

# تحلیل ضربه کم‌سرعت خارج از مرکز ورق ساندویچی با تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای به شیوه نیمه تحلیلی

محمد شریعات<sup>۱</sup>

استاد

در پژوهش کنونی، رفتار ورق ساندویچی با تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای در گوشه‌ها در معرض ضربه کم‌سرعت خارج از مرکز بررسی شده است. برای این منظور، تاریخچه نیروی تماسی و خیز ورق با تکیه‌گاه‌های ساده معمولی با رفتار ورق روی تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای در گوشه‌ها مقایسه شده است. این مقایسه، تاکنون، حتی برای ورق‌های تک‌لایه همسانگرد انجام نشده است. نوآوری دیگر، شامل پیشنهاد یک حل نیمه تحلیلی به همراه فرمول‌بندی انرژی جدید، جهت در نظر گرفتن وابستگی مکانی و استفاده از یک روش انتگرال‌گیری عددی زمانی ضمنی می‌باشد. معادلات حرکت بر پایه اکسترمم سازی انرژی پتانسیل کل، با در نظر گرفتن کار نیروهای اینرسی، به شیوه ریتز پیدا شده و به طور ابتکاری، به فرم شبه‌استاتیکی تبدیل شده است. بر خلاف پژوهش‌های موجود، اثر سفتی لایه‌های زیرین بر ضربه نیز دخالت داده شده است. صحنه‌گذاری نتایج بر پایه نتایج نرم‌افزار اباکوس، برای حالتی ویژه انجام شده است. در بخش نتایج، تأثیر چشمگیر تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای (نسبت به تکیه‌گاه کامل)، سرعت اولیه ضربه‌زن و نسبت منظری ورق، بر تاریخچه‌های نیروی تماسی و خیز ورق، بررسی شده است.

مجید روشن‌فر<sup>۲</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما: ورق ساندویچی، ضربه کم‌سرعت، ضربه خارج از مرکز، تکیه‌گاه نقطه‌ای، روش نیمه تحلیلی.

## ۱- مقدمه

ساختارهای ساندویچی به دلیل امکان گردآوری لایه‌هایی با سفتی‌های بسیار متفاوت، در سازه‌های مختلف مهندسی، مانند سازه‌های هوافضایی، مکانیکی، خودروبی، دریایی، ساحلی و عمرانی کاربردهایی روزافزون یافته‌اند. این سازه‌ها، عمدتاً برای تحمل بارهای عرضی، خمشی یا پیچشی استفاده می‌شوند. با توجه به اینکه در ورق‌های ساندویچی، بار عمدتاً توسط لایه‌های رویین و زیرین ورق (رویه‌ها) حمل می‌شوند، این لایه‌ها را می‌توان از مواد با استحکام بالا ساخته و برای لایه میانی (هسته) که عمدتاً برای دور کردن رویه‌ها از صفحه خنثی و افزایش ممان اینرسی مقطع استفاده می‌شود، می‌توان از مواد با سفتی پایین و قیمت ارزان‌تر بهره جست.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران shariyat@kntu.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

لذا، سازه اقتصادی تر بوده و با انتخاب مواد مناسب برای هسته، می توان خاصیت میراسازی انرژی ارتعاشات یا ضربه ناخواسته را افزایش داد [۱-۳]. با وجود استحکام بالا، این مواد به بارهای ضربه ای در اثر برخورد اجسام خارجی حساس بوده و ممکن است دچار آسیب های گوناگونی مانند جدایش لایه ها، پیدایش ترک در الیاف یا ماتریس، لغزش الیاف نسبت به ماتریس و از میان رفتن اتصال کامل میان آنها و تخریب سطحی شوند. بنابراین، شناخت رفتار ورق های ساندویچی در برابر ضربه و بررسی پارامترهای موثر بر افزایش مقاومت به ضربه جهت کاهش آسیب های احتمالی، گامی مهم در تحلیل ورق های ساندویچی می باشد.

پژوهش های انجام شده در زمینه تحلیل ضربه کم سرعت ورق ها، عمدتاً متمرکز بر ورق های تک لایه یا چند لایه کامپوزیتی یا ورق های تک لایه ساخته شده از مواد هدفمند [۴] با تکیه گاه های کامل، بوده اند. در این پژوهش ها، ضربه عموماً از گونه مرکزی پنداشته شده است. کارپینو [۵]، افتادن یک وزنه روی پنل های شیشه/پلی استر را به طور تجربی آزمایش کرد. در این بررسی، ورق روی سطح صلب قرار داده شده بود. همچنین، وی یک مدل جرم و فنر را برای محاسبه تحلیلی نیروی برخورد به کار برد. لی و هانگ و فان [۶]، رفتار ورق ساندویچی با رویه های کامپوزیتی الیافی تحت بار ضربه ای را به طور تجربی بررسی کردند. هراپ و پالازوتو [۷]، ضربه کم سرعت ورق ساندویچی را بر پایه تئوری ساده شده الاستیسیته مورد بررسی قرار داده و به گونه ای قانون تماس هرتز را بازسازی نمودند. پالازوتو و همکاران [۸]، با بکارگیری سازگاری هندسی میان سطح ضربه زننده و سطح رویه بالایی در ناحیه تماس در هر لحظه از زمان و فرض هسته به عنوان تکیه گاه الاستیک، رابطه تماس ویژه ای برای ورق ساندویچی ارائه و رفتار ورق را بر پایه روش اجزای محدود مطالعه نمودند. بارلاتی [۹]، پاسخ های کلی ضربه کم سرعت ورق ساندویچی را بر پایه قانون تماس هرتز بدست آورد. میونیر و شانوی [۱۰]، رفتار دینامیکی ورق های ساندویچی با هسته فومی را بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی، بررسی نمودند. هانسن و همکاران [۱۱] برخورد پرتابه به پنل آلومینیوم-فوم را به صورت تجربی و نیز با بکارگیری نرم افزار تجاری LS-Dyna بررسی نمودند.

ژائو و همکاران [۱۲] برخورد سرعت پایین پرتابه با دماغه کروی به ساندویچ پنل های آلومینیوم-فوم را به صورت تجربی بررسی و تغییرات زمانی نیرو و خیز را ثبت کردند. خلیلی و ملک زاده [۱۳]، تئوری مرتبه بالا برای صفحات ساندویچی، برای استفاده از مدل گسسته تحلیل ضربه کم سرعت، پیشنهاد کردند. پایگانه و همکاران [۱۴] با بکارگیری یک مدل گسسته برای ضربه، نشان دادند که منحنی نیرو-تغییر مکان ضربه برای ورق های فیبری-فلزی تحت ضربه کم سرعت تنها به انرژی ضربه بستگی دارد تا جرم و سرعت ضربه زننده به صورت مجزا. اکاردی و فریرو [۱۵] با بکارگیری یک روش به هنگام سازی مبتنی بر روش انرژی، ضربه کم سرعت ورق ساندویچی را با بکارگیری تئوری زیگزاگ برای ورق های رویه مدل سازی نمودند. در این زمینه، شعاع انحنای ناحیه تماس به صورت لحظه ای به هنگام می گردید.

فو و همکاران [۱۶]، از ترکیب روش موازنه انرژی و قانون بقای مومنتم برای یافتن معادلات حاکم بر ضربه کم سرعت بهره جستند. اخیراً شریعات و فرزنان نسب [۱۷]، رفتار ضربه ورق هدفمند تک لایه با ضربه خارج از مرکز را به روش اجزاء محدود بررسی نمودند. مرور تاریخچه ارائه شده بیانگر آن است که تحلیل رفتار ضربه ورق در تحقیقات پیشین، یا برای ورق غیر ساندویچی انجام شده یا بر پایه مدل گسسته ارائه شده است. در پژوهش کنونی، تحلیل ضربه ورق ساندویچی با تکیه گاه های نقطه ای برای اولین بار، ارائه می شود.

همچنین، در روش کنونی، امکان در نظر گرفتن ضربه خارج از مرکز نیز وجود دارد. برخلاف بسیاری از پژوهش‌ها که به کمک نرم‌افزارهای تجاری انجام شده‌اند، تحلیل ضربه کنونی، بر پایه فرمولبندی، ارائه حل سری جدید، روابط انرژی جدید، تبدیل ابتکاری معادلات حرکت به معادلات شبه‌استاتیکی و اصلاح مدل ضربه صورت پذیرفته است. در بخش نتایج، میزان تأثیر استفاده از تکیه‌گاه نقطه‌ای بجای تکیه‌گاه سراسری نیز از مقایسه نتایج این دو حالت، بررسی شده است.

## ۲- قوانین تماس مورد استفاده

پارامترهای هندسی و سینماتیکی ورق ساندویچی روی تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای مورد بررسی، در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. در این شکل، طول، عرض و ضخامت ورق به ترتیب، با  $a$ ،  $b$  و  $h$  نشان داده شده‌اند.  $R$  و  $V$  به ترتیب، شعاع و سرعت اولیه ضربه‌زن می‌باشند.

در پژوهش کنونی، پاسخ‌های ضربه کم‌سرعت ورق بررسی شده‌اند. برخی از پژوهشگران، ضربه کم‌سرعت را متناظر با آسیب‌های اندک [۱۸] یا پیدایش تنش‌های کوچکتر از حد شکست یا پلاستیک، برخی دیگر، آن را متناظر با سرعت اولیه ضربه‌زن کمتر از ۳۰ متر بر ثانیه [۱۹] و برخی از پژوهش‌گران آن را در ارتباط با بازگشت موج از تکیه‌گاه و ایجاد حرکت عرضی در ورق، در زمان ضربه برای پرتاب ضربه‌زن و انتشار موج تنشی در جسم دانسته‌اند [۲۰ و ۲۱]. در طی فاز بارگذاری ضربه، ارتباط میان نیروی تماس  $P$  با میزان نفوذ  $\alpha$ ، با توجه به قانون تماس هرتز، بدین صورت بیان می‌گردد [۲۲]:

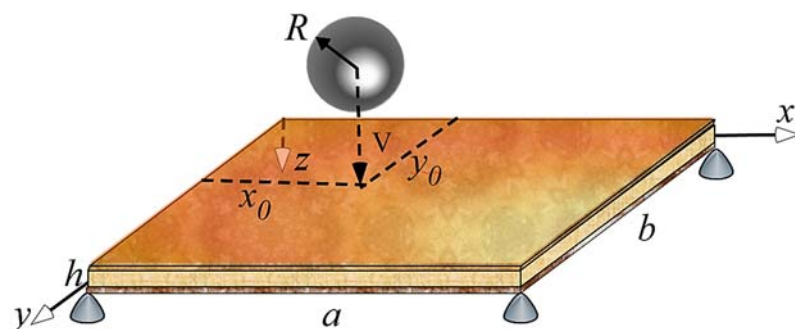
$$P = k\alpha^{3/2} \quad (1)$$

که در آن، سفتی تماس برابر است با:

$$k = \frac{4}{3}ER^{1/2} \quad (2)$$

و  $R$  و  $E$  (شعاع و مدول موثر) به ترتیب از روابط (۳) و (۴) بدست می‌آیند:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3)$$



شکل ۱- پارامترهای هندسی و سینماتیکی ورق ساندویچی روی تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای مورد بررسی

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (۴)$$

که در آن،  $R_1$  و  $R_2$  شعاع انحنای دو جسم در حال تماس هستند.  $\nu_1$ ،  $E_1$  و  $\nu_2$ ،  $E_2$  به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون دو جسم هستند. زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب بیان گر خواص ضربه‌زننده و ورق هستند. پدیده تماس در فاز باربرداری، به طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت از فاز بارگذاری است. در این فاز، یانگ و سان استفاده از تقریب زیر را مناسب دانسته‌اند [۲۳]:

$$P = P_m [(\alpha - \alpha_0) / (\alpha_m - \alpha_0)]^{2/5} \quad (۵)$$

که در آن  $P_m$  بیشینه مقدار نیروی تماس قبل از شروع فاز باربرداری،  $\alpha_m$  بیشینه میزان نفوذ، و  $\alpha_0$  نفوذ دائمی در صورت وجود است. چنانچه بیشینه نفوذ از یک مقدار بحرانی  $\alpha_{cr}$  کمتر باشد، مقدار  $\alpha_0$  برابر با صفر خواهد بود. برای  $\alpha_m > \alpha_{cr}$  داریم:

$$\alpha_0 = \alpha_m [1 - (\alpha_{cr} / \alpha_m)^{2/5}] \quad (۶)$$

در تحلیل‌های ضربه انجام شده توسط دیگران برای ورق‌های کامپوزیتی، چندلایه یا ساندویچی، تنها مدول کشسانی لایه رویین ورق در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه سختی لایه‌های زیرین، تأثیر چشم‌گیری بر سفتی ناحیه تماس دارد، لازم است که مدول الاستیسیته ظاهری ناحیه تماس به گونه‌ای اصلاح شود. از آنجا که لایه‌های ورق تا حد زیادی سری هستند، می‌توان رابطه زیر را برای اصلاح مدول الاستیسیته سطح تماس پیشنهاد نمود:

$$(E_1)_{eq} = h / \left( \sum_i^N h_i / E_i \right) \quad (۷)$$

که در آن،  $i$  شمارنده لایه‌ها است.

### ۳- روش نیمه تحلیلی برای یافتن پاسخ‌های زمانی ضربه

از آنجا که ورق تنها توسط تکیه‌گاه‌های متمرکز در نقاط گوشه آن نگه داشته شده است، حل‌های ارائه شده برای شرایط لبه‌ای مختلف قابل استفاده نبوده و شرایط مرزی ورق غیرمتعارف است. لذا، دستیابی به پاسخ ورق با حل‌های نیمه تحلیلی موجود، امکان‌پذیر نمی‌باشد. همچنین، نیروی ضربه وارده به ورق، به صورت نیروی متمرکز و متغیر با زمان می‌باشد؛ در حالی که حل‌های نیمه تحلیلی موجود، برای ورق تحت بار گسترده (با توزیع یکنواخت یا غیر یکنواخت) و عمدتاً استاتیکی، ارائه شده‌اند.

در یافتن پاسخ به شیوه کنونی، فرض شده است که تحلیل ضربه کم‌سرعت ورق در شرایط هم‌دما انجام می‌گیرد، سرعت ضربه‌زننده در محدوده سرعت‌های پایین بوده و تنش‌ها در محدوده الاستیک می‌باشند، پدیده جدایش یا ترک خوردن لایه‌ها روی نمی‌دهد، میرایی سازه‌ای وجود ندارند و ضربه‌زن صلب است (فرض آخر متناظر با آسیب‌های بیشینه در ورق است).

با توجه به اینکه حل نیمه تحلیلی پیشنهادی، در ارتباط با حل مسئله به شیوه انرژی است، ابتدا باید فرم پاسخ تقریبی تعیین شود. بر خلاف روش‌های تعادل نیرو، در روش انرژی لازم است که پاسخ انتخابی شرایط هندسی

را تأمین نماید ولی شرایط مرزی نیرویی، در قالب شرایط مرزی طبیعی، در مسیر کمینه‌سازی فانکشنال انرژی، به خودی خود تأمین می‌شوند. این نکته، مزیت اصلی روشهای حساب تغییرات بر روشهای مانده‌های وزن داده شده را تشکیل می‌دهد. شرایط مرزی هندسی مسئله با توجه به شکل (۲)، عبارتند از:

$$w = 0 @ (x, y) = (0, 0), (0, b), (a, 0), (a, b) \quad (۸)$$

که  $w$  خیز نقاط ورق است. شرایط مرزی رابطه (۸)، با انتخاب حل سری زیر تأمین می‌شوند:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^n \left[ A_m(t) \sin \frac{m\pi x}{a} + B_m(t) \sin \frac{m\pi y}{b} \right] \quad (۹)$$

در ارائه حل یاد شده، به طور ضمنی، از تقریب کانترویچ (جدایش وابستگی زمانی از وابستگی مکانی در هر جمله سری)، استفاده شده است. می‌توان ثابت نمود که حل ارائه شده، نه تنها شرایط مرزی هندسی، بلکه شرایط مرزی گشتاوری را نیز تأمین می‌نماید؛ هر چند که شرایط مرزی برشی و گشتاوری لبه‌ها، با توجه به عدم وارد نمودن کار این بارها در انرژی پتانسیل کل، به خودی خود تأمین خواهد شد. بر پایه تئوری کلاسیک، مقادیر گشتاور بر واحد طول، از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$M_x = -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (۱۰)$$

$$M_y = -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (۱۱)$$

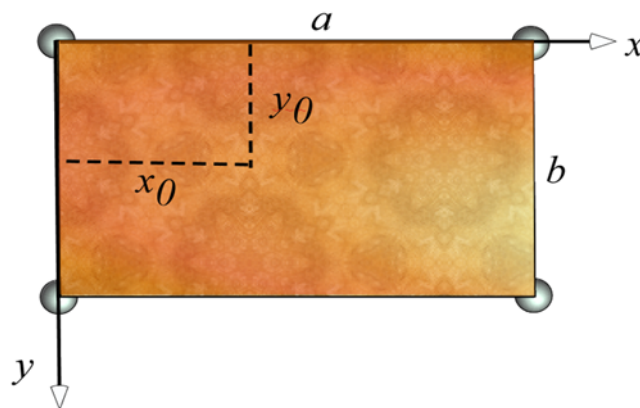
در روابط (۱۰) و (۱۱)،  $D$  سختی خمشی:

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz \quad (۱۲)$$

و  $\nu$  ضریب پواسون است. بر پایه رابطه (۹):

$$w_{,xx} = - \sum_{m=1}^n A_m(t) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (۱۳)$$

$$w_{,yy} = - \sum_{m=1}^n B_m(t) \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (۱۴)$$



شکل ۲- شرایط مرزی هندسی ورق ساندویچی

که عبارات سینوسی روابط (۱۳) و (۱۴)، در نقاط تکیه‌گاهی صفر شده و لذا، شرایط مرزی زیر نیز تأمین می‌گردند:

$$M_x, M_y = 0 @ (x, y) = (0, 0), (0, b), (a, 0), (a, b) \quad (15)$$

بنابر این، تابع  $w$  انتخابی، شرایط مرزی گشتاوری را نیز تأمین می‌کند.

در حقیقت، انتخاب پاسخ (۹) بر پایه این واقعیت ارائه شده که تنها در حالت‌های ویژه، می‌توان از جدایش وابستگی‌های مکانی استفاده نمود. لذا در حالت کلی، مانند حالت ضربه خارج از مرکز، وابستگی‌های  $x$  و  $y$  به صورت ضرب توابعی از این دو در یکدیگر، قابل ارائه نیستند. لذا حل ارائه شده در رابطه (۹)، حاوی نوآوری است. این حل به صورت جمع وابستگی‌های  $x$  و  $y$  ارائه شده است. به تعبیری دیگر، در یک لبه با  $x$  معین مانند لبه‌های  $x = 0$  و  $x = a$  ورق، خیز به  $y$  وابسته است در حالی که اگر از فرم جدایش متغیرها بهره گیریم:

$$w(x, y) = X(x)Y(y) \quad (16)$$

تنها زمانی خیز در تکیه‌گاه‌ها صفر می‌گردد که تابع  $X(x)$  روی لبه‌های یاد شده صفر گردد. زیرا  $Y(y)$  به  $x$  وابسته نیست. همین موضوع برای لبه‌های  $y = 0$  و  $y = b$  در ارتباط با تابع  $Y(y)$  مطرح است. به بیان دیگر، تنها زمانی که خیز تمامی نقاط لبه‌ها (هر لبه به تنهایی) یکسان باشند، استفاده از روش جدایش متغیرها مناسب است. این مسئله، نمونه‌ای از مسائلی است که روش جدایش متغیرها برای آن قابل استفاده نیست.

انرژی پتانسیل کل ورق ( $\Pi$ )، از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۴]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \{[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)[w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2]]\} dx dy + \frac{2k}{5} \alpha^{5/2} \\ & + \frac{1}{2} m_i V^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{w})^2 d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن،  $\Omega$ ،  $m_i$  و  $V$  به ترتیب، حجم ورق و جرم و سرعت ضربه‌زن بوده و انرژی پتانسیل نفوذ در فاز بارگذاری، با توجه به رابطه (۱)، از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\int_0^{\alpha} P d\alpha = \int_0^{\alpha} k \alpha^{3/2} d\alpha = \frac{2k}{5} \alpha^{5/2} \quad (18)$$

در فاز باربرداری، لازم است که عبارت درون انتگرال رابطه (۱۸) متناظر با رابطه (۵) تغییر یابد. سرعت ضربه‌زن از طریق رابطه زیر به خیز ورق مرتبط می‌شود:

$$V = \frac{\partial}{\partial t} \left( w \Big|_{x=x_0, y=y_0} + \alpha \right) \quad (19)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \{[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)[w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2]]\} dx dy + \frac{2k}{5} \alpha^{5/2} \\ & + m_i \left( \ddot{w} \Big|_{x=x_0, y=y_0} + \ddot{\alpha} \right) \left( w \Big|_{x=x_0, y=y_0} + \alpha \right) + \int_0^b \int_0^a \rho \dot{w} w dx dy \end{aligned} \quad (20)$$

در نوشتن معادله (۲۰) از این نکته که نیروی تماس یک نیروی داخلی است، استفاده شده است. همچنین، دو عبارت آخر رابطه (۲۰)، شامل حاصل ضرب نیروی اینرسی جرم ضربه‌زن در جابجایی آن و معادل انرژی جنبشی

هستند (کار نیروهای اینرسی) [۲۵ و ۲۶]. عباراتی به این فرم، تنها با این فرض که عبارات شتاب (نیروی اینرسی) مستقل از جابجایی هستند، به نتایج درست می‌انجامند. شبیه این اشتباه، در تمام پژوهش‌های منتشر شده، در ارتباط با بیان کار نیروی خارجی گسترده با عبارت  $\int p w dA$  وجود دارد، که  $p$  شدت بار گسترده و  $A$  سطح تاثیر آن است. این عبارت، بدون ضریب  $0/5$  اشتباه است ولی با فرض اشتباه دیگر مبتنی بر اینکه در محاسبه نمو انرژی پتانسیل کل، نیروی  $p$  مستقل از خیز است، به نتیجه درست می‌انجامد (عملاً  $p$  ارتباطی خطی با خیز دارد).

با توجه به اینکه برای پاسخ انتخابی،  $w_{,xy}$  صفر است، جزیی به پاسخ (۹) می‌افزاییم که این نارسایی ( $w_{,xy} = 0$ ) را برطرف ساخته و در نهایت، پاسخ کلی، شرایط مرزی خیز و گشتاور در گوشه‌ها و لبه‌ها را بر هم نزند:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \left[ A_m(t) \sin \frac{m\pi x}{a} + B_m(t) \sin \frac{m\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \quad (21)$$

معادله حرکت، از جای‌گذاری پاسخ (۲۱) در رابطه (۲۰) و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل، نسبت به دامنه‌های مجهول پاسخ بدست می‌آید.

با توجه به رابطه (۲۱):

$$w|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \sum_{m=1}^M \left[ A_m(t) \sin \frac{m\pi x_0}{a} + B_m(t) \sin \frac{m\pi y_0}{b} + \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right] \quad (22)$$

فرم عبارت انرژی پتانسیل کل، با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۰) به دست می‌آید. برای کمینه نمودن انرژی پتانسیل کل، لازم است مشتقات عبارت انرژی حاصله:

$$\Pi = f(A_m, B_m, C_{mn}, \alpha) ; (m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N) \quad (23)$$

نسبت به  $A_m(t)$ ،  $B_m(t)$ ،  $C_{mn}$  و  $\alpha$  صفر شوند (روش ریتز):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_m}, \frac{\partial \Pi}{\partial B_m}, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{mn}}, \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \quad (m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N) \quad (24)$$

همان گونه که پیشتر بیان گردید، در محاسبه مشتقات، لازم است که به هم ارزیهای زیر توجه شود:

$$\frac{\partial \dot{A}_m}{\partial A_m}, \frac{\partial \dot{B}_m}{\partial B_m}, \frac{\partial \dot{C}_{mn}}{\partial C_{mn}}, \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} = 0 \quad (m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N) \quad (25)$$

بسته به تعداد انتخابی از عبارات سری، عبارات حاصله بسیار حجیم می‌باشند. محاسبات لازم برای استخراج این معادلات در نرم‌افزار محاسبات پارامتری MAPLE انجام شده‌اند. توجه به این نکته ضروری است که چون  $\alpha$  به فرم سری نیست، نمی‌توان تنها عبارات دارای اندیس‌های مشابه  $m$  و  $n$  را با یکدیگر مقایسه نمود و لذا کل جملات سری پاسخ (۲۱) باید به طور همزمان در نظر گرفته شوند.

در عبارات نهایی حاصله، جمله  $k\alpha^{3/2}$  حاصل از مشتق‌گیری از عبارت  $k\alpha^{5/2}$  نسبت به  $\alpha$ ، باید به گونه‌ای تجزیه شود که بتوان رابطه را به فرم ماتریسی استاندارد زیر نشان داد:

$$M\ddot{\delta} + K(\alpha)\delta = 0 \quad (26)$$

که  $\delta$  بردار پارامترهای جابجایی است:

$$\delta^T = \langle A_1 \quad B_1 \quad C_{11} \quad C_{12} \quad \dots \quad A_2 \quad B_2 \quad C_{21} \quad \dots \quad \alpha \rangle \quad (27)$$

در این حالت،  $k\alpha^{3/2}$  باید به فرم  $(k\alpha^{1/2})\alpha$  نوشته شود. بنابر این، دستگاه معادلات (۲۶) غیر خطی بوده و باید به روشی ویژه، مانند روش تکرار پیکارد [۲۷]، حل شود.

به جای استفاده از مسیر مستقیم بالا که دارای نکات مفهومی ویژه‌ای است، می‌توان اکسترمم‌سازی را بر پایه روش کار مجازی نیز انجام داد:

$$\begin{aligned} \Pi \delta &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega + k\delta\alpha^{3/2} + m_i \left( \delta \dot{w}|_{x=x_0, y=y_0} + \delta \dot{\alpha} \right)^T \left( \dot{w}|_{x=x_0, y=y_0} + \dot{\alpha} \right) \\ &+ \int_{\Omega} \rho \ddot{w} \delta w dV \\ &= \delta \left( \int_0^b \int_0^a \{ [(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)[w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2]] \} dx dy \right) \quad (28) \\ &+ k\alpha^{3/2} \delta\alpha + m_i \left( \ddot{w}|_{x=x_0, y=y_0} + \ddot{\alpha} \right)^T \left( \delta w|_{x=x_0, y=y_0} + \delta\alpha \right) + \int_{\Omega} \rho \ddot{w} \delta w dV \\ &= \delta^T [M\ddot{\delta} + K(\alpha)\delta] = 0 \quad \delta^T \neq 0 \Rightarrow M\ddot{\delta} + K(\alpha)\delta = 0 \end{aligned}$$

برای نمونه، عبارت متناظر با  $\delta\alpha$  از رابطه (۲۸) به فرم زیر است:

$$P = k\alpha^{3/2} = -m_i (\ddot{w}|_{x=x_0, y=y_0} + \ddot{\alpha}) \quad (29)$$

که با نوشتن قانون دوم نیوتن برای جرم ضربه‌زن، به سادگی اثبات می‌شود. این نتیجه، از اکسترمم نمودن مستقیم تابع انرژی (۲۰) بر پایه رابطه (۲۴) نیز بدست می‌آید. فرم توابع انرژی (۲۰) و (۲۸)، برای اولین بار ارائه شده‌اند.

دستگاه معادلات حاصله، حاوی  $(2M + 1)N + 1$  معادله است. برای ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی (که نتایج آن در این مقاله مد نظر نیستند)، تابع انرژی پتانسیل کل را می‌توان به فرم زیر گسترش داد:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ &+ 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} dx dy + \frac{2k}{5} \alpha^{5/2} \quad (30) \\ &+ m_i \left( \ddot{w}|_{x=x_0, y=y_0} + \ddot{\alpha} \right) \left( w|_{x=x_0, y=y_0} + \alpha \right) + \int_0^b \int_0^a \rho \ddot{w} w dx dy \end{aligned}$$

که در آن،

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z^2 dz \quad (31)$$

و  $C_{ij}$  ضرایب الاستیک رابط مولفه تنش  $i$  با مولفه کرنش  $j$  می‌باشند.



پیش از آنکه بتوان روش تکرار پیکارد را برای حل دستگاه معادلات (۲۶) استفاده نمود، باید دستگاه معادلات را به فرم استاندارد شبه استاتیکی (بدون حذف آثار دینامیکی) نوشت. برای این منظور، ابتدا از روشی عددی برای گسسته‌سازی حوزه زمان استفاده می‌کنیم. روش انتخابی این پژوهش، روش نیومارک است. در این حالت، ناحیه زمانی حل، به چندین زیر گام زمانی که اندازه هر یک به مراتب کوچکتر از پریرود طبیعی اول ورق است، تجزیه نموده و پس از استفاده از روش گسسته‌سازی نیومارک، پاسخ هر گام زمانی را به شیوه تکرار پیکارد بدست می‌آوریم. بر پایه روش گسسته‌سازی زمانی، بردارهای سرعت و شتاب انتهای هر مرحله زمانی را می‌توان بر حسب بردار جابجایی انتهای گام زمانی مورد نظر و بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب مرحله قبل، به فرم نمادین زیر نوشت [۲۸]:

$$\delta^{t+\Delta t} = G_{11}\delta^{t+\Delta t} + G_{12}\delta^t + G_{13}\delta^t + G_{14}\delta^t = G_1\delta^{t+\Delta t} + \mathcal{H}_1 \quad (32)$$

$$\delta^{t+\Delta t} = G_{21}\delta^{t+\Delta t} + G_{22}\delta^t + G_{23}\delta^t + G_{24}\delta^t = G_2\delta^{t+\Delta t} + \mathcal{H}_2 \quad (33)$$

مقدار ضرایب  $G$  و  $\mathcal{H}$  معلوم است [۲۸ و ۲۹]. در هر مرحله زمانی، کمیت‌های  $\mathcal{H}_1$  و  $\mathcal{H}_2$  مربوط به انتهای مرحله زمانی قبل بوده و برای گام زمانی کنونی معلوم می‌باشند. در اولین گام زمانی:

$$\delta^T = \mathbf{0}, \quad \delta^T = \langle 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ V \rangle \quad (34)$$

شتاب‌های اولیه را می‌توان با جایگزینی رابطه (۳۴) در رابطه (۲۶) یافت. با توجه به اینکه سرعت‌ها و شتاب‌ها بر حسب پارامترهای جابجایی قابل بیان هستند، رابطه (۲۶) را می‌توان بر پایه روابط (۳۲) و (۳۳) به فرم زیر تبدیل نمود:

$$\hat{K}(\alpha)\delta^{t+\Delta t} = \mathcal{R} \quad (35)$$

که بردار سمت دوم رابطه (۳۵)، عمدتاً حاوی جملات مرتبط با ضرایب  $G$  و  $\mathcal{H}$  است. همان گونه که بیان شد، رابطه غیرخطی (۳۵) باید در هر گام زمانی، به روش تکرار حل شود. اگر  $i$  شمارنده تکرار باشد، این حل تکراری زمانی همگرا دانسته می‌شود که:

$$\left\| \frac{\delta_{i+1}^{t+\Delta t} - \delta_i^{t+\Delta t}}{\delta_{i+1}^{t+\Delta t}} \right\| \ll \varepsilon \quad (36)$$

که  $\varepsilon$  عدد بسیار کوچکی مانند  $0.0001$  می‌باشد.

برای ورق با لبه‌های روی تکیه‌گاه ساده (تکیه‌گاه کامل)، می‌توان تنها بخش آخر سری پاسخ (۲۱) را در نظر گرفت. لذا می‌توان پاسخ را به فرم سری ناویر زیر انتخاب نمود:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (37)$$

بقیه مسیر مانند قبل است.

## ۴- نتایج عددی و بحث نتایج

### ۴-۱- مشخصات پایه ورق مورد بررسی

ورق ساندویچی مورد بررسی، دارای ابعاد درون صفحه‌ای  $100 \times 100$  میلی‌متر و ضخامت کل  $2/5$  میلی‌متر است. ضخامت هریک از رویه‌ها  $0/75$  میلی‌متر است. رویه‌های ورق از آلومینیوم ۲۰۲۴-T۳ با ویژگیهای مواد زیر ساخته شده:

$$E = 72.4GPa, \quad \nu = 0.33, \quad \rho = 2780kg/m^3$$

و خواص هسته فومی، عبارتند از:

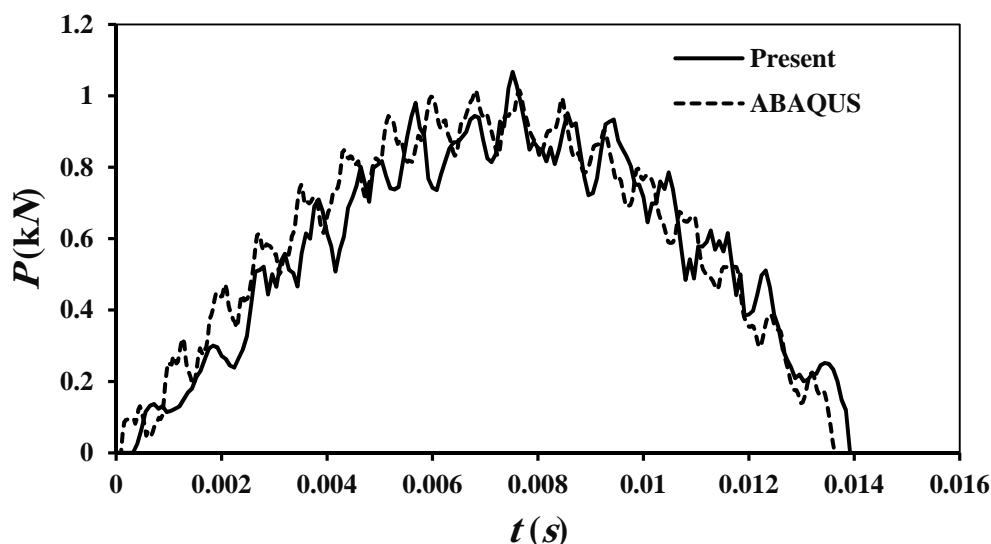
$$E = 0.18GPa, \quad \nu = 0.286, \quad \rho = 110kg/m^3$$

در ضربه خارج از مرکز،  $x_0, y_0 = 25 \text{ mm}$  انتخاب شده‌اند. شرایط تکیه‌گاهی اصلی ورق، از نوع نقطه‌ای در چهار گوشه ورق انتخاب می‌شود ولی در بحثهای مقایسه‌ای ممکن است ورق روی چهار تکیه‌گاه ساده نیز بررسی شود. مقادیر پایه سرعت اولیه و شعاع ضربه‌زن، به ترتیب، برابر با  $V = 2m/s$  و  $R = 26mm$  انتخاب شده‌اند.

### ۴-۲- تحلیل همگرایی و صحه‌گذاری

در تحلیل کنونی، تعداد جملات دو سری،  $(M$  و  $N)$  یکسان انتخاب شده است. با توجه به اینکه دقت پاسخ به تعداد جملات انتخاب شده از سری‌ها وابسته است، تغییرات پاسخ‌ها با افزایش تعداد جملات سری بررسی شده‌اند. با وجود آنکه انتخاب بیش از ۱۰ جمله از هر سری، تغییر بسیار ناچیزی در نتایج آشکار نموده است، برای اطمینان از دقت پاسخ در شرایط مختلف، از هر سری، ۲۰ جمله اختیار شده است (در مجموع، ۴۴۰ جمله). همانگونه که در بخش پیش بیان شد، برای یافتن تغییرات زمانی پاسخ‌ها، از روش انتگرال‌گیری عددی زمانی نیومارک استفاده شده است. در این ارتباط، از گامی زمانی که به مراتب کوچک‌تر از اولین پریود طبیعی (و حتی پریود مربوط به مودهای بالاتری که ممکن است اثر آنها در پاسخ، به طوری ناچیز آشکار شود) و برابر با  $1e-5s$  اختیار شده است. محاسبات پارامتری فرمول‌بندی کنونی در نرم‌افزار MAPLE و محاسبات عددی با کدنویسی در نرم‌افزار MATLAB انجام شده است.

با توجه به اینکه نتایجی برای تحلیل ضربه ورق دارای تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای تاکنون ارائه نشده است، صحه‌گذاری نتایج کنونی از طریق شبیه‌سازی ضربه ورق در نرم‌افزار اباکوس انجام شده است. در این زمینه، تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس ورق که بر پایه روش نیمه تحلیلی کنونی و با شبیه‌سازی در نرم‌افزار اباکوس بدست آمده‌اند، در شکل (۳) مقایسه شده‌اند. برای شبیه‌سازی ضربه در نرم‌افزار اباکوس، ورق به صورت مکعبی با دو پارتیشن ایجاد و با المان‌های سه بعدی ۲۰ نقطه گره‌ای المان‌بندی شده است. تعداد المان‌ها به گونه‌ای انتخاب شده است که با افزایش آنها، تغییرات ناچیزی در پاسخ روی دهند (تحلیل همگرایی). در نتیجه، عملاً نتایج کنونی با نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی (به فرم انرژی)، مقایسه شده‌اند. بر پایه نتایج شکل (۳)، این دو نوع نتایج، سازگاری بسیار مناسبی نشان می‌دهند.



شکل ۳- مقایسه نتایج روش نیمه تحلیلی کنونی و نتایج الاستیسیته سه بعدی اباکوس

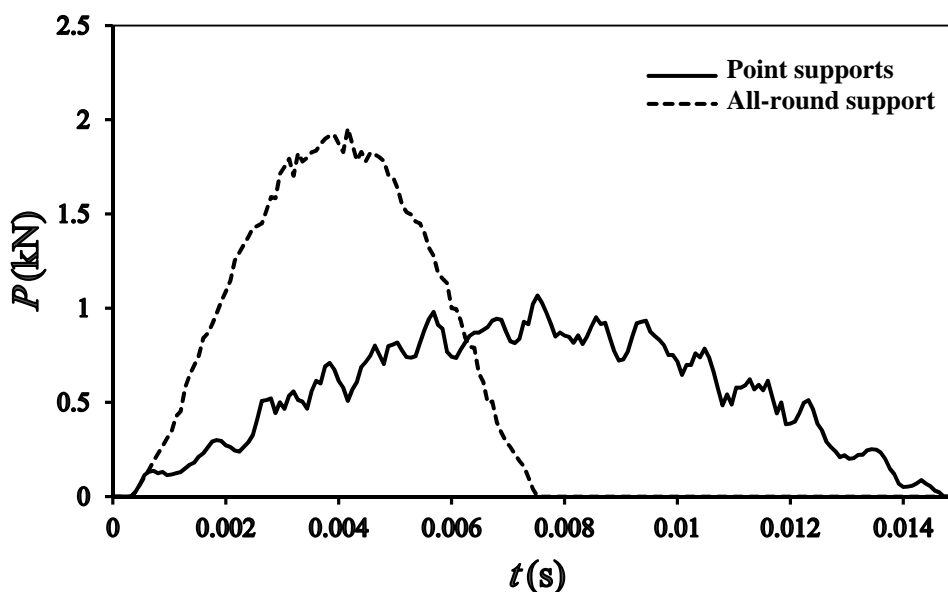
#### ۴-۳- مقایسه نتایج ورق‌های با تکیه‌گاه‌های ساده و نقطه‌ای

برای پی بردن به اثر ناکاملی تکیه‌گاه‌های لبه‌ای، دو حالت حدی، یعنی ورق با تکیه‌گاه‌های لبه‌ای ساده (استقرار کل لبه روی تکیه‌گاه) و ورق با تکیه‌گاه نقطه‌ای (عدم استقرار لبه‌ها روی تکیه‌گاه، به دلایلی مانند تفرانس‌های ساخت) را بررسی می‌کنیم. پاسخ‌های این دو حالت، به ترتیب، متناظر با روابط (۲۱) و (۳۷) هستند. مشخصات سینماتیکی و هندسی هر دو ورق، یکسان و طبق داده‌های بخش ۴-۱ می‌باشند. تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس دو ورق در شکل (۴) مقایسه شده‌اند.

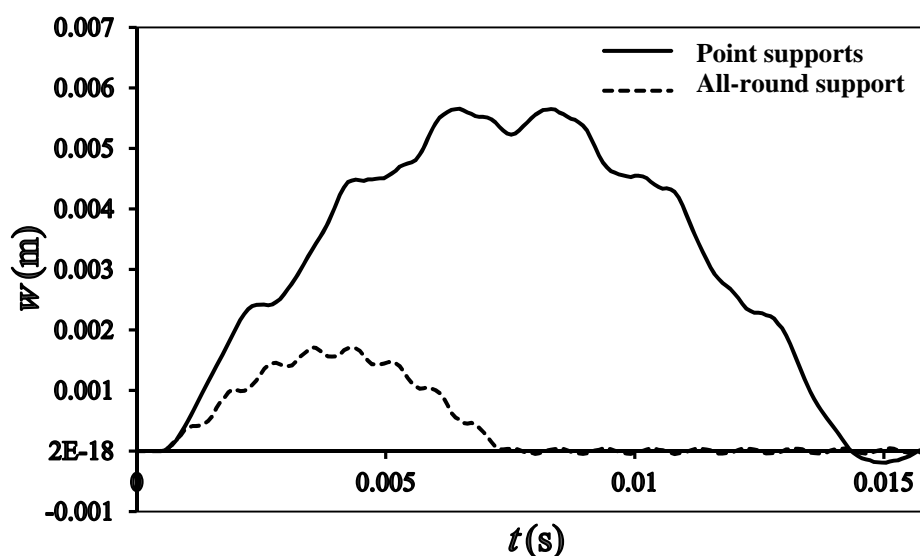
بررسی شکل (۴) نشان می‌دهد که برای داده‌های کنونی، در اثر ناکاملی تکیه‌گاه‌های ورق، در حالت حدی، نیروی تماس در اثر قابلیت گریز ورق در برابر نیروی ضربه، به حدود نصف رسیده و زمان تماس، در ورق با تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای، به دلیل سفتی کمتر ورق و نیاز آن به جذب انرژی پتانسیل بیشتر جهت پرت نمودن ضربه‌زن، حدوداً دو برابر است. همچنین، به دلیل زیاد بودن زمان ضربه این ورق و نرمی عرضی کلی آن نسبت به ورق دارای تکیه‌گاه سراسری، اثر مودهای ارتعاشی بالاتر ورق نیز آشکارتر است (نوسانات فرعی سوار بر نوسان اصلی). با توجه به اینکه ضربه خارج از مرکز انجام شده است، تاریخچه زمانی خیز ایجاد شده در مرکز ورق و در محل ضربه، به ترتیب، در شکل‌های (۵) و (۶)، برای ورق‌های دارای تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه نقطه‌ای رسم شده‌اند. مقایسه نتایج گزارش شده در شکل‌های (۵) و (۶) نشان می‌دهد که مقدار خیز پدید آمده در ورق با تکیه‌گاه نقطه‌ای در مرکز و محل ضربه، به ترتیب، حدود ۳ و ۲ برابر خیز ایجاد شده در ورق با تکیه‌گاه‌های ساده در مکان‌های یاد شده است.

همچنین، با توجه به انعطاف‌پذیری بیشتر ورق در نقطه مرکزی آن، اثر مودهای ارتعاشی بالاتر، در تاریخچه زمانی خیز مرکز ورق آشکارتر است. با توجه به اینکه جرم ضربه‌زن در مسئله کنونی زیاد است، ارتعاش حاصله، عمدتاً جرم - کنترل تا موج- کنترل بوده و زمان تماس، به ویژه در ورق دارای تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای، قابل توجه است. برای اعمال مناسب‌تر شرایط اولیه، پاسخها از  $0/3$  میلی ثانیه قبل از برخورد اندازه‌گیری و رسم شده‌اند و عدم حذف ناحیه سکون ابتدای منحنی‌های تاریخچه، جهت اشاره به این نکته است.

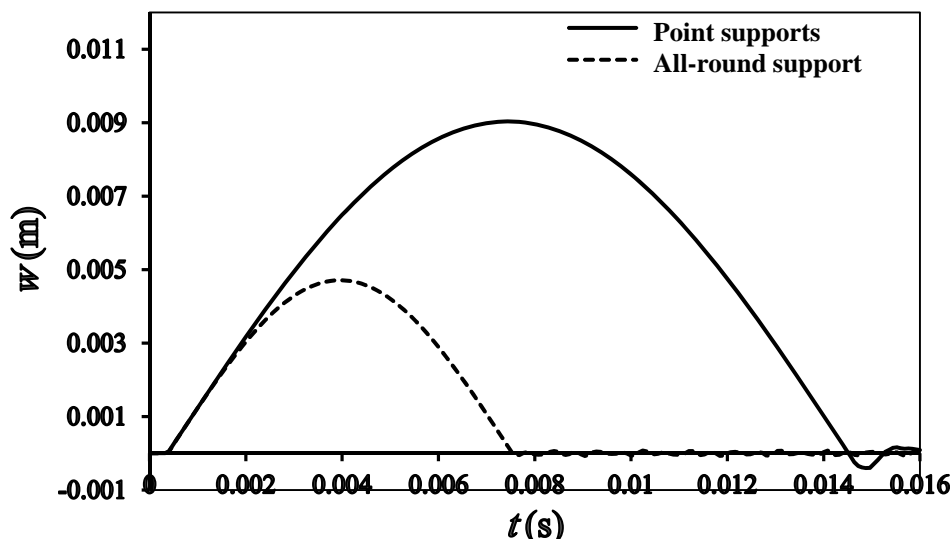
با توجه به جرم قابل توجه ضربه‌زن، پس از خاتمه تماس و پرت شدن ضربه‌زن، عمده انرژی جنبشی سیستم حذف و ورق با نوسانات جزئی نامیرا، به ارتعاش خود ادامه می‌دهد (شکل‌های ۵ و ۶). از سوی دیگر، با توجه به اینکه قوانین تماس حاکم بر فازهای بارگذاری و باربرداری ورق یکسان نیستند، تقارنی میان بخشهای بارگذاری و باربرداری منحنی‌های تاریخچه ارائه شده در شکل‌های (۴) تا (۶) مشاهده نمی‌شود. مقایسه شکل‌های (۴) و (۶) نشان می‌دهد که خیز بیشینه، در لحظاتی پس از حصول نیروی تماس بیشینه و نه همزمان با آن، روی می‌دهد.



شکل ۴- مقایسه تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس ورق در دو حالت تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای و تکیه‌گاه‌های سراسری ساده



شکل ۵- مقایسه تاریخچه‌های زمانی خیز نقطه مرکزی ورق در دو حالت تکیه‌گاهی نقطه‌ای و سراسری ساده



شکل ۶- تاریخچه‌های زمانی خیز نقطه تحت ضربه خارج از مرکز، در دو حالت تکیه‌گاهی نقطه‌ای و سراسری ساده

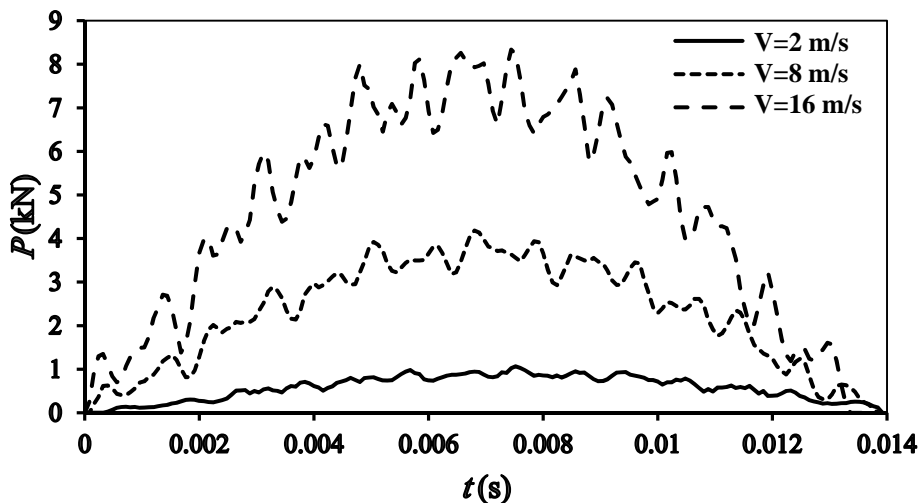
#### ۴-۴- اثر سرعت ضربه‌زن و نسبت ابعاد ورق بر تاریخچه‌های پاسخ ضربه

در این بخش، دو تحلیل پارامتری در ارتباط با اثر سرعت اولیه ضربه‌زن و افزایش نسبت منظری ورق، بر تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس و خیز ورق دارای تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای ارائه می‌شود.

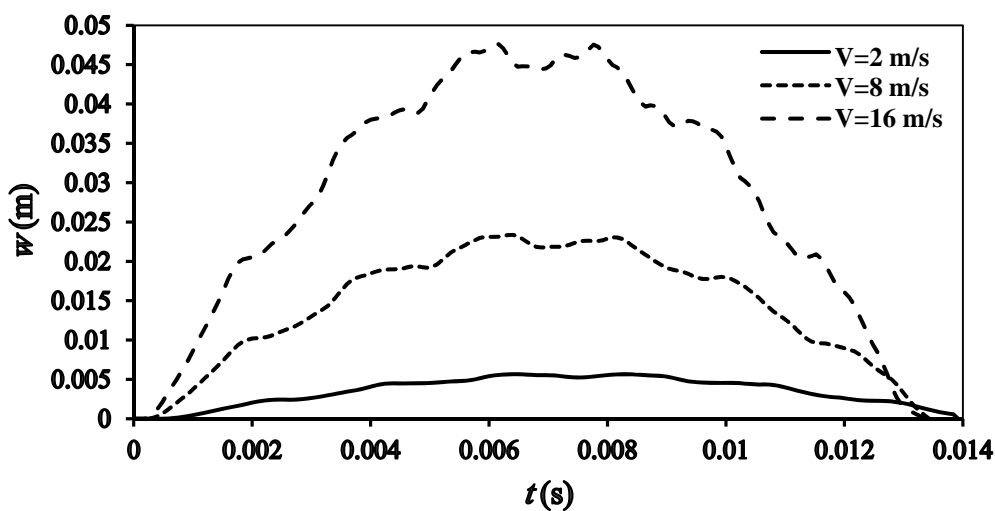
برای بررسی اثر سرعت اولیه ضربه‌زن، سه سرعت اولیه  $V=2, 8, 16\text{m/s}$  در نظر گرفته شده و تاریخچه‌های زمانی پاسخ نیروی تماس، خیز نقطه مرکزی و خیز محل ضربه خارج از مرکز، به ترتیب، در شکل‌های (۷) تا (۹) آورده شده‌اند. با توجه به اینکه پدیده تماس خطی نیست، پاسخ‌های حاصله، نه متناسب با سرعت اولیه ضربه‌زن و نه متناسب با انرژی اولیه آن (توان دوم سرعت) تغییر می‌کنند.

بررسی شکل‌های (۷) تا (۹) نشان می‌دهد که زمان تماس ورق در سرعت‌های اولیه بزرگتر ضربه‌زن، کمتر است. به بیان دیگر، انرژی پتانسیل لازم برای پرتاب ضربه‌زن، زودتر به ورق انتقال می‌یابد. همچنین، از شکل (۷) مانند شکل (۴)، می‌توان نتیجه گرفت که منحنی تاریخچه زمانی نیروی تماس دارای نوسانات موضعی بزرگتری نسبت به منحنی خیز است. دلیل این امر را می‌توان ناشی از این موضوع دانست که خیز یک پدیده کلی در ورق است در حالی که مقدار نیروی تماس، به میزان خیز به عنوان یک پدیده کلی و نفوذ ضربه‌زن به عنوان یک پدیده موضعی وابسته است. بدیهی است که با افزایش سرعت ضربه‌زن، مقادیر نیروی تماس و خیز افزایش می‌یابند. همچنین، مانند نتایج بخش گذشته، به دلیل انعطاف‌پذیری (نرمی عرضی) بیشتر ناحیه میانی ورق نسبت به نواحی نزدیک به تکیه‌گاه و احتمال بیشتر تشکیل موجهای عرضی در آن ناحیه، پاسخ خیز ورق در نقطه مرکزی آشوبناک‌تر است.

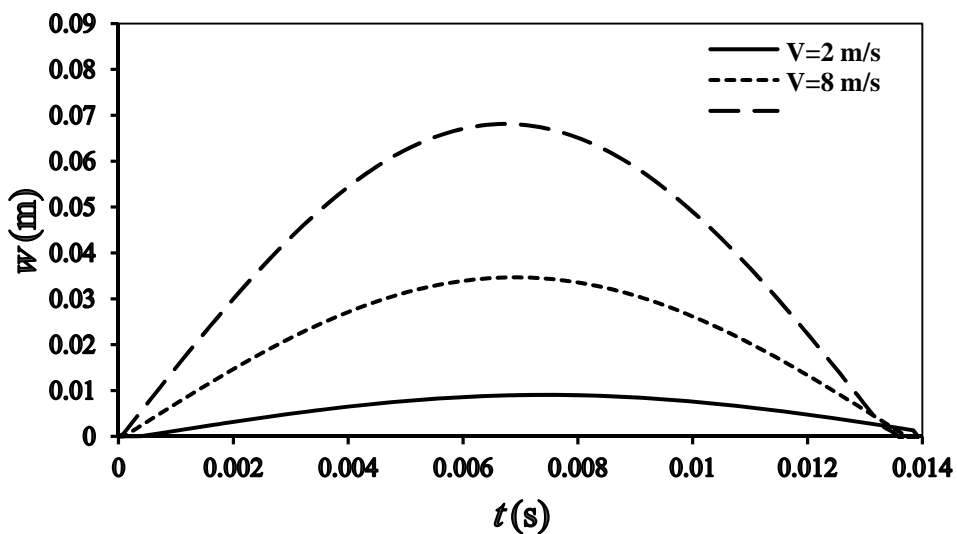
انتخاب پارامترهای بی‌بعد، از جمله نسبت منظری، تنها زمانی پذیرفتنی است که عبارات بی‌بعد و توانهای پارامترها در هر عبارت بی‌بعد انتخابی، عیناً از پاسخ تحلیلی مسئله یا مسائل مشابه استخراج باشند. در غیر این صورت، پاسخ مبتنی بر آن عبارات بی‌بعد، ارزش محاسباتی نخواهد داشت، مگر آنکه مقدار تکی پارامترها نیز معلوم شود.



شکل ۷- اثر سرعت اولیه جرم ضربه‌زن بر تاریخچه نیروی تماس ورق روی تکیه‌گاه نقطه‌ای



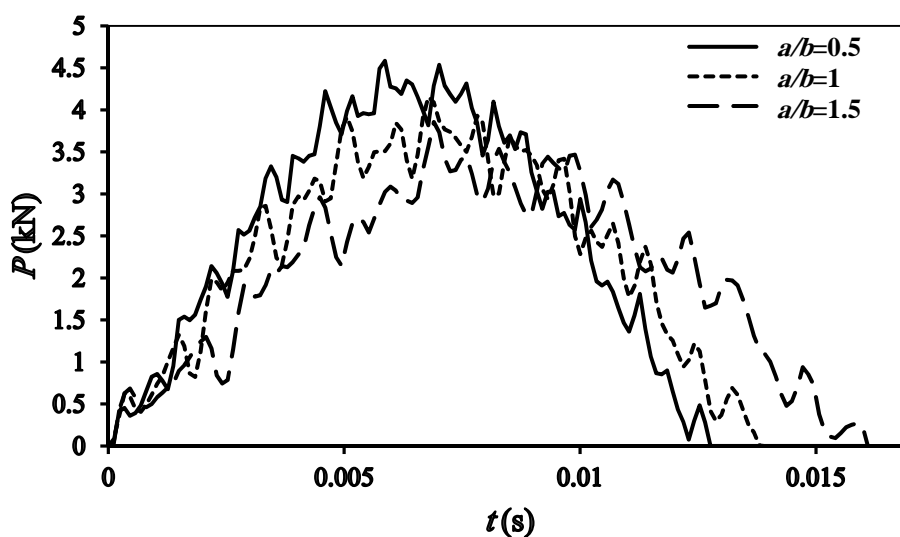
شکل ۸- اثر سرعت اولیه جرم ضربه‌زن بر تاریخچه خیز نقطه مرکزی ورق روی تکیه‌گاه نقطه‌ای



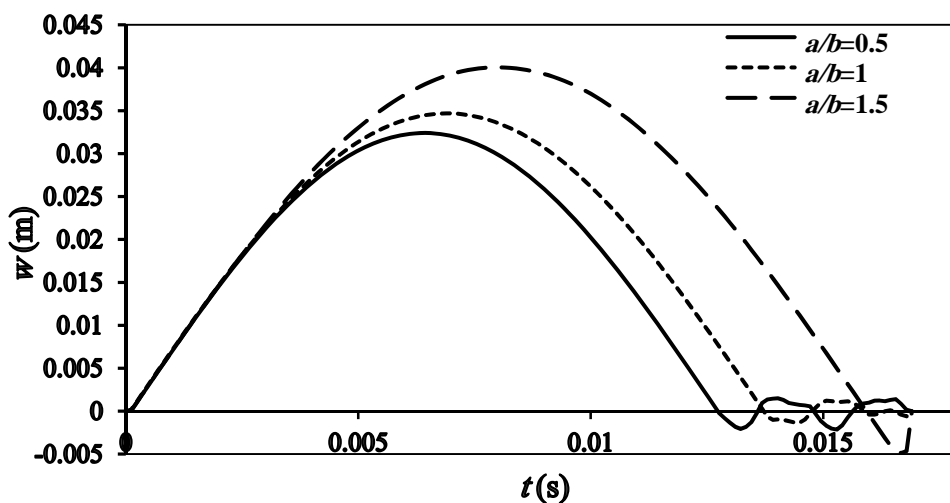
شکل ۹- اثر سرعت اولیه جرم ضربه‌زن بر تاریخچه خیز نقطه خارج از مرکز تحت بار ورق روی تکیه‌گاه نقطه‌ای

برای بررسی اثر منظری ورق، لازم است که مشخص شود که آیا عرض ورق ثابت نگه داشته می‌شود یا طول آن. در تحلیل کنونی، عرض ورق ثابت نگه داشته شده است. لذا، با افزایش نسبت منظری ورق، سفتی کلی عرضی ورق کاهش یافته و انتظار می‌رود که میزان نیروی تماس کاهش و خیز ورق افزایش یابد. در تحلیل کنونی، سه نسبت منظری  $a/b=0.5, 1, 1.5$  در نظر گرفته شده‌اند. برای آشکارتر شدن اثر نسبت منظری، نتایج برای سرعت اولیه ۸ متر بر ثانیه ضربه‌زن بدست آمده‌اند.

شکل (۱۰) نشان می‌دهد که به دلیل سفتی پایین‌تر ورق در نسبت منظری بزرگتر، نوسانات ناشی از موده‌های ارتعاشی بالاتر در تاریخچه زمانی نیروی تماس بزرگترند. به دلیلی مشابه، زمان تماس ورق با افزایش نسبت منظری ورق افزایش یافته است. شکل (۱۱) نیز کاهش آشکار سفتی عرض ورق و افزایش خیز در ازای افزایش نسبت منظری در محل آورد آمدن ضربه را تأیید می‌نماید.



شکل ۱۰- اثر نسبت منظری ورق بر تاریخچه نیروی تماس ورق روی تکیه‌گاه نقطه‌ای



شکل ۱۱- اثر نسبت منظری ورق بر تاریخچه خیز نقطه زیر بار ورق روی تکیه‌گاه نقطه‌ای

## ۵- نتیجه گیری

در مقاله کنونی، تحلیل ضربه ورق ساندویچی به شیوه تحلیلی، برای اولین بار انجام شده است. همچنین، فرم ارائه شده برای عبارت انرژی پتانسیل کل ورق تحت ضربه، تاکنون توسط پژوهشگران دیگر پیشنهاد نشده است. نوآوری دیگر، تبدیل دستگاه دینامیکی به دستگاه شبه استاتیکی، به شیوه‌ای عددی است. ضمن آنکه در تحلیل کنونی، برخلاف پژوهش‌های دیگر، اثر سفتی لایه‌های زیرین بر سفتی ناحیه تماس نیز در نظر گرفته شده است.

برخی از نتایج کاربردی پژوهش کنونی عبارتند از:

- ۱- در اثر ناکاملی تکیه‌گاه‌های ورق، مقدار نیروی ضربه به طور چشمگیری کاهش و زمان تماس و خیز ورق، به طور آشکاری افزایش می‌یابند.
- ۲- در ورق با تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای، اثر مودهای ارتعاشی بالاتر ورق آشکارتر است.
- ۳- اثر مودهای ارتعاشی بالاتر، در تاریخچه خیز مرکز ورق آشکارتر است.
- ۴- با توجه به جرم قابل توجه ضربه‌زن، پس از خاتمه ضربه، ورق با نوسانات جزئی نامیرا، به ارتعاش خود ادامه می‌دهد.
- ۵- خیز بیشینه، در لحظاتی پس از حصول نیروی تماس بیشینه و نه همزمان با آن، روی می‌دهد.
- ۶- زمان تماس ورق در سرعت‌های اولیه بزرگتر ضربه‌زن، کمتر است.
- ۷- در نسبت منظری بزرگتر، زمان تماس، خیز و نوسانات ناشی از مودهای ارتعاشی بالاتر (در تاریخچه زمانی نیروی تماس)، بزرگترند.

## مراجع

- [1] Shariyat, M., "A Double-Superposition Global-local Theory for Vibration and Dynamic Buckling Analyses of Viscoelastic Composite/Sandwich Plates: A Complex Modulus Approach", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1253-1268, (2011).
- [2] Shariyat, M., "A Nonlinear Double-superposition Global-local Theory for Dynamic Buckling of Imperfect Viscoelastic Composite/Sandwich Plates: A Hierarchical Constitutive Model", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1890-1899, (2011).
- [3] Shariyat, M., Jafari, A.A., and Alipour, M.M., "Investigation of the Thickness Variability and Material Heterogeneity Effects on Free Vibration of the Viscoelastic Circular Plates", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, pp. 83-98, (2013).
- [4] Shariyat, M., and Jafari, R., "Nonlinear Low-velocity Impact Response Analysis of a Radially Preloaded Two-directional-functionally Graded Circular Plate: A Refined Contact Stiffness Approach", *Composites Part B*, Vol. 35, pp. 981-994, (2013).
- [5] Carpino, G., Visconti, I.C., and Ilio, A.D., "Elastic Behavior of Composite Structures under Low Velocity Impact", *Composites*, Vol. 15, pp. 231-234, (1984).



- [6] Lee, L.J., Huang, K.Y., and Fann, Y.J., “Dynamic Response of Composite Sandwich Plate Impact by a Rigid Ball”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, pp. 1238-1256, (1993).
- [7] Herup, E., and Palazotto, A.N., “Elasticity Solutions for Hertzian Loaded Composite Sandwich Plates”, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 10, pp. 27–37, (1997).
- [8] Palazotto, A.N., Herup, E.J., and Gummadi, L.N.B., “Finite Element Analysis of Low-velocity Impact on Composite Sandwich Plates”, *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 209-227, (2000).
- [9] Burlati, R., “The Effect of a Slow Impact on Sandwich Plates”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 36, pp. 1079-1092, (2002).
- [10] Meunier, M., and Shanoi, R.A., “Dynamic Analysis of Composite Sandwich Plates with Damping Modeled using High-order Shear Deformation Theory”, *Composite Structures*, Vol. 54, pp. 243-254, (2001).
- [11] Hanssen, A., Girard, Y., Olovsson, L., Berstad, T., and Lang, M., “A Numerical Model for Bird Strike of Aluminium Foam-based Sandwich Panels”, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 32, No. 7, pp. 1127-1144, (2006).
- [12] Zhao, H., Elnasri, I., and Girard, Y., “Perforation of Aluminium Foam Core Sandwich Panels under Impact Loading an Experimental Study”, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 34, pp. 1246-1257, (2007).
- [13] Khalili, M.R., and Malekzadeh, K., “Effect and Physical and Geometrical Parameters on Transverse Low-velocity Impact Response of Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core”, *Composite Structures*, Vol. 77, pp. 430-443, (2007).
- [14] Payeganeh, G.H., Ashenai Ghasemi, F., and Malekzadeh, K., “Dynamic Response of Fiber–metal Laminates (FMLs) Subjected to Low-velocity Impact”, *Thin-walled Structures*, Vol. 48, pp. 62–70, (2010).
- [15] Icardi, U., and Ferrero, L., “Impact Analysis of Sandwich Composites Based on a Refined Plate Element with Strain Energy Updating”, *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 35–51, (2009).
- [16] Foo, C.C., Seah, L.K., and Chai, G.B., “A Modified Energy-balance Model to Predict Low-velocity Impact Response for Sandwich Composites”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1385-1393, (2011).
- [17] Shariyat, M., and Farzan Nasab, F., “Eccentric Low-velocity Impact Analysis of Transversely Graded Plates with Winkler-type Elastic Foundations and Fully or Partially Supported Edges”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 84, pp. 112-122, (2014).
- [18] Tracy, J.J., Dimas, D.J., and Pardoen, G.C., “The Effect of Impact Damage on the Dynamic Properties of Laminated Composite Plates”, in: *Proceedings of the Fifth International Conference on Composite Materials, ICCM-V, 29 July-1 August; 1985. San Diego, CA*, pp. 111-125, (1985).

- [19] Ellis, R.L., "Ballistic Impact Resistance of Graphite Epoxy Composites with Shape Memory Alloys and Extended Chain Polyethylene Spectra™ Hybrid Composites", M.Sc. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, (1996).
- [20] Olsson, R., "Mass Criterion for Wave Controlled Impact Response of Composite Plates", Composites Part A, Vol. 31, pp. 879–887, (2000).
- [21] Olsson, R., "Impact Response of Orthotropic Composite Plates Predicted from a One-parameter Differential Equation", AIAA Journal, Vol. 30, pp. 1587-1596, (1992).
- [22] Abrate, S., "Impact on Laminated Composites: Recent Advances", Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, pp. 517-544, (1994).
- [23] Yang, S.H., and Sun, C.T., "Indentation Law for Composite Laminates", ASTM STP, Vol. 787, pp. 425-49, (1982).
- [24] Shariyat, M., and Niknami, A., "Layerwise Numerical and Experimental Impact Analysis of Temperature-dependent Transversely Flexible Composite Plates with Embedded SMA Wires in Thermal Environments", Composite Structures, Vol. 153, pp. 692-703, (2016).
- [25] Eslami, M.R., Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., "Theory of Elasticity and Thermal Stresses", Springer, Netherlands, (2013).
- [26] Shariyat, M., and Hosseini, S.H., "Accurate Eccentric Impact Analysis of the Preloaded SMA Composite Plates, Based on a Novel Mixed-order Hyperbolic Global–local Theory", Composite Structures, Vol. 124, pp. 140-151, (2015).
- [27] Asemi, K., Shariyat, M., Salehi, M., and Ashrafi, H., "A Full Compatible Three-dimensional Elasticity Element for Buckling Analysis of FGM Rectangular Plates Subjected to Various Combinations of Biaxial Normal and Shear Loads", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 74, pp. 9-21, (2013).
- [28] Shariyat, M., and Niknami, A., "Impact Analysis of Strain-Rate-Dependent Composite Plates with SMA Wires in Thermal Environments: Proposing Refined Coupled Thermoelasticity, Constitutive, and Contact Models", Composite Structures, Vol. 136, pp. 191-203, (2016).
- [29] Eslami, M.R., "Finite Elements Methods in Mechanics", Springer, Switzerland, (2014).

## فهرست نمادهای انگلیسی

$a$  : طول ورق

$b$  : عرض ورق

$E$  : انرژی

$D$  : سختی خمشی

$h$  : ضخامت ورق

$k$  : سفتی ناحیه تماس

$K$  : بردار سفتی

$m$  : شمارنده

$M$  : گشتاور بر واحد طول، حد بالای سری

$M$  : ماتریس جرم

$N$  : نیرو بر واحد طول، حد بالای سری

$P$  : نیرو

$R$  : شعاع ضربه‌زن

$t$  : زمان

$V$  : سرعت اولیه ضربه‌زن

$w$  : خیز

$x, y, z$  : مختصات

## نمادهای یونانی

$\alpha$  : میزان نفوذ

$\delta$  : بردار جابجایی

$\nu$  : ضریب پواسون

$\rho$  : چگالی

$\Pi$  : انرژی پتانسیل کل

$\Omega$  : حجم

**Abstract**

In the present research, behavior of a sandwich plate with point supports subjected to an eccentric low-velocity impact is investigated. In this regard, time histories of the contact force and lateral deflection of a sandwich plate with simply supported edges are compared with those of a plate resting on point supports. This comparison has not been accomplished so far, even for the single-layer isotropic plates. Other novelty consists of proposing a semi-analytical solution in conjunction with a new energy formulation to consider the spatial dependency and using a numerical time integration method, implicitly. The governing equations of motions are found based on extremizing the total potential energy, including work of the inertia forces, employing Ritz technique and reduced to quasi-static one through a novel approach. In contrast to the available researches, influence of the lower layer on the stiffness of the contact region is incorporated. Verification of the results has been accomplished based on results of ABAQUS computer code. In the results section, the significant effects of the point supports (in comparison to the complete edge support), initial velocity of the indenter, and the aspect ratio of the plate on time histories of the contact force and lateral deflection of the plate are investigated.