

## تحلیل جریان سیال غیرنیوتنی در لوله مخروطی همگرا با استفاده از مدل بینگهام

در این مقاله جریان لایه های سیال بینگهام در یک لوله مخروطی همگرا مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور معادله ساختاری سیال بینگهام برای مدلسازی رفتار سیالات دارای تنش تسلیم به کار گرفته شده است. با فرض کوچک بودن شیب لوله، گرادیان فشار در داخل لوله برای این سیال به صورت تحلیلی تعیین شده است. با توجه به وابستگی جریان سیال به تنش تسلیم، در داخل لوله ناحیه های بوجود میآید که تانسور نرخ کرنش در آن برابر با صفر است و با عنوان ناحیه پلاگ شناخته میشود. با استفاده از گرادیان فشار بدست آمده، ناحیه پلاگ در داخل لوله تعیین و سپس با حل معادلات حرکت در مختصات استوانه های و با فرض تقارن محوری توزیع سرعت در مقطع لوله در هر دو ناحیه پلاگ و خارج از ناحیه پلاگ بدست آمده است. نتایج بدست آمده در این مقاله با نتایج آزمایشگاهی موجود در سابقه علمی و نتایج حل عددی نرم افزار فلونت مقایسه شده است. مقایسه این نتایج نشان دهنده تطابق حل تحلیلی این مقاله و نتایج آزمایشگاهی موجود در سوابق علمی مربوطه است. در نهایت اثر پارامترهای مختلف مانند تنش تسلیم و شیب لوله بر روی توزیع سرعت و ناحیه پلاگ لوله مورد بررسی قرار گرفته است.

پیمان شوبی<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

حسین مهبادی<sup>۲</sup>

دانشیار

آرمن آدامیان<sup>۳</sup>

استادیار

واژه های راهنما: سیال غیرنیوتنی، تحلیل جریان، لوله مخروطی، مدل بینگهام، ناحیه ی پلاگ

### ۱- مقدمه

رفتار بسیاری از مواد مانند بتن، روغن های صنعتی، خون و گل حفاری از مدل های وابسته به تنش تسلیم مانند مدل بینگهام<sup>۴</sup> تبعیت می کند. یعنی در تنش های برشی کمتر از تنش تسلیم سیال، جریان پیدا نمی کند ولی با افزایش تنش برشی اعمال شده به سیال، جاری می شوند. در مدل بینگهام پس از افزایش تنش به میزانی بیش از تنش برشی تسلیم، سیال رفتاری شبیه به سیال ویسکوز تراکم پذیر از خود نشان می دهد. این موضوع باعث ایجاد ناحیه ای به عنوان «ناحیه ی پلاگ»<sup>۵</sup> می شود.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

h\_mahbadi@iauctb.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

<sup>۴</sup> Bingham Model

<sup>۵</sup> Plug Zone/Region

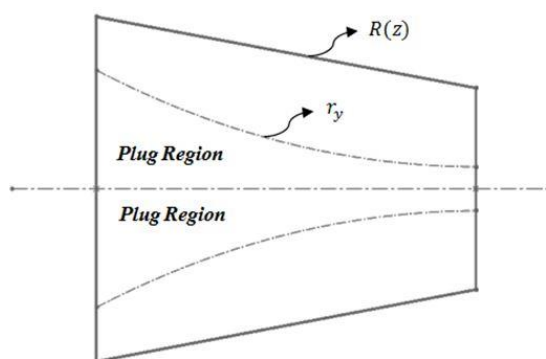
تحلیل سیالاتی که از مدل‌های وابسته به تنش تسلیم پیروی می‌کنند، یکی از مسائل مورد توجه در دهه‌های اخیر بوده است. به عنوان نمونه‌ای از بررسی جریان سیال در ناحیه پلاگ می‌توان به مطالعه انجام شده توسط فوزی و همکاران، اشاره کرد که در آن جریان توسعه یافته یک ماده ویسکوالاستیک در یک لوله، به دو بخش ناحیه پلاگ و بیرون ناحیه پلاگ تفکیک شده است و سپس با فرض کوچک بودن شعاع لوله نسبت به طول لوله توزیع جریان سیال در این لوله بدست آمده است [۱]. فریگارد و رایان، با مطالعه جریان ویسکوپلاستیک در یک کانال با عرض متغیر و تغییرات کوچک، پدیده «تناقض روانکاری»<sup>۱</sup> را مورد تحلیل قرار دادند [۲].

برای این منظور جریان سیال در خارج از ناحیه پلاگ به سه بخش شامل جریان نزدیک به دیواره، جریان نزدیک به ناحیه پلاگ و جریان مابین دیواره و ناحیه پلاگ تقسیم شده است. گوپتا حل تحلیلی سیالات غیرنیوتنی با جریان توسعه یافته‌ی سیال بینگهام در یک کانال با عرض ثابت را بررسی کرده و برای اعداد بینگهام مختلف لایه‌ی مرزی جریان را بدست آورده است [۳].

جریان لایه‌ای سیال در لوله‌ی مخروطی توسط شمولول [۴]، بررسی شده است. در این مرجع به منظور ساده شدن مراحل حل تحلیلی، با فرض ثابت بودن شعاع ناحیه‌ی پلاگ در طول لوله، جریان سیال در خارج از ناحیه‌ی پلاگ تعیین شده است. چنان‌که در ادامه مقاله حاضر نشان داده خواهد شد، این فرض برخلاف نتایجی است که از حل معادلات حاکم بدست خواهند آمد. چنین فرضی که برای ساده سازی شرایط مرزی و حل معادلات حاکم انجام می‌شود، در برخی از مقالات از قبیل مطالعه‌ی انجام شده توسط آویناش و همکاران<sup>۲</sup> نیز مشاهده می‌شود [۵]. کمبلوفسکی و کیلجانسکی، نتایج آزمایشگاهی مربوط به برخی از انواع سیالات غیرنیوتنی توسعه یافته را در داخل لوله مخروطی ارائه نموده‌اند [۶]. والیکی و والیکا نیز به بررسی جریان لایه‌ای سیال در هندسه‌ی مخروطی و در عملیات ریخته‌گری در قالب فلزی، با استفاده از مدل نمایی و بینگهام پرداخته‌اند [۷]. برای این منظور توزیع فشار در طول لوله تعیین شده و سپس جریان سیال در بیرون از ناحیه‌ی پلاگ تعیین شده است. همچنین لپسکامب جریان سیال در راستای یک کانال با عرض متغیر و چند هندسه‌ی دیگر را با استفاده از مدل بینگهام بررسی کرده است. در نهایت شکل ناحیه‌ی پلاگ را در شرایط مختلف بصورت شماتیک نشان داده، ولی رابطه‌ی ریاضی مشخصی برای ناحیه‌ی پلاگ بیان نکرده است [۸]. توزیع گرادیان فشار در یک لوله مخروطی که سیالی غیر نیوتنی وابسته به تنش تسلیم در آن جریان دارد به صورت تجربی توسط هاو و همکارانش بررسی شده است. نتایج این مرجع نشان دهنده ثابت نبودن گرادیان فشار و در نتیجه ثابت نبودن شعاع ناحیه پلاگ در طول لوله است [۹]. در برخی از مراجع مربوط به جریان روانکاری مانند [۱۰]، رفتار سیال با فرض جریان دوبعدی و با در نظر گرفتن دو متغیر  $u$  و  $v$  برای میدان سرعت که به ترتیب در امتداد جریان و عمود بر آن هستند، بررسی شده است. با توجه به پیچیدگی جریانهای دوبعدی، از روشهای عددی برای تحلیل آن کمک گرفته شده است. حل عددی جریان سیالی که از مدل بینگهام پیروی می‌کند، در تحقیقات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله آنها می‌توان به نتایج تحقیقات انجام شده در [۱۱] و [۱۲] برای جریان سیالات بینگهام، کیسن و هرشل - بالکی در لوله مستقیم اشاره کرد.

<sup>1</sup> Lubrication Paradox

<sup>2</sup> K.Avinash, J.Ananda Raol, Y.V.K.Ravi Kumar



شکل ۱- نمایش شماتیک ناحیه پلاگ

نوآوری مطالعه‌ی پیش‌رو در تعیین حل تحلیلی جریان لایه‌ای سیال غیرنیوتنی در لوله‌ی مخروطی همگرا با استفاده از مدل بینگهام است. برای این منظور جریان به دو ناحیه‌ی پلاگ و خارج ناحیه‌ی پلاگ است. جریان تراکم‌ناپذیر در اثر گرادیان فشار منفی در راستای لوله مخروطی همگرا با زاویه راس لوله‌ی  $2\alpha$  ایجاد می‌شود. هدف این مقاله تعیین هندسه ناحیه‌ی پلاگ است که به صورت شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده است. سپس با بدست آمدن هندسه ناحیه پلاگ، پروفیل سرعت در مقطع لوله همگرا تعیین شده است. با استفاده از نتایج تحلیلی بدست آمده، اثر تغییرات هندسه و خصوصیات سیال بر شکل ناحیه‌ی پلاگ و پروفیل سرعت بررسی شده است.

## ۲- تعیین ناحیه‌ی پلاگ

همان‌طور که گفته شد، ناحیه‌ی پلاگ بخشی از سیال است که هنوز تسلیم نشده است و در واقع هنوز تنش برشی اعمال شده به سیال برای مقابله با نیروهای بین مولکولی سیال که تنش تسلیم را ایجاد می‌کنند کافی نیست. برای تحلیل این ناحیه، به بررسی معادلات اساسی حاکم بر این ناحیه و تعیین شرایط مرزی حاکم بر آن پرداخته می‌شود. با توجه به شرایط هندسی مسئله، میدان سرعت را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\vec{u} = (0, 0, u(r)) \quad (1)$$

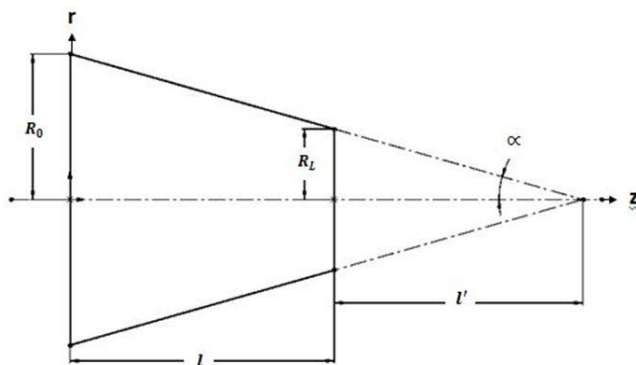
که در آن  $u(r)$  سرعت سیال در راستای محور لوله و  $r$  راستای عمود بر جریان سیال است. متغیرهای هندسی مساله مطابق با شکل (۲) عبارتند از:  $\alpha$  نصف زاویه‌ی رأس لوله،  $R_0$  شعاع ورودی لوله،  $R_i$  شعاع خروجی لوله و  $l$  طول لوله. در ادامه مدل بینگهام را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\sqrt{II_\tau} < \tau_y \Rightarrow \vec{D} = 0$$

$$\sqrt{II_\tau} \geq \tau_y \Rightarrow \vec{\tau} = 2 \left( \mu + \frac{\tau_y}{2\sqrt{II_D}} \right) \vec{D} \quad (2)$$

که تانسور تنش  $\vec{\tau}$  را به تانسور نرخ کرنش  $\vec{D}$  مرتبط می‌کند

$$\vec{D} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (3)$$



شکل ۲- هندسه مساله

در معادله (۲)  $II_D$  و  $II_\tau$  به ترتیب ثابت دوم تانسورهای نرخ کرنش و تنش هستند. با توجه به میدان سرعت فرض شده، تنها مولفه غیر صفر تانسور نرخ کرنش عبارت است از:

$$D_{rz} = D_{zr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (۴)$$

و لذا ثابت دوم تانسور نرخ کرنش عبارت است از:

$$II_D = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (۵)$$

با جاگذاری معادلات (۳) تا (۵) در معادله ساختاری (۲)، می توان تنها معادله‌ی مومنتم را به صورت زیر ساده سازی کرد:

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0 \quad (۶)$$

که در آن  $\tau_{rz}$  و  $\frac{dp}{dz}$  به ترتیب تنش برشی و گرادیان فشار سیال را مشخص می کنند. با توجه به معادله (۲)، معادله ساختاری تنش برشی بر حسب نرخ کرنش برشی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \tau_{yz} < \tau_y \Rightarrow \dot{\gamma}_{rz} = 0 \\ \tau_{yz} \geq \tau_y \Rightarrow \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{\mu} (\tau_{rz} - \tau_y) \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن  $\tau_y$  تنش تسلیم،  $\mu$  ویسکوزیته و  $\dot{\gamma}_{rz}$  نرخ کرنش برشی است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{\gamma}_{rz} = -\frac{\partial u}{\partial r} \quad (۸)$$

از آنجایی که در ناحیه پلاگ، تنش برشی کمتر از تنش تسلیم است، لذا نرخ کرنش برشی در این ناحیه صفر است و بنابراین از روابط فوق، شعاع ناحیه پلاگ به صورت زیر بدست می آید:

$$r_y = \frac{2 \tau_y}{\left( -\frac{dp}{dz} \right)} \quad (۹)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، شعاع ناحیه‌ی پلاگ به گرادیان فشار در راستای طول لوله وابسته است و در صورتی که گرادیان فشار ثابت نباشد، نمی‌توان فرض کرد که شعاع ناحیه‌ی پلاگ مقداری ثابت است.

### ۳- تعیین گرادیان فشار

بر اساس مدل بینگهام، تنش برشی در خارج از محدوده پلاگ، به صورت خطی تغییر می‌کند. لذا:

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_w} = \frac{r}{R(z)} \quad (10)$$

که در آن  $\tau_w$  تنش برشی در دیواره‌ی لوله را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۸) داریم:

$$u = - \int_0^{R(z)} \dot{\gamma} dr \quad (11)$$

بنابراین نرخ سیال گذرنده از لوله ( $Q = \int_0^{R(z)} 2\pi r u dr$ )، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$Q = \frac{\pi R^3(z)}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \dot{\gamma} d\tau \quad (12)$$

چنانچه نرخ برش از معادله بینگهام جاگذاری شود، دبی حجمی سیال عبارت است از:

$$Q = \frac{\pi R^3(z) \tau_w(z)}{4 \mu} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_y}{\tau_w(z)} + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_y}{\tau_w(z)} \right)^4 \right) \quad (13)$$

برای جریان سیال توسعه یافته در داخل لوله می‌توان فرض کرد که تنش برشی در جداره لوله از تنش تسلیم بیشتر است ( $\tau_w \gg \tau_y$ ). لذا در ادامه برای ساده‌تر کردن معادله (۱۳) از عبارت آخر در مقایسه با عبارت ماقبل آخر صرف نظر کرده و آنرا به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Q = \frac{\pi R^3(z) \tau_w(z)}{4 \mu} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_y}{\tau_w(z)} \right) \quad (14)$$

چنانچه سرعت متوسط سیال ورودی به لوله برابر با  $u_0$  باشد، با توجه به پایا بودن جریان سیال، دبی جریان سیال را می‌توان با رابطه‌ی  $Q = \pi R_0^2 u_0$  جایگزین کرد و در نهایت با توجه به معادله‌ی (۱۴) و جایگزینی رابطه‌ی مربوط به تنش برشی دیواره، رابطه‌ی زیر را برای گرادیان فشار بدست آورد:

$$\left( -\frac{dp}{dz} \right) = \frac{8\mu R_0^2 u_0}{R^4(z)} + \frac{8\tau_y}{3R(z)} \quad (15)$$

با جایگزینی معادله‌ی (۱۵) در معادله (۹)، شعاع ناحیه‌ی پلاگ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$r_y = \frac{3\tau_y R^4(z)}{12\mu R_0^2 u_0 + 4\tau_y R^3(z)} \quad (16)$$

#### ۴- پروفیل سرعت

برای بدست آوردن پروفیل سرعت، از معادلات مومنتوم و شرایط مرزی حاکم در ناحیه پلاگ و بیرون ناحیه پلاگ استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی در بیرون از ناحیه پلاگ عبارتند از، شرط عدم لغزش بر روی دیواره‌ی لوله و پیوستگی سرعت سیال در مرز ناحیه‌ی پلاگ؛ بنابراین در خارج از ناحیه پلاگ داریم:

$$\begin{aligned} u(r = R(z)) &= 0 \\ u(r = r_y) &= u_p \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه‌ی بالا،  $u_p$  و  $r_y$  به ترتیب سرعت و شعاع ناحیه‌ی پلاگ هستند. همچنین شرایط مرزی در ناحیه پلاگ عبارتند از گرادیان سرعت متناهی در مرکز لوله و قسمت دوم شرط مرزی معادله‌ی (۱۷) که در داخل و خارج ناحیه‌ی پلاگ مشترک است.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r}(r = 0) &= \text{finite} \\ u(r = r_y) &= u_p \end{aligned} \quad (18)$$

با در نظر گرفتن شروط مرزی و جایگذاری مدل بینگهام در رابطه‌ی (۶)، پروفیل سرعت در بیرون ناحیه پلاگ به صورت زیر خواهد بود:

$$u(r) = \left(-\frac{dp}{dz}\right) \left(\frac{R^2(z)}{4\mu}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{R(z)}\right)^2\right) - \frac{\tau_y R(z)}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R(z)}\right) \quad (19)$$

برای نوشتن پروفیل سرعت در مرز مشترک با ناحیه‌ی پلاگ، شعاع ناحیه‌ی پلاگ را جایگزین شعاع  $r$  می‌کنیم. رابطه‌ی زیر، پروفیل سرعت را به شکل دو ضابطه‌ای برای داخل و خارج ناحیه‌ی پلاگ نشان می‌دهد:

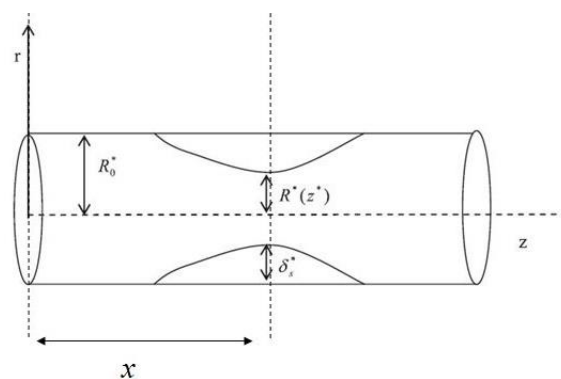
$$u(r) = \begin{cases} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \left(\frac{R^2(z)}{4\mu}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{R(z)}\right)^2\right) - \frac{\tau_y R(z)}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R(z)}\right), & r \geq r_y \\ \left(-\frac{dp}{dz}\right) \left(\frac{R^2(z)}{4\mu}\right) \left(1 - \left(\frac{r_y}{R(z)}\right)^2\right), & r < r_y \end{cases} \quad (20)$$

لذا، چنانچه گرادیان فشار، در هر نقطه بر اساس معادله (۱۵)، جایگزین شود، پروفیل سرعت در هر سطح مقطع از رابطه فوق بدست می‌آید.

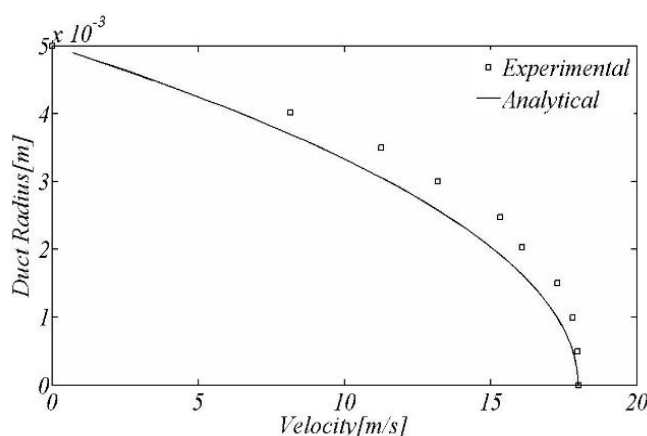
#### ۵- اعتبارسنجی نتایج

پونالاکوسامین<sup>۱</sup> [۱۳]، پروفیل سرعت در مقطع گلویی یک لوله مستقیم به شکل (۳) را برای یک سیال بینگهام بدست آورده است. در مرجع موردنظر از مشخصات خون جهت مقایسه با نتایج تجربی استفاده شده است. شکل (۴)، توزیع سرعت بی‌بعد بدست آمده در مرجع [۱۳] را به این صورت که توزیع سرعت در انتهای ناحیه‌ای که با  $x$  مشخص شده است و شبیه به خروجی یک لوله مخروطی همگراست را با توزیع سرعت بدست آمده در این مقاله در انتهای لوله‌ای با مشخصات جدول (۱) و تنش تسلیم ۰٫۱ پاسکال مقایسه می‌کند.

<sup>1</sup> R. Ponalagusamyn, R. Tamil Selvi, A.K. Banerjee



شکل ۳- هندسه‌ی جریان در مرجع [۱۳]



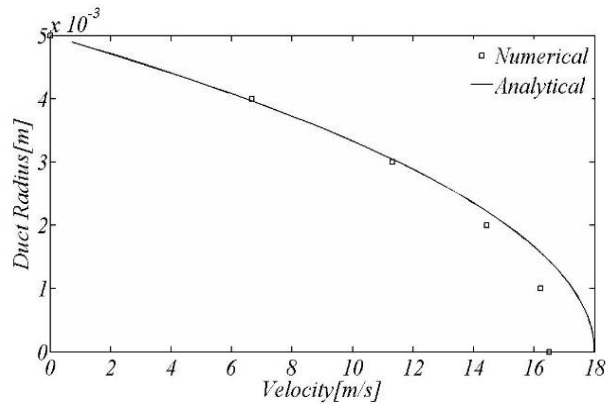
شکل ۴- مقایسه‌ی توزیع سرعت بدست آمده در این مقاله و نتایج تجربی

این شکل نشان می‌دهد که نتایج بدست آمده در این مقاله با نتایج آزمایشگاهی [۱۳]، تطابق دارد. نمودار (۵) نتایج حل تحلیل بدست آمده در این مقاله را با نتایج عددی بدست آمده از نرم‌افزار فلونت مقایسه می‌کند. بدین منظور از تحلیل متقارن محوری، بر اساس فشار<sup>۱</sup> در فلونت، برای سیالی با دانسیته‌ی ۰,۰۰۱ کیلوگرم بر مترمربع، ویسکوزیته‌ی ۰,۰۰۱ پاسکال-ثانیه، سرعت ورودی ۱ متر بر ثانیه و تنش تسلیم ۰,۱ پاسکال استفاده شده است. به همین ترتیب می‌توان نتایج حل و پروفیل سرعت خروجی را با نتایج بدست آمده از نرم‌افزار فلونت مقایسه کرد. در شکل (۵) این مقایسه قابل مشاهده است.

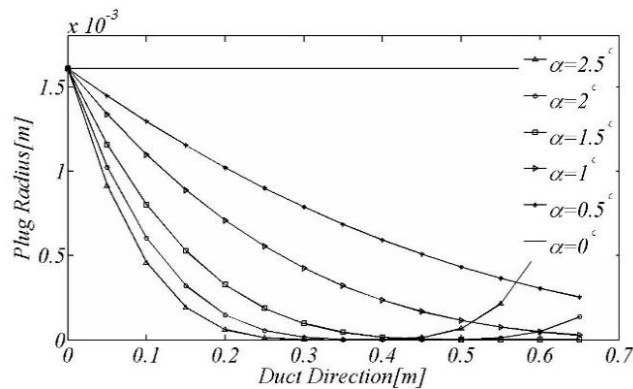
### تحلیل و نتایج

در این قسمت به بررسی اثر مقادیر مختلف تنش تسلیم، سرعت ورودی و زاویه راس لوله بر شعاع ناحیه پلاگ و پروفیل سرعت پرداخته می‌شود. برای این منظور، مشخصات لوله و سیال در جدول (۱) آورده شده است. با توجه به مشخصات ذکر شده در جدول (۱)، می‌توان در شکل‌های (۶)، (۷) و (۸) تأثیر تغییرات پارامترها مختلف را بر شعاع ناحیه‌ی پلاگ مشاهده کرد. شکل (۶) تغییرات شعاع ناحیه‌ی پلاگ را در اثر تغییرات زاویه‌ی راس لوله نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Pressure-Based



شکل ۵- مقایسه‌ی توزیع سرعت بدست آمده در این مقاله با نتایج حل عددی



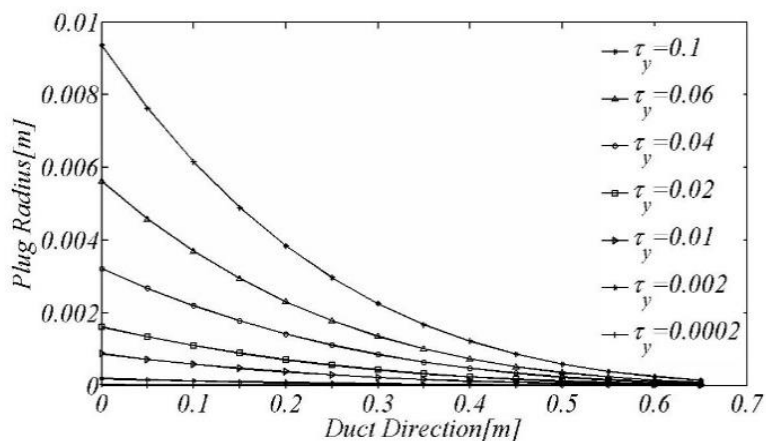
شکل ۶- تغییرات شعاع ناحیه‌ی پلاگ بر حسب نصف زاویه راس لوله

مشاهده می‌شود که افزایش زاویه‌ی رأس لوله موجب افزایش شیب ناحیه‌ی پلاگ و همگرا شدن آن می‌شود. در زاویه‌ی صفر که لوله مخروطی تبدیل به لوله‌ی مستقیم می‌شود، شعاع ناحیه‌ی پلاگ نیز در طول لوله ثابت است. در نمودار (۷) مشاهده می‌شود که افزایش تنش تسلیم باعث بزرگتر شدن ناحیه پلاگ خواهد شد. نمودار (۸) نیز تغییرات هندسه ناحیه‌ی پلاگ را در اثر افزایش سرعت ورودی سیال نشان می‌دهد. بر اساس این نمودار، افزایش سرعت سیال باعث کوچکتر شدن ناحیه‌ی پلاگ خواهد شد.

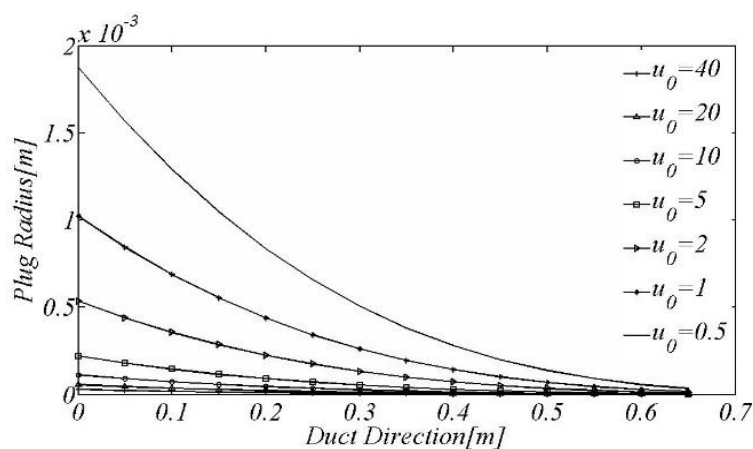
جدول ۱- مشخصات سیال و لوله

پارامتر	اندازه	واحد
طول لوله	۶۰	سانتی‌متر
شعاع ورودی لوله	۱,۵	سانتی‌متر
زاویه رأس لوله	۰ - ۲,۵	درجه
تنش تسلیم سیال	۰,۰۰۰۲ - ۰,۱	پاسکال
ویسکوزیته سیال	۰,۰۰۱	پاسکال ثانیه
سرعت ورودی سیال	۰,۵ - ۴۰	متر بر ثانیه

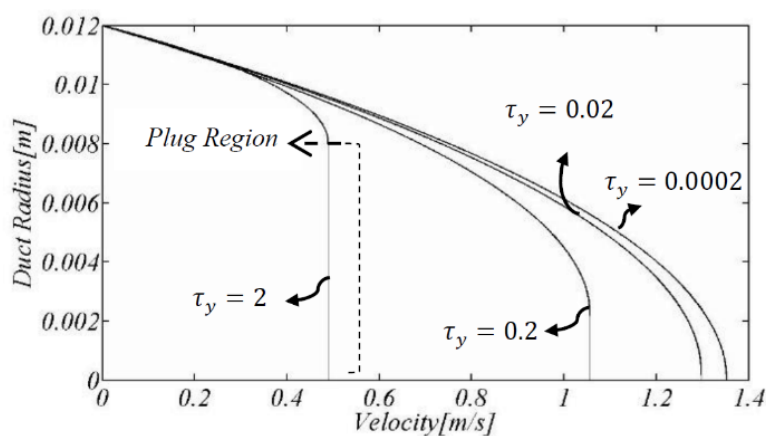




شکل ۷- تغییرات شعاع ناحیه‌ی پلاگ بر حسب تنش تسلیم سیال



شکل ۸- تغییرات شعاع ناحیه‌ی پلاگ بر حسب سرعت ورودی سیال



شکل ۹- تغییر شکل پروفیل سرعت بر حسب تنش تسلیم سیال (کاهش تنش تسلیم از چپ به راست)

در نهایت نیز می‌توان تغییرات در شکل پروفیل سرعت را برای تنش‌های تسلیم مختلف در شکل (۹) دید. در واقع برای تنش‌های تسلیم خیلی کم، ناحیه‌ی پلاگ قابل مشاهده نیست. اما افزایش تنش تسلیم و یا استفاده از سیالات با تنش تسلیم بالاتر می‌توان شعاع این ناحیه را مشاهده کرد.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا شعاع ناحیه‌ی پلاگ بر اساس گرادیان فشار برای یک لوله مخروطی تعیین و سپس با تعیین گرادیان فشار در طول لوله، توزیع سرعت در مقطع لوله به صورت تحلیلی بدست آمده است. مقایسه‌ی نتایج آزمایشگاهی و حل تحلیلی بدست آمده، تطابق این نتایج با یکدیگر را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات بدست آمده، اثر تغییر سرعت ورودی، تنش تسلیم سیال و شعاع رأس لوله‌ی مختلف بررسی شد. با توجه معادلات بدست آمده، رابطه‌ی بین متغیرهای گفته شده با شعاع پلاگ مشخص شده و می‌توان تغییرات شعاع ناحیه پلاگ در طول لوله مخروطی را در اثر تغییر پارامترهای مختلف لوله و سیال پیش‌بینی کرد. با توجه به اینکه شعاع ناحیه‌ی پلاگ با شعاع دیواره مرتبط است، تغییر قطر و شیب لوله منجر به تغییر شعاع ناحیه پلاگ می‌گردد. نتایج بدست آمده و نمودارهای ترسیم شده در این مقاله نشان می‌دهند که افزایش سرعت در مقطع ورودی لوله، منجر به کاهش شعاع ناحیه‌ی پلاگ خواهد شد. در واقع می‌توان گفت، افزایش سرعت ورودی سیال، در کنار وجود جریان پایای سیال، دبی گذرنده‌ی بیشتری را نیاز دارد که به کاهش شعاع ناحیه‌ی پلاگ و افزایش ناحیه‌ی ویسکوز می‌انجامد. همچنین در صورتی که سیال در مقابل جریان مقاومت بیشتری نشان دهد و تنش تسلیم بالاتری داشته باشد، شعاع ناحیه پلاگ بزرگتر خواهد شد. همچنین تنش تسلیم بالاتر، باعث کاهش جریان عبوری از لوله و کاهش سرعت بیشینه‌ی سیال خواهد شد. لذا هرچه سیال با ویسکوزیته‌ی کمتر را انتخاب کنیم، در سرعت ورودی ثابت جریان بیشتری خواهیم داشت.

## مراجع

- [1] Fusi, L., Farina, A., and Rosso, F., "Flow of a Bingham-like Fluid in a Finite Channel of Varying Width: A Two-scale Approach", *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*, Vols. 177-178, pp. 76-88, (2012).
- [2] Frigaarda, I., and Ryanb, D., "Flow of a Visco-plastic Fluid in a Channel of Slowly Varying Width, *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*", Vol. 123, pp. 67-83, (2004).
- [3] Gupta, R. C., "Developing Bingham Fluid Flow in Channel", *Mathematical Computer Modelling*, Vol. 21, pp. 21-28, (1995).
- [4] Chemloul, N. S., "Analytical Study of Bingham Fluid Flow Through a Conical Tube, *Mechanika*", Vol. 19, pp. 665-670, (2013).
- [5] Avinash, K., Rao, J., Kumar, Y., and Sreenadh, Bingham S., "Fluid Flow Through a Tapered Tube with Permeable Wall", *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 6, pp. 143-148, (2013).
- [6] Kemblowski, Z., and Kiljanski, T., "Flow of Stokesian Fluids Through Conical Ducts", *Chemical Engineering Journal*, Vol. 9, pp. 141-151, (1975).
- [7] Walicki, E., and Walicka, A., "Pressure Drops in Conical Flow", *Solidification of Metals and Alloys*, Vol. 24, pp. 147-154, (1995).

- [8] Lipscomb, G., and Denn, M., "Flow of Bingham Fluids in Complex Geometries", Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics, Vol. 14, pp. 337-346, (1984).
- [9] How, T., Black, R., and Annis, D., "Comparison of Pressure Losses in Steady Non-Newtonian Flow through Experimental Tapered and Cylindrical Arterial Prostheses", J. Biomed. Eng., Vol. 10, pp. 225-230, (1987).
- [10] Dorier, C., and Tichy, J., "Behavior of a Bingham-like Viscous Fluid, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics", Vol. 45, pp. 291-310, (1992).
- [11] Oliveira, G., Rocha, L., Franco, A., and Negro, C., "Numerical Simulation of the Start-up of Bingham Fluid Flows in Pipelines", Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics, Vol. 165, pp. 1114-1128, (2010).
- [12] Huilgol, R., and You, Z., "Application of the Augmented Lagrangian Method to Steady Pipe Flows", Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics, Vol. 128, pp. 126-143, (2005).
- [13] Ponalagusamyn, R., Selvi, R., and Banerjee, A.K., "Mathematical Model of Pulsatile Flow of Non-newtonian Fluid in Tubes of Varying Cross-sections and its Implications to Blood Flow", Journal of Franklin Institute, Vol. 349, pp. 1681-1698, (2012).

### فهرست نمادهای انگلیسی

تانسور تنش	$\vec{D}$
دبی	$Q$
شعاع بزرگ مخروط	$R_0$
شعاع کوچک مخروط	$R_L$
طول لوله	$l$
فشار	$p$
شعاع ناحیه پلاگ	$r_y$
سرعت سیال در راستای طول لوله	$u$
سرعت متوسط سیال	$u_0$
سرعت ناحیه پلاگ	$u_p$
ویسکوزیته سیال	$\mu$
تانسور تنش	$\vec{\tau}$
نرخ کرنش برشی در صفحه $\Gamma$ -Z	$\dot{\gamma}_{rz}$
تنش برشی در صفحه $\Gamma$ -Z	$\tau_{rz}$
تنش تسلیم	$\tau_y$
تنش برشی در دیواره لوله	$\tau_w$

**Abstract**

In this paper the laminar Bingham fluid flow through a converging conical duct is analyzed. The constitutive law of Bingham fluids is applied to model the yield dependent properties behavior of the fluid. An analytical solution is obtained for the pressure gradient assuming small conical angle of the duct. According to the yield dependent properties of the fluid, a region is developed in the fluid wherein the rate of deformation tensor is zero. This region is called plug region. According to obtained pressure gradient, the plug region is determined. Then, assuming the cylindrical symmetry, the governing equations are solved in cylindrical coordinate system and velocity field is obtained across the duct section. The results obtained in the paper is compared with the experimental data given in the literature search and Fluent numerical solution. The comparison of these two methods shows that the result of current paper is well compared with those given in the literature search. Finally, the effect of parameters such as yield strength and conical angle on velocity field and plug region is investigated.