیکی شوک



الف) تغییرات ضریب فشار روی سطح برآمدگی

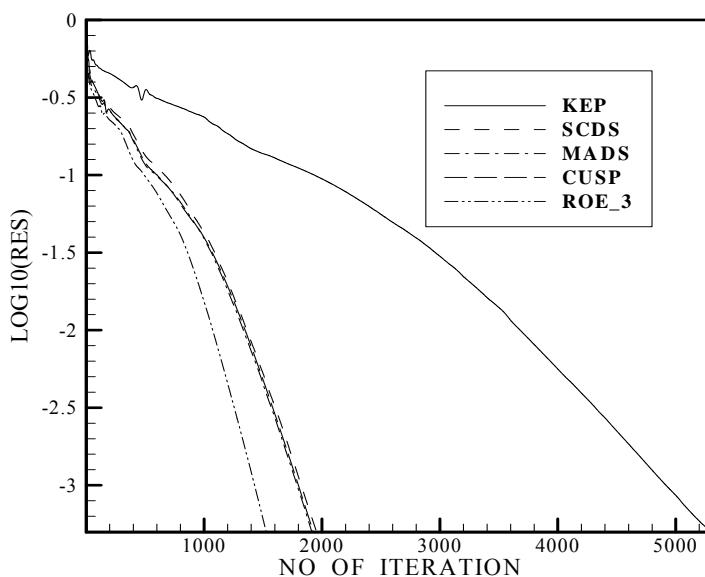
**شکل ۱۴** - نمودار تغییرات ضریب فشار روی سطح برآمدگی ( $M_\infty = 1.65$ )

شکل (۱۵)، اثر افزایش نقاط را روی روش KEP نشان می‌دهد. با افزایش نقاط نتایج دقیق‌تر می‌شود.



شکل ۱۵- اثر افزایش نقاط را روی روش KEP ( $M_\infty = 1.65$ )

شکل (۱۶)، آهنگ همگرایی طرح‌های مذکور را نشان می‌دهد. همگرایی طرح‌های کاسپ، اسکالار، رو و ماتریسی تقریباً نزدیک به هم است. در حالی که آهنگ همگرایی در طرح KEP نسبت به طرح‌های مذکور کمتر است و این یکی از نقاط ضعف این روش محسوب می‌شود.



شکل ۱۶- آهنگ همگرایی مساله دوم ( $M_\infty = 1.65$ )

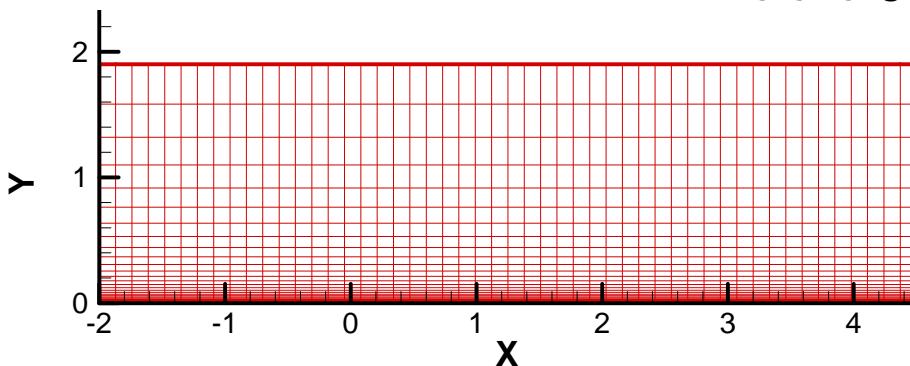
با مشاهده نتایج حاصل برای جریان دوبعدی غیرلزج، مشخص می‌شود که روش KEP نتایج قابل قبولی برای جریان در نزدیکی شوک ارائه می‌دهد. هرچند ممکن است طرح کاسپ در نزدیکی شوک نسبت به طرح مذکور بهتر باشد، ولی روش KEP در نقاط بعد از شوک نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهد. به علاوه عدم نیاز به اضافه کردن عبارت اتلاف مصنوعی در سایر نقاط (به غیر از شوک) مزیت اصلی این روش محسوب می‌شود.

### ۳-۴- جریان دوبعدی لزج روی صفحه تخت

در این قسمت به بررسی جریان لزج در مختصات کارتزین دو بعدی و مختصات استوانه‌ای با تقارن محوری و مقایسه طرح KEP با طرح‌های اتلاف مصنوعی و بالادست پیشین پرداخته شده است.

هنگسه مورد نظر شامل یک صفحه تخت است. شکل (۱۷)، هندسه مورد بررسی و شبکه‌بندی انجام شده را نشان می‌دهد. در این قسمت به بررسی نمودار سرعت بی بعد بر حسب مکان عمودی بدون بعد، برای مقطعی از صفحه در طول بدون بعد  $x=3.4$ ، پرداخته می‌شود. جریان با ماخ  $4/0$  و عدد رینولدز بر واحد طول  $1360000$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این قسمت از دو مدل تلاطمی L-K [۱۳] و سبسبی - اسمیت<sup>۱</sup> [۱۳] استفاده شده است.

شرایط مرزی به‌این صورت تعریف شده‌اند که در قسمت ورودی، سرعت برابر سرعت گره داخلی مجاور می‌باشد. همچنین چگالی و فشار، برابر چگالی و فشار جریان آزاد درنظر گرفته شده است. مقادیر سرعت‌ها و چگالی در مقطع خروجی برابر مقادیر محاسبه شده در گره ماقبل آخر درنظر گرفته شده است و فشار در مقطع خروجی برابر فشار جریان آزاد می‌باشد. در گره پایینی چگالی و فشار برابر همین پارامترها در گره دوم و سرعت در امتداد عمود، در گره پایین برابر صفر درنظر گرفته شده است. همچنین سرعت افقی بر روی صفحه تخت (از نقطه‌ی  $x=0$  به بعد)، برابر صفر در نظر گرفته شده است. شبکه با تعداد نقاط  $100 \times 100$  برای بررسی نتایج در نظر گرفته شده است.

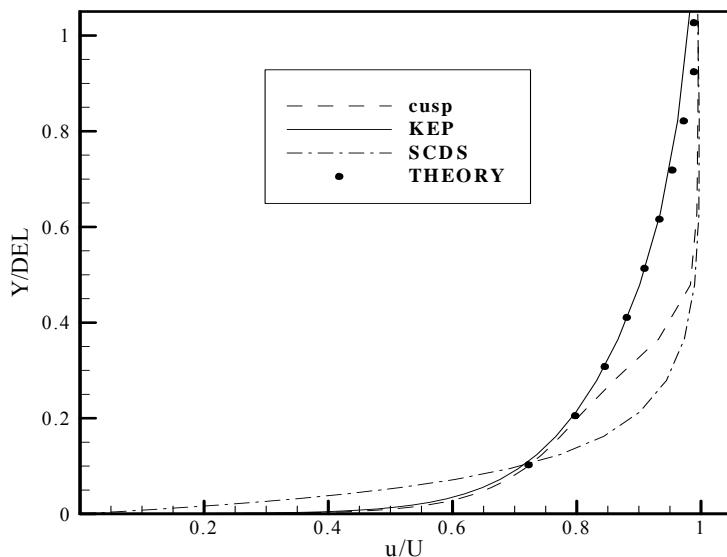


شکل ۱۷- هندسه و شبکه بندی مساله سوم

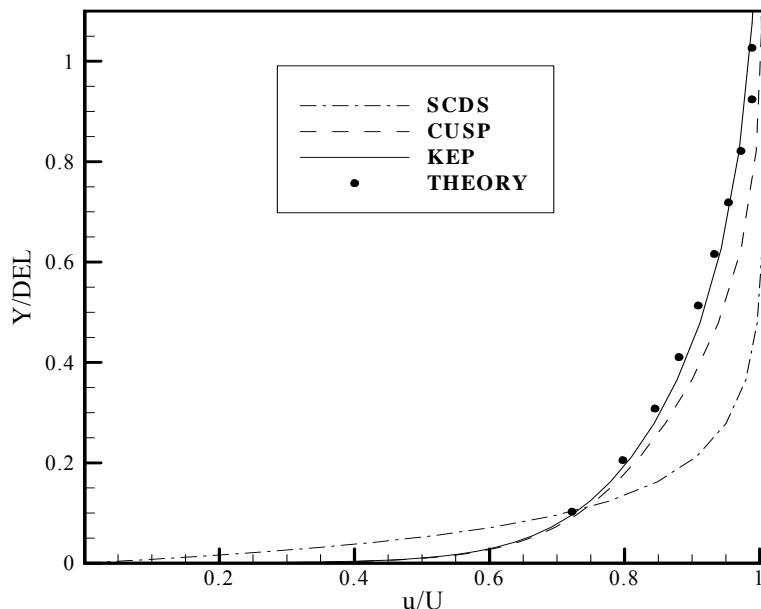
در این قسمت به بررسی جریان درهم با مدل‌های مختلف آشتفتگی به منظور مقایسه طرح KEP با طرح‌های اتلاف مصنوعی و بالادست پیشین پرداخته شده است. شکل‌های (۱۸) تا (۲۱) نمودار سرعت بی بعد بر حسب مکان عمودی بدون بعد را برای طرح‌های مختلف نشان می‌دهد. عدد ماخ جریان، مقطع مورد بررسی، ابعاد

<sup>۱</sup> Cebeci-Smith

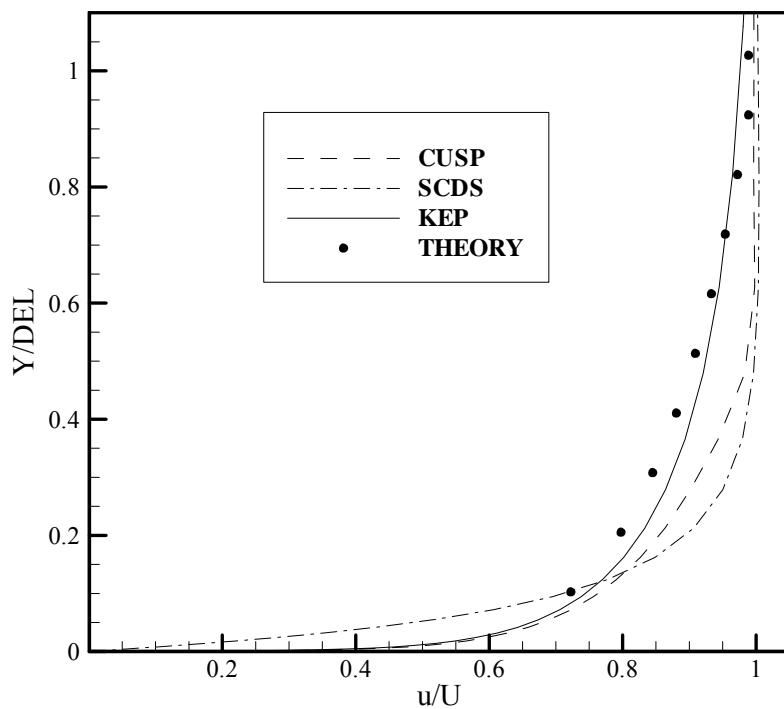
جریان (دو بعدی یا تقارن محوری) و مدل تلاطمی مورد استفاده ثابت در نظر گرفته شده و طرح KEP با طرح های اتلاف مصنوعی و بالادست و همچنین نتایج تئوری [۱۴] مقایسه شده است. با دقیق در شکل های (۱۸) تا (۲۱) در می یابیم که طرح اسکالر نسبت به بقیه طرح ها در تشخیص میدان سرعت ضعیفتر عمل می کند. طرح کاسپ در بعضی از قسمت ها دچار شکستگی در توزیع سرعت شده است. در مجموع روش KEP نسبت به سایر روش ها نتایج دقیق تری ارائه می کند.



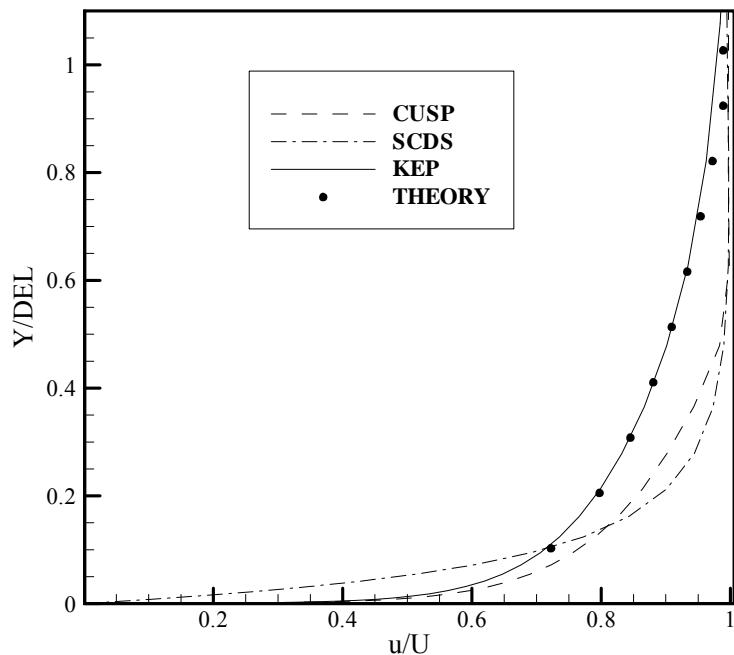
شکل ۱۸- پروفیل سرعت، مدل Cebeci-Smith، دو بعدی



شکل ۱۹- پروفیل سرعت، مدل K-L، دو بعدی



شکل ۲۰- پروفیل سرعت، مدل Cebeci-Smith، تقارن محوری



شکل ۲۱- پروفیل سرعت، مدل K-L، تقارن محوری

در پایان ذکر دو نکته ضروری به نظر می‌رسد. همان‌طور که اشاره شد، روش KEP، با افزایش تعداد نقاط شبکه، نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. در این روش برای افزایش تعداد نقاط شبکه، محدودیتی وجود ندارد. بنابراین در این مقاله، به بررسی استقلال نتایج عددی از شبکه‌بندی مساله پرداخته نشده است. چون روش فوق، اصولاً برای شبکه‌های با تعداد نقاط بسیار زیاد طراحی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که نحوه محاسبه شار در روش KEP به گونه‌ای است که نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، به معرفی روشی پرداخته شد که به گونه‌ای معادلات را جداسازی می‌کند که مقدار کلی انرژی جنبشی به طور دقیق محاسبه می‌شود. این روش که روش حفظ انرژی جنبشی (KEP) نام دارد، برای محاسبه شار عبوری از مرز سلول، از یک نوع متوسط‌گیری از مقادیر موجود در محاسبه شار استفاده می‌نماید. این روش ضمن این که هیچ عبارت اتلاف مصنوعی را به معادلات اضافه نمی‌کند، حلی پایدار با نوسانات کم ارائه می‌دهد. در حضور شوک، این روش به وسیله اپراتورهای مخصوص شوک، مقدار تغییرات کمیت مورد نظر (انرژی جنبشی) را محاسبه و به معادلات اضافه می‌کند. البته آهنگ همگرایی کمتر آن، از اشکالات این روش محسوب می‌شود. به نظر می‌رسد که روش جداسازی که برای محاسبه شار در روش KEP به کار می‌رود، قادر است تا حدود زیادی از نوسانات تولیدی در حل بکاهد و حل هموارتری را ایجاد نماید. همچنین به نظر می‌رسد که این روش با افزایش تعداد نقاط، پایدار بماند و به سمت دقیق‌تر شدن هر چه بیشتر نتایج نزدیک شود. به نظر می‌رسد این روش در آینده‌ای نزدیک با افزایش سرعت پردازش کامپیوتر برای جریان‌های آشفته واقعی بدون هیچ‌گونه مدل‌سازی بسیار مناسب باشد.

### مراجع

- [1] Jameson, A., "Formulation of Kinetic Energy Preserving Conservative Schemes for Gas Dynamics and Direct Numerical Simulation of One-dimensional Viscous Compressible Flow in a Shock Tube using Entropy and Kinetic Energy Preserving Schemes", Report ACL, Vol. 34-2, pp. 188-208, (2008).
- [2] Jameson, A., "The Construction of Discretely Conservative Finite Volume Schemes that also Globally Conserve Energy or Entropy", Report ACL, Vol. 34-2, pp.152-187, (2008).
- [3] Honein, A.E., and Moin, P., "Higher Entropy Conservation and Numerical Stability of Compressible Turbulence Simulations", J. Comp. Phys., Vol. 201, pp. 531–545, (2004).
- [4] Jameson, A., "Energy Estimates for Nonlinear Conservation Law with Applications to Solutions of the Burgers Equation and One-dimensional Viscous Flow in a Shock Tube by Central Difference Schemes", 18<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics Conference by the AIAA, Miami, June 28, (2007).

- [5] Jameson, A., and Allaneu, Y., "Direct Numerical Simulations of Plunging Airfoils", 48<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting by the AIAA, Orlando, Florida, January 4-7, (2010).
- [6] Shu, C.W., "Total-variation-diminishing Time Discretizations", SIAM J. Sci. Statist. Computing. Vol. 9, pp. 1073–1084, (1988).
- [7] Jameson, A., and Allaneu, Y., "Direct Numerical Simulations of a Two Dimensional Viscous Flow in a Shock Tube using a Kinetic Energy Preserving Schemes", 19<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics Conference by the AIAA, San Antonio, Texas, June 22-25, (2009).
- [8] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time-stepping Schemes", AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamic Conference, Palo Alto, (1981).
- [9] Swanson, R., and Turkel, E., "Artificial and Central Difference Schemes for the Euler and Navier Stokes Equations", AIAA 8<sup>th</sup> Computations Fluid Dynamics Conference, New York, pp.55-69, (1986).
- [10] Jameson, A., "Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 4, pp. 171-218, (1995).
- [۱۱] سالاری، م، "مقایسه و تحلیل طرح‌های بالادست رو و طرح‌های اتلاف مصنوعی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۸۷).
- [12] Eidelman, S., Colella, P., and Shreeve, R. P., "Applications of the Godunov Method and its Second-order Extension to Cascade Flow Modeling", AIAA Journal, Vol. 22, pp. 1609-1615, (1984).
- [۱۳] علیدادی، م، "تحلیل عددی جریان دوبعدی و معشوش حول یک پرتابه با اعمال مدل‌های تلاطمی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۸۰).
- [۱۴] شلختینگ، ه. ترجمه، مهرابیان، م. "نظریه‌ی لایه مرزی"، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، .(۱۳۸۴)

## فهرست نمادهای انگلیسی

- $A_1$  : مساحت مقطع ورودی شیپوره
- $A_2$  : مساحت مقطع خروجی شیپوره
- $A^*$  : مساحت مقطع گلوگاه شیپوره
- $A_{op}$  : مساحت صفحه شار
- $d$  : مشتق کلی نسبت به متغیر
- $dS$  : المان مساحت
- $dV$  : المان حجم
- $E$  : انرژی کل
- $F$  : بردار شار
- $H$  : انتالپی کل
- $k$  : انرژی جنبشی مخصوص
- $M_\infty$  : عدد ماخ جریان آزاد
- $n^j$  : بردار عمود بر سطح
- $p$  : فشار
- $Pr$  : عدد پرنتل
- $q$  : شار حرارتی
- $R$  : مقدار باقی مانده
- $Re$  : عدد رینولدز
- $S$  : بردار چشم
- $S_{op}$  : بردار مساحت صفحات شار داخلی
- $T$  : دما
- $t$  : زمان
- $U$  : بردار حالت
- $u$  : سرعت در جریان یک بعدی
- $v$  : سرعت
- $vol$  : حجم المان
- $x$  : جهت محور مختصات در مختصات تقارن محوری
- $y$  : جهت محور مختصات در مختصات تقارن محوری

## نمادهای یونانی

- $\Delta t$  : گام زمانی
- $\mu$  : ضریب ویسکوزیته

$\rho$  : چگالی $\sigma$  : تنش ویسکوزیته $\Omega$  : حوزه حل

### بالانویس‌ها

i : اندیس شمارنده (نشان دهنده جهت محورهای مختصات)

j : اندیس شمارنده (نشان دهنده جهت محورهای مختصات)

n : تعداد گام زمانی

\* : محل گلوگاه در شبیوره

- : مقدار متوسط مکانی کمیت مورد نظر

^ : مقدار متوسط زمانی کمیت مورد نظر

### پایین نویس‌ها

b : گره مرزی

j : گره اصلی در جریان یک بعدی

max : بیشترین مقدار

min : کمترین مقدار

n : تعداد نقاط شبکه

o : گره اصلی

p : گره همسایه

## Abstract

In this work, the Kinetic Energy Preserving (KEP) scheme -which is introduced recently by Jameson- has been investigated and compared to other artificial viscosity and upwind schemes. The discretization of the governing equations in the KEP scheme is performed in such a way that the total kinetic energy is conserved in all points with no shock. For the KEP method, there is no need to add any artificial dissipation in the region with low pressure gradient. The purpose of this study is to introduce a stable numerical method that enters a minimum artificial dissipation only in the vicinity of shocks. In this paper, an inviscid one-dimensional flow through a convergent-divergent nozzle, two-dimensional flow on a bump and a viscous two-dimensional flow with axial symmetry are considered. It is shown that the KEP scheme is more accurate if the number of mesh points is increased; and in contrast to other schemes, there is no limit in increasing the number of points.