تحلیل کمانش ورق کامپوزیتی با سوراخ‌های دایره‌ای روی تکیه‌گاه الاستیک در شرایط مرزی و بارگذاری‌های لبه‌ای پاره‌ای مختلف، به شیوه نیمه تحلیلی

محمد شرعیات[1]
استاد

حسین وحدانی فر[2]
دانشجوی کارشناسی ارشد

محمد دهقانی[3]
دانشجوی دکترا

میلاد اسفندیار[4]
دانشجوی کارشناسی ارشد

در مقاله کنونی، به بررسی کمانش ورق مستطیلی چندلایه ساخته شده از مواد مرکب دارای دو سوراخ دایره‌ای طولی یا عرضی، مستقر بر روی بستر الاستیک ونکلر - پسترناک، پرداخته شده است. این تحلیل، در دو گام انجام شده است. ابتدا توزیع تنشهای درون- صفحه‌ای پیش‌کمانش ناشی از بار لبه‌ای پاره‌ای پیدا شده و در گام دوم، از روش گلرکین برای بدست آوردن روابط حاکم بر کمانش استفاده شده است. در این راستا، از تئوری کلاسیک ورق، روابط کرنش-جابجایی فن‌کارمن، روش‌های گلرکین و انرژی و تبدیل مسئله به مسئله مقادیر ویژه استفاده شده است. بار کمانش برای موقعیت‌های مختلف نسبی سوراخ‌های ورق در بارگذاری‌های لبه‌ای موضعی: (۱) متمرکز، (۲) یکنواخت و (۳) سینوسی، برای دو نوع شرط لبه‌ای جابجا شونده ساده و گیردار تعیین شده است. همچنین، اثر سفتی تکیه‌گاه الاستیک ورق کامپوزیتی، در بارهای لبه‌ای موضعی متفاوت و بار متمرکز، بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که کمانش ورق دارای سوراخ یا حفره، ناشی از عوامل متناقضی است و ممکن است به صورت موضعی یا کلی انجام شود و نیز مقدار سفتی بستر الاستیک ورق، تاثیر چشم‌گیری بر افزایش بار کمانشی دارد. این افزایش، در حالتی که بار موضعی بر طول بزرگتری از لبه ورق وارد می‌شود، آشکارتر است.

واژه‌های راهنما: بار پاره‌ای، ورق کامپوزیتی سوراخ‌دار، بستر الاستیک، روش نیمه تحلیلی، روش انرژی

۱- مقدمه

ورق‌های کامپوزیتی، از اجزای پر کاربرد در بدنه خارجی و اسکلت اصلی بسیاری از سازه‌های مکانیکی، خودرویی، ریلی و هوافضا می‌باشند. هنگامی که یک ورق در معرض بارگذاری فشاری درون صفحه‌ای قرار می‌گیرد پدیده کمانش به عنوان یکی از مودهای فروریزش، اهمیت زیادی پیدا می‌کند. با توجه به اینکه عموماً نیروهای موثر بر مقاطع یک ورق، از طریق اجزای مجاور صورت وارد می‌آیند، بار لبه‌ای یاد شده در حالت کلی، ممکن است یکنواخت نبوده و به صورت خطی و یا غیرخطی توزیع شود.

---

[1] نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران shariyat@kntu.ac.ir
[2] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز vahdanifar71@gmail.com
[3] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد mohammad.dehghani.20@gmail.com
[4] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
miladsfandyar2000@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۵/۰۵/۱۱، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۶/۲۸

به عنوان نمونه، پنل‌های مورد استفاده در بدنه کشتی و هواپیما، به دلیل شرایط تکیه‌گاهی و توزیع غیر یکنواخت نیروهای پسا، معمولاً در معرض بارهای درون صفحه‌ای غیر یکنواخت قرار دارند.

لیسا و هونگ [۱] کمانش یک ورق مستطیلی همسانگرد تحت بار لبه‌ای فشاری یک بعدی با توزیع خطی را با استفاده از تئوری کلاسیک، با حل سری بررسی نمودند. وانگ و همکاران [۲]، به بررسی کمانش ورق همسانگرد با شرایط مرزی خاص تحت بار لبه‌ای با توزیع سهمی، به کمک تئوری کلاسیک و با بکارگیری روش حل مربعات دیفرانسیلی[1] پرداختند. جانا و باسکار [۳]، کمانش ورق‌های همسانگرد مستطیلی تحت حالت‌های مختلف بارگذاری شامل: بارگذاری سینوسی و متمرکز را به شیوه نیمه تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آنان نخست، با استفاده از ترکیب چندین تابع تنش ایری براساس اصل برهم‌نهی، مساله پیش کمانش را جهت تعیین میدان تنش درون صفحه‌ای ورق حل کردند. پس از آن از توزیع تنش پیدا شده، به حل معادله حاکم بر کمانش ورق بر اساس تئوری کلاسیک با سری دوگانه به روش گلرکین پرداخته و بار کمانش ورق همسانگرد بدون حفره را برای حالت‌های مختلف بارگذاری به دست آوردند. در سالهای بعد، کیلان و باسکار [۴]، این شیوه را برای بررسی کمانش ورق‌های کامپوزیتی گسترش دادند. اخیراً، شرعیات و عاصمی [۵] کمانش ورق ساخته شده از مواد هدف‌مند تحت بارهای لبه‌ای غیر یکنواخت را با استفاده از تئوری الاستیسیته و با بکارگیری المانهای B-Spline، مورد بررسی قرار دادند. کمانش ورق‌های دارای سوراخ‌های گرد یا مربعی شکل، توسط پژوهشگران مختلف، عمدتاً توسط نرم‌افزارهای تجاری موجود، مانند ANSYS صورت پذیرفته است. الساوی و مارتینی [۶] تحلیل کمانش ورق همسانگرد با یک حفره داخلی را تحت بار فشاری دومحوره، با نرم‌افزار تجاری ANSYS انجام دادند. کومور و سومز [۷] بارهای کمانش ورق همسانگرد با بار لبه‌ای با تغییرات خطی را با نرم‌افزارتجاری ANSYS پیدا نمودند. پاندا و راماچاندرا [۸]، تحلیل کمانش ورق همسانگرد سوراخ‌دار با بارهای لبه‌ای غیر یکنواخت را پس از یافتن مولفه‌های تنش درون صفحه‌ای با استفاده از حل معادلات پیش کمانش، با استفاده از تابع تنش و انتخاب پاسخ سری دوگانه و جایگذاری در معادله انرژی ورق، انجام دادند. بار کمانش، با کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل و تبدیل مسئله به یک مسئله مقادیر ویژه بدست آمد. یو و همکاران [۹]، از ترکیب تئوری برشی مرتبه اول و روش گسسته‌سازی B-Spline کسری، برای تحلیل کمانش ورق کامپوزیتی دارای سوراخ استفاده نمودند.

مرور تاریخچه ارائه شده، آشکار می‌سازد که تاکنون، بررسی کمانش ورقی که ضمن تحمل بارهای لبه‌ای غیر یکنواخت (به ویژه، بارهای با توزیع پاره‌ای)، دارای حفره داخلی می‌باشد، با استفاده از فرمول‌بندی انجام نشده است و موارد بسیار نادر موجود نیز با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری اجزای محدود انجام شده‌اند. همچنین، تحلیل کمانش با شرایط یاد شده، تنها برای ورق همسانگرد ارائه شده و برای ورق کامپوزیت ارتوتروپیک، انجام نشده است. در مقاله کنونی، کمانش ورق‌های کامپوزیتی ارتوتروپیک با بارهای لبه‌ای متفاوت دارای دو سوراخ طولی یا عرضی و تکیه‌گاه الاستیک دو پارامتری پسترناک-ونکلر انجام شده است. همچنین، نتایج برای شرایط لبه‌ای متفاوت ساده و گیردار بدست آمده‌اند. برای بررسی توزیع تنشهای درون صفحه‌ای، از تحلیل پیش‌کمانش و برای تحلیل کمانش، از روشی نیمه تحلیلی، مبتنی بر روش گلرکین و انرژی استفاده شده است.

[1] Differential quadrature

۲- تعریف شرایط بارگذاری، هندسی و مرزی مسئله

ورق مورد بررسی، یک ورق کامپوزیتی مستطیلی با دو سوراخ دایره‌ای طولی به فاصله A یا عرضی به فاصله B، مانند شکل (۱) می‌باشد. طول، عرض و ضخامت ورق به ترتیب، با نمادهای a، b و h مشخص شده و قطر سوراخ ورق با نماد d نشان داده شده است. مختص z ورق، در راستای ضخامت بوده و از لایه میانی ورق اندازه‌گیری می‌شود. ورق یاد شده بر روی تکیه‌گاه الاستیک نوع وینکلر-پسترناک مسقر بوده و تحت بار لبه‌ای پاره‌ای فشاری قرار دارد. توزیع بار موضعی می‌تواند به فرم گسترده سینوسی، یکنواخت یا متمرکز باشد. علاوه بر تکیه‌گاه الاستیک، لبه‌های ورق می‌توانند روی تکیه‌گاه‌های ساده یا گیردار مستقر باشند.

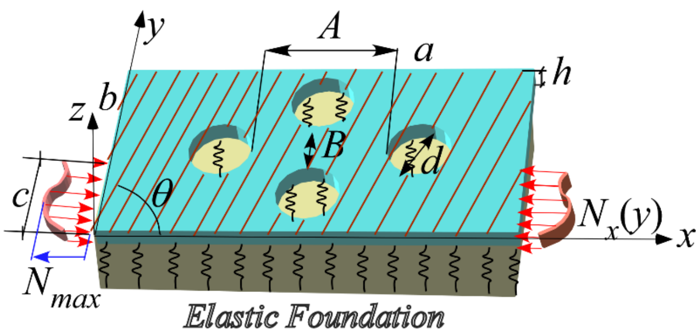
۲- معادلات حاکم بر کمانش ورق تحت بار لبه‌ای پاره‌ای

۲-۱- روال ترسیم شده برای یافتن میزان بار کمانشی ورق

برای یافتن بار کمانش ورق، عموماً از روابط کرنش- جابجایی غیرخطی استفاده می‌شود. در این حالت، دو شیوه کلی برای یافتن میزان بار کمانش قابل استفاده خواهند بود. روش اول، استخراج روابط غیر خطی حاکم بر ورق و رسم منحنی کمانش-خیر، برای تعیین نقطه دوشاخگی است. در این راستا، بار خارجی اعمال شده بر ورق به تدریج افزایش داده می‌شود تا زمانی که نشانه‌های فروریزش سفتی ورق دیده شوند. لذا تحلیل غیرخطی است.

روش دوم، تجزیه تحلیل به دو مرحله پیش‌کمانش و کمانش است. تحلیل پیش‌کمانش صرفاً برای یافتن توزیع تنشهای درون صفحه‌ای ناشی از بارهای لبه‌ای استفاده می‌گردد. در این مرحله، مقدار خیز ورق صفر است. لذا عبارات حاصل ضرب نیرو بر واحد طول لبه مقطع (N) در خیز، که باعث غیرخطی شدن معادلات پایداری در روش اول می‌شد، در مرحله تحلیل کمانش روش کنونی، غیرخطی نخواهد بود.

لذا در مرحله تحلیل کمانش، با معلوم بودن مقدار تنشهای درون صفحه‌ای (به عنوان تنشهای اولیه)، روابط حاکم، با وجود استفاده از عبارات تنش-کرنش غیرخطی، خطی شده و مسئله به مسئله مقادیر ویژه تبدیل خواهد شد. در پژوهش کنونی، از روش دوم استفاده شده است. در این روش، تشخیص مقدار بار کمانش ساده‌تر و دقیق‌تر است.



شکل۱- ورق کامپوزیتی با دو سوراخ طولی یا عرضی، تحت بار لبه‌ای پاره‌ای فشاری، روی تکیه‌گاه الاستیک

۲-۲- معادلات حاکم بر کمانش ورق کامپوزیتی ارتوتروپیک بر پایه تئوری کلاسیک

بر پایه تئوری کلاسیک ورق، مولفه‌های کرنش (ε) نقطه دلخواهی از ضخامت ورق را می‌توان از طریق رابطه (۱) به کرنشها و انحناهای لایه میانی (به ترتیب، ε^0 و κ)، مرتبط ساخت:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 - \kappa_{ij}\,, \qquad i,j = x,y \tag{۱}$$

همچنین، با استفاده از فرض‌های تئوری کلاسیک، معادلات تعادل استاتیکی را می‌توان برای یک ورق ناهمسانگرد کلی، چنین نوشت [۱۰]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p(x,y) + N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\end{gathered} \tag{۲}$$

روابط (۲) بر پایه روابط کرنش–جابجایی von Karman، به ترتیب، بر پایه تعادل نیروها نیرو و گشتاور در سه راستای x، y و z بدست آمده‌اند. در رابطه (۲)، $(N_{ij}, M_{ij}, i,j = x,y)$ به ترتیب، مولفه‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \tag{۳}$$

با بکارگیری روابط تنش-کرنش ورق ارتوتروپیک:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C\varepsilon} \tag{۴}$$

که در آن، $\boldsymbol{C}$ ماتریس ضرایب الاستیک است، فرم باز شده رابطه (۳) به گونه زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ -\kappa_{xx} \\ -\kappa_{yy} \\ -2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۵}$$

که در آن،

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \tag{۶}$$

و ($\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$). با جایگذاری رابطه (۵) در آخرین رابطه از سری روابط (۲) و با توجه به ارتباط انحنا با خیز:

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2}\,, \quad \kappa_{yy} = \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^2}\,, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} \tag{۷}$$

معادله حاکم بر خیز ورق در آستانه کمانش بدست می‌آید:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$=p(x,y)+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (۸)$$

اگر ورق از ماده ارتوتروپیک ساخته شده باشد، $D_{16}, D_{26}=0$ (به ویژه برای ورق با چیدمان متقارن و الیاف متعامد) بوده و کوپلینگ میان خمش و پیچش از میان می‌رود. لذا، رابطه (۸) به فرم زیر ساده خواهد شد:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$=p(x,y)+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (۹)$$

۲-۳- توزیع تنش در مرحله پیش‌کمانش

از آنجا که در مرحله پیش‌کمانش، در صورت انتخاب لایه چینی متقارن، خیزی در اثر بار لبه‌ای درون صفحه‌ای پدید نمی‌آید، عملاً معادله سوم از روابط (۲) به خودی خود برآورده شده و تنها نیاز به تامین دو رابطه اول خواهد بود. در این زمینه، می‌توان از شیوه‌های متعددی برای یافتن توزیع تنشهای درون صفحه‌ای متناظر بهره جست. در روش تحلیلی، می‌توان از حل مبتنی بر مفهوم تابع تنش (Φ) زیر استفاده نمود [۱۱]:

$$N_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad N_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad N_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (۱۰)$$

با توجه به اینکه در این حالت، حل مبتنی بر هندسه تغییر فرم نمی‌باشد، لازم است که شرط سازگاری مولفه‌های تنش برحسب تابع تنش نیز در نظر گرفته شود:

$$\nabla^4\Phi=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\Phi=0 \quad (۱۱)$$

حل رابطه (۱۱) در حالت کلی، به روش سری، مانند انتخاب حل سری لوی یا ناویر امکان‌پذیر است. شرایط مرزی مسئله در این حالت، با بیان بار پاره‌ای به فرم سری، عبارتند از:

$$x=0,a:\qquad N_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\widehat{N}_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{N}_n\sin\frac{n\pi y}{b}+\widehat{N}_n^* cos\frac{n\pi y}{b}\right),\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0$$
$$y=0,b:\ \ N_{yy},N_{xy}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0 \quad (۱۲)$$
$$N_r,N_{r\theta}=0\quad \text{on }\Gamma$$

که در آن، Γ مرز داخلی ورق (سوراخ) و $N_r, N_{r\theta}$ مقادیر نیروی مماسی و شعاعی بر واحد طول، در مرز یاد شده می‌باشند که می توانند از طریق روابطی شبیه به روابط تبدیل تنش، به N_{xx}، N_{yy} و N_{xy} ارتباط داده شوند. از آنجا که دقت روش نیمه تحلیلی به تعداد جملات انتخابی از پاسخ سری وابسته است، در حالت کلی، استفاده از روشهای عددی، مانند روش اجزاء محدود، برای حل حالت‌های کلی‌تر (مانند حالت کنونی) ترجیح داده می‌شود [۱۴-۱۲].

در این زمینه، حتی می‌توان از نتایج تحلیل تنش نرم‌افزارهای تجاری موجود بهره جست.

۲-۴- معادلات حاکم بر کمانش

در این مرحله، از میدان تنشهای تعیین شده در مرحله پیش‌کمانش، به عنوان تنشهای اولیه استفاده می‌شود. برای این منظور، ورق به شبکه‌ای از نقاط کلیدی (شبکه بدون المان) تجزیه می‌شود. تغییرات مولفه‌های نیرو بر واحد طول میان نقاط گره فرضی تحلیل پیش‌کمانش را می‌توان بر پایه توابع تقریب زیر درونیابی نمود؛ هر چند که استفاده از روش عددی اجزای محدود در تحلیل کمانش، مد نظر نمی‌باشد [۱۵]:

$$N_{ij} = \boldsymbol{H}\mathbb{N}_{\boldsymbol{ij}}\;; \quad i,j = x,y \tag{۱۳}$$

که در آن، $\mathbb{N}_{\boldsymbol{ij}}$ بردار مقادیر N_{ij} در نقاط گره فرضی و $\boldsymbol{H}$ بردار توابع تقریب می‌باشد. این روش ردگیری تغییرات، برای محاسبه انتگرال نرژی پتانسیل کل شبکه لازم خواهد بود. با فرض آنکه هر شبکه محلی با ۸ نقطه گره فرضی تعریف شود، داریم:

$$\mathbb{N}_{\boldsymbol{ij}} = \langle \mathbb{N}_{1ij} \quad \mathbb{N}_{2ij} \quad \mathbb{N}_{3ij} \quad \mathbb{N}_{4ij} \quad \mathbb{N}_{5ij} \quad \mathbb{N}_{6ij} \quad \mathbb{N}_{7ij} \quad \mathbb{N}_{8ij} \rangle\;; \quad i,j = x,y \tag{۱۴}$$

مولفه‌های بردار توابع تقریب بر حسب مختصات طبیعی جهات x و y که ترتیب، ξ و η نامیده می‌شوند، به صورت زیر قابل تعریف می‌باشند:

$$\boldsymbol{H}^T = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta)\left(-\xi-\eta-1\right) \\ (1+\xi)(1-\eta)\left(\xi-\eta-1\right) \\ (1+\xi)(1+\eta)\left(\xi+\eta-1\right) \\ (1-\xi)(1+\eta)\left(-\xi+\eta-1\right) \\ 2\left(1-\xi^2\right)(1-\eta) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ 2\left(1-\varsigma^2\right)\left(1+\eta\right) \\ 2\left(1-\varsigma\right)\left(1-\eta^2\right) \end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

اگر مقادیر $\mathbb{N}_{\boldsymbol{ij}}$ بدست آمده، متناظر با بار موضعی یا پاره‌ای با دامنه واحد باشند (دامنه$N_{xx} = 1$ روی لبه ورق)، مقادیر $N_{ij}(\xi,\eta)$ متاظر با بار کمانش را می‌توان با ضرب دامنه بار در ضریب بار کمانش λ به صورت زیر یافت:

$$N_{ij}(\xi,\eta) = \lambda \boldsymbol{H}(\xi,\eta)\mathbb{N}_{\boldsymbol{ij}} \tag{۱۶}$$

تغییرات خیز را نیز می‌توان با رابطه‌ای شبیه به رابطه (۱۳) دنبال اختیار نمود:

$$w = \boldsymbol{HW} \tag{۱۷}$$

بر این پایه، رابطه (۹) که در این حالت به خودی خود برآورده نمی‌شود، فرم زیر را خواهد یافت:

$$\left[D_{11}\frac{\partial^4 \boldsymbol{H}}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 \boldsymbol{H}}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 \boldsymbol{H}}{\partial y^4}-N_x\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2}\right]\boldsymbol{W}=p \tag{۱۸}$$

برای تکیه‌گاه وینکلر-پسترناک [۱۶]:

$$p=k_1 w-k_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{۱۹}$$

یا:

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{\mathcal{G}})\boldsymbol{W}=\boldsymbol{0} \tag{۲۰}$$

که یک مسئله مقایر ویژه است. برای افزایش دقت محاسبات، می‌توان بار کمانشλ را از روش گلرکین، به شرح زیر یافت:

$$\iint_{\mathcal{A}} \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{\mathcal{G}})\boldsymbol{W}d\xi d\eta=\boldsymbol{0} \tag{۲۱}$$

که $\mathcal{A}$ سطح میان نقاط کلیدی (نقاط گره فرضی) است. رابطه (۲۱) مربوط به یکی از تقسیمات شبکه است. مرتبه مشتقات رابطه (۲۱) را می‌توان با دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء به دو کاهش داد؛ به گونه‌ای که بتوان از توابع تقریب (۱۵) استفاده نمود. با توجه به اینکه روی تکیه‌گاه ساده، هر دو مشتق دوگانه خیز (نسبت به x و y) صفرند، در محل تکیه‌گاه گیردار، هر دو مشتق اول صفرند و در لبه آزاد، ترکیبی از مشتقات سه گانه صفر می‌شود و با توجه به اینکه در مسیر انتگرال‌گیری جزء به جزء، عبارات حاصل‌ضرب این مشتقات که یکی از آنها در مرز صفر است آشکار می‌شود، حاصل انتگرال‌های مرزی صفر خواهد شد.
روش جایگزین، استفاده از اصل انرژی پتانسیل کل (Π) به فرم زیر است:

$$\begin{aligned}\Pi=\iint_{\mathcal{A}}\frac{1}{2}\Bigg\{&D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\&+4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\\&+N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+k_1w^2+k_2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}d\mathcal{A}\end{aligned} \tag{۲۲}$$

در این حالت، معادله حاکم بر شبکه، با جایگزینی روابط (۱۳) و (۱۷) در رابطه (۲۲) و صفر نمودن مشتقات انرژی پتانسیل کل نسبت به $\boldsymbol{W}$ بدست می‌آید. برای ورق ارتوتروپیک ($D_{16}, D_{26}=0$)، نتایج دو روش گلرکین (پس از دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء)، با روش انرژی (به دلیل تقارن عملگرهای مشتق‌گیری)، یکسان می‌باشند. در این وضعیت، با توجه به رابطه (۲۲):

$$\begin{aligned}\Pi = \iint_{\mathcal{A}} \frac{1}{2}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\Bigg\{ & D_{11}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} + 2D_{12}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2} \\ & + 4D_{66}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x \partial y} + N_x\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} + 2N_{xy}\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} + N_y\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} \\ & + k_1\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{H} + k_2\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y}\right]\Bigg\}\boldsymbol{W}d\mathcal{A} \\ = & \frac{1}{2}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\iint_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda\boldsymbol{\mathcal{G}})\boldsymbol{W}d\xi d\eta = \boldsymbol{0}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

در نتیجه، از اصل انرژی پتانسیل کل کمینه:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}} = 0 \;\Rightarrow\; \iint_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda\boldsymbol{\mathcal{G}})\boldsymbol{W}d\xi d\eta = \boldsymbol{0} \quad (۲۴)$$

برای کل ورق، رابطه (۲۴) بدست آمده برای هر بخش شبکه باید با رابطه بدست آمده برای اجزاء دیگر جمع شود تا فرم نهایی زیر برای دستگاه معادلات حاکم بر کل ورق بدست آید:

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{K}} - \lambda\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\right)\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0} \quad (۲۵)$$

برای آنکه رابطه (۲۵) دارای پاسخ (بار کمانش) باشد، لازم است که:

$$\left|\boldsymbol{\mathcal{K}} - \lambda\widehat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\right| = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; f(\lambda) = 0 \quad (۲۶)$$

۳- نتایج و بحث

۳-۱- اطلاعات پایه مدل‌های مورد بررسی

در استخراج نتایج کنونی، تنشهای درون صفحه‌ای پیش‌کمانش ورق، با نرم افزار المان محدود انسیس تعیین شده‌اند. تعداد المانها به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شده است که با افزایش این تعداد، در نتایج حاصله، تغییر مشاهده نگردد. لذا شبکه با و بدون المان مورد استفاده، دارای نواحی با ۸ نقطه گره مجازی می‌باشد. تحلیل کمانش، با استفاده از نرم‌افزار نوشته شده در محیط MATLAB توسط مولفین مقاله کنونی، انجام شده است. ورق مورد بررسی، از ماده کامپوزیتی کربن/ اپوکسی با چیدمان الیاف و لایه‌های $[\pm45^{t}_{2}/0_6/\pm45^{t}_{2}]$ ساخته شده است. ویژگی‌های مواد لایه‌ها در مختصات اصلی مواد، به شرح زیرند:

$$E_1 = 109GPa, \quad E_2 = E_3 = 8.82GPa, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3,$$
$$G_{12} = G_{13} = 4.32GPa, \quad G_{23} = 3.2GPa$$

ابعاد اولیه ورق و سختی پایه تکیه‌گاه، عبارتند از:

$$a = 150mm, \quad b = 100mm, \quad h = 2mm, \quad d = 15mm,$$
$$\alpha = \beta = 0.5, \quad k_1 = k_2 = 3.2e8N/m^3$$

که در آن، $\alpha = A/d$ و $\beta = B/d$ به ترتیب، فواصل بی‌بعد طولی و عرضی سوراخ‌های ورق می‌باشند. تحلیل کمانش، تحت سه نوع بارگذاری موضعی: یکنواخت، سینوسی و متمرکز، برای دو حالت: ورق با دو سوراخ طولی و ورق با دو سوراخ عرضی، انجام شده است.

۳-۲- اثر موقعیت نسبی سوراخ‌های طولی ورق کامپوزیتی، در شرایط بارگذاری مختلف

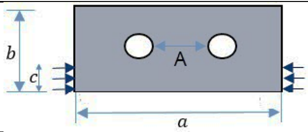
در استخراج نتایج تحلیل کمانش بخش کنونی و بخش آینده، لبه‌های موازی محور x ورق کامپوزیتی با چیدمان الیاف و لایه‌های $[\pm45_2^t/0_6/\pm45_2^t]$، آزاد و لبه‌های موازی محور y، دارای شرایط گیردار یا ساده (SFSF یا CFCF) با امکان جابجایی افقی، در نظر گرفته شده‌اند. نتایج بارهای کمانش پاره‌ای یکنواخت و سینوسی و بار متمرکز، برای ورق دارای ورقهای سوراخهای طولی، به ترتیب، در جداول (۱) تا (۳) برای شرایط مرزی ساده و گیردار آورده شده‌اند. نتایج یاد شده می‌توانند برای مقایسه با نتایج پژوهشهای آینده مورد استفاده قرار گیرند. از سوی دیگر، برای فراهم آمدن امکان ردگیری اجمالی و مناسب‌تر تغییرات با پارامترهای مختلف، نتایج بدست آمده برای ورق دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده، در شکل (۲)، به فرم تصویری ارائه شده‌اند.

نتایج جداول (۱) تا (۳) و نیز نتایج شکل (۲) آشکار می‌سازند که روند اجمالی تغییرات دامنه بار کمانش با فاصله طولی بی‌بعد سوراخهای ورق (α)، برای بارهای پاره‌ای یکنواخت و سینوسی و تا حدی، بار متمرکز، یکسان است. به توجه به اینکه لبه‌های موازی مور x ورق آزاد هستند، کمانش ورق عموماً به صورت تشکیل موج طولی آشکار می‌شود. لازم به یادآوری است که ورق، هم‌زمان روی تکیه‌گاه الاستیک مستقر است. برای نسبت‌های منظری a/b=1,2، عموماً تعداد نیم موجهای طولی کمانش، به ترتیب، ۱ یا ۲ خواهد بود. در حالت کنونی (a/b=1.5)، اجتماع این دو حالت امکان‌پذیر است. به بیان دیگر، در آرایش‌های خاصی از سوراخ‌های ورق (برای نمونه، سوراخ‌های عرضی)، احتمال روی دادن مود اول کمانش بیشتر است. زیرا برای ناحیه تضعیف نشده ورق (ناحیه پیرامون حفره‌ها)، نسبت منظری مفید به ۱ میل می‌نماید ولی چون نمودارهای بار کمانش بر حسب نسبت منظری ورق، حتی برای ورق بدون سوراخ نیز خطی نیستند، ممکن است در آرایش-های مختلف سوراخ‌های ورق، کمانش در تعداد نیم موجهای طولی ۲ یا ۱ روی دهد. در حالت کلی، وجود تکیه‌گاه الاستیک می‌تواند به افزایش تعداد نیم موج‌های کمانش بینجامد.

تشکیل یک موج طولی کمانش، زمانی امکان‌پذیرتر است که سوراخ‌های ورق به لبه‌های طولی ورق نزدیکتر باشند. بر این پایه، مقدار دامنه بار کمانش در مقادیر بزرگتر α ، کوچکتر شده است. اگر فاصله سوراخ ورق تا لبه ورق، بسیار اندک باشد، از ناحیه اصلی و بحرانی تشکیل موج، خارج و لذا، وجود آن تاثیر کمتری خواهد داشت (مانند آن است که ورق بدون سوراخ است). در نتیجه، مانند شکل (۲)، بار کمانش افزایش خواهد یافت.

همان‌گونه که از مقایسه نمودارهای شکل (۲) بر می‌آید، مقدار دامنه بار کمانش، در بار پاره‌ای یکنواخت، کوچکتر از بار سینوسی است. این موضوع، ناشی از این نکته است که مساحت سطح زیر بار در این حالت بزرگتر است. از سوی دیگر، با توجه به شکل (۲)، در نسبتهای کوچک c/b، کمانش موضعی بوده و زودتر روی می‌دهد. در اینحالت، مقطع ورق، ضمن تحمل فشار، دچار خمش درون صفحه‌ای نیز می‌گردد. لذا، امواج کمانش در یک سمت سوراخ‌های ورق تشکیل می‌شوند.

جدول۱- مقادیر کمانش بار گسترده یکنواخت پاره‌ای (kN/m) ورق کامپوزیتی با سوراخ‌های طولی، در طول‌های بارگذاری و شرایط مرزی مختلف.



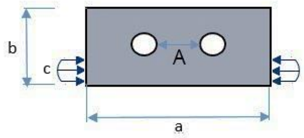
α (cm)	**شرط مرزی**							
	SFSF				**CFSF**			
	$c/b = 0.2$	$c/b = 0.4$	$c/b = 0.6$	$c/b = 0.8$	$c/b = 0.2$	$c/b = 0.4$	$c/b = 0.6$	$c/b = 0.8$
0.5	3.7389	5.3892	7.1243	8.4707	4.9766	7.4778	10.1852	12.7728
1	3.7151	5.3779	7.0870	8.5663	5.0370	7.4866	10.1675	12.8786
1.5	3.6678	5.4671	7.1772	8.5750	5.0854	7.7055	10.4328	13.0694
2	3.7025	5.4582	7.1585	8.5003	4.9467	7.6774	10.4495	13.0235
2.5	3.6488	5.4013	7.1309	8.4394	5.0769	7.7003	10.5489	13.0166
3	3.6960	5.2259	6.9974	8.4915	5.0154	7.5319	10.3879	13.1929
3.5	3.6666	5.3706	7.0027	8.2614	5.0888	7.6527	10.5250	13.0258
4	3.6458	5.2830	6.9079	8.2699	5.0805	7.5390	10.5360	13.0067
4.5	3.5872	5.2535	6.7834	8.0296	4.9868	7.5166	10.2715	12.8470
5	3.5974	5.3244	6.6742	7.9292	4.9533	7.7675	10.1880	12.7035
5.5	3.6067	5.1867	6.7602	8.0181	4.9681	7.6017	10.4611	13.1652
6	3.7389	5.2062	6.8222	8.1587	5.0201	7.7515	10.5654	13.4240

با افزایش طول بارگذاری (نسبت *c/b*)، کمانش موضعی به کمانش کلی تبدیل می‌شود. از سوی دیگر، وجود سوراخ‌های ورق موجب می‌شود که ورق به سه زیر ناحیه طولی با طولهای کوچک تبدیل شود. در نتیجه، کمانش زمانی روی خواهد داد که حداقل، یکی از این سه ناحیه، کمانش نموده و موجب همراهی نواحی مجاور شود. لذا، همان‌گونه که شکل (۲) نشان می‌دهد، وجود حفره در ورق، باعث افزایش بار کمانش کلی ورق می‌شود. عملاً وجود حفره در ورق، مانند ترک، موجب آزادسازی انرژی کرنشی ناحیه پیرامونی می‌گردد. با افزایش α، فاصله میان حفره‌های ورق بزرگتر و لذا، احتمال کانش ناحیه میان حفره‌ها بیشتر شده ولی احتمال کمانش در دو ناحیه ابتدا و انتهای ورق کاهش می‌یابد. عکس این پدیده در α کوچکتر روی می‌دهد.

هر چند که دامنه بار کمانش در بار پاره‌ای سینوسی، حدوداً سه برابر دامنه بار کمانش پاره‌ای یکنواخت است، روند تغییرات آن با α و *c/b* تقریباً مانند آن از ورق تحت بار پاره‌ای یکنواخت است.

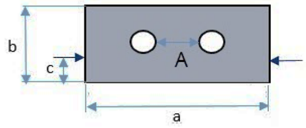
در بار موضعی، نتایج متناظر با *c/b*=0.2, 0.4 به دلیل تقارن، به ترتیب با نتایج *c/b*=0.8, 0.6 یکسان هستند. اختلافه‌های اندک آشکار شده در شکل (ج۲)، ناشی از خطاهای محاسباتی در گسسته‌سازی اولیه ورق (گام پیش کمانش) است. کمانش در اثر بار متمرکز، در نسبتهای *c/b* مورد بررسی، عمدتاً ناشی از بار خمشی درون صفحه‌ای است.

جدول۲– مقادیر کمانش بار گسترده سینوسی پاره‌ای (kN/m) ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های طولی، در طول‌های بارگذاری و شرایط مرزی مختلف.



α (cm)	شرط مرزی							
	SFSF				CFSF			
	$c/b = 0.2$	$c/b = 0.4$	$c/b = 0.6$	$c/b = 0.8$	$c/b = 0.2$	$c/b = 0.4$	$c/b = 0.6$	$c/b = 0.8$
0.5	12.1731	17.2047	22.5956	26.7960	16.5464	24.0025	32.5854	41.0921
1	12.4160	17.1784	22.4980	27.1224	16.7508	24.0646	32.6333	41.6761
1.5	12.3344	17.4443	22.7632	27.1252	16.9016	24.7081	33.4014	41.5139
2	12.1787	17.4213	22.6972	26.8907	16.4437	24.6282	33.4431	41.4358
2.5	12.2946	17.2398	22.5900	26.6809	16.8807	24.7013	33.6852	41.9096
3	12.1151	16.6721	22.1775	26.8140	16.6731	24.1454	33.2200	41.3651
3.5	12.2728	17.1413	22.1879	26.0838	16.9188	24.5608	33.6571	41.4149
4	12.1755	16.8723	21.8562	26.1149	16.8948	24.2292	33.5716	40.6970
4.5	12.1080	16.7701	21.4852	25.3081	16.5853	24.1206	32.8141	40.0147
5	11.9123	16.9797	21.1123	24.9260	16.4710	24.8738	32.4321	41.3892
5.5	11.9452	16.5538	21.3847	25.1951	16.5193	24.4043	33.3303	42.1437
6	11.9775	16.6160	21.5806	25.6237	16.6969	24.8947	33.6802	41.0921

جدول۳– مقادیر کمانش بار متمرکز (kN/m) ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های طولی، روی تکیه‌گاه‌های ساده.



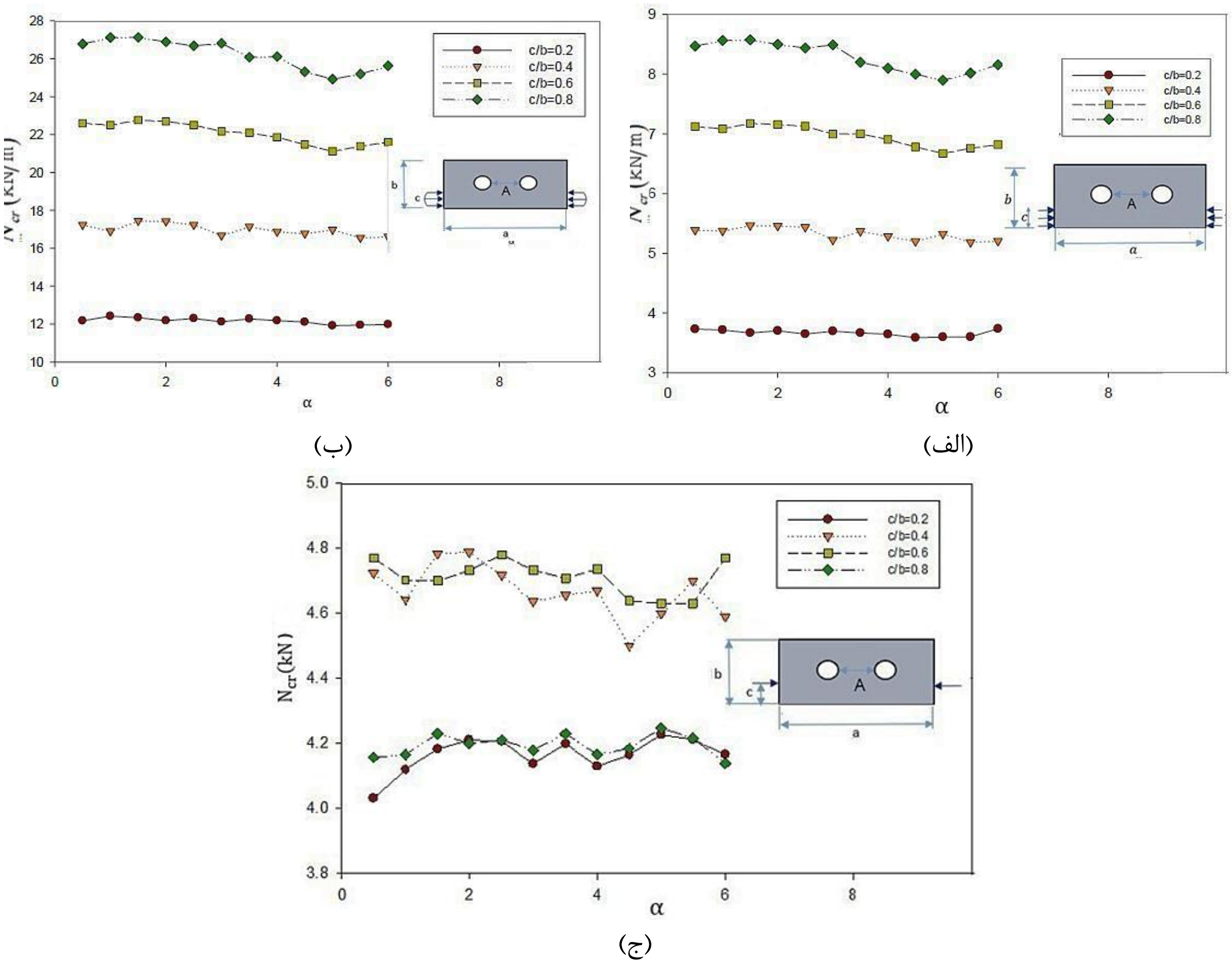
α (cm)	$c/b = 0.2$	$c/b = 0.4$	$c/b = 0.6$	$c/b = 0.8$
0.5	4.0321	4.7249	4.7779	4.1576
1	4.1271	4.6428	4.7027	4.1640
1.5	4.1835	4.7834	4.7006	4.2278
2	4.2118	4.7887	4.7331	4.2099
2.5	4.2062	4.7182	4.7449	4.2103
3	4.1386	4.6373	4.7331	4.1807
3.5	4.1997	4.6566	4.7086	4.2331
4	4.1431	4.6704	4.7368	4.1660
4.5	4.1653	4.5973	4.6392	4.1857
5	4.2277	4.6161	4.6315	4.2470
5.5	4.2121	4.6929	4.6312	4.2163
6	4.1064	4.5947	4.7740	4.1398

همانگونه که پیشتر بیان گردید، عوامل متعددی بر کمانش هر یک از نواحی ورق تاثیرگذارند که با تغییر α ، شدت هر یک از این عوامل دارای تاثیرات متناقض، تغییر می نماید. نوسانات موجـود، در نمودارهـای شـکل (۲)، عموماً ناشی از این نکته می‌باشد.

نتایج بدست آمده برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار در جداول (۱) تا (۳)، نیز روندهای کلی مشاهده شده برای ورق روی تکیه‌گاه‌های ساده، را تایید می‌نمایند. بدیهی است که در این شرایط، مقدار بار کمانش، از بار کمانش ورق روی تکیه‌گاه ساده بزرگتر است.

۳-۳- اثر موقعیت نسبی سوراخ‌های عرضی ورق کامپوزیتی، در بارگذاری‌های مختلف

نتایج مربوط به حالتی که چیدمان حفره‌های ورق، عمود بر امتداد بار است، در این بخش آورده شـده‌انـد. در این حالت، حفره‌های ورق، آن را به سه باند قائم و دو زیر ناحیه طولی تجزیه می‌نمایند. نتایج عددی مربـوط شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مختلف، در جداول (۴) تا (۶) و نتایج تصویری، برای شرایط لبـه سـاده جابجـا شونده، در شکل (۳) آورده شده‌اند.

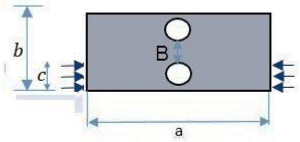


شکل۲- تغییرات دامنه بار کمانش ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های طولی و تکیه‌گاه ساده با طول بارگذاری و فاصله سوراخ‌های ورق، در بار: (الف) پاره‌ای یکنواخت، (ب) پاره‌ای سینوسی و (ج) متمرکز.

نتایج مندرج در جداول (۴) تا (۶) و شکل (۳)، آشکار می‌سازند که با دور شدن حفره‌های عرضی ورق از یکدیگر (افزایش β) و با نزدیک شدن آنها به لبه‌های ورق، مانند آرایش طولی حفره‌ها، اثر حفره کمتر شده و بار کمانش، مانند حالت ورق با حفره‌های طولی، کاهش می‌یابد.

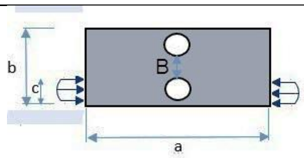
با افزایش β ، عرض ناحیه بدون حفره میانی افزایش و احتمال روی دادن کمانش بیشتر می‌شود. بر خلاف اثر افزایش α ، روند تقریباً یکنواختی در کاهش بار کمانش با فزایش β مشاهده می‌شود. اثر نسبت c/b بر کاهش بار کمانش، مانند ورق با حفره‌های طولی آشکار است. با توجه به اینکه برای داده‌های کنونی، بعد ورق در جهت عرضی کوچکتر است، اثر نسبت یاد شده، اندکی چشم‌گیرتر است.

جدول۴- مقادیر بار کمانش گسترده یکنواخت پاره‌ای (kN/m) ورق کامپوزیتی با سوراخ‌های عرضی، در طول‌های بارگذاری و شرایط مرزی مختلف.



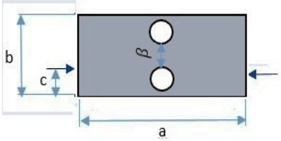
β (cm)	شرط مرزی							
	SFSF				CFSF			
	c/b = 0.2	c/b = 0.4	c/b = 0.6	c/b = 0.8	c/b = 0.2	c/b = 0.4	c/b = 0.6	c/b = 0.8
0.5	3.7629	5.4366	7.2191	8.6306	5.0769	7.4695	10.0779	12.7122
1	3.6524	5.3379	7.0812	8.5930	4.9517	7.4001	9.8365	12.4864
1.5	3.6589	5.3426	7.1050	8.5263	4.8714	7.2511	9.9068	12.5263
2	3.6633	5.3674	7.0880	8.4738	4.9509	7.3481	9.8990	12.4162
2.5	3.6218	5.3068	6.9869	8.3692	4.9340	7.4233	9.9936	12.4567

جدول۵- مقادیر بار کمانش گسترده سینوسی پاره‌ای (kN/m) ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های عرضی، در طول‌های بارگذاری و شرایط مرزی مختلف.

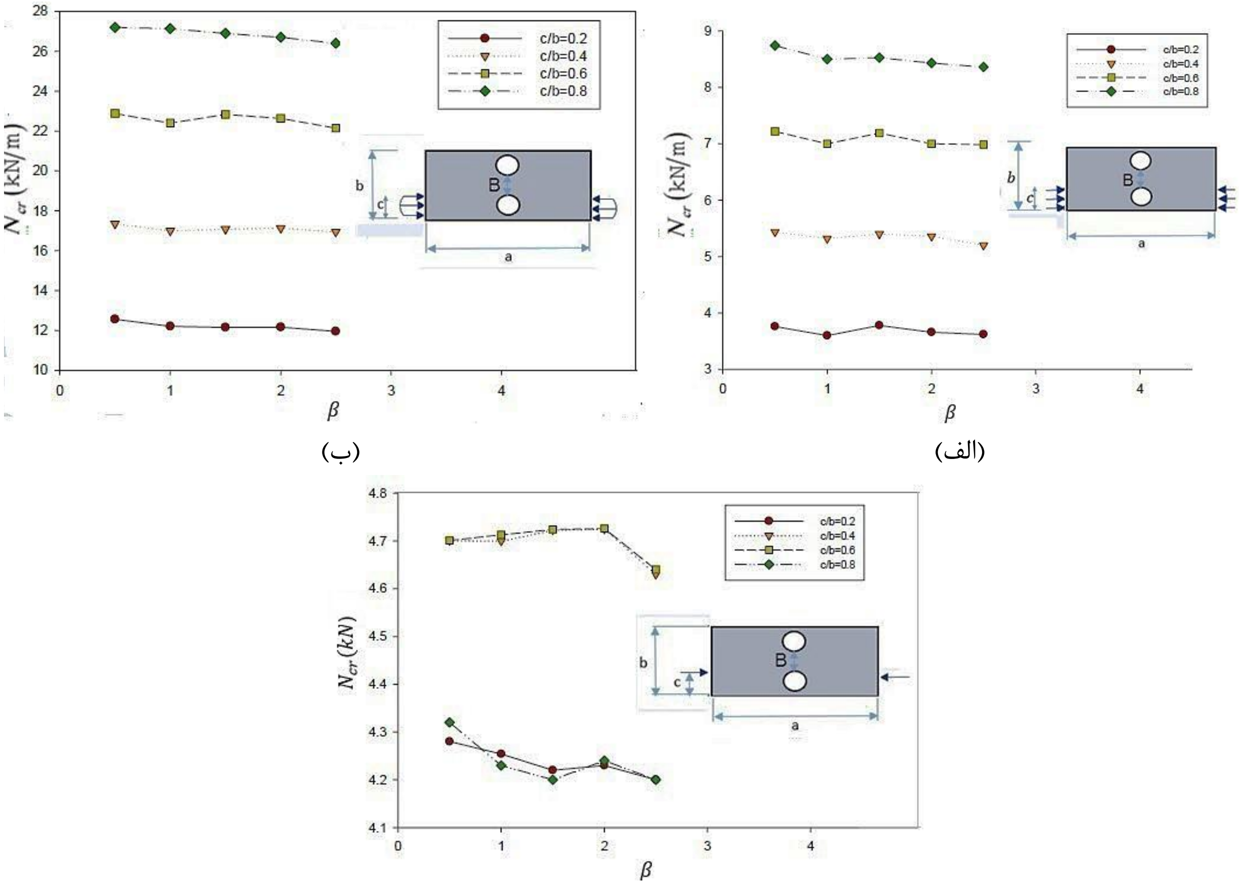


β (cm)	شرط مرزی							
	SFSF				CFSF			
	c/b = 0.2	c/b = 0.4	c/b = 0.6	c/b = 0.8	c/b = 0.2	c/b = 0.4	c/b = 0.6	c/b = 0.8
0.5	12.4942	17.3553	22.8825	27.2934	16.8758	23.9621	32.1422	40.3444
1	12.1263	17.0438	22.4477	27.1463	16.4556	23.7513	31.4037	39.5444
1.5	12.1486	17.0610	22.5362	26.9404	16.1912	23.2830	31.6615	39.6689
2	12.1627	17.1301	22.4643	26.7403	16.4541	23.5544	31.5616	39.1086
2.5	12.0257	16.9400	22.1523	26.4512	16.4013	23.8152	31.9114	39.4777

جدول۶- مقادیر بار کمانش متمرکز (kN/m) ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های عرضی، روی تکیه‌گاه‌های ساده.



	SFSF		**شرط مرزی**	
β (cm)	**c/b = 0.2**	**c/b = 0.4**	**c/b = 0.6**	**c/b = 0.8**
0.5	12.4942	17.3553	22.8825	27.2934
1	12.1263	17.0438	22.4477	27.1463
1.5	12.1486	17.0610	22.5362	26.9404
2	12.1627	17.1301	22.4643	26.7403
2.5	12.0257	16.9400	22.1523	26.4512



(ب) (الف)

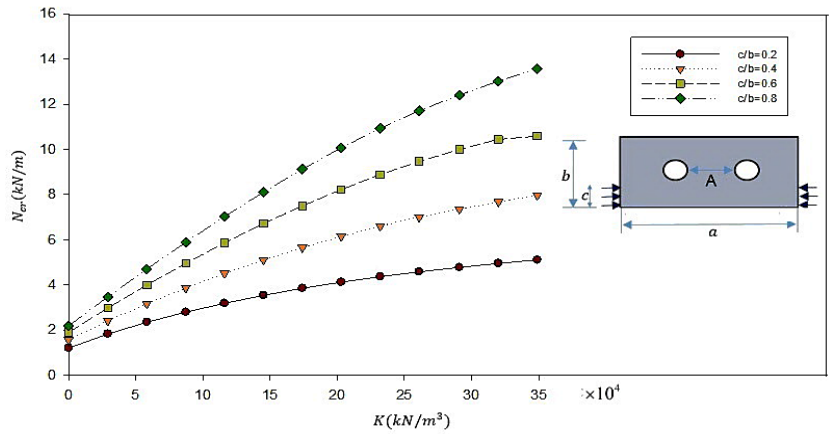
(ج)

شکل۳- تغییرات دامنه بار کمانش ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های عرضی و تکیه‌گاه ساده با طول بارگذاری و فاصله سوراخ‌های ورق، در بار: (الف) پاره‌ای یکنواخت، (ب) پاره‌ای سینوسی و (ج) متمرکز.

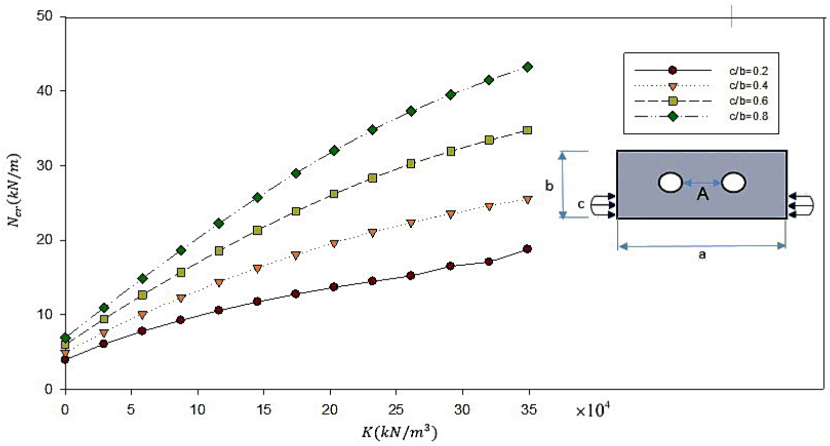
۳-۳- اثر سفتی تکیه‌گاه بر میزان بار کمانش پاره‌ای

تغییرات دامنه بار کمانش ورق کامپوزیتی با دو سوراخ طولی و تکیه‌گاه ساده، تحت بارهای پاره‌ای یکنواخت و سینوسی و بار متمرکز با سفتی تکیه‌گاه الاستیک، به ترتیب، در شکل (۴) نشان داده شده‌اند. با توجه به اینکه هدف از ارائه شکل (۴)، تحلیل پارامتری است، سفتی تکیه‌گاه با نماد $K = k_1 = k_2$ نمایانده شده است.

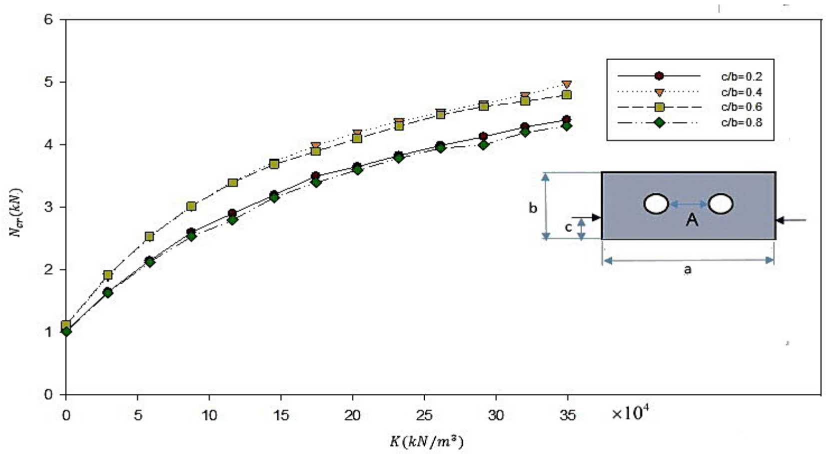
برپایه نتایج ارائه شده در شکل (۴)، بارکمانش ورق با افزایش سفتی تکیه‌گاه الاستیک، بـه طـور چشـمگیری افزایش می‌یابد؛ به گونه‌ای که باافزایش سفتی یاد شده به حدود سختی ورق، بارکمانش ورق تحت بار پاره‌ای یکنواخت، نسبت به ورق بدون تکیه‌گاه الاستیک، تا حدود ۷ برابر افزایش یافته است. این افـزایش، بـه ویـژه برای ورق تحت بار یکنواخت و مقادیر بزرگتر *c/b*، مشهودتر است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل۴– اثر سفتی تکیه‌گاه الاستیک وینکلر-پسترناک بر دامنه بار کمانش پاره‌ای ورق کامپوزیتی دارای سوراخ‌های طولی و تکیه‌گاه ساده، در بار: (الف) پاره‌ای یکنواخت، (ب) پاره‌ای سینوسی و (ج) متمرکز.

وجود تکیه‌گاه الاستیک، موجب تغییر شکل مودهای کمانش و پیدایش موج‌های کمانش ریز می‌گردد. بنابراین، انرژی لازم برای کمانش، بزرگتر بوده و اثر حفره ورق بر هندسه و بار کمانش، به گونه‌ای متفاوت آشکار می‌گردد. بر پایه شکل (۴)، اثر تکیه‌گاه الاستیک با افزایش سفتی آن، به تدریج همگرا می‌گردد. این موضوع، برای ورق تحت بار متمرکز آشکارتر است.

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله کنونی، بارهای کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی با دو سوراخ طولی یا عرضی روی بستر الاستیک وینکلر-پسترناک، تحت بارهای گسترده پاره‌ای و متمرکز، به شیوه نیمه تحلیلی بدست آمده‌اند. در کنار برخی نوآوریهای ارائه شده در مسیر تکمیل فرمول‌بندی، نتایج زیر حاصل شدند:

۱- با تغییر چیدمان سوراخ‌های ورق، مساحت زیرناحیه‌های ورق تغییر یافته و احتمال کمانش در هریک از این زیرناحیه‌ها، کمانش کلی ورق را تحت تاثیر قرار خواهد داد.

۲- مقدار دامنه بار کمانش در مقادیر بزرگتر α، کوچکتر است ولی اگر فاصله سوراخ ورق تا لبه ورق، بسیار اندک باشد، اثر آن بر کاهش استحکام ورق کاهش می‌یابد. لذا توصیه می گردد که محل سوراخهای اتصال ورق (حفره‌ها) به سازه اصلی، در وسط ورق و به صورت متقارن در نظر گرفته شود.

۳- مقدار دامنه بار کمانش، در بار پاره‌ای یکنواخت، به مراتب کوچکتر از بار سینوسی است.

۴- افزایش طول بارگذاری (نسبت c/b)، موجب تغییر کمانش از موضعی به کلی و افزایش بار کمانش می‌شود.

۵- با افزایش فاصله طولی حفره‌ها، احتمال کمانش ناحیه میان حفره‌ها بیشتر شده ولی احتمال کمانش در دو ناحیه ابتدا و انتهای ورق کاهش می‌یابد.

۶- با افزایش فاصله حفره‌های عرضی ورق و با نزدیک شدن آنها به لبه‌های ورق، بار کمانش، کاهش می‌یابد.

۷- بارکمانش ورق با افزایش سفتی تکیه‌گاه الاستیک، به طور چشمگیری افزایش می‌یابد و این افزایش، به ویژه برای ورق تحت بار یکنواخت و مقادیر بزرگتر c/b، مشهودتر است.

مراجع

[1] Leissa, A.W., and Kang, J.H., “Exact Solutions for Vibration and Buckling of an SS-C-SS-C Rectangular Plate Loaded by Linearly Varying in-plane Stresses”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, pp. 1925–1945, (2002).

[2] Wang, X., Wang, X., and Shi, X., “Accurate Buckling Loads of Thin Rectangular Plates under Parabolic Edge Compressions by the Differential Quadrature Method", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 49, pp. 447–453, (2007).

[3] Jana, P., and Bhaskar, K., “Analytical Solutions for Buckling of Rectangular Plates under Non-uniform Biaxial Compression or Uniaxial Compression with In-plane Lateral Restraint”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 49, pp. 1104–1112, (2007).

[4] Kalyan, J.B., and Bhaskar, K., “An Analytical Parametric Study on Buckling of Non-uniformly Compressed Orthotropic Rectangular Plates”, Composite Structures, Vol. 82, pp. 10–18, (2008).

[5] Shariyat, M., and Asemi, K., “3D B-Spline Finite Element Nonlinear Elasticity Buckling Analysis of Rectangular FGM Plates under Non-uniform Edge Loads, using a Micromechanical Model”, Composite Structures, Vol. 112, pp. 397–408 (2014).

[6] El-Sawy, K.M., and Martini, M.I., “Elastic Stability of Bi-axially Loaded Rectangular Plates with a Single Circular Hole”, Thin-Walled Structures, Vol. 45, pp. 122–133, (2007).

[7] Komur, M.A., and Sonmez, M., “Elastic Buckling of Rectangular Plates under Linearly Varying In-plane Normal Load with a Circular Cutout”, Mechanics Research Communications, Vol. 35, pp. 361–371, (2008).

[8] Panda, S.K., and Ramachandra, L.S., “Buckling of Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Loaded by Non-uniform in Plane Loads”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 52, pp. 819–828, (2010).

[9] Yu, T., Yin, S., Bui, T.Q., Xia, S., Tanaka, S., and Hirose, S., “NURBS-based Isogeometric Analysis of Buckling and Free Vibration Problems for Laminated Composites Plates with Complicated Cutouts using a New Simple FSDT Theory and Level Set Method”, Thin-walled Structures, Vol. 101, pp. 141–156, (2016).

[10] Turvey, G.J., and Marshall, I.H., "*Buckling and Postbuckling of Composite Plates*", Springer, Germany, Dordrecht, (1995).

[11] Eslami, M.R., Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., “*Theory of Elasticity and Thermal Stresses*”, Springer, Germany, Dordrecht, (2013).

[12] Ashrafi, H., Asemi, K., Shariyat, M., and Salehi, M., “Two-dimensional Modeling of Heterogeneous Structures using Graded Finite Element and Boundary Element Methods”, Meccanica, Vol. 48, pp. 663-680, (2013).

[13] Ashrafi, H., Asemi, K., and Shariyat, M., “A Three-dimensional Boundary Element Stress and Bending Analysis of Transversely/Longitudinally Graded Plates with Circular Cutouts under Biaxial Loading”, European Journal of Mechanics - A/Solids, Vol. 42, pp. 344–357, (2013).

[14] Ashrafi, H., and Shariyat, M., “A Three–dimensional Comparative Study of the Isoparametric Graded Boundary and Finite Element Methods for Nonhomogeneous FGM Plates with Eccentric Cutouts”, International Journal of Computational Methods, DOI: 10.1142/S0219876217500062.

[15] Eslami, M.R., “*Finite Elements Methods in Mechanics*”, Springer, Switzerland, (2014).

[16] Pandey, R., Shukla, K.K., and Jain, A., “Thermoelastic Stability Analysis of Laminated Composite Plates: An Analytical Approach”, Communications in Nonlinear Scientific and Numerical Simulations, Vol. 14, pp. 1679–1699, (2009).

فهرست نمادهای انگلیسی

a,b: طول و عرض ورق

A,B : فواصل طولی و عرضی سوراخهای ورق

$\mathcal{A}$: سطح

d : قطر سوراخ ورق

$D_{11},D_{12},D_{22},D_{16},D_{26},D_{66}$: سفتی‌های خمشی و پیچشی ورق

E : مدول کشسانی

h : ضخامت کل ورق

$\boldsymbol{H}$: بردار توابع تقریب

k_1,k_2: ضرایب وینکلر و پسترناک تکیه‌گاه الاستیک

$\boldsymbol{\mathcal{K}}, \boldsymbol{K}$: ماتریس سختی

i, j : شمارنده

M : گشتاور بر واحد طول مقطع

N : نیرو بر واحد طول مقطع

p : بار گسترده عرضی بر واحد سطح

w: خیز ورق

W : بردار خیز نقاط گره فرضی

x,y : مختصات

نمادهای یونانی

α, β : فواصل بی بعد طولی و عرضی سوراخهای ورق

ε : کرنش

ε^0 : کرنش لایه میانی

ε : کرنش

γ_{ij} : کرنش برشی

λ : بار کمانش

κ : انحنای لایه میانی

Φ : تابع تنش

ν : ضریب پواسون

σ, σ_0 : تنش و تنش اولیه

τ : تنش برشی

Π : انرژی پتانسیل کل

Abstract

In the present paper, buckling of multi-layer rectangular orthotropic composite plates with two longitudinal or transverse in-plane circular cutouts, on Winkler-Pasternak elastic foundation, is investigated. The analysis is accomplished through two steps. First, the in-plane pre-buckling stress components induced by the partial edge loads are determined and in the second stage, the Galerkin method is employed to develop the governing equations of the buckling. In this regard, the classical theory of plates, von Karman strain-displacement equations, Galerkin and energy approaches, and reduction of the problem to an eigenvalue problem are used. The buckling load is determined based on various relative locations of the cutouts and the: (1) uniform partial, (2) sinusoidal partial, and (3) concentrated edge loads, for the movable simply supported and clamped edge conditions. Furthermore, influence of the elastic foundation of the composite plate is investigated for different concentrated and partial loads. Results reveal that buckling of plates with holes or cutouts is dependent on opposite factors and may occur in local or global forms and the elastic foundation has pronounced effects on the buckling load. This effect is more noticeable when the partial load is distributed on a larger length of the edge.