

## شناسایی ترک در دندان چرخنده‌های ساده با استفاده از پاسخ ارتعاشی یاتاقانهای جعبه دنده

جعبه دنده‌ها یکی از تجهیزات مهم در اکثر ماشین‌آلات صنعتی می‌باشند. به همین دلیل امروزه، پایش وضعیت و عیب‌یابی جعبه دنده‌ها با استفاده از ارتعاشات آنها یکی از زمینه‌های تحقیقاتی فعال است. در این مقاله، اثر اندازه ترک در ریشه دندان یک چرخنده بر روی ارتعاشات یاتاقانهای جعبه دنده آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا چرخنده‌های درگیر به صورت دیسک، فنر و دمپر مدل‌سازی می‌شوند. سپس با استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات حاکم بر سیستم در حالت بدون ترک استخراج می‌شود. در ادامه ترک در ریشه دندان مدل‌سازی شده و اثر آن در معادلات حاکم در نظر گرفته می‌شود. با حل معادلات حاکم، پاسخ ارتعاشی سیستم در حالت بدون وجود ترک و در حالت وجود ترک با اندازه‌های مختلف در ریشه دندان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در انتها نتایج حاصل از شبیه‌سازی و حل معادلات مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. با استفاده از نتایج حاصل می‌توان مقدار اندازه ترک در دندان چرخنده را با استفاده از آنالیز ارتعاشات جعبه دنده برآورد کرد.

امیدرضا رضائیان<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

عباس رهی<sup>۲</sup>

استادیار

واژه‌های راهنما: پاسخ ارتعاشی، اندازه ترک در دندان، تحلیل فرکانسی، چرخنده، جعبه دنده

### ۱- مقدمه

عیب‌یابی در تجهیزات مکانیکی و ماشین‌آلات برای جلوگیری از خرابی ناگهانی، توقف تولید و همچنین آسیب‌های مختلف سبب شده است که تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام گیرد. اندازه‌گیری دقیق سیگنال‌های ارتعاشی از تجهیزات و استفاده از روش‌های پردازش سیگنال که می‌توانند به شناسایی تغییرات و شناسایی عیوب منجر شوند، و همچنین فهمیدن نحوه تاثیرگذاری عیوب بر پاسخ ارتعاشی از طریق مدل‌سازی می‌تواند در تشخیص به هنگام عیب در ماشین‌آلات کمک فراوانی کند. بدین ترتیب هزینه‌های نگهداری و تعمیر به میزان قابل توجهی کاهش خواهد یافت.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک طراحی کاربردی، گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران  
omidrezarezaeian@gmail.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران a\_rahi@sbu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۴/۰۵، تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۲/۰۳

با توجه به این که جعبه دنده ها در اکثر ماشین‌آلات صنعتی به کار گرفته می شوند و تقریباً می توان گفت که یکی از مهمترین اجزای تشکیل دهنده آنها نیز می باشد، لذا عیب‌یابی آن همواره مورد نظر محققین فعال در این زمینه بوده است. از مدلسازی ارتعاشی جعبه دنده و صحت‌گذاری آن از طریق مقایسه با جعبه‌دنده واقعی می توان برای درک مکانیزم‌های شناسایی عیب در جعبه دنده ها استفاده کرد و رفتار دینامیکی آن را در اثر وجود برخی عیوب در چرخنده پیش بینی نمود. هر عیب را می توان با روشی خاص در مدل ارتعاشی سیستم وارد کرد. برخی از آنها بر روی سفتی چرخنده‌ها تاثیر می گذارند، و برخی به صورت نیروی خارجی وارد مدل می شوند. در صورتی که مدل به دست آمده در حالت‌های سالم و معیوب با جعبه‌دنده واقعی مقایسه شده باشد و صحت‌گذاری انجام گرفته باشد، می توان از مدل به دست آمده برای عیب‌یابی جعبه دنده در حضور عیوب مختلف استفاده کرد. اولین مدل‌های ارتعاشی برای بررسی دینامیک چرخنده‌ها در دهه (۱۹۵۰) میلادی ارائه شد. مدلسازی‌های ریاضی چرخنده‌ها که بدون در نظر گرفتن عیب می باشند، توسط اوزگون و هوسر [۱] بررسی شده است. مدل‌های بسیاری برای بررسی ارتعاشات چرخنده‌ها ارائه شده است. برخی از آنها یک درجه آزادی و برخی چند درجه آزادی هستند. در اکثر مقالات مدل به کار رفته دو درجه آزادی است که در آن ارتعاش پیچشی یک جفت چرخنده در نظر گرفته شده است.

برای مدل‌های با پیچیدگی کم و درجات آزادی پایین، می توان حل تحلیلی به دست آورد. طبیعی است روش حل تحلیلی دارای مزایایی از قبیل دقت بالای محاسبات و توانایی انجام تحلیل‌های پارامتری می باشد [۲-۴]. یکی از مدل‌ها شامل یک جفت چرخنده که کاربرد بسیاری در مقالات داشته است، توسط اوزگون [۵] ارائه شده است. این مدل شش درجه آزادی است که سفتی درگیری چرخنده‌ها را متغیر در نظر می گیرد، و برای بررسی ارتعاشات عرضی-پیچشی چرخنده‌های ساده ارائه شده است. عوامل در نظر گرفته شده در این مدل، شامل سفتی و میرایی درگیری متغیر با زمان چرخنده‌ها، جدایی دندانه‌ها از همدیگر هنگام درگیری، لقی<sup>۱</sup> بین دندانه‌ها، ضربه‌های یک و دو طرفه‌ی دندانه‌ها<sup>۲</sup>، خطای ساخت و مونتاژ چرخنده‌ها و تصحیح پروفیل دندانه‌ها، می باشد. نمونه‌های دیگری از مدل‌های چند درجه آزادی را می توان در مراجع [۶-۱۰] ملاحظه کرد. بارتلموس [۱۱] جزو اولین افرادی است که از شبیه سازی دینامیکی ارتعاشات چرخنده‌ها برای عیب‌یابی ارتعاشی استفاده کرد. بعدها پری و تاندون [۱۲] مدلسازی‌های انجام شده بر روی جعبه دنده های شامل عیب را مورد بررسی قرار دادند. از نظر آنها نیاز به یک مدل تحلیلی برای دیدن اثر عیب موضعی در چرخنده وجود دارد. عیوب چرخنده‌ای را به روشهای مختلفی می توان در مدل ارتعاشی وارد کرد. برای نمونه ترک و گودی در مرجع [۱۳] با تغییر دادن سفتی درگیری چرخنده‌ها در مدل وارد شده است. در مقالات دیگری همانند [۱۴-۱۵]، با تغییر دادن مقدار و فاز سفتی درگیری، اثر کندگی سطحی و ساییدگی در مدل لحاظ شده است. پری و همکاران [۱۶]، از یک مدل شش درجه آزادی برای بررسی ارتعاشات یک جفت چرخنده ساده دارای کندگی سطح بر روی چرخنده‌ها استفاده کردند. آنها با این توجیه که عیوب سطحی روی دندانه چرخنده سبب ایجاد نوسانات فشار در روانکار می شود و گسست لحظه ای لایه روغن سبب ایجاد تماس ضربه ای می شود، کندگی سطحی را با استفاده از نیروی ایمپالس مدلسازی کردند.

<sup>1</sup>Backlash<sup>2</sup>Single and Double-Sided Impact

پس از انجام مدل‌سازی و صحنه‌گذاری، باید روشی نیز برای شناسایی و تعیین عیب به کار گرفته شود. روش‌های مختلفی برای این منظور در حوزه‌های زمان و فرکانس پیشنهاد شده است، که البته برخی از آنها ممکن است در شرایطی نتوانند به شناسایی صحیح عیب منجر شوند. برای مثال، با مدل‌سازی ترک به صورت تغییر سفتی درگیری، شناسایی عیب ترک‌های کوچک، با استفاده از تحلیل پاسخ دینامیکی ممکن نیست [۱۷]. عیوب می‌تواند بر بخشی از پاسخ ارتعاشی تاثیرگذار نباشد [۱۸]. بزرگ بودن اندازه عیب می‌تواند سبب ناپایداری دستگاه معادلات به دست آمده شود و لذا مدل‌های پیچیده‌تر با روش حل پایدار مورد نیاز است [۱۹].

تحلیل پاسخ ارتعاشی برای یافتن اندازه ترک می‌تواند در حوزه زمان و با روش‌های آماری مانند کرتوسیسی و کرسست فاکتور<sup>۱</sup> پاسخ انجام گیرد [۲۰]. لی و همکاران [۲۱] برای تشخیص وجود ترک از روش تابع کرنل<sup>۲</sup> استفاده کردند. این روش، سیگنال‌های ارتعاشی را به دو دسته سالم و معیوب تقسیم می‌کند که از این طریق، وجود ترک می‌تواند بررسی شود. مطالعه شائو و همکاران [۲۲] بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها نشان می‌دهد که اثر محل ترک از اندازه آن در پاسخ ارتعاشی بیشتر دیده می‌شود. تیان و همکاران [۲۳] اثر رشد ترک را با استفاده از تحلیل پاسخ ارتعاشی به کمک روش‌های کرتوسیسی و جذر میانگین مربعات سیگنال انجام دادند و نشان دادند که مستقل از این که اندازه چرخنده‌ها و گشتاور ورودی جعبه دنده چه مقداری باشد، این روش‌ها برای تخمین اندازه ترک دقت مناسبی دارند.

محمد و رانتالو [۲۴] از روش تابع پاسخ فرکانسی و همچنین تبدیل فوریه در حوالی فرکانس درگیری چرخنده‌ها برای تخمین اندازه ترک در ریشه دندانه استفاده کردند. آنها اظهار نمودند که ترکیب این روش‌ها می‌تواند ترک را با دقت بیشتری تخمین بزند. ژای و همکاران [۲۵] مدل ارتعاشی یک جعبه دنده مربوط به توربین باد (متشکل از چرخنده‌های ساده، هلیکال و سیاره‌ای) را ارائه کردند و صحنه‌گذاری مدل مربوطه را در حوزه فرکانسی انجام دادند. ما و همکاران [۲۶] پاسخ ارتعاشی چرخنده‌هایی که دارای پروفیل اصلاح شده هستند، در اثر ترک در ریشه دندانه بررسی کردند. آنها ترک را در حوزه فرکانس به کمک انرژی لحظه‌ای سیگنال، شناسایی و اندازه آن را تخمین زدند. پاسخ ارتعاشی یک جعبه دنده در اثر نیروی تحریک که دارای فرکانس‌های متعددی است نشان می‌دهد که نتایج واقعی تری به دست می‌آید و تشخیص ترک نیز در حوزه فرکانسی با استفاده از طیف فرکانسی انجام پذیر است [۲۷]. صادقی و حسینی اقدم [۲۸]، مدل شش درجه آزادی غیرخطی چرخنده‌های ساده را برای بررسی اثر خطای ساخت چرخنده ارائه کردند و سپس اثر ترک را در مدل ارتعاشی با استفاده از یک فنر گسسته و کاهش سفتی درگیری، مدل‌سازی کردند. فرشیدیان‌فر و همکاران [۲۹]، پدیده غیر خطی آشوب را در پاسخ ارتعاشی چرخنده‌ها به کمک روش حل بالانس هارمونیک افزایش یافته، بررسی کردند و اظهار نمودند که این تحلیل می‌تواند در تعیین پارامترهای طراحی جعبه دنده، مفید باشد.

در مقاله حاضر، ابتدا مدل پارامتری یک جفت چرخنده ساده در نظر گرفته می‌شود که در آن چرخنده‌ها به صورت دیسک صلب با فنر و دمپرهایی به یکدیگر متصل شده‌اند. این فنر و دمپرها نشانگر سفتی و میرایی دندانه‌ها در هنگام درگیری چرخنده‌ها می‌باشد. محورهای جعبه دنده به صورت فنر پیچشی مدل‌سازی می‌شوند که بر روی درجه آزادی دورانی چرخنده‌ها تاثیر می‌گذارد.

<sup>1</sup> Crest Factor

<sup>2</sup> Approximation Kernel Function

معادلات سیستم مذکور در حالت سالم با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج می‌شوند و سپس اثر ترک در ریشه دندان، به آن اضافه می‌شود. اثر ترک در ریشه دندان به صورت تغییری که در سفتی دندان ترک‌دار و در نتیجه سفتی درگیری یک جفت چرخنده ایجاد می‌کند، به مدل ارتعاشی اضافه می‌شود. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده از کدنویسی در نرم افزار متلب استفاده می‌شود. در ادامه، پاسخ ارتعاشی به دست آمده با استفاده از تبدیل فوریه گسسته به فضای فرکانسی برده می‌شود. در نهایت با بررسی تغییراتی که در فرکانس‌های طبیعی ایجاد می‌شود، رابطه بین اندازه ترک و تغییرات فرکانسی به دست آمده و دامنه ارتعاش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- مدل سازی ارتعاشی سیستم چرخنده‌های

ابتدا معادلات حرکت یک جفت چرخنده ساده درگیر در شکل (۱)، در حالت سالم و سپس در حالت ترک دار با استفاده از روش انرژی به دست می‌آید. سپس نحوه محاسبه سفتی درگیری چرخنده‌ها در حالت سالم و در حالت ترک‌دار ارائه می‌شود و نحوه وارد کردن اثر ترک در مدل ریاضی بیان می‌شود. برای استخراج معادلات ارتعاشی مدل ارائه شده در شکل (۱)، از معادلات لاگرانژ استفاده می‌شود. بدین منظور، باید انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی میرا شده سیستم را مطابق معادلات ۱ الی ۳ محاسبه کرد و سپس آنها را در معادله لاگرانژ (۴) جایگذاری کرد.

$$T = \frac{1}{2} I_D \dot{\theta}_D^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} I_L \dot{\theta}_L^2 \quad (۱)$$

$$V = \frac{1}{2} k_{t1} (\theta_D - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_{t2} (\theta_2 - \theta_L)^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_m (y_1 - y_2 + r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2)^2 \quad (۲)$$

$$D = \frac{1}{2} c_{t1} (\dot{\theta}_D - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} c_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} c_{t2} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_L)^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} c_m (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2)^2 \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T) + \frac{\partial}{\partial q_i} (V) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (D) = Q_i ; i = 1, 2, \dots, N; N = \text{DOF} \quad (۴)$$

بعد از استخراج معادلات حاکم به روش لاگرانژ و انتقال نیروهای ناشی از درگیری بین دو چرخنده به سمت راست معادله، داریم: [۵]

$$I_D \ddot{\theta}_D + k_{t1} \theta_D - k_{t1} \theta_1 + c_{t1} \dot{\theta}_D - c_{t1} \dot{\theta}_1 = T_D \quad (۵)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 - k_{t1} \theta_D + k_{t1} \theta_1 - c_{t1} \dot{\theta}_D + c_{t1} \dot{\theta}_1 = -k_m r_1 (y_1 - y_2 + r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2) - c_m r_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) \quad (۶)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t2} \theta_2 - k_{t2} \theta_L + c_{t2} \dot{\theta}_2 - c_{t2} \dot{\theta}_L = k_m r_2 (y_1 - y_2 + r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2) + c_m r_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) \quad (7)$$

$$I_L \ddot{\theta}_L - k_{t2} \theta_2 + k_{t2} \theta_L + c_{t2} \dot{\theta}_2 - c_{t2} \dot{\theta}_L = T_L \quad (8)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = -k_m (y_1 - y_2 + r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2) - c_m (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) \quad (9)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 = +k_m (y_1 - y_2 + r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2) + c_m (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2) \quad (10)$$

برای این که پس از محاسبه پاسخ، ترتیب متغیرها مشخص باشد، آن‌ها را به صورت رابطه (۱۱) نام‌گذاری می‌کنیم:

$$x_1 = \theta_D ; x_2 = \theta_1 ; x_3 = \theta_2 ; x_4 = \theta_L ; x_5 = y_1 ; x_6 = y_2 \quad (11)$$

با توجه به معادلات بالا، ماتریس‌های جرم  $M$ ، سفتی  $K$ ، و میرایی  $C$  به صورت روابط ۱۲ الی ۱۴ به دست می‌آیند:

$$M = \begin{bmatrix} I_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{t1} & k_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{t2} & -k_{t2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{t2} & k_{t2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{t1} & -c_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{t1} & c_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{t2} & -c_{t2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{t2} & c_{t2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

اگر نیروهای وارد شده را به صورت حاصل ضرب یک ماتریس در بردار متغیرها نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$F_m = K_d \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

که در آن  $F_m$  بردار نیروهای درگیری بین دندان‌ها<sup>۱</sup> می‌باشد.  $K_d$  نیز ماتریس سفتی دینامیکی نامیده می‌شود که شامل ترکیبی از مقادیر سفتی و میرایی دندان‌های درگیر است.

<sup>1</sup> Mesh Force

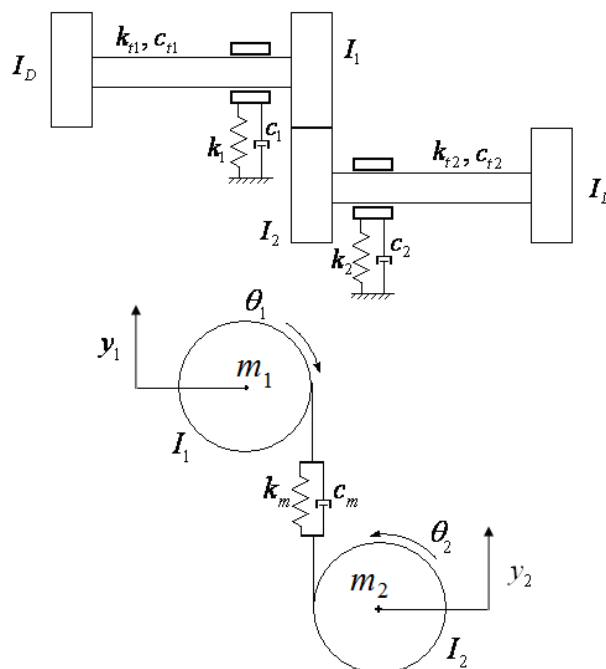
$$X = \begin{Bmatrix} \theta_D \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_L \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} ; \quad \dot{X} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_D \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

نیروهای خارجی که در ورودی جعبه دنده و خروجی آن به ترتیب به صورت گشتاور محرک  $T_D$  و  $T_L$  وارد می‌شود را می‌توان در برداری جداگانه با عنوان نیروهای خارجی  $F_e$  قرار داد که از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

$$F_e = \begin{Bmatrix} T_D \\ 0 \\ 0 \\ T_L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

در نهایت کل بردار نیرو که در سمت راست معادلات به عنوان نیروی تحریک شناخته می‌شود به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = F_m + F_e \quad (18)$$



شکل ۱- سیستم چرخنده ای متشکل از دو چرخنده ساده [۵]

**جدول ۱- مقادیر پارامترهای مورد استفاده در شبیه سازی چرخنده [۵]**

1.56	نسبت درگیری	اینولوت	پروفیل چرخنده
0.1	نسب میرایی	25/25	تعداد دندانه‌ها
108	قطر خارجی	4 mm	مدول
94	قطر دایره مبنا	25 degree	زاویه فشار
90	قطر دایره دندانه	15 mm	پهنای دندانه
6.233	ضخامت دندانه	0.1 mm	لقی
$5.36 \times 10^{-3} \text{ lb. s}^2/\text{in}$	جرم پینیون $m_1$	100 mm	فاصله مرکز بین چرخنده ها
$5.36 \times 10^{-3} \text{ lb. s}^2/\text{in}$	جرم چرخنده $m_2$	$0.0510 \text{ lb. in. s}^2$	اینرسی بار $I_D$
0.005	نسبت میرایی دورانی	$0.0102 \text{ lb. in. s}^2$	اینرسی پینیون $I_1$
		$0.0102 \text{ lb. in. s}^2$	اینرسی چرخنده $I_2$
		$0.0102 \text{ lb. in. s}^2$	اینرسی بار $I_L$

**جدول ۲- ویژگی‌های محورها و یاتاقان‌ها**

$k_1 = k_2 \text{ (lb/in)}$	$k_{t1} \text{ (lb.in/rad)}$	$k_{t2} \text{ (lb.in/rad)}$	$c_1 = c_2 \text{ (lb.s/in)}$
$2.0 \times 10^{10}$	$1.7 \times 10^4$	$3.0 \times 10^4$	2000

### ۳- محاسبه سفتی درگیری

برای محاسبه سفتی درگیری، از استاندارد ISO 6336 استفاده می شود. در استاندارد نحوه محاسبه آن تشریح شده است. بدین ترتیب که ابتدا سفتی درگیری برای یک جفت دندانه  $c'$  از رابطه‌ی ذیل محاسبه می شود:

$$c' = 0.8 \cdot \cos\beta \cdot \frac{c_B}{q} \cdot \frac{2}{206000} \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \left( \frac{\text{N/mm}}{\mu\text{m}} \right) \quad (19)$$

که در آن  $E_1$  و  $E_2$  به ترتیب، مدول الاستیسیته پینیون و چرخنده بر حسب  $\text{N/mm}^2$  هستند. و  $q$  برابر است با:

$$q = c_1 + \frac{c_2}{z_{n1}} + \frac{c_3}{z_{n2}} + c_4 \cdot x_1 + c_5 \cdot \frac{x_1}{z_{n1}} + c_6 \cdot x_2 + c_7 \cdot \frac{x_2}{z_{n2}} + c_8 \cdot x_1^2 + c_9 \cdot x_2^2 \quad (20)$$

$$z_{n1} = \frac{z_1}{\cos^2\beta_b \cos\beta} \quad (21)$$

$$z_{n2} = \frac{z_2}{\cos^2\beta_b \cos\beta}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.04723 ; c_4 = -0.00653 ; c_7 = -0.24188 \\ c_2 &= 0.15551 ; c_5 = -0.11654 ; c_8 = 0.00529 \\ c_3 &= 0.25791 ; c_6 = -0.00193 ; c_9 = 0.00182 \end{aligned} \quad (22)$$

$$c_B = |1 + 0.5[1.2 - h_{fp}^*]| \cdot [1 - 0.02(20^\circ - \alpha)] \quad (23)$$

که در آن  $h_{fp}^* = \text{Dedendum of basic rack profile for module, } m = 1$  و  $\alpha$  زاویه فشار می باشد. در نهایت، سفتی درگیری از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c_Y = c'(0.75\varepsilon_\alpha + 0.25) \left[ \frac{N/mm}{\mu m} \right] \quad (24)$$

که در آن  $c'$  سفتی درگیری یک جفت دندانه است و  $\varepsilon_\alpha$  نسبت درگیری دو چرخنده را نشان می‌دهد. بنابراین با دانستن مشخصات هندسی چرخنده‌ها و جنس آنها می‌توان سفتی درگیری آنها را محاسبه کرد.

روش دیگر محاسبه تغییرات سفتی درگیری آن است که با داشتن سفتی درگیری میانگین، مقادیر سفتی درگیری بیشینه و کمینه محاسبه می‌شود. مقادیر اکسترمم که باید به سفتی درگیری میانگین اضافه شود به صورت ذیل تعریف می‌شود [۸]:

$$k_{\min} = -\frac{k_c}{2\varepsilon_\alpha}, \quad k_{\max} = k_{\min} \frac{2 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - 1} \quad (25)$$

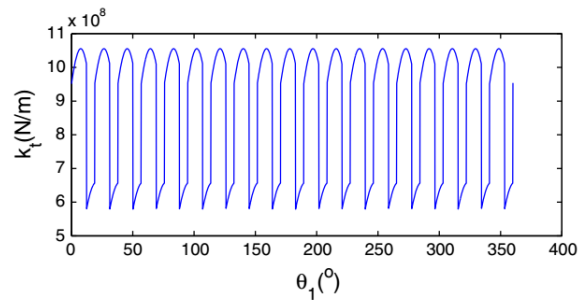
که در آن  $k_c$  سفتی درگیری میانگین چرخنده‌ها و  $\varepsilon_\alpha$  نسبت درگیری آنها را نشان می‌دهند.

#### ۴- مدلسازی ترک در دندانه

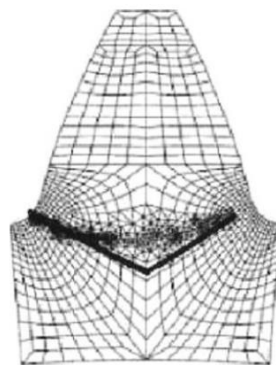
برای مدلسازی ترک در دندانه، از تاثیری که بر روی سفتی درگیری دارد، استفاده می‌شود. زیرا وجود ترک سبب تغییر شکل‌پذیری بیشتر دندانه می‌شود و سفتی آن را کاهش می‌دهد. کاهش سفتی یک دندانه، باعث کاهش سفتی درگیری یک جفت چرخنده و در نتیجه کاهش سفتی درگیری کل می‌شود. می‌توان با در نظر گرفتن این موضوع، اثر ترک را در مدل ارتعاشی چرخنده‌ها وارد کرد. برای مدل ترک از مقاله تیان و همکاران [۲۳]، استفاده می‌شود و اثر ترک بر روی سفتی درگیری یک جفت دندانه به طور متوسط محاسبه می‌شود. سپس این اثر به سفتی درگیری کل اضافه می‌شود. در نهایت سفتی درگیری برای حالت ترک‌دار محاسبه می‌شود. سپس اندازه‌های مختلف ترک در نظر گرفته می‌شود و سفتی درگیری محاسبه می‌شود.

با قرار دادن این مقادیر در معادلات حرکت و حل عددی آنها، پاسخ ارتعاشی جعبه دنده برای ترک با اندازه‌های مختلف به دست می‌آید. در روشی که در مرجع [۲۳] مورد استفاده قرار گرفته است، سفتی درگیری موثر، به صورت تحلیلی با استفاده از روش انرژی پتانسیل مدلسازی می‌شود. کل انرژی پتانسیل ذخیره شده در چرخنده‌ها، شامل چهار قسمت انرژی هرترزین، انرژی خمشی، انرژی محوری فشاری و انرژی برشی است. یک نمونه سفتی درگیری محاسبه شده برای چرخنده‌های سالم، که در مرجع [۲۳] محاسبه شده، در شکل (۲) نشان داده شده است. در شکل (۲)، سفتی درگیری به صورت تابعی از زاویه دوران پینیون رسم شده است. روش محاسبه سفتی دندانه‌های ترک‌دار توسط دیناروندی و همکاران [۳۰] ارائه و در مقاله [۲۳] به کار گرفته شده است. در مقاله مذکور نشان داده شده است که مسیر رشد ترک، طوری است که تقریباً با خط شعاعی دندانه، زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و پس از عبور از نقطه مرکزی، تغییر مسیر می‌دهد (شکل ۳).

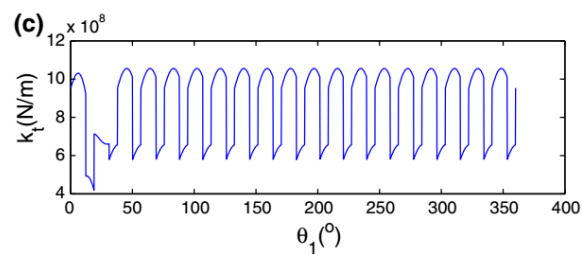
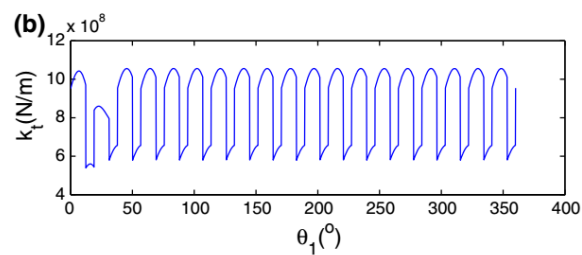
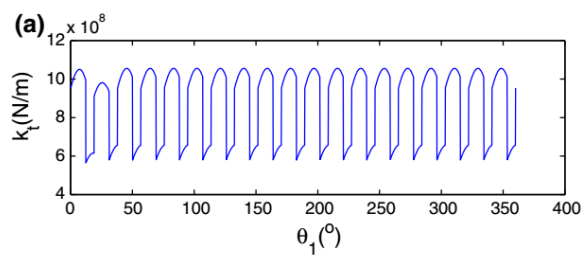




شکل ۲- سفتی درگیری به صورت تابعی از زاویه دوران پینیون برای یک جفت چرخنده سالم [۲۳]



شکل ۳- مسیر حرکت تقریبی ترک دندان [۳۰]



شکل ۴- سفتی درگیری نسبت به درصدهای مختلف ترک، الف) ۱۹,۲ درصد،

ب) ۳۸,۵ درصد و پ) ۵۷,۷ درصد پهنای دندان [۲۳]

در مقاله حاضر، با الگو گرفتن از مراجع فوق، تاثیر ترک بر روی سفتی درگیری به طور تقریبی محاسبه می‌شود و سپس در مدل‌سازی اعمال می‌شود. بدین ترتیب که درصد تغییر سفتی درگیری به دلیل وجود ترک با استفاده از شکل‌ها و ارقام ارائه شده در مرجع [۲۳] محاسبه می‌شود و همان درصدها به سفتی درگیری به دست آمده اعمال می‌شود. پس برای مقادیر مختلف ترک، سفتی درگیری به دست می‌آید و در معادلات حرکت قرار داده می‌شود تا با حل آنها پاسخ ارتعاشی جعبه دنده در حضور ترک با اندازه‌های مختلف به دست آید.

## ۵- حل دستگاه معادلات حرکت غیرخطی

دستگاه معادلات بدست آمده به دلیل وجود لقی و با توجه به اینکه سفتی و میرایی درگیری دندانه‌ها وابسته به زاویه دوران چرخنده‌ها است، غیرخطی می‌باشد. لذا به منظور حل آنها از روش فضای حالت استفاده شده و هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود. بدین منظور متغیرهای جدیدی مطابق رابطه (۲۶) تعریف می‌شود و در هر کدام از معادلات ۵ الی ۱۰، متغیر با بزرگ‌ترین مرتبه مشتق را سمت چپ نگه داشته و بقیه عبارت‌ها به سمت راست معادله منتقل می‌شود.

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_D & x_7 &= \dot{\theta}_D \\ x_2 &= \theta_1 & x_5 &= y_1 & x_8 &= \dot{\theta}_1 & x_{11} &= \dot{y}_1 \\ x_3 &= \theta_2 & x_6 &= y_2 & x_9 &= \dot{\theta}_2 & x_{12} &= \dot{y}_2 \\ x_4 &= \theta_L & x_{10} &= \dot{\theta}_L \end{aligned} \quad (26)$$

با انجام این کار ۶ معادله مرتبه دو تبدیل به ۱۲ معادله مرتبه یک می‌شود. در معادلات به دست آمده  $k_m$  و  $c_m$  متغیر و بقیه پارامترها ثابت هستند. در واقع  $k_m$  وابسته به زاویه چرخش پینیون  $\theta_1$  است (البته می‌توان آن را برحسب متغیر زاویه چرخش چرخنده  $\theta_2$  نیز بیان کرد). اما در حالت پایا و برای هر سرعت زاویه‌ای ثابت، می‌توان آن را به صورت تابعی از زمان نوشت. میرایی درگیری  $c_m$  را هم متناسب<sup>۱</sup> با سفتی درگیری  $k_m$  در نظر می‌گیریم. بنابراین در سرعت زاویه‌ای ثابت پینیون، تمامی ضرایب متغیرها ثابت و یا وابسته به زمان هستند. پس دستگاه معادلات، به یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب متغیر با زمان تبدیل می‌شود. در فضای حالت، دستگاه معادلات در نهایت به شکل رابطه (۲۷) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx + du \end{aligned} \quad (27)$$

بعد از اعمال متغیرهای جدید روابط به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\dot{x}_7 = -\frac{k_{t1}}{I_D} x_1 + \frac{k_{t1}}{I_D} x_2 - \frac{c_{t1}}{I_D} x_7 + \frac{c_{t1}}{I_D} x_8 + \frac{T_D}{I_D} \quad (28)$$

<sup>1</sup> Proportional

$$\begin{aligned} \dot{x}_8 = & \frac{k_{t1}}{I_1} x_1 - \frac{k_{t1} + R_1^2 k_m}{I_1} x_2 + \frac{R_1 R_2 k_m}{I_1} x_3 + \frac{k_{t1}}{I_1} x_4 + \frac{R_1 k_m}{I_1} x_5 - \frac{R_1 k_m}{I_1} x_6 \\ & + \frac{c_{t1}}{I_1} x_7 - \frac{c_{t1} + R_1^2 c_m}{I_1} x_8 + \frac{R_1 R_2 c_m}{I_1} x_9 + \frac{R_1 c_m}{I_1} x_{11} - \frac{R_1 c_m}{I_1} x_{12} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 = & \frac{k_m R_1 R_2}{I_2} x_2 - \frac{k_{t2} + k_m R_2^2}{I_2} x_3 + \frac{k_{t2}}{I_2} x_4 - \frac{k_m R_2}{I_2} x_5 + \frac{k_m R_2}{I_2} x_6 \\ & + \frac{c_m R_1 R_2}{I_2} x_8 - \frac{c_{t2} + c_m R_2^2}{I_2} x_9 + \frac{c_{t2}}{I_2} x_{10} - \frac{c_m R_2}{I_2} x_{11} + \frac{c_m R_2}{I_2} x_{12} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} = & \frac{k_m R_1}{m_1} x_2 - \frac{k_m R_2}{m_1} x_3 - \frac{k_m R_1 + k_1}{m_1} x_5 + \frac{k_m R_1}{m_1} x_6 \\ & + \frac{c_m R_1}{m_1} x_8 - \frac{c_m R_2}{m_1} x_9 - \frac{c_1 + c_m R_1}{m_1} x_{11} + \frac{c_m}{m_1} x_{12} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} = & -\frac{k_m R_1}{m_2} x_2 + \frac{k_m R_2}{m_2} x_3 + \frac{k_m}{m_2} x_5 - \frac{k_m}{m_2} x_6 \\ & - \frac{c_m R_1}{m_2} x_8 + \frac{c_m R_2}{m_2} x_9 + \frac{c_m}{m_2} x_{11} - \frac{c_2 + c_m}{m_2} x_{12} \end{aligned} \quad (32)$$

در نظر گرفتن نیروی درگیری دندان به عنوان تحریک، این مزیت را دارد که می‌توان با دانستن آن در هر مرحله از حل، وضعیت درگیری دندانها را بررسی کرد. نیروی دندان با استفاده از متغیرهای حالت تعریف شده از مرحله قبل محاسبه می‌شود. اگر نیروی درگیری دندان  $F$  مثبت باشد، به این معنی است که دندانها با هم تماس دارند و پینیون سبب حرکت چرخنده می‌شود. اگر نیروی درگیری دندان مثبت نباشد، یا دندانها با هم تماس ندارند<sup>۱</sup> و یا اینکه ضربه عقب<sup>۲</sup> ایجاد شده است. بنابراین باید بررسی شود که کدام حالت پیش آمده است. اگر نیروی درگیری صفر باشد یعنی این که دندانها با هم تماس ندارند و پدیده غیرخطی جدایی دندانها<sup>۳</sup> ایجاد شده است و به جای نیروی دندان  $F_m$ ، در معادلات (۲۸) و (۳۲) مقدار صفر را جایگزین می‌کنیم. مفهوم نیروی درگیری منفی هم آن است که ضربه عقب ایجاد<sup>۴</sup> شده است. در ضربه عقب، پشت دندان پینیون به صورت دندان چرخنده برخورد می‌کند (در صورتی که در حالت عادی صورت دندان پینیون به پشت دندان چرخنده نیرو وارد می‌کند)، و به این معنی که پینیون به جای این که راننده باشد، در خلاف جهت دوران، به چرخنده نیرو وارد می‌کند. در این حالت نیروی درگیری دندان به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_0 = k_m (\theta_1 R_1 - \theta_2 R_2 + y_2 - y_1 + b) + c_m (\dot{\theta}_1 R_1 - \dot{\theta}_2 R_2 + \dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad (33)$$

<sup>1</sup> Tooth Separation

<sup>2</sup> Backside Collision

<sup>۳</sup> به این دلیل که نیروی درگیری دندان برابر صفر می‌شود و دستگاه معادلات باید از طریق دیگری حل شوند.

<sup>4</sup> Tooth Backside Collision

برای این که متوجه شویم جدایی دندانها و یا ضربه عقب اتفاق افتاده است، مقدار خطای انتقال دینامیکی را با مقدار لقی مقایسه می‌کنیم.

$$F > 0 \Rightarrow F = F_0 \quad (34)$$

$$F \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} F = F_0 + k_m b, & TE \geq b \\ F = 0, & -b < TE < b \end{cases} \quad (35)$$

که در آن،  $b$  مقدار لقی است و خطای انتقال  $TE$  که اختلاف بین حرکت خطی پینیون و چرخنده بر روی دایره گامی است و به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$TE = (\theta_1 R_1 - \theta_2 R_2) \quad (36)$$

در صورتی که جدایی دندانها ایجاد شده باشد از رابطه (34) و اگر ضربه عقب ایجاد شده باشد از رابطه (35) برای محاسبه نیروی دینامیکی دندان  $F$  استفاده می‌شود. بنابراین با توجه به روابط (34) و (35) دستگاه معادلات غیرخطی بدست آمده بر اساس نیروی درگیری دندانها به سه قسمت تبدیل می‌شود. به این معنی که دندان پینیون به دندان چرخنده نیروی مثبت، منفی و یا صفر اعمال می‌کند. برای حل هر کدام از این قسمت‌ها از روش حل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌شود. این حل‌ها در نقاط اشتراک به یکدیگر ارتباط می‌یابند تا حل کلی بدست آید. دستگاه معادلات کلی به دست آمده به دلیل وجود لقی، یک دستگاه معادلات غیرخطی است که از چندین دستگاه معادلات خطی تشکیل شده است.

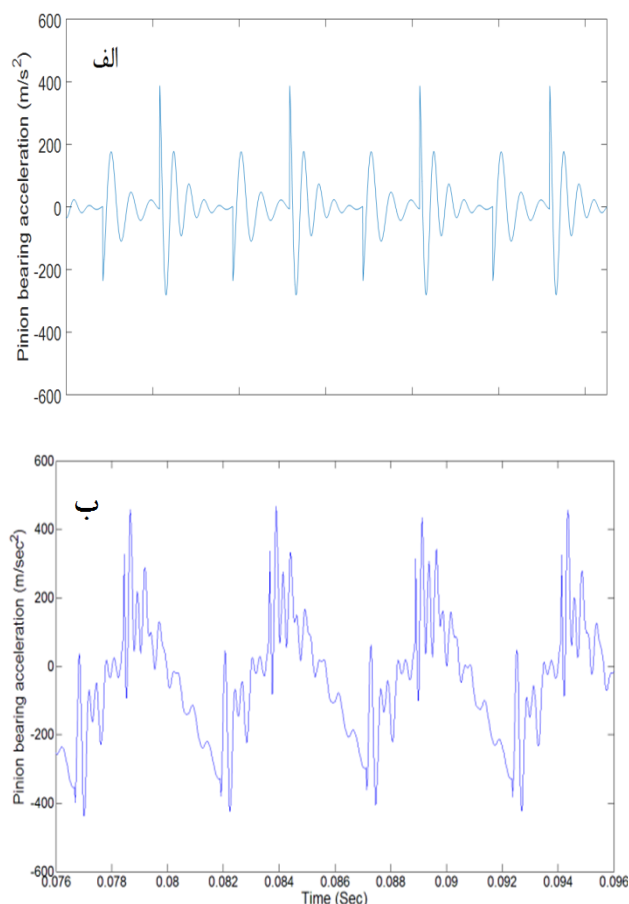
## ۶- پاسخ ارتعاشی جعبه دنده در حالت سالم

در این بخش، ابتدا نتایج به دست آمده با استفاده از مرجع [۳۰] صحنه‌گذاری می‌شود. بدین منظور، شتاب جانبی یاتاقان پینیون که از حل دستگاه معادلات در نرم افزار متلب به دست آمده، با نتیجه ارائه شده در [۳۰] مقایسه می‌شود. چرا که مدل و پارامترهای به کار رفته در آن، مانند مدل و پارامترهای مورد استفاده در این مرجع است. همان طور که در شکل (۵)، مشاهده می‌شود نتایج از نظر کیفی و کمی مشابه هم هستند. در نتایج مربوط به مرجع [۳۰]، بین دو قله متوالی، شتاب حالت مورب (صعودی یا نزولی) دارد در حالی که در نتایج به دست آمده، این حالت وجود ندارد. با دقت در فرضیات و اثرات در نظر گرفته شده در اینجا، می‌توان این تفاوت را به عدم وجود خطای ساخت پروفیل چرخنده در مدلسازی به کار رفته دانست. خطای پروفیل چرخنده به صورت انحراف از پروفیل اینولوت ایده‌آل و به صورت یک تابع اتفاقی تعریف می‌شود که اثر آن در نیروی تحریک وارد می‌شود. با دقت در این دو شکل، می‌توان فهمید که روند ارتعاش بین دو قله متوالی از نظر کمی و کیفی مشابه یکدیگر است. بنابراین با این مقایسه، درستی معادلات حرکت و حل آنها اثبات می‌شود و می‌توان در تحلیل‌های بعدی که شامل ترک هم می‌شود، از آنها استفاده کرد.

مقادیر پارامترهای جعبه دنده در شبیه‌سازی کامپیوتری انجام شده در جدول (۳) ارائه شده است. در شکل (۶) شتاب مربوط به یاتاقان پینیون نشان داده شده است. این مقادیر از شبیه‌سازی عددی به دست آمده است. با دقت در شکل مذکور متوجه می‌شویم که تغییرات شتاب حالت تناوبی دارد. دلیل اصلی این پدیده آن است که سفتی درگیری دندانها متناوب است. در شکل (۷) نیز شتاب مربوط به یاتاقان چرخنده ارائه شده است. همان طور که دیده می‌شود، روند تغییرات آن مشابه شتاب یاتاقان پینیون است.

شتاب نقطه‌ی گامی که در واقع شتاب مماسی چرخنده بر روی دایره گامی است و حاصل ضرب شتاب دورانی در شعاع دایره گامی می‌باشد، برای پینیون و چرخنده به ترتیب در شکل‌های (۸) و (۹) ارائه شده است. همان‌طور که از شکل‌های مذکور می‌توان فهمید، رفتار شتاب پینیون و چرخنده از نظر کیفی مشابه همدیگر است. اما از نظر کمی متفاوت هستند، زیرا پارامترهای آنها از جمله تعداد دندان‌ها، سفتی و میرایی یاتاق‌ها و محورهای مربوط به آنها با هم فرق دارند. برای مشخص‌تر شدن نحوه تغییرات شتاب چرخنده‌ها که عمدتاً در اثر تغییرات سفتی درگیری بین دو چرخنده ایجاد می‌شود، بر روی شتاب یاتاقان پینیون در بازه زمانی کوچکی تمرکز می‌شود.

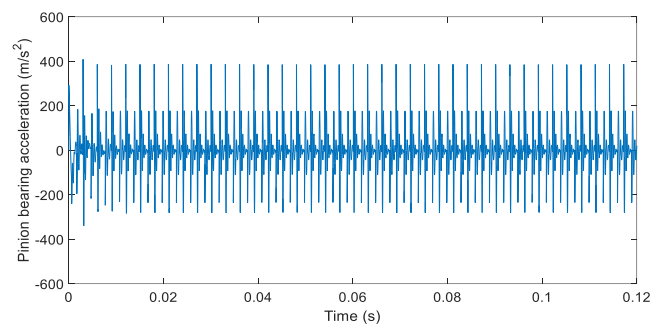
در شکل (۱۰) که شتاب یاتاقان پینیون در بازه کوچک‌تری نشان داده شده است، دیده می‌شود که بین دو قله متوالی در شتاب، دو بخش قابل تفکیک است که بخش اول همان‌طور که اشاره شد، بازه ای است که در آن دو جفت چرخنده درگیر هستند و در بازه زمانی دوم هم، یک جفت چرخنده درگیر می‌باشند. طول بازه زمانی که دو جفت چرخنده درگیر هستند، با توجه به نسبت درگیری چرخنده‌ها که بزرگ‌تر از یک می‌باشد، بزرگ‌تر از طول بازه زمانی درگیری یک جفت چرخنده است.



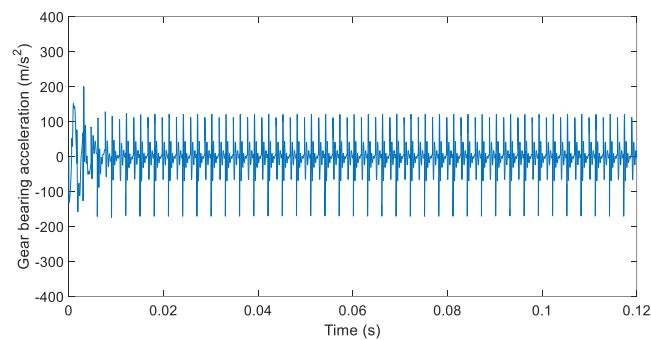
شکل ۵- شتاب جانبی یاتاقان پینیون: الف) نتایج حاصل از حل معادلات در متلب، ب) مرجع [۳۰]

جدول ۳- مقادیر پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی کامپیوتری

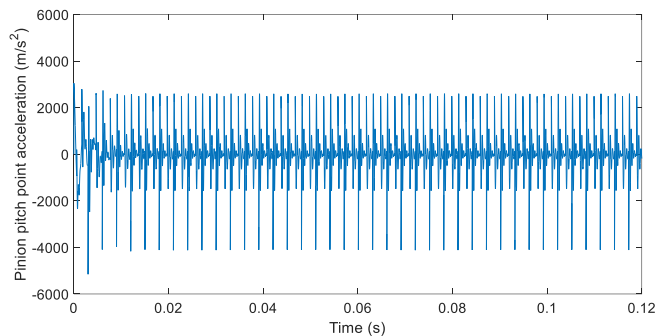
چرخنده	پینیون	پارامتر
۹۵۲	۱۰۰۰	سرعت ( $rpm$ )
۲۱	۲۰	تعداد دندانه‌ها
۰/۳۰	۰/۱۵	پهنای دندانه ( $m$ )
۰/۱۱۰	۰/۰۹۲	قطر محور ( $m$ )
۰/۰۱	۰/۰۱	مدول ( $m$ )
۲۰	۲۰	زاویه فشار (درجه)
۸۰	۳۶	وزن ( $N$ )
۳۳۸۳	۱۹۱۷	سفتی پیچشی محور ( $N.m / rad$ )
۱۰ <sup>۹</sup>	۱۰ <sup>۸</sup>	سفتی یاتاقان ( $N / m$ )
۰/۳۵۷	۰/۲۶۷	ضریب میرایی ویسکوز محور ( $N.S / rad$ )
۸۷۴۰/۱۵	۸۷۴۰/۱۵	ضریب میرایی ویسکوز یاتاقان ( $N.S / m$ )
	۲۰۰	گشتاور ( $N.m$ )



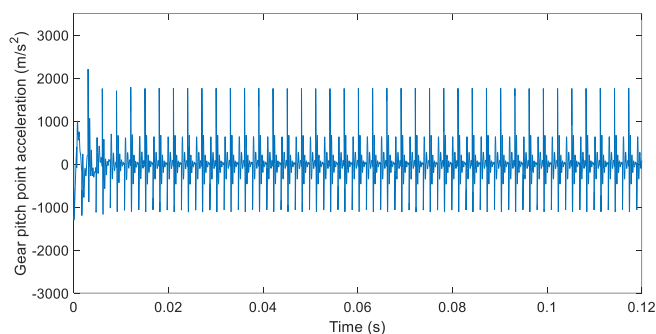
شکل ۶- شتاب جانبی یاتاقان پینیون



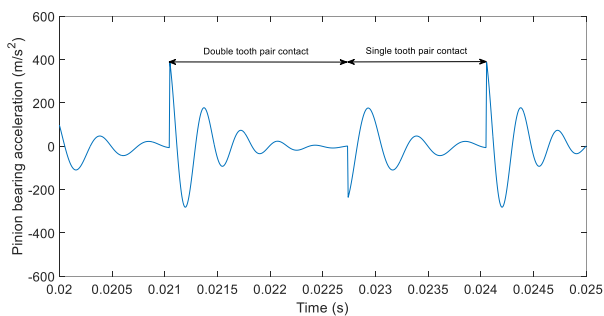
شکل ۷- شتاب جانبی یاتاقان چرخنده



شکل ۸- شتاب نقطه گامی پینیون



شکل ۹- شتاب نقطه گامی چرخنده



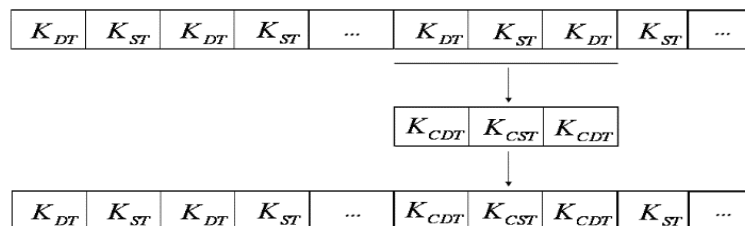
شکل ۱۰- شتاب جانبی یاتاقان پینیون، بزرگ‌نمایی در بازه زمانی کوچک

## ۷- مدل‌سازی ترک در دندانه

در این بخش، ابتدا نحوه وارد کردن اثر ترک در ریشه دندانه در مدل ریاضی بیان می‌شود و سپس نحوه تغییرات سفتی درگیری در هنگامی که دندانه ترک‌دار درگیر می‌شود، نشان داده می‌شود. در حالت کلی باید اشاره شود که سفتی درگیری چرخنده‌ها با در نظر گرفتن کلیه شرایط از جمله شرایط هندسی چرخنده‌ها، مشخصات جنس، روش روانکاری و نحوه قرارگیری آنها نسبت به هم‌دیگر به کمک نرم‌افزارهای المان محدود به دست می‌آید. برای چرخنده‌های ترک‌دار نیز، به همان منوال سفتی درگیری به دست می‌آید. در مرجع [۲۳] نشان داده شده است که وجود ترک سبب کاهش سفتی درگیری در هنگام درگیری دندانه ترک‌دار می‌شود.

همان طور که در شکل (۴) دیده می‌شود، با افزایش طول ترک، در بازه‌ای از زاویه دوران چرخنده که دندان ترک‌دار درگیر می‌شود، سفتی درگیری کاهش پیدا می‌کند و این افت مقدار سفتی با افزایش طول ترک افزایش می‌یابد. برای مدل‌سازی اثر ترک، از نتایج موجود در مرجع [۲۳] استفاده می‌شود، زیرا مدل‌سازی و به دست آوردن سفتی درگیری با روش المان محدود بسیار پیچیده است. روش کار بدین گونه است که برای طول‌های مختلف ترک (به عبارت بهتر، نسبت ترک به پهنای دندان که به صورت درصد بیان می‌شود. تغییرات میزان سفتی درگیری در حالتی که یک و دو جفت دندان درگیر هستند، به کمک نتایج ارائه شده، محاسبه می‌شود. در جدول (۴)، تغییرات سفتی درگیری برای مقادیر مختلف ترک ذکر شده است. این تغییرات بر روی سفتی درگیری در مدل ارتعاشی اعمال می‌شود و با حل دستگاه معادلات مربوطه، پاسخ ارتعاشی جعبه دنده برای مقادیر مختلف ترک به دست می‌آید. با توجه به جدول (۴) می‌توان فهمید که با افزایش طول ترک، کاهش بیشتری در سفتی درگیری رخ می‌دهد. برای جعبه دنده در نظر گرفته شده با مشخصاتی که در جدول (۳) ارائه شد، با کمک مقادیر جدول (۴)، تغییرات سفتی اعمال می‌شود. همان طور که از شکل (۴) بر می‌آید، تغییرات سفتی به صورت تناوبی است. به این صورت که ابتدا یک دو جفت دندان درگیر هستند، سپس یک جفت و دوباره دو جفت دندان درگیر می‌شوند. در بازه‌ای که یک دندان وارد درگیری و یا از آن خارج می‌شود، این تغییرات از دو جفت به یک جفت و سپس به دو جفت رخ می‌دهد.

اگر مطالب ذکر شده در مورد تغییرات سفتی درگیری چرخنده‌ها به صورت ماتریسی نشان داده شود، تغییرات سفتی درگیری و نحوه وارد کردن اثر ترک در آن را می‌توان مانند شکل (۱۱) نشان داد که در آن  $K_{DT}$  و  $K_S$  به ترتیب سفتی درگیری یک و دو جفت دندان سالم، و  $K_{CDT}$  و  $K_{CST}$  به ترتیب سفتی درگیری یک و دو جفت دندان ترک‌دار را نشان می‌دهند. برای در نظر گرفتن ترک دندان در مدل دینامیکی، مقادیر سفتی درگیری دندان‌ها تغییر داده می‌شود. سفتی درگیری به صورت ماتریسی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین کافی است که با توجه به شکل (۱۱)، سفتی را در بازه‌ای که دندان معیوب (ترک‌دار) در حال درگیری است با سفتی معادل ترک تعویض شود. نحوه انجام این تغییر در ماتریس سفتی مشخص است، که در آن  $K_{DT}$  و  $K_{ST}$  که به ترتیب سفتی درگیری یک و دو جفت دندان سالم می‌باشد، با  $K_{CDT}$  و  $K_{CST}$  که به ترتیب سفتی درگیری یک و دو جفت دندان ترک‌دار را نشان می‌دهند، تعویض می‌شوند. بدین ترتیب در بازه‌ای که دندان ترک‌دار درگیر است، اثر تغییر سفتی وارد تابع سفتی درگیری می‌شود. سفتی درگیری به صورت تابعی از زمان در معادلات حرکت با  $K_m$  نشان داده شد. برای حالت دندان ترک دار، مقدار سفتی تغییر یافته آن که با روش گفته شده محاسبه می‌شود، در معادلات حرکت جایگذاری می‌شود و با حل معادلات مربوطه، پاسخ ارتعاشی جعبه دنده به دست می‌آید.



شکل ۱۱- نحوه اعمال تغییرات سفتی برای لحاظ کردن اثر ترک



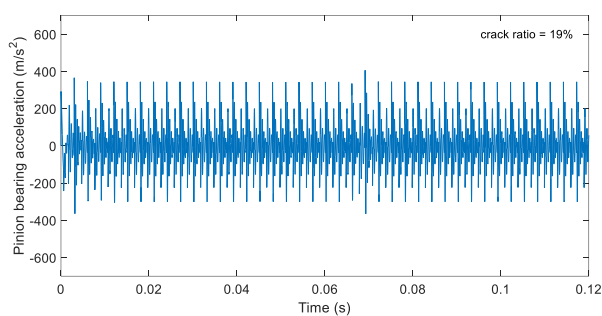
**جدول ۴ - تغییرات سفتی درگیری با توجه به نتایج مرجع [۲۳] برای مقادیر مختلف طول ترک**

طول ترک = ۱,۵ میلی متر، نسبت طول ترک به پهنای دندان = ۱۹٪		
کاهش سفتی دو جفت دندان اول	کاهش سفتی یک جفت دندان	کاهش سفتی دو جفت دندان دوم
٪۱	٪۸	٪۱۰
طول ترک = ۳ میلی متر، نسبت طول ترک به پهنای دندان = ۳۸٪		
کاهش سفتی دو جفت دندان اول	کاهش سفتی یک جفت دندان	کاهش سفتی دو جفت دندان دوم
٪۱۹	٪۱۶	٪۱۹
طول ترک = ۴,۵ میلی متر، نسبت طول ترک به پهنای دندان = ۵۸٪		
کاهش سفتی دو جفت دندان اول	کاهش سفتی یک جفت دندان	کاهش سفتی دو جفت دندان دوم
٪۵	٪۴۶	٪۳۴

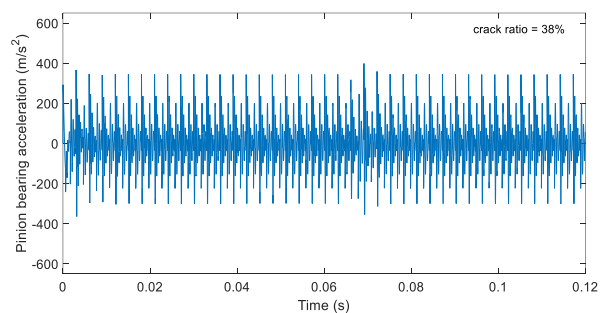
**۸- پاسخ ارتعاشی جعبه دنده برای حالت ترک دار**

در این بخش، ارتعاشات جعبه دنده با وجود ترک در ریشه دندان یکی از چرخنده‌ها (در اینجا پینیون) بررسی می‌شود. سه مقدار اندازه ترک که در واقع نسبت به پهنای دندان سنجیده می‌شود، به صورت ترک با مقادیر ۱۹٪، ۳۸٪ و ۵۸٪ در مدل ارتعاشی وارد می‌شود. این درصدها به ترتیب معادل ترک‌هایی به طول‌های ۴ میلی‌متر، ۸ میلی‌متر و ۱۲ میلی‌متر می‌باشند. پهنای دندان چرخنده که بر روی دایره ریشه دندان اندازه‌گیری می‌شود، برابر ۲۰ میلی‌متر است. دقت شود که پهنای دندان در راستای محیطی اندازه‌گیری می‌شود و با عمق دندان متفاوت است. فرض بر این است که ترک‌ها، تمام عمق هستند و تا انتهای دندان ادامه پیدا می‌کنند. این مقادیر ترک و اثر آن بر روی مدل، با استفاده از نتایج مرجع [۲۳]، مدلسازی شده است. تغییر در مقدار شتاب یاتاقان پینیون هنگام درگیری دندان ترک‌دار برای ترک با طول‌های ۴ میلی‌متر، ۸ میلی‌متر و ۱۲ میلی‌متر به ترتیب در شکل‌های (۱۲) تا (۱۴) در زمان حدود ۰,۰۷ ثانیه دیده می‌شود. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش اندازه ترک، میزان شتاب هنگام درگیری دندان ترک‌دار، افزایش بیشتری دارد. این افزایش به صورت ناگهانی و ایمپالس مانند است، زیرا در زمان کوتاهی و در گذر از دندان ترک‌دار رخ می‌دهد. در شکل‌های (۱۵) تا (۱۷) نیز، شتاب یاتاقان چرخنده برای مقادیر مختلف ترک ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، با افزایش طول ترک، در هنگام درگیری دندان ترک‌دار، شتاب افزایش بیشتری دارد. موضوع دیگری که در اینجا قابل ذکر است، آن است که تغییرات دامنه شتاب در هنگامی که درگیری دندان ترک‌دار برای افزایش طول ترک از ۴ به ۸ میلی‌متر، نسبت به هنگامی که از ۸ به ۱۲ افزایش می‌یابد، کمتر است و شتاب افزایش کمتری دارد. همچنین دیده می‌شود که اثر ترک با طول بزرگ که ۸ میلی‌متر است، به صورت نیروی ایمپالسی بزرگی است که تغییر قابل توجهی در شتاب چرخنده‌ها ایجاد می‌کند (شکل ۱۷). نحوه تغییرات شتاب نقطه گامی پینیون برای مقادیر افزاینده ترک در ریشه دندان در شکل‌های (۱۸) تا (۲۰) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها بر می‌آید، تغییرات مقادیر شتاب در هنگام درگیری دندان ترک‌دار در زمان حدود ۰,۰۷ ثانیه، مشابه روند تغییرات شتاب یاتاقان پینیون می‌باشد. همچنین شتاب نقطه گامی چرخنده برای مقادیر مختلف ترک در شکل‌های (۲۱) تا (۲۳) ارائه شده است که تغییرات آنها نیز مانند شتاب یاتاقان‌ها است که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت.

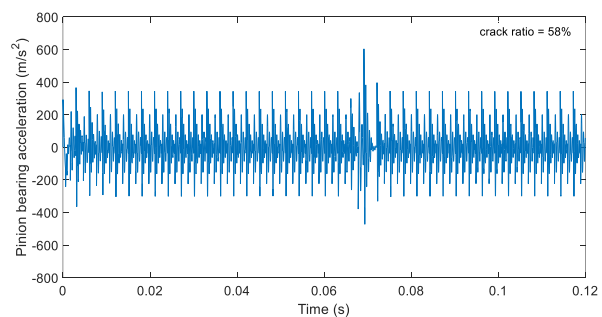
با این بررسی‌ها، آشکار می‌شود که اثر ترک به صورت یک نیروی ایمپالس سبب افزایش ناگهانی شتاب در هنگام درگیری دندانچه ترک‌دار می‌شود و افزایش دامنه شتاب با افزایش طول ترک رابطه‌ی مستقیم دارد. بدین معنی که هر قدر طول ترک بیشتر باشد، دامنه شتاب بزرگ‌تر می‌شود. همان‌طور که قبلاً بیان شد، وجود ترک سبب کاهش مقدار سفتی درگیری در طول درگیری دندانچه ترک‌دار می‌شود و این کاهش سفتی، در حالتی که نیروی وارده به چرخنده‌ها ثابت است، سبب افزایش دامنه شتاب می‌شود.



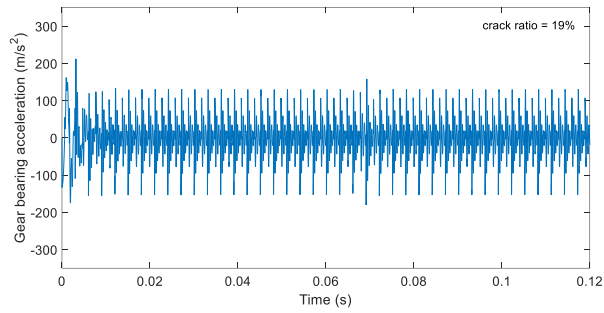
شکل ۱۲- شتاب یاتاقان پینیون برای ترک ۱۹٪



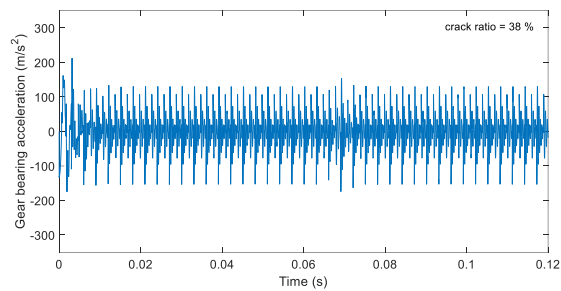
شکل ۱۳- شتاب یاتاقان پینیون برای ترک ۳۸٪



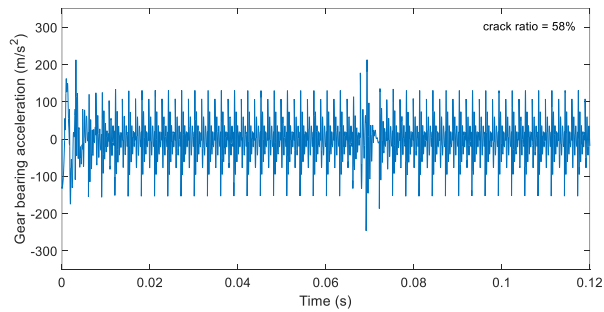
شکل ۱۴- شتاب یاتاقان پینیون برای ترک ۵۸٪



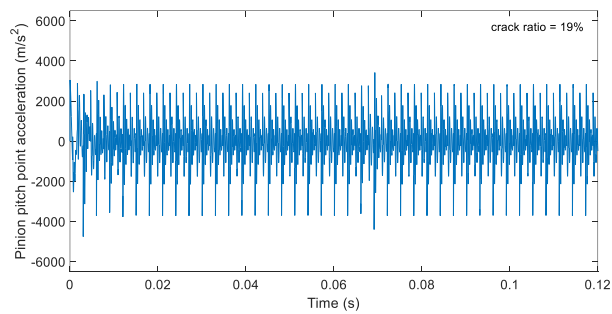
شکل ۱۵- شتاب یاتاقان چرخنده برای ترک ۱۹٪.



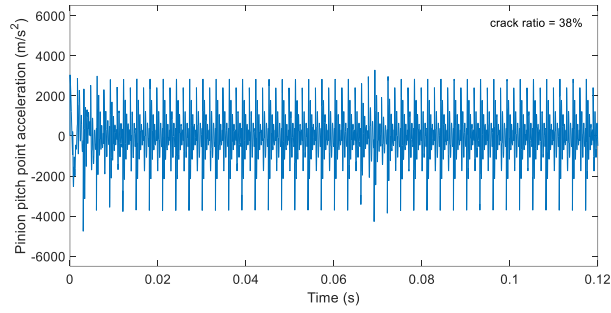
شکل ۱۶- شتاب یاتاقان چرخنده برای ترک ۳۸٪.



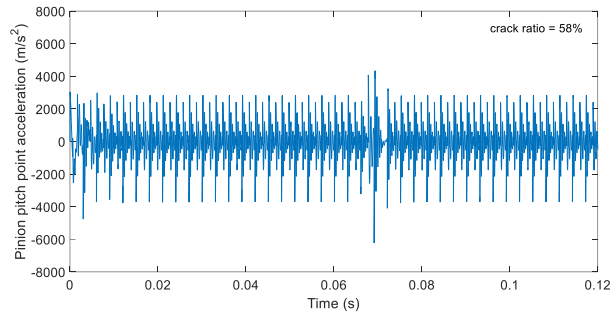
شکل ۱۷- شتاب یاتاقان چرخنده برای ترک ۵۸٪.



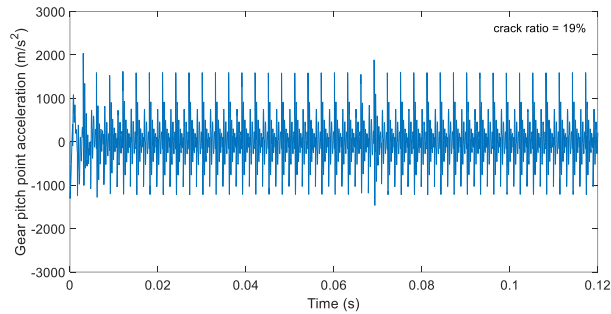
شکل ۱۸- شتاب نقطه گامی پینیون برای ترک ۱۹٪.



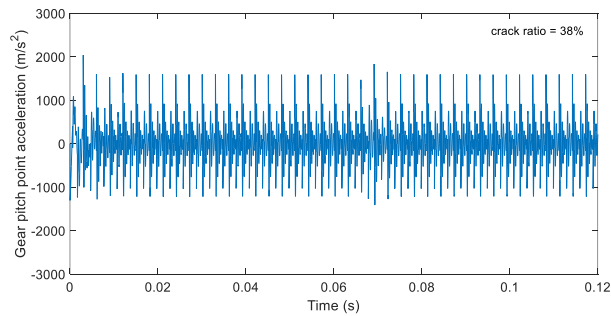
شکل ۱۹- شتاب نقطه گامی پینیون برای ترک ۳۸٪



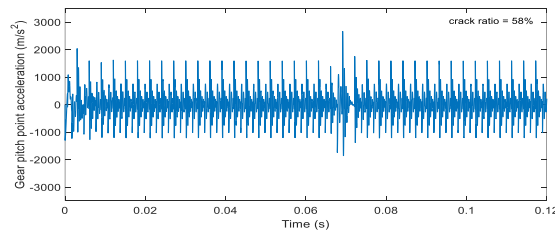
شکل ۲۰- شتاب نقطه گامی پینیون برای ترک ۵۸٪



شکل ۲۱- شتاب نقطه گامی چرخدنده برای ترک ۱۹٪



شکل ۲۲- شتاب نقطه گامی چرخدنده برای ترک ۳۸٪



شکل ۲۳- شتاب نقطه گامی چرخنده برای ترک ۵۸٪

## ۹- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل ارتعاشی برای بررسی چرخنده‌ها با وجود ترک در دندانه ارائه شد. با بررسی دامنه قله‌های به دست آمده در نتایج مربوط به شتاب یاتاقان پینیون، مشاهده شد که دامنه در مضارب دوم و چهارم فرکانس درگیری با افزایش اندازه ترک، افزایش می‌یابد. همچنین، دیده شد که در مضارب پنجم، ششم، هفتم، نهم و دهم فرکانس درگیری، دامنه با افزایش طول ترک، کاهش می‌یابد. شتاب یاتاقان پینیون به این دلیل مورد بررسی قرار گرفت که در کاربردهای عملی، شتاب یاتاقان با نصب یک شتاب‌سنج بر روی یاتاقان از روی پوسته جعبه دنده قابل اندازه‌گیری است و لذا می‌توان مقدار آن را در تحلیل‌ها، برای تخمین عیب جعبه دنده مورد استفاده قرار داد. مدل ارائه شده را می‌توان به عنوان کمک برای تخمین اندازه ترک در جعبه دنده‌های واقعی مورد استفاده قرار داد. همچنین در این پژوهش رابطه اندازه ترک با فرکانس‌های طبیعی سیستم چرخنده مورد مطالعه قرار گرفت.

## مراجع

- [1] Ozguven, H.N., and Houser, D.R., "Mathematical Models used in Gear Dynamics", A Review, Journal of Sound and Vibration, Vol. 121, pp. 383-411, (1988).
- [2] Theodossiades, S., and Natsiavas, S., "Nonlinear Dynamics of Gear-pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash", Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 2, pp. 287-310, (2000).
- [3] Kuang, J. H., and Lin, A.D., "Theoretical Aspects of Torque Responses in Spur Gearing Due to Mesh Stiffness Variation", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 17, No. 2, pp. 255-271, (2003).
- [4] Amabili, M., and Rivola, A., "Dynamic Analysis of Spur Gear Pairs: Steady-state Response and Stability of the SDOF Model with Time-varying Meshing Damping", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 11, No. 3, pp. 375-390, (1997).
- [5] Ozguven, H.N., "A Non-linear Mathematical Model for Dynamic Analysis of Spur Gears Including Shaft and Bearing Dynamics", Journal of Sound and Vibration, Vol. 145, No. 2, pp. 293-260. (1991).

- [6] Nguyen, Van Khang. Manh Cau, Thai, and Phong Dien, Nguyen, “Modeling Parametric Vibration of Gear-pair Systems as a Tool for Aiding Gear Fault Diagnosis”, *Technische Mechanik*, Vol. 3-4, pp. 198-205, (2004).
- [7] Rashidi, M., and Krantz, T., “Dynamics of a Split Torque Helicopter Transmission”, NASA Technical Memorandum 105681, Prepared for the Sixth International Power Transmission and Gearing Conference, pp. 13-16, (1992).
- [8] Fakhfakh, T., Walha, L., Louati, J., and Haddar, M., “Effect of Manufacturing and Assembly Defects on Two-stage Gear Systems Vibration”, *Int. J. Adv. Manuf Technol*, Vol. 29, pp. 1008-1018, (2006).
- [9] Howard, I., Jia, S., and Wang, J., “The Dynamic Modeling of a Spur Gear in Mesh Including Friction and a Crack”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 5, pp. 831-853, (2001).
- [10] Wang, J., Li, R., and Peng, X., “Survey of Nonlinear Vibration of Gear Transmission Systems”, *Appl Mech. Rev*, Vol. 56, No. 3, pp. 309-329, May (2003).
- [11] Bartelmus, W., “Mathematical Modeling and Computer Simulation as an Aid to Gearbox Diagnostics”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 5, pp. 855-871, (2001).
- [12] Parey, A., and Tandon, N., “Spur Gear Dynamic Models Including Defects”, *A Review, The Shock and Vibration Digest*, Vol. 35, No. 6, pp. 465-478, (2003).
- [13] Fakhfakh, T., Chaari, F., and Haddar, M., “Numerical and Experimental Analysis of a Gear System with Teeth Defects”, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* Vol. 25, pp. 542-550, (2005).
- [14] Choy, F.K., Polyschuk, V., Zakrajsek, J., Handschuh, R.F., and Townsend, D.P., “Analysis of the Effects of Surface Pitting and Wear on the Vibration of a Gear Transmission System”, *Tribology International*, Vol. 29, pp. 77-83, (1996).
- [15] Badaoui, M., Cahouet, El., Guillet, V.F., Daniere, J., and Vexlex, P., “Modeling and Detection of Localized Tooth Defects in Geared Systems”, *Transactions of the ASME*, Vol. 123, pp. 422-430, (2001).
- [16] Parey, A., Badaoui, M.E., Guillet, F., and Tandon, N., “Dynamic Modeling of Spur Gear Pair and Application of Empirical Mode Decomposition-based Statistical Analysis for Early Detection of Localized Tooth Defect”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, pp. 547-561, (2006).
- [17] Mohammeda Omar, D., Rantatalo, M.J., Aidanpaa, O., and Kumar, U., “Vibration Signal Analysis for Gear Fault Diagnosis with Various Crack Progression Scenarios”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 41. pp. 176–195, (2013).
- [18] Li, S., “Effects of Misalignment Error, Tooth Modifications and Transmitted Torque on Tooth Engagements of a Pair of Spur Gears”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 83, pp. 125–136, (2015).

- [19] Guilbault, R., Lalonde, S., and Thomas, M., "Modeling and Monitoring of Tooth Fillet Crack Growth in Dynamic Simulation of Spur Gear Set", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 343, pp. 144–165, (2015).
- [20] Mohammeda, O.D., Rantatalo, M.J., and Aidanpaa, O., "Dynamic Modeling of a One-Stage Spur Gear System and Vibration-based Tooth Crack Detection Analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 54-55, pp. 293–305, (2015).
- [21] Li, W., Shi, T., and Ding, K., "Gear Crack Detection using Kernel Function Approximation", King et al. (Eds.): *ICONIP, Part III, LNCS 4234*, pp. 535 – 544, (2006).
- [22] Shao, R., Huang, X., and Li, Y., "Influence of Crack on Structure Vibration of Gear Tooth", *J. Fail. Anal. and Preven.* Vol. 9, pp. 563–571, (2009).
- [23] Tian, Z., Zuo, Ming J., and Wu, S., "Crack Propagation Assessment for Spur Gears using Model-based Analysis and Simulation", *J. Intell. Manuf.* Vol. 23, pp. 239–253, (2012).
- [24] Mohammeda, O. D., and Rantatalo, Matti J., "Dynamic Response and Time-frequency Analysis for Gear Tooth Crack Detection", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 66-67, pp. 612–624. (2016).
- [25] Zhai, H., Zhu, C., Song, C., Liu, H., Li, G., and Ma, F., "Dynamic Modeling and Analysis for Transmission System of High-power Wind Turbine Gearbox", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 29, pp. 4073-4082, (2015).
- [26] Ma, H., Feng, R., Pang, X., Song, R., and Wen, B., "Effects of Tooth Crack on Vibration Responses of a Profile Shifted Gear Rotor System", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 29, pp. 4093-4104, (2015).
- [27] Jiang, Y., Zhu, H., Li, Z., and Peng, Z., "The Nonlinear Dynamics Response of Cracked Gear System in a Coal Cutter Taking Environmental Multi-frequency Excitation Forces into Consideration", *Nonlinear Dyn*, DOI 10.1007/S11071-015-2409-2.
- [۲۸] همایون صادقی، مرتضی حسینی اقدم، بهرنگ، "یک مدل ریاضی غیرخطی برای بررسی دینامیک سیستم چرخنده ای ۶ درجه آزادی شامل خطای چرخنده"، شانزدهمین کنفرانس بین المللی مکانیک، ISME2008، کرمان اردیبهشت (۱۳۸۷).
- [۲۹] فرشیدیان فر، انوشیروان. ثقفی، امین. ثقفی، ایمان، "بررسی دوشاخه شدگی و آشوب در سیستم ارتعاشات غیرخطی چرخنده ای با استفاده از روش بالانس هارمونیک افزاینده (IHB)"، نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران ISME2011، بیرجند، دانشگاه بیرجند، ۲۰ لغایت ۲۲ اردیبهشت.
- [30] Divandari, M., Aghdam, B.H., and Barzamini, R., "Tooth Profile Modification and its Effect on Spur Gear Pair Vibration in Presence of Localized Tooth Defect", *Journal of Mechanics*, Vol. 28, pp. 373 – 381, June (2012).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$\theta_1$  : زاویه دوران چرخنده پینیون

$\theta_2$  : زاویه دوران چرخنده بزرگ

$\theta_L$  : زاویه دوران محور خروجی

$\theta_D$  : زاویه دوران محور ورودی

$y_1$  : مسیر حرکت چرخنده پینیون در جهت عمود

$y_2$  : مسیر حرکت چرخنده بزرگ در جهت عمود

$T$  : انرژی جنبشی کل سیستم

$V$  : انرژی پتانسیل کل سیستم

$D$  : انرژی میرا شونده کل سیستم

$k_m$  : سفتی درگیری متغیر با زمان

$C_m$  : میرایی درگیری متغیر با زمان

$I_D$  : اینرسی محرک ورودی

$I_L$  : اینرسی بار

$I_1$  : اینرسی چرخنده پینیون

$I_2$  : اینرسی چرخنده بزرگ

$M$  : ماتریس جرم

$K$  : ماتریس سفتی

$C$  : ماتریس میرایی

$K_d$  : ماتریس سفتی دینامیکی

$F_e$  : نیروهای خارجی

$T_D$  : گشتاور محرک ورودی

$T_L$  : گشتاور بار خروجی



**Abstract**

The gearboxes are one of the most important equipment in industrial machines. For this reason, today, condition monitoring and diagnosing of gearboxes using their vibrations is an active research field. In this paper, the effect of crack size in the tooth root of a gear based on the vibration response of the gearbox is studied. For this purpose, firstly, gears are modeled as rigid disks, springs, and dampers. Then, using the Lagrange equations, the governing equations of the system are derived in non-crack case. Also, the crack in the tooth root is modeled and its effect is considered in the governing equations. By solving the governing equations, the vibrational response of the system in the absence of the crack and also in the presence of the crack with different sizes is investigated. Finally, the simulation results are analyzed. Using the obtained results, we can estimate the size of the crack in the gear with using the vibration analysis of the gearbox.