

تحلیل تنش در باریکه ارتوتروپیک غیر همگن حاوی چندین ترک محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک

در این مقاله، تحلیل تنش در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک حاوی چندین ترک، تحت بار پاد صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی انجام شده است. رفتار محیط الاستیک خطی است و سطوح ترکها هموار در نظر گرفته شده است. یکی از روش‌های کارا در حل مسائل محیط-های تضعیف شده توسط مجموعه‌ای از ترکها، استفاده از حل نابجایی است. بدین منظور ابتدا حل نابجایی ولترا در باریکه غیر همگن با حل معادله حاکم، اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی مربوط به نابجایی بکمک تبدیل فوریه انجام می‌گردد و میدان تنش در اثر نابجایی مکانیکی ارائه می‌گردد. این بخش، مشکل‌ترین مرحله تحلیل است. سپس با داشتن این حل، معادلات انتگرالی برای تحلیل مساله چندین ترک هموار در باریکه بدست می‌آید. این معادلات دارای تکیگی از نوع کوشی هستند که با استفاده از روش عددی مناسب حل می‌گردند تا تابع توزیع نابجایی‌ها بدست آید. بعد از بدست آوردن توزیع نابجایی می‌توان ضریب شدت تنش در نوک ترک را بدست آورد.

جلال کنگی^۱

دانشجوی کارشناسی ارشد

رسول باقری^۲

استادیار

واژه‌های راهنما: چندین ترک - باریکه غیر همگن - نابجایی ولترا - لایه پیزوالکتریک - تکیگی کوشی

۱- مقدمه

تحلیل تنش در محیط‌های تضعیف شده توسط مجموعه‌ای از ترکها از دیرباز مورد توجه محققین بوده است. از جمله تکنیک‌های موثر در تحلیل مذکور استفاده از روش توزیع نابجایی می‌باشد. در واقع توانایی حل نابجایی در حل مسائل مکانیک شکست خطی به قدرتمندی حل گرین در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در تغییر شکل یک جسم در اثر اعمال نیروهای خارجی، نقص‌های داخل کریستال‌های تشکیل دهنده جسم موثر هستند. اصلی‌ترین نوع نقص که موثر در خواص مکانیکی کریستال است، نابجایی نامیده می‌شود. در این مقاله، خواص نابجایی در مقیاس اتمی یا میکروسکوپی مورد نظر ما نمی‌باشد و تنها خواص ماکروسکوپی نابجایی در تئوری الاستیسیته حائز اهمیت است.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکترونیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز

jalal.kangi@yahoo.com

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مکترونیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز

r.bagheri@kiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۲۳، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۴/۲۷

وجود نابجایی نخستین بار توسط دانشمندان علم مواد کشف شد. اتم‌ها در یک کریستال دارای نابجایی از موقعیت اصلی‌شان در شبکه کامل جابه‌جا شده و نتیجه این تغییر مکان، ایجاد میدان تنش حول محور نابجایی در جسم می‌باشد. در نتیجه نابجایی یکی از منابع ایجاد تنش داخلی در جسم محسوب می‌شود. بعدها نابجایی از دیدگاه الاستیسیته نیز تعریف گردید. ولترا [۱] جزء نخستین کسانی بود که به تعریف نابجایی پرداخت. تحلیل تنش در قطعات مکانیکی دارای ترک از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. طراحی با استفاده از اصول مکانیک شکست مستلزم داشتن معیاری است که مشخص کننده واماندگی قطعه باشد که یکی از این معیارها ضریب شدت تنش است. ضریب شدت تنش در نوک ترکها تابعی از هندسه ترک، شکل قطعه، شرایط و اندازه بارگذاری می‌باشد که پس از محاسبه، با مقدار بحرانی آن مقایسه می‌گردد. مواد تابعی بدلیل مقاومت حرارتی و مقاومت سایش بالا، کاربرد وسیعی در صنعت دارند. در نتیجه استفاده از آنها بمنظور کاهش تنش‌های پسماند و تنش‌های حرارتی و کاهش تمایل جدایش پوشش از بستر در دهه اخیر کاربرد بسیاری داشته است. در ابتدا مروری بر تحقیقات انجام شده برای تحلیل تنش در محیط‌های الاستیک حاوی ترک، انجام می‌شود.

ناریتا و همکاران [۲]، رفتار یک ترک با طول محدود واقع در یک لایه پیزوالکتریک محدود شده بوسیله دو نیم صفحه با خواص الاستیک متفاوت را تحت پراش امواج برشی خارج صفحه‌ای مورد تحلیل قرار دادند. در این مسأله ترک عمود بر وجوه مشترک بوده و در یک فاصله مساوی از دو نیم صفحه قرار دارد. آنها معادلات حاکم را به کمک تبدیل فوریه حل کردند و معادلات انتگرالی مسأله را تشکیل دادند. سپس تغییرات ضرایب شدت تنش و نرخ رهایش انرژی را بر حسب فرکانس بارگذاری برای لایه‌هایی با جنس‌های متفاوت بدست آوردند. لی و همکارانش [۳]، مسأله ترک متحرک واقع در فصل مشترک بین لایه‌ای از جنس ماده پیزوالکتریک سرامیکی و ماده‌ای از جنس ماده ارتوتروپیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و بارگذاری درون صفحه‌ای الکتریکی را بررسی کردند. حل مسأله به کمک تبدیل فوریه انجام شده و اثر طول ترک، ضخامت لایه، شدت و جهت بارگذاری الکتریکی و همچنین سرعت ترک بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی بررسی شده است. نتایج آنها نشان می‌دهد که ضریب شدت تنش همواره با افزایش طول ترک بی بعد شده و سرعت حرکت ترک برای حالتی که نسبت مدول برشی لایه ارتوتروپیک بالایی به لایه پایینی بزرگتر است، افزایش می‌یابد.

مسأله ترک متحرک واقع در خارج از مرکز باریکه‌ای از جنس سرامیک پیزوالکتریک احاطه شده توسط دو نیم صفحه الاستیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و بارگذاری درون صفحه‌ای الکتریکی توسط کوان و همکارانش [۴]، بررسی گردید. در این مسأله شرایط فیزیکی سطح ترک، نشت پذیر فرض شده است. رفتار الکترومکانیکی ترک واقع در خارج از مرکز لایه‌ای از جنس ماده سرامیکی پیزوالکتریک که توسط دو لایه الاستیک محدود شده، بوسیله کوان و همکاران [۵]، مورد بررسی قرار گرفت. در این مسأله بارگذاری مکانیکی بصورت ضربه‌ای خارج صفحه‌ای و الکتریکی درون صفحه‌ای می‌باشد. در این مطالعه هر دو شرایط ترک نشت پذیر و نشت ناپذیر در نظر گرفته شده است. آنها تاثیر هندسه، ترکیب مواد، ضریب وابستگی الکترومکانیک و همچنین میدان الکتریکی را بر روی نرخ رهایش انرژی بررسی کردند.

ژائو و همکارانش [۶]، رفتار شکست یک لایه پیزوالکتریک محدود شده به نیم صفحه الاستیک حاوی چندین ترک موازی و همراستا واقع در فصل مشترک را مورد مطالعه قرار دادند. بارگذاری بصورت ضربه‌ای الکترومکانیکی بوده و هر دو شرط نشت پذیر و نشت ناپذیر در نظر گرفته شده است. تاثیر هندسه ترکها، میدان الکتریکی و شرایط مرزی بر روی ضریب شدت تنش و جابجایی الکتریکی مورد بررسی قرار گرفته است. یودا [۷]، باریکه پیزوالکتریک با رفتار تابعی محدود شده به دو لایه الاستیک حاوی ترک عمود بر مرز ضخامت باریکه را حل نمود. ضریب الاستیک، ثابت پیزوالکتریک و ضریب گذردهی دی الکتریک، در جهت ضخامت باریکه بصورت تغییرات نمایی فرض شده است. بارگذاری بصورت خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی به دو لایه بیرونی اعمال شده است. تاثیر تغییرات ضریب چگالی انرژی کرنشی بر هندسه ترک و پارامترهای ماده ارائه شده است.

کوان و لی [۸]، رفتار ترک متحرک با سرعت ثابت تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و بارگذاری درون صفحه‌ای الکتریکی در باریکه از جنس ماده سرامیکی پیزوالکتریک احاطه شده توسط دو لایه الاستیک ارتوتروپیک را بررسی نمودند. حل معادلات حاکم مسأله به کمک تبدیل فوریه انجام شد و معادلات انتگرالی حاصل بصورت معادلات انتگرالی فردهولم ظاهر گردید. تاثیر سرعت ترک، طول ترک و ضریب وابستگی الکترومکانیکی بر روی ضریب شدت تنش بدست آمده است.

رفتار الکترومکانیکی باریکه پیزوالکتریک ساخته شده از مواد تابعی محدود به دو لایه الاستیک تضعیف شده توسط یک ترک موازی با مرز باریکه تحت بارگذاری مکانیکی خارج صفحه‌ای ضربه‌ای و الکتریکی درون صفحه‌ای ضربه‌ای توسط چن و همکارانش [۹]، بررسی شد. آنها در مطالعه خود نشان دادند که شرط ترک نشت ناپذیر منطقی تر از شرط ترک نشت پذیر می‌باشد. تاثیر موقعیت ترک، ضریب وابستگی الکترومکانیکی و ثابت‌های ماده بر روی پارامترهای مکانیک شکست بررسی گردید.

مسأله ترک متحرک با طول محدود و سرعت ثابت در صفحه نامحدود واقع بین دو ماده الاستیک الکترومغناطیس ناهمسان تحت بارگذاری مکانیکی خارج صفحه‌ای و بارگذاری الکتریکی درون صفحه‌ای توسط زانگ و لی [۱۰]، حل شده است. آنها در مطالعه خود، ضریب شدت تنش و ضرایب جابجایی الکتریکی و مغناطیسی درون صفحه‌ای را بدست آورده و اثر سرعت، جهت انتشار ترک و بارگذاری‌های الکتریکی و مغناطیسی را بر روی ضریب شدت تنش ارائه کردند. مسأله مکانیک شکست باریکه ساخته شده از مواد تابعی دارای پوششی از مواد پیزوالکتریک با خاصیت تابعی توسط چنگ و ژائو [۱۱]، ارائه شده است. آنها محل اتصال باریکه و پوشش را بصورت فنر خطی و دارای خواص ویسکوالاستیسیته مدل کردند. پوشش پیزوالکتریک با رفتار تابعی حاوی ترک نشت پذیر موازی با مرز، تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای قرار دارد. معادلات حاکم بکمک تبدیلات انتگرالی به معادلات انتگرالی تکین تبدیل گردیده است. در ادامه اثر پارامترهای ماده تابعی و هندسه بر روی ضریب شدت تنش مطالعه شد. همچنین گزارش گردید که اثر ویسکوالاستیسیته در فصل مشترک باریکه و پوشش، به ضخامت بستر وابسته است. مسأله باریکه الاستیک دارای پوششی از مواد پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی توسط لی و یانگ لی [۱۲]، ارائه شده است. در این بررسی، پوشش پیزوالکتریک با خاصیت تابعی توسط یک ترک نشت پذیر در راستای ضخامت پوشش تضعیف شده و اندرکنش بین ترک و سطح مشترک پوشش و باریکه مطالعه شده است.

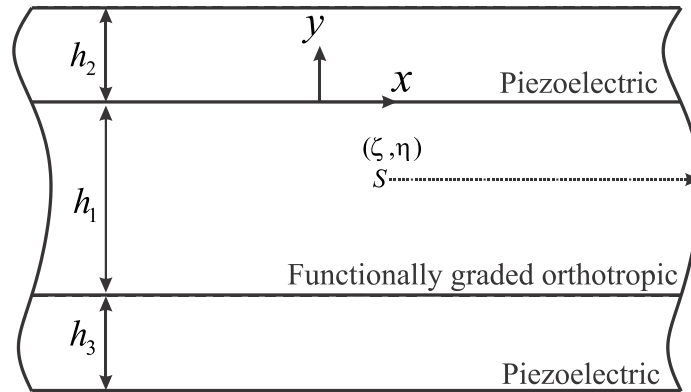
در این مطالعه گزارش گردید که با نزدیک شدن ترک به فصل مشترک پوشش و باریکه، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. همچنین آنها نشان دادند که تغییر ضریب چسبندگی مکانیکی پوشش و باریکه نسبت به ضریب چسبندگی الکتریکی، اثر زیادی روی تغییر ضریب شدت تنش دارد.

برای ترک واقع در پوشش پیزوالکتریک و در نزدیکی فصل مشترک پوشش و باریکه، با ضریب چسبندگی صفر، تغییر ضخامت بستر الاستیک روی ضریب شدت تنش تاثیر کمتری دارد. موسوی و پاولا [۱۳]، تحلیل تنش باریکه پیزوالکتریک با خواص تابعی حاوی چندین ترک تحت تغییر شکل خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی را با استفاده از حل نابجایی ارائه دادند. ضرایب شدت تنش مکانیکی و شدت جابجایی الکتریکی برای نوک ترکها محاسبه گردید.

اسدی و همکاران [۱۴]، تحلیل تنش در باریکه ارتوتروپیک تقویت شده با پوشش مواد تابعی تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای نقطه‌ای، حاوی چندین ترک و حفره را انجام دادند. ضریب چسبندگی باریکه با پوشش بصورت یک فنر خطی مدل شده و ضرایب شدت تنش محاسبه گردید. آنها در مطالعه خود به این نتیجه رسیدند که افزایش ثابت ماده تابعی منجر به کاهش میدان تنش در لایه ارتوتروپیک خواهد شد. بیات و همکاران [۱۵]، باریکه ارتوتروپیک تضعیف شده توسط تعدادی ترک و حفره با پوششی از ماده پیزوالکتریک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی را بررسی کردند. آنها در حل مسأله از روش توزیع نابجایی بهره برده و معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی را تشکیل دادند. ضریب شدت تنش در نوک ترکها و تنشهای محیطی در حفره‌ها بر حسب دانسیته نابجایی بدست آمد و سپس اثر خواص ماده ارتوتروپیک، ضریب چسبندگی پوشش به باریکه و هندسه عیوب بر روی ضریب شدت تنش مطالعه شد.

باقری و همکاران [۱۶]، باریکه پیزوالکتریک تقویت شده با پوششی از ماده ارتوتروپیک دارای خاصیت تابعی تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی را بررسی کردند. آنها ضریب چسبندگی پوشش و باریکه را بصورت یک فنر خطی مدل کرده و بمنظور تحلیل تنش باریکه پیزوالکتریک تضعیف شده توسط چندین ترک، از حل نابجایی استفاده کردند. در ادامه معادلات انتگرالی تکین با دانسیته نابجایی مجهول تشکیل گردید و با توجه به شرایط مرزی دانسیته نابجایی مجهول تعیین و ضرایب شدت تنش و جابجایی الکتریکی بدست آمد. تأثیر خواص پوشش ارتوتروپیک ساخته شده از ماده تابعی و همچنین مشخصات ماده پیزوالکتریک، تعداد و هندسه ترکها بر روی ضرایب شدت تنش و جابجایی الکتریکی بدست آمد.

در این مقاله حل تحلیلی مساله باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی حاوی چندین ترک احاطه شده توسط دو لایه پیزوالکتریک، تحت بار خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی توسط روش توزیع نابجایی انجام شده است. در این مطالعه، با استفاده از روش نابجایی ولترا و با حل معادله حاکم، اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی مربوط به نابجایی، معادلات انتگرالی توزیع نابجایی روی ترکها تعیین شده است. این معادلات دارای تکینگی از نوع کوشی بوده که از حل آنها توزیع نابجایی روی ترکها و سپس ضرایب شدت تنش ترکها بدست آمده است. در اکثر مطالعات انجام شده تا به حال، محققین فقط قادر به حل مسائل با تعداد ترک محدود بوده اند در حالیکه روش حل نابجایی مستقل از تعداد و هندسه ترک با سطح هموار می‌باشد.



شکل ۱- نمایش نابجایی در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک

۲- حل نابجایی ولترا در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی محدود شده توسط دولایه پیزوالکتریک
 باریکه ساخته شده از مواد ارتوتروپیک با رفتار تابعی محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک مورد نظر دارای بعد بی نهایت در راستای محور x و بعد محدود در راستای محور y بوده و خط نابجایی در موقعیت (ζ, η) است (شکل ۱).

در این مقاله بارگذاری بصورت پاد صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی در صفحه x, y می‌باشد. در نتیجه مولفه‌های تغییر مکان در جهت محورهای x و y یعنی u و v صفر بوده و فقط مولفه تغییر مکان عمود بر صفحه w وجود دارد و مولفه‌های درون صفحه‌ای میدان الکتریکی در جهت محورهای x و y به ترتیب با E_x و E_y نمایش داده می‌شوند در نتیجه روابط زیر وجود خواهند داشت:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(x, y) \\ E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه بالا $[E_x, E_y, E_z]$ مولفه‌های میدان الکتریکی می‌باشند. روابط بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی ϕ عبارتند از:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

برای مد سوم مکانیک شکست که در این مقاله مطالعه می‌شود، مولفه‌های تنش در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی با فرض تغییر خواص بصورت نمایی در جهت ضخامت باریکه و همچنین مولفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی برای دو لایه پیزوالکتریک عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1}(x, y) &= G_x e^{2\lambda y} \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial x} & -h_1 \leq y \leq 0 \\ \sigma_{z_1}(x, y) &= G_y e^{2\lambda y} \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} & -h_1 \leq y \leq 0 \\ \sigma_{z_i}(x, y) &= c_{44} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zy_i}(x, y) &= c_{44} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \\ D_{x_i}(x, y) &= e_{15} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial x} - d_{11} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \\ D_{y_i}(x, y) &= e_{15} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial y} - d_{11} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \quad i \in \{2, 3\}\end{aligned}\quad (۳)$$

در حالیکه در روابط بالا c_{44} ثابت الاستیسیته برای ماده پیزوالکتریک، e_{15} و d_{11} به ترتیب ثابت پیزوالکتریک و دی‌الکتریک در کرنش ثابت، G_x و G_y ثابت الاستیسیته ماده ارتوتروپیک و λ ثابت مربوط به ماده تابعی می‌باشد.

در صورت عدم وجود نیروهای جسمی و شار الکتریکی معادلات تعادل تنش و ماکسول عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (۴)$$

با جایگذاری مولفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی بیان شده در رابطه (۳) در روابط (۴) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} + g^2 \frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial x^2} &= 0 \quad -h_1 \leq y \leq 0 \\ c_{44} \nabla^2 w_i(x, y) + e_{15} \nabla^2 \phi_i(x, y) &= 0, \quad e_{15} \nabla^2 w_i(x, y) - d_{11} \nabla^2 \phi_i(x, y) = 0 \quad i \in \{2, 3\}\end{aligned}\quad (۵)$$

در رابطه بالا ∇^2 اپراتور لاپلاس در صفحه و $g^2 = G_x/G_y$ ثابت می‌باشد. جهت ناهم بسته ساختن معادلات (۵) تابع بلوشتین بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi(x, y) = \varphi - \alpha w(x, y)\quad (۶)$$

که در آن $\alpha = \frac{e_{15}}{d_{11}}$ می‌باشد. با استفاده از تابع بلوشتین تعریف شده در رابطه (۶) و جایگذاری این تابع در رابطه (۵)، معادلات حاکم بصورت ناهم بسته زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} + g^2 \frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial x^2} &= 0 \quad -h_1 \leq y \leq 0 \\ \nabla^2 w_i(x, y) &= 0, \\ \nabla^2 \psi_i(x, y) &= 0 \quad i \in \{2, 3\}\end{aligned}\quad (۷)$$

مولفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی بر حسب تابع $\psi(x, y)$ ، برای دو لایه پیزوالکتریک که در رابطه (۳) ذکر شد، با استفاده از رابطه (۶) بصورت روابط زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_{zx_i}(x, y) = \tilde{c}_{44} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zy_i}(x, y) &= \tilde{c}_{44} \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial y} \\ D_{x_i}(x, y) &= -d_{11} \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial x} \\ D_{y_i}(x, y) &= -d_{11} \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial y} \quad i \in \{2, 3\}\end{aligned}\quad (8)$$

که در رابطه بالا $\tilde{c}_{44} = c_{44} + \alpha e_{15}$ ثابت الکتروالاستیک می‌باشد. در تئوری الکتروالاستیسیته شرایط مرزی مکانیکی درست همانند تئوری کلاسیک الاستیسیته می‌باشد. اما نکته قابل توجه چگونگی اعمال شرایط مرزی الکتریکی و مفهوم فیزیکی آنها است. شرایط مرزی در سازه‌های الکتریکی بستگی به وجود و چگونگی قرارگیری الکتروودها و حالت‌های مختلفی دارد که در جسم، تحریک الکترواستاتیک ایجاد می‌شود.

مطابق شکل (۱) نابجایی در موقعیت (ζ, η) قرار گرفته و خط نابجایی در شکل بصورت خط چین مشخص شده است. نابجایی در الاستیسیته با ایجاد یک شکاف در محیط الاستیک، و حرکت لبه‌های شکاف نسبت به یکدیگر و سپس حذف شکاف تعریف می‌شود. در اثر این عمل تغییر مکان در جسم دو مقداری شده و میدان تنش در ماده بوجود می‌آید. در صورتیکه تغییر مکان وجوه شکاف در جهت عمود بر لبه شکاف به اندازه b_{wz} باشد نابجایی را پاد صفحه‌ای می‌نامند که b_{wz} مولفه بردار برگرز نامیده می‌شود. مولفه تغییر مکان براساس تئوری ولترا در محل نابجایی به دلیل چند مقداری بودن تغییر مکان روی خط نابجایی دارای ناپیوستگی بوده و در نتیجه می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$w_1(x, \eta^-) - w_1(x, \eta^+) = b_{wz} H(x - \xi) \quad |x| < \infty. \quad (9)$$

که $H(x)$ تابع پله‌ای هویساید است. همچنین مولفه‌های تنش روی خط نابجایی دارای پیوستگی می‌باشند که این شرط عبارت است از:

$$\sigma_{yz}(x, \eta^+) = \sigma_{yz}(x, \eta^-) \quad (10)$$

در این بررسی، باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی با اتصال ایده‌ال به دو لایه پیزوالکتریک متصل است که این دو لایه پیزوالکتریک طوری روی باریکه ارتوتروپیک غیر همگن قرار می‌گیرد که هیچ گونه جابجایی نسبی بین دو لایه و باریکه رخ ندهد. با توجه به شکل (۱) شرایط پیوستگی بین باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی و دو لایه بالایی و پایینی پیزوالکتریک و شرط صفر بودن تنش و مولفه جابجایی الکتریکی روی سطح آزاد بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma_{zy2}(x, 0^+) &= \sigma_{zy1}(x, 0^-), & w_2(x, 0^+) &= w_1(x, 0^-), \\ w_1(x, -h_1) &= w_3(x, -h_1), & \sigma_{zy1}(x, -h_1) &= \sigma_{zy3}(x, -h_1), \\ \sigma_{yz}(x, -(h_1 + h_3)) &= 0, & \sigma_{yz}(x, h_2) &= 0 \\ , D_y(x, 0^+) &= 0, & , D_y(x, h_2) &= 0 \\ D_y(x, -h_1) &= 0, & D_y(x, -(h_1 + h_3)) &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

برای حل مسأله نابجایی از تبدیلات انتگرالی استفاده می‌شود که تبدیل مورد نظر در این مسأله تبدیل فوریه است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx} dx \tag{۱۲}$$

$i = \sqrt{-1}$ پارامتر موهومی است. معکوس تبدیل فوریه عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isx} ds \tag{۱۳}$$

باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی را به دو باریکه $-h_1 < y < \eta$ و $\eta < y < 0$ تقسیم می‌کنیم. حال با اعمال تبدیل فوریه (۱۲) به روابط (۷) و با حل معادلات دیفرانسیل برای هر بخش نتایج زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} w_2^*(s, y) &= A_1(s)e^{sy} + A_2(s)e^{-sy} & 0 < y < h_2 \\ \psi_2^*(s, y) &= A_3(s)e^{sy} + A_4(s)e^{-sy} & 0 < y < h_2 \\ w_1^*(s, y) &= A_5(s)e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + g^2 s^2})y} + A_6(s)e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + g^2 s^2})y} & \eta < y < 0 \\ w_1^*(s, y) &= A_7(s)e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + g^2 s^2})y} + A_8(s)e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + g^2 s^2})y} & -h_1 < y < \eta \\ w_3^*(s, y) &= A_9(s)e^{sy} + A_{10}(s)e^{-sy} & -(h_1 + h_3) < y < -h_1 \\ \psi_3^*(s, y) &= A_{11}(s)e^{sy} + A_{12}(s)e^{-sy} & -(h_1 + h_3) < y < -h_1 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

که $w^*(s, y)$ تبدیل فوریه تابع $w(x, y)$ و $\psi^*(s, y)$ تبدیل فوریه $\psi(x, y)$ می‌باشد. ضرایب مجهول $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, 12$ تابعی از ثابت تبدیل فوریه می‌باشند که با استفاده از شرایط مرزی (۹)، (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آیند. پس از بدست آوردن ضرایب مجهول و با استفاده از روابط (۳)، (۱۳) و (۱۴)، میدان تنش بدست آمده در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{G_x b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \\ &\times \int_0^{\infty} \{ \sinh(sh_2) \sinh(\beta y) s \tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y) + \lambda \sinh(\beta y)] \} \\ &\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(\eta + h_1)) - \lambda \sinh(\beta(\eta + h_1))] + \sinh(\beta(\eta + h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s^2 G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]} \\ &\times \cos(s(x - \xi)) ds \\ \sigma_{zy} &= \frac{G_y b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \\ &\times \int_0^{\infty} \{ \sinh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y) - \lambda \sinh(\beta y)] s \tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) \sinh(\beta y) g^2 s^2 \} \\ &\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(\eta + h_1)) - \lambda \sinh(\beta(\eta + h_1))] + \sinh(\beta(\eta + h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]} \\ &\times \sin(s(x - \xi)) ds \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\eta < y < 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{G_x b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \\ &\times \int_0^\infty \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \sinh(\beta(y+h_1)) s\tilde{c}_{44} + G_y \cosh(sh_3) [\beta \cosh(\beta(y+h_1)) + \lambda \sinh(\beta(y+h_1))] \} \\ &\times \frac{\{ \sinh(sh_2) s\tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta\eta) - \lambda \sinh(\beta\eta)] - \sinh(\beta\eta) \cosh(sh_2) g^2 s^2 G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]} \\ &\times \cos(s(x-\xi)) ds \\ \sigma_{zy} &= \frac{G_y b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \\ &\times \int_0^\infty \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s\tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(y+h_1)) - \lambda \sinh(\beta(y+h_1))] + \cosh(sh_3) \sinh(\beta(y+h_1)) G_y g^2 s^2 \} \\ &\times \frac{\{ \sinh(sh_2) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta\eta) - \lambda \sinh(\beta\eta)] - \sinh(\beta\eta) \cosh(sh_2) g^2 s G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]} \\ &\times \sin(s(x-\xi)) ds \end{aligned} \quad -h_1 < y < \eta \quad (15)$$

در رابطه بالا β و $M_i, i = 1, 2, \dots, 5$ بصورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\lambda^2 + g^2 s^2} \\ M_1 &= \sinh(sh_2) s\tilde{c}_{44} \\ M_2 &= \beta \cosh(\beta h_1) + \lambda \sinh(\beta h_1) \\ M_3 &= \beta \cosh(\beta h_1) - \lambda \sinh(\beta h_1) \\ M_4 &= G_y \cosh(sh_3) [\sinh(\beta h_1) G_y g^2 s^2 \cosh(sh_2) + M_1 M_2] \\ M_5 &= e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s\tilde{c}_{44} [G_y \cosh(sh_2) M_3 + \sinh(\beta h_1) M_1] \end{aligned} \quad (16)$$

انتگرال‌های رابطه (۱۵) می‌توانند بصورت عددی حل شوند. در ناحیه باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی مولفه‌های میدان تنش در محل نابجایی دارای تکینگی از نوع کوشی هستند. بمنظور بررسی و جداسازی بخش تکین مولفه‌های تنش، رفتار مجانبی این مولفه‌ها باید بررسی گردد. چون انتگرال‌های رابطه (۱۵)، تابعی پیوسته از s بوده و در $s = 0$ مقدار محدودی است ملاحظه می‌گردد که تکینگی باید در $s \rightarrow \infty$ اتفاق بیافتد. روابط بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۷]:

$$\sigma_{zi}(x, y) = \int_0^\infty [f_{zi}(x, y, s) - f_{zi\infty}(x, y, s)] ds \quad i = x, y \quad (17)$$

که در رابطه بالا $f_{zi\infty} i \in \{x, y\}$ رفتار مجانبی f_{zi} برای مقادیر بزرگ s است. بکمک روابط زیر می‌توان از روابط مجانبی انتگرال‌گیری نمود.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{sy} \sin(sx) ds &= \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y < 0 \\ \int_0^\infty e^{sy} \cos(sx) ds &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad y < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

با میل دادن s به سمت بی نهایت و در نهایت جدا کردن قسمت تکین، می توان انتگرال های رابطه (۱۵) را خوش رفتار کرد. بنابراین مولفه های میدان تنش بصورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{G_x b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{g(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + g^2(y-\eta)^2} \right. \\ &+ \int_0^\infty \{ \sinh(sh_2) \sinh(\beta y) s\tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y) + \lambda \sinh(\beta y)] \} \\ &\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s\tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(\eta+h_1)) - \lambda \sinh(\beta(\eta+h_1))] + \sinh(\beta(\eta+h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s^2 G_y \}}{\beta[M_4 + M_5]} \\ &+ \frac{1}{2} e^{gs(\eta-y)} \} \cos(s(x-\xi)) ds \\ \sigma_{zy} &= \frac{G_y b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{g}{2} \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + g^2(y-\eta)^2} \right. \\ &+ \int_0^\infty \{ \sinh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y) - \lambda \sinh(\beta y)] s\tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) g^2 s^2 \sinh(\beta y) \} \\ &\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(\eta+h_1)) - \lambda \sinh(\beta(\eta+h_1))] + \sinh(\beta(\eta+h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s G_y \}}{\beta[M_4 + M_5]} \\ &- \frac{g}{2} e^{gs(\eta-y)} \} \sin(s(x-\xi)) ds \quad \eta < y < 0 \\ \sigma_{zx} &= \frac{G_x b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{g(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + g^2(y-\eta)^2} \right. \\ &+ \int_0^\infty \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s\tilde{c}_{44} \sinh(\beta(y+h_1)) + G_y \cosh(sh_3) [\beta \cosh(\beta(y+h_1)) + \lambda \sinh(\beta(y+h_1))] \} \\ &\times \frac{\{ \sinh(sh_2) s\tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta\eta) - \lambda \sinh(\beta\eta)] - \sinh(\beta\eta) \cosh(sh_2) g^2 s^2 G_y \}}{\beta[M_4 + M_5]} \\ &- \frac{1}{2} e^{-gs(\eta-y)} \} \cos(s(x-\xi)) ds \\ \sigma_{zy} &= \frac{G_y b_{wz} e^{(\eta+y)\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{g}{2} \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + g^2(y-\eta)^2} \right. \\ &+ \int_0^\infty \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s\tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(y+h_1)) - \lambda \sinh(\beta(y+h_1))] + G_y \cosh(sh_3) g^2 s^2 \sinh(\beta(y+h_1)) \} \\ &\times \frac{\{ \sinh(sh_2) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta\eta) - \lambda \sinh(\beta\eta)] - \sinh(\beta\eta) \cosh(sh_2) g^2 s G_y \}}{\beta[M_4 + M_5]} \\ &- \frac{g}{2} e^{-gs(\eta-y)} \} \sin(s(x-\xi)) ds \quad -h_1 < y < \eta \end{aligned}$$

رفتار مجانبی مولفه تنش با نزدیک شدن به رأس نابجایی یعنی $\xi \rightarrow x$ و $\eta \rightarrow y$ بصورت تکینگی از نوع کوشی می‌باشد که به فرم کلی $\frac{1}{r}$ است. این بدین معنی است که در محل نابجایی مقدار تنش بی‌نهایت می‌شود که این از خصوصیات شناخته شده نابجایی است. در ادامه حل نابجایی بدست آمده را می‌توان برای تحلیل باریکه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی حاوی چندین ترک بکار برد که این امر منجر به تشکیل معادلات انتگرالی با تکینگی از نوع کوشی می‌گردد. با حل معادلات انتگرالی، دانسیته نابجایی بر روی وجوه ترکهای احاطه شده در محیط بدست می‌آید و بکمک آن می‌توان ضریب شدت تنش را در نوک ترکها محاسبه نمود.

۳- معادلات انتگرالی در محیط های حاوی ترک

حل نابجایی بدست آمده در بخش قبل را می‌توان برای تحلیل باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک تضعیف شده توسط چندین ترک بکار برد. فرض کنید که در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی N ترک وجود دارد. معادلات پارامتری ترکها بصورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q) \\ y_i &= y_i(q) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (20)$$

سیستم مختصات عمود بر هم t و n طوری انتخاب شده است که محور t مماس بر سطح ترک بوده و مبداء مختصات روی سطح ترک حرکت کند. بردار تنش پاد صفحه‌ای روی سطح ترک i ام بر حسب مولفه‌های تنش در مختصات کارتزین بصورت زیر است:

$$\sigma_{nz}(x_i, y_i) = \sigma_{zy} \cos \phi_i - \sigma_{zx} \sin \phi_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (21)$$

در رابطه بالا $\phi_i = \tan^{-1}(y'_i(q)/x'_i(q))$ زاویه بین محورهای x و t می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجایی با چگالی نامشخص $B_{ij}(t) dl$ روی ترک i ام به مختصات $(x_j(t), y_j(t))$ روی المان بینهایت کوچک $dl = l_j dt$ میدان تنش ایجاد شده روی سطح ترک i ام بدست می‌آید که در صورتیکه N ترک وجود داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار عبارت خواهد شد از:

$$\sigma_{zn}(x_i(q), y_i(q)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}(q, t) B_{ij}(t) \sqrt{[x'_j(t)]^2 + [y'_j(t)]^2} dt, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

اصل باکنر [۱۸] بعنوان ابزاری برای محاسبه ضریب شدت تنش در نوک ترکها مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق اصل باکنر مسأله محیط حاوی ترک که تحت تاثیر بارهای خارجی قرار دارد را می‌توان به دو مسأله تقسیم کرد. در مسأله نخست، میدان تنش در جسم بدون ترک تحت بارگذاری خارجی بدست می‌آید و مولفه‌های تنش در محل ترک محاسبه می‌شوند. در مسأله دوم جسم حاوی ترک بوده و بار خارجی صفر است. با اعمال مولفه‌های تنش بدست آمده در محل ترک روی لبه‌های ترک در جهت عکس از مسأله اول میدان تنش در کل جسم بدست می‌آید. با جمع دو مسأله مذکور مولفه‌های تنش در سطح ترک صفر شده و حل مسأله مکانیک شکست ایجاد می‌شود.

حل مسأله نخست که یک مسأله تئوری الاستیسیته بوده و مربوط به محیط‌های همبند ساده می‌باشد، عموماً بسادگی صورت می‌گیرد و مسأله اصلی حل مسأله دوم است که در این مقاله بوسیله روش توزیع نابجایی انجام گرفت. بنابراین با استفاده از این اصل، مولفه تنش ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترکها در محیط بدون ترک بعد از تغییر علامت در رابطه (۲۲) قرار گرفته و دانسیته نابجایی $B_{zj}(t)$ باید محاسبه گردد. در معادله انتگرالی (۲۲) کرنل $K_{ij}(q,t)$ تابع معلومی است. تابع $\sigma_{zy}(x_i(q), y_i(q))$ نیز تابع معلومی می‌باشد که با توجه به بارگذاری خارجی تعیین می‌شود. با بکار بردن رابطه (۱۹) و (۲۲) کرنل‌های معادله انتگرالی بصورت زیر حاصل می‌شوند.

$$K_{ij} = \left\{ \frac{G_y e^{(y_j+y_i)\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{g}{2} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + g^2 (y_i - y_j)^2} \right. \right.$$

$$+ \int_0^\infty \{ \sinh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y_i) - \lambda \sinh(\beta y_i)] s \tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) g^2 s^2 \sinh(\beta y_i) \}$$

$$\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(y_j + h_1)) - \lambda \sinh(\beta(y_j + h_1))] + \sinh(\beta(y_j + h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]}$$

$$- \frac{g}{2} e^{gs(y_j - y_i)} \} \sin(s(x_i - x_j)) ds \} \cos \phi_i - \left\{ \frac{G_x e^{(y_j+y_i)\lambda}}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{g(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + g^2 (y_i - y_j)^2} \right. \right.$$

$$+ \int_0^\infty \{ \sinh(sh_2) \sinh(\beta y_i) s \tilde{c}_{44} - G_y \cosh(sh_2) [\beta \cosh(\beta y_i) + \lambda \sinh(\beta y_i)] \}$$

$$\times \frac{\{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(y_j + h_1)) - \lambda \sinh(\beta(y_j + h_1))] + \sinh(\beta(y_j + h_1)) \cosh(sh_3) g^2 s^2 G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{gs(y_j - y_i)} \} \cos(s(x_i - x_j)) ds \} \sin \phi_i \quad y_j < y_i < 0$$

$$K_{ij} = \left\{ \frac{G_y e^{(y_j+y_i)\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{g}{2} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + g^2 (y_i - y_j)^2} \right. \right.$$

$$+ \int_0^\infty \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta(y_i + h_1)) - \lambda \sinh(\beta(y_i + h_1))] + G_y \cosh(sh_3) g^2 s^2 \sinh(\beta(y_i + h_1)) \}$$

$$\times \frac{\{ \sinh(sh_2) \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta y_j) - \lambda \sinh(\beta y_j)] - \sinh(\beta y_j) \cosh(sh_2) g^2 s G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]}$$

$$- \frac{g}{2} e^{-gs(y_j - y_i)} \} \sin(s(x_i - x_j)) ds \} \cos \phi_i - \left\{ \frac{G_x e^{(y_j+y_i)\lambda}}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{g(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + g^2 (y_i - y_j)^2} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \{ e^{2\lambda h_1} \sinh(sh_3) s \tilde{c}_{44} \sinh(\beta(y_i + h_1)) + G_y \cosh(sh_3) [\beta \cosh(\beta(y_i + h_1)) + \lambda \sinh(\beta(y_i + h_1))] \} \\
& \times \frac{\{ \sinh(sh_2) s \tilde{c}_{44} [\beta \cosh(\beta y_j) - \lambda \sinh(\beta y_j)] - \sinh(\beta y_j) \cosh(sh_2) g^2 s^2 G_y \}}{\beta [M_4 + M_5]} \\
& - \frac{1}{2} e^{-gs(y_j - y_i)} \} \cos(s(x_i - x_j)) ds \Big\} \sin \phi_i \quad -h_1 < y_i < y_j \quad (23)
\end{aligned}$$

با حل معادله انتگرالی (۲۲) که دارای تکینگی از نوع کوشی است تابع دانسیته نابجایی $B_{zj}(t)$ بدست می‌آید. پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترکها، بایستی روابطی ارائه نمود که بکمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش در نوک ترکها را بر حسب دانسیته نابجایی بر روی ترکها محاسبه نمود. با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی، بازشدگی دهانه ترک برای ترک j ام از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$w_j^+(q) - w_j^-(q) = \int_{-1}^s B_{zj}(t) \sqrt{[x'_j(t)]^2 + [y'_j(t)]^2} dt \quad j = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

که در آن -1 حد پایین که مشخص کننده ابتدای ترک با طول بی بعد شده واحد و N تعداد ترکها می‌باشد. $w_j^+(q)$ و $w_j^-(q)$ ، به ترتیب نشان دهنده تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک در نقطه‌ای واقع بر ترک است. برای ترکهای واقع در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی، جابجائی در خارج از لبه‌های ترک تک مقداری است بنابراین برای دانسیته نابجایی باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_{-1}^1 B_{zj}(t) \sqrt{[x'_j(t)]^2 + [y'_j(t)]^2} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

دانسیته نابجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۲۲) و (۲۵) بدست می‌آید. بعلت تکینگی تنش در نوک ترکها تابعیت دانسیته نابجایی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود که $g_{zj}(t)$ تابع محدود و پیوسته می‌باشد.

$$B_{zj}(t) = \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی اولین بار توسط اردوغان و همکاران [۱۹] ارائه گردید. در این روش معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف و نظائر آن تعیین می‌شود گسسته شده و به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می‌شود با حل این سیستم معادلات جبری دانسیته نابجایی در نقاطی که در آنها معادلات گسسته شده‌اند بدست می‌آید [۲۰]. ضریب شدت تنش برای ترک j ام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
K_{Rj}^M &= -\frac{G_y \exp(2\lambda y_{Rj}) g}{2} ((x'_j(1))^2 + (y'_j(1))^2)^{\frac{1}{4}} g_{zj}(1), \\
K_{Lj}^M &= \frac{G_y \exp(2\lambda y_{Lj}) g}{2} ((x'_j(-1))^2 + (y'_j(-1))^2)^{\frac{1}{4}} g_{zj}(-1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (27)
\end{aligned}$$

۴- نتایج و مثالهای عددی

با استفاده از حل نابجایی بدست آمده مثال هایی از باریکه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی محدود شده توسط دو لایه پیزوالکتریک حاوی چندین ترک ارائه شده است. به منظور مشخص کردن تاثیر خواص ماده بر روی ضرایب شدت تنش، ماده سرامیک پیزوالکتریک $PZT-4$ در نظر گرفته می شود که دارای خواص ذکر شده در جدول (۱) می باشد.

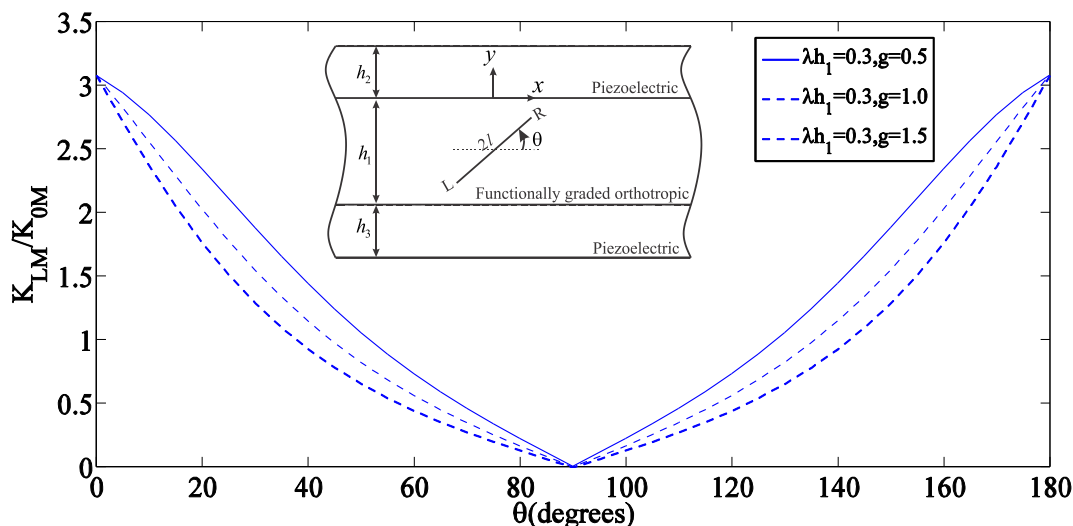
که در آن N نیرو بر حسب نیوتن، C بار بر حسب کلون و V پتانسیل الکتریکی بر حسب ولت می باشد. در مثالهای عددی، پارامترهای هندسی بصورت $h_2 = h_3 = 0.2h_1$ و $h_1 = 0.01(m)$ فرض شده است. علاوه بر این ضریب شدت تنش بوسیله $K_{0M} = \tau_0 \sqrt{l}$ بی بعد می شود. در همه مثالهای ذکر شده، بارگذاری بصورت $\sigma_{zy} = \sigma_0 \cos \theta$ بر روی مرز می باشد در حالیکه θ راستای ترک با مرز باریکه را می سازد.

در اولین مثال حل شده مطابق شکل (۲)، باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی توسط یک ترک به طول بی بعد شده $l/h_1 = 0.2$ واقع در خط مرکزی باریکه تضعیف شده است. در حالیکه راستای آن با مرز باریکه زاویه θ را می سازد. مرکز ترک در خط مرکزی باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی ثابت شده است.

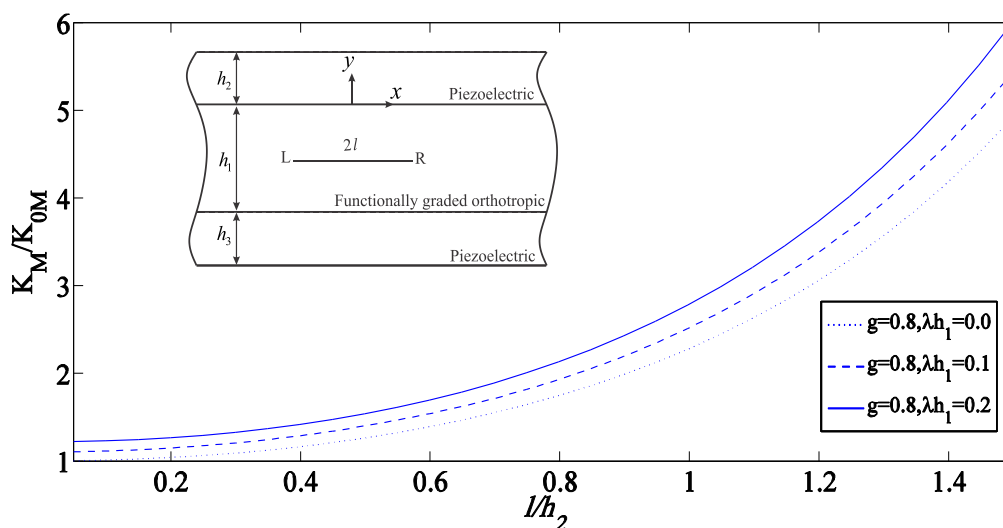
در این مثال تاثیر نسبت مدول برشی g ، بر روی ضریب شدت تنش با جهت گیری دلخواه ترک نسبت به خط افقی مورد بررسی قرار می گیرد. مسأله حل شده نسبت به محور y متقارن می باشد. تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد بر حسب زاویه θ ، برای نسبت مدول برشی $g = 0.5, 1.0, 1.5$ در شکل (۲) نشان داده شده است. چنانچه انتظار می رود در زاویه $\theta = \pi/2$ ، بدلیل اینکه بردار تنش روی سطح ترک برابر صفر است، ضریب شدت تنش صفر می باشد. با مقایسه تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب سه نسبت مدول برشی g ، مشخص می شود که با افزایش نسبت مدول برشی، ضریب شدت تنش کاهش می یابد.

جدول ۱- خواص ماده پیزوالکتریک مورد استفاده در مثالهای عددی

	$PZT-4$
$c_{44} \left(\frac{N}{m^2} \right)$	2.56×10^{10}
$e_{15} \left(\frac{C}{m^2} \right)$	12.7
$d_{11} \left(\frac{C}{Vm} \right)$	64.6×10^{-10}



شکل ۲- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده برای یک ترک زاویه دار

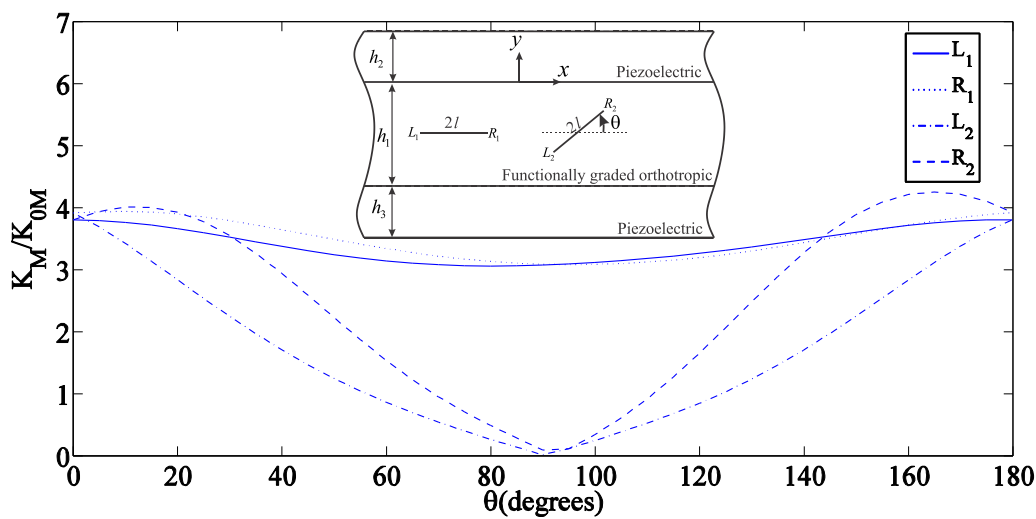


شکل ۳- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب طول ترک بی بعد

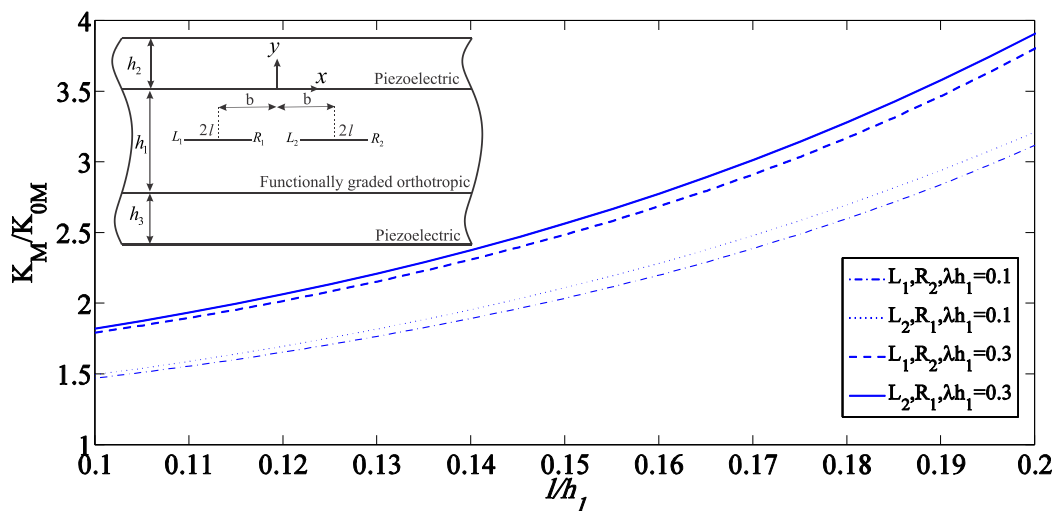
در شکل (۳) تغییرات ضرایب شدت تنش در نوکهای یک ترک واقع در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی بر حسب طول بی بعد شده l/h_2 به ازای سه ثابت تابعی مختلف $\lambda h_1 = 0.0, 0.1, 0.2$ نشان داده شده است. در این مثال $h_2/h_1 = h_3/h_1 = 0.2$ در نظر گرفته شده است. بطوریکه ملاحظه می شود با افزایش خاصیت تابعی و همچنین طول ترک، ضریب شدت تنش افزایش می یابد.

در شکل (۴)، باریکه ارتوتروپیک با خاصیت تابعی توسط دو ترک مستقیم تضعیف شده است. یکی از ترکها روی خط مرکزی ثابت قرار گرفته است درحالیکه مرکز ترک دوم روی خط مرکزی ثابت بوده و ترک حول مرکز آن دوران می کند. تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب تغییرات زاویه چرخش ترک رسم شده است. بطوریکه ملاحظه می شود ترک L_1R_1 ثابت بوده در حالیکه ترک L_2R_2 حول مرکزش می چرخد.

تغییرات ضریب شدت تنش برای ترک ساکن کم می‌باشد و این تغییرات به علت اندرکنش بین دو ترک می‌باشند. در $\theta=0$ به علت تقارن، ضریب شدت تنش L_2 با R_1 و L_1 با R_2 یکسان است و همچنین نوکهای L_2 و R_1 به هم نزدیک بوده و در نتیجه اندرکنش زیادی دارند که منجر به ضریب شدت تنش بالاتری نسبت به نوکهای L_1 و R_2 می‌گردد. با دوران ترک، نوک L_2 از R_1 دور می‌شود و مقدار اندرکنش دو نوک به تدریج کاهش می‌یابد. در $\theta=90^\circ$ با توجه به اینکه بردار تنش روی L_2R_2 برابر صفر می‌شود و اندرکنش بین ترک L_2R_2 با ترک L_1R_1 بسیار ضعیف است مقدار ضریب شدت تنش دو نوک L_2 و R_2 نزدیک به صفر است در حالیکه برای L_1R_1 بدلیل حداکثر بودن بردار تنش روی سطح ترک، ضرایب شدت تنش دو نوک L_1 و R_1 مقدار قابل توجهی است.



شکل ۴- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده بر حسب زاویه بین دو ترک مستقیم



شکل ۵- تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده بر حسب طول ترک بی بعد شده برای دو ترک همراستا

در مثال بعدی، دو ترک با طولهای مساوی واقع در مرکز باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی در نظر گرفته می-شود. در این مثال تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده K_M / K_{OM} ، بر حسب l/h_1 برای $g=1.0$ و مقادیر متفاوت $\lambda h_1 = 0.1, 0.3$ رسم شده است. در این مثال نیز، ضرایب شدت تنش با افزایش خاصیت تابعی و همچنین طول ترک، افزایش می-یابد. ملاحظه می-شود که برای دو نوک نزدیک، به دلیل وجود اندرکنش بین دو ترک، ضریب شدت تنش با شیب بیشتری تغییر می-کند. در مثال بعدی، اندرکنش بین دو ترک منحنی که قسمتی از محیط بیضی هستند، بررسی می-شود. معادلات پارامتری ترکها بصورت روابط زیر می-باشد.

$$\alpha_i(t) = x_c + (-1)^i a \cos\left[\frac{1}{2}(1 - (-1)^i t) \text{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b} \cot g\phi\right)\right]$$

$$\beta_i(t) = y_c + b \sin\left[\frac{1}{2}(1 - (-1)^i t) \text{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b} \cot g\phi\right)\right] \quad -1 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2$$

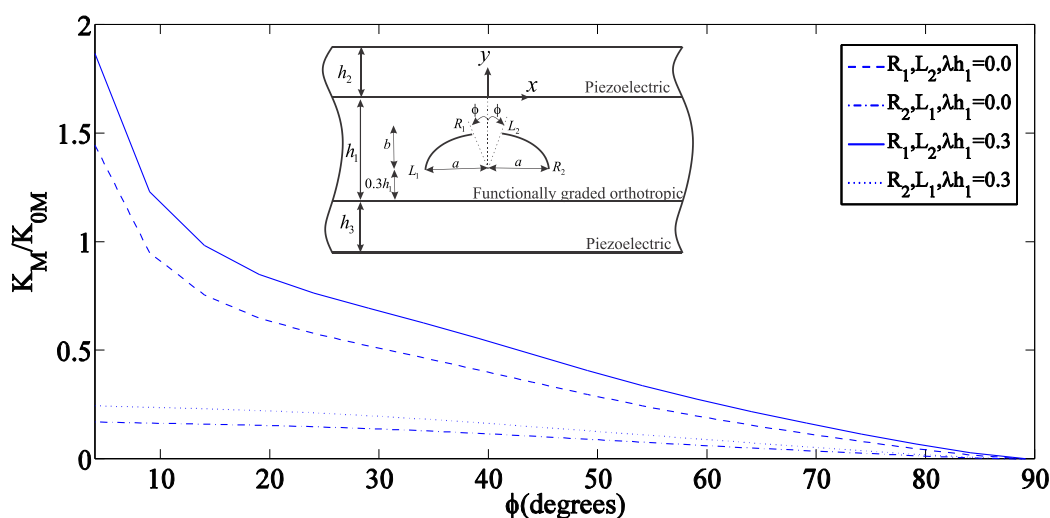
که (x_c, y_c) مختصات مرکز بیضی، $a = 0.4h_1$ و $b = 0.3h_1$ نصف طول قطرهای اصلی و فرعی بیضی است. مسأله نسبت به محور y متقارن است. تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب زاویه ϕ برای دو مقدار متفاوت ثابت تابعی $\lambda h_1 = 0.0, 0.3$ در شکل (۶) رسم شده است. بطوریکه از شکل زیر مشخص است، ضریب شدت تنش بی بعد شده برای $\lambda h_1 = 0.0$ ، نسبت به $\lambda h_1 = 0.3$ کمتر می-باشد. به عنوان آخرین مثال، باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی توسط یک ترک مستقیم بطول l واقع در مرکز باریکه و یک ترک بیضوی به ابعاد هندسی $b/a = 0.6$ ، تضعیف شده است. معادلات پارامتری ترک مستقیم و منحنی بصورت زیر است.

$$x_1(t) = -a + lt,$$

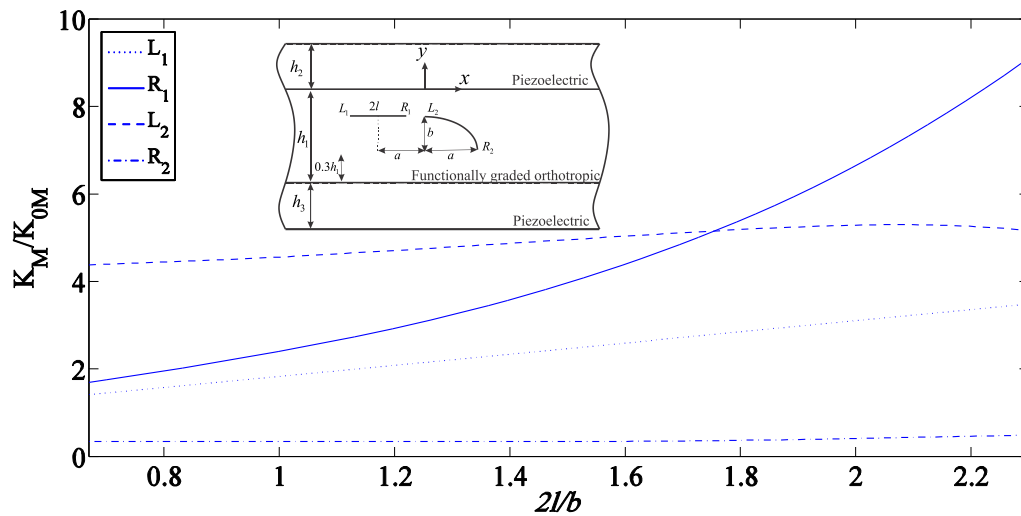
$$y_1(t) = b,$$

$$x_2(t) = a \cos\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right],$$

$$y_2(t) = b \sin\left[\frac{\pi}{4}(1-t)\right], \quad -1 \leq t \leq 1$$



شکل ۶- نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب زاویه بین دو ترک منحنی



شکل ۷- نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب فاصله بین دو ترک مستقیم و منحنی

در شکل (۷) مقادیر ضرایب شدت تنش بی بعد در نوک ترکها بر حسب $2l/b$ رسم شده‌اند. مطابق این شکل، اثرات تغییر فاصله بین ترکها روی ضریب شدت تنش در نوکهای ترک بررسی می‌گردد. همانطوریکه مشاهده می‌شود با افزایش نسبت $2l/b$ ضریب شدت تنش بی بعد شده در نوکهای نزدیک با شیب بیشتری افزایش یافته و نوکهای دور از هم تغییر چندانی ندارد.

۵- نتیجه گیری

حل مسأله شرط مرزی در الاستیسیته را بنحوی که بتواند میدان تنش یک نابجایی در محیطهای محدود و یا نامحدود را ارائه دهد، حل نابجایی در آن محیط می‌نامند. با حل نابجایی با خط برش در یک راستای دلخواه می‌توان میدان تنش در هر نقطه از محیط حاوی نابجایی را بدست آورده و با تبدیل خط نابجایی به المان بی‌نهایت کوچک، ترک را ایجاد نمود. لازم به ذکر است که حل مسائل ترک با روشهای توابع مختلط و یا استفاده از تبدیلات انتگرالی از نوع مسائل شرط مرزی ترکیبی است. یعنی در سطوح ترکها، تنش‌ها که همان مشتقات تغییر مکان هستند معلوم می‌باشد و در خطوط فرضی در امتداد ترکها شرایط پیوستگی موجود بین دو طرف این خطوط مربوط به تغییر مکانها است، ولی در روش توزیع نابجایی شرایط مرزی تنها از نوع تغییر مکان بوده و مسأله محیط همبند با شرایط مرزی ساده که حل آن ساده‌تر از مسأله مقدار مرزی ترکیبی است انجام می‌گردد.

در این مقاله، برای حل معادلات حاکم بر مسأله، از تبدیل فوریه نمایی استفاده شده است و بکمک شرایط مرزی مولفه‌های تنش بدست آمده است. در مثالهای حل شده برای محیط تضعیف شده توسط یک ترک موازی مرز لایه، مشاهده شده است که طول ترک، ثابت ماده تابعی و نسبت مدول برشی در تغییرات ضرایب شدت تنش تاثیر دارد. علاوه بر این نتیجه شد که با افزایش ثابت ماده تابعی و طول ترک و همچنین کاهش نسبت مدول برشی g ، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. همچنین تغییر جهت گیری ترک نسبت به مرز

لایه باعث تغییر بردار تنش روی سطح ترک شده و تاثیر زیادی در تغییرات ضرایب شدت تنش دارد. برای محیط حاوی دو ترک تغییرات مشابهی مشاهده می‌گردد. علاوه بر این در محیط تضعیف شده توسط دو ترک، نوکهای نزدیک به علت اندرکنش بالا ضرایب شدت تنش بالاتری نسبت به نوکهای دور از هم دارند.

مراجع

- [1] Volterra, V., "Sur Pe'quilibre Des Carps Elastiques Multiplement Connexes", Annales Scientifiques De l'Ecole Normale Superiure, Paris, Series 3, Vol. 24, pp. 401-517,(1907).
- [2] Narita, F., and Shindo, Y., "Scattering of Antiplane Shear Waves by a Finite Crack in Piezoelectric Laminates", Acta Mechanica, Vol. 134, pp. 27-73, (1999).
- [3] Lee, J. S., Kwon, S. M., Lee, K. Y., and Kwon, J. H., "Anti-plane Interfacial Yoffe-crack between a Piezoelectric and Two Orthotropic Layers", European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 21, pp. 483-492, (2002).
- [4] Kwon, S. M., Lee, J. S., and Lee, K. Y., "Moving Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Half Planes", International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, pp. 4395-4406, (2002).
- [5] Kwon, S. M., Son, M. S., and Lee, K. Y., "Transient Behavior in a Cracked Piezoelectric Layered Composite: Anti-plane Problem", Mechanics of Materials, Vol. 34, pp. 593-603, (2002).
- [6] Zhao, X., Meguid, S. A., and Liew, K. M., "The Transient Response of Bonded Piezoelectric and Elastic Half Space with Multiple Interfacial Collinear Cracks", Acta Mechanica, Vol. 159, pp. 11-27, (2002).
- [7] Ueda, S., "Crack in Functionally Graded Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Layers under Electromechanical Loading", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 40, pp. 225-236, (2003).
- [8] Kwon, S. M., and Lee, K.Y., "Steady State Crack Propagation in a Piezoelectric Layer Bonded between Two Orthotropic Layers", Mechanics of Materials, Vol. 35, pp. 1077-1088, (2003).
- [9] Chen, J., Soh, A. K., Liu, J., and Liu, Z. X., "Transient Anti-plane Crack Problem of a Functionally Graded Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Layers", Acta Mechanica, Vol. 169, pp. 87-100, (2004).
- [10] Zhong, X. C., and Li, X. F., "A Finite Length Crack Propagating Along the Interface of Two Dissimilar Magnetoelastoelectroelastic Materials", International Journal of Engineering Science, Vol. 44, pp. 1394-1407, (2006).
- [11] Cheng, Z., and Zhao, X., "Fracture Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Coating with Viscoelastic Interfaces", IEEE, pp. 408-411, (2009).

- [12] Li, Y. D., and Lee, K. Y., "Interaction between an Electrically Permeable Crack and the Imperfect Interface in a Functionally Graded Piezoelectric Sensor", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, pp. 363-371, (2009).
- [13] Mousavi, S. M., and Paavola, J., "Analysis of Cracked Functionally Graded Piezoelectric Strip", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, pp. 2449–2456, (2013).
- [14] Asadi, E., Fariborz, S. J., and Fotuhi A. R., "Anti-plane Analysis of Orthotropic Strips with Defects and Imperfect FGM Coating", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 34, pp. 12-20, (2012).
- [15] Bayat, J., Ayatollahi, M., and Bagheri, R., "Fracture Analysis of an Orthotropic Strip with Imperfect Piezoelectric Coating Containing Multiple Defects", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 77, pp. 41–49, (2015).
- [16] Bagheri, R., Ayatollahi, M., and Mousavi, S.M., "Analysis of Cracked Piezoelectric Layer with Imperfect Non-homogeneous Orthotropic Coating", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 93, pp. 93–101, (2015).
- [17] Delale, F., and Erdogan, F., "The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 609-614, (1983).
- [18] Korsunsky, A. M., and Hills, D. A., "The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei", Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 210, No. 1, pp. 23-31, (1996).
- [19] Erdogan, F., Gupta, G. D., and Cook, T. S., "*Numerical Solution of Singular Integral Equations, Method of Analysis and Solution of Crack Problems*", Edited by G. C. Sih, Noordhoof, Leyden, Holland, (1973).
- [20] Faal, R. T., Fotuhi, A. R., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., "Antiplane Stress Analysis of an Isotropic Wedge with Multiple Cracks", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4535-4550, (2004).

فهرست نمادهای انگلیسی

ضرایب ظاهر شده در تبدیل فوریه	$A_i(s), i = 1, 2, \dots, 12$
تابع دانسیته نابجایی بر حسب متغیر بی بعد	$B_{zj}(t)$
بردار برگرز	b_{wz}
ضریب الاستیک ماده در میدان الکتریکی ثابت	c_{44}
مولفه جابجایی الکتریکی در جهت x	D_x
مولفه جابجایی الکتریکی در جهت y	D_y
ثابت دی الکتریک در کرنش ثابت	d_{11}
ثابت پیزوالکتریک در کرنش ثابت	e_{15}

مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور x	E_x
مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور y	E_y
مولفه میدان الکتریکی عمود بر صفحه	E_z
رفتار مجانبی تابع f_{zi}	$f_{zi\infty}$
تابع محدود و پیوسته	$g_{zj}(t)$
ثابت الاستیسیته ماده ارتوتروپیک در جهت محور x	G_x
ثابت الاستیسیته ماده ارتوتروپیک در جهت محور y	G_y
تابع پله‌ای	$H(x)$
ضخامت باریکه ارتوتروپیک ساخته شده از ماده تابعی	h_1
ضخامت لایه پیزوالکتریک بالایی و پایینی	h_2, h_3
ضرایب شدت تنش نوکهای سمت راست و چپ ترک	K_R, K_L
کرنل معادله انتگرالی	$K_{ij}(s, t)$
نصف طول ترک i ام	l_i
تعداد ترک	N
متغیر تبدیل فوریه	s
مولفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x, y	u, v
مولفه جابجایی خارج صفحه‌ای	$w(x, y)$
تبدیل فوریه نامحدود تغییر مکان $w(x, y)$	$w^*(s, y)$
تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک	$w^+_i(q), w^-_i(q)$
مختصات مرکز ترک بیضی	(x_c, y_c)
اپراتور لاپلاس	∇^2
زاویه بین محورهای x و t	$\phi_i = \tan^{-1}(\beta'_i(q)/\alpha'_i(q))$
مختصات موقعیت نابجایی در باریکه ارتوتروپیک با رفتار تابعی	(ξ, η)
تابع بلوشتین	$\psi(x, y)$
تبدیل فوریه عبارت $\psi(x, y)$	$\psi^*(s, y)$
مولفه تنش خارج صفحه‌ای	$\sigma_{zy}(x, y)$
ثابت ماده تابعی	λ

Abstract

In the present paper, the problem of multiple cracks in a non-homogeneous orthotropic layer bonded between two piezoelectric layers is considered. The shear modulus of the middle layer is considered for a class of functional forms for which the equilibrium equation has an analytical solution. The elastic shear modulus of the functionally graded orthotropic layer is considered to vary exponentially. The analysis is based on the stress fields caused by Volterra-type screw dislocation in the functionally graded orthotropic strip.

The solution for dislocation is obtained by means of the complex Fourier transform. The dislocation solution is then employed as strain nuclei to derive singular integral equations for a medium weakened by multiple smooth cracks. The integral equations are of Cauchy singular type at the location of dislocation which are solved numerically for dislocation density functions. Several examples are solved and the stress intensity factors for multiple cracks with different configuration are obtained.