

# تئوری عمومی - محلی اصلاح شده برای تحلیل استاتیکی ورق‌های ساندویچی و کامپوزیتی تحت بار عرضی

محمد شریعات<sup>۱</sup>  
استاد

در مقاله کنونی، یک تئوری محلی-عمومی اصلاح شده به منظور تحلیل ورق‌های چندلایه و ساندویچی ارائه شده است. از ویژگی‌های بارز تئوری ارائه شده، در نظر گرفتن جابجایی هسته در راستای ضخامت و محاسبه تنش‌های برشی عرضی با استفاده از حل معادلات تعادل سه بعدی الاستیسیته می‌باشد. از این‌رو شرط پیوستگی تنش‌های برشی عرضی بین لایه‌ها به خوبی ارضا شده است. نتایج بدست آمده هم برای ورق‌های ساندویچی نازک و هم ورق‌های ضخیم از دقت مناسبی برخوردارند. همچنین بدلیل در نظر گرفتن تغییر شکل‌پذیری هسته، در هر دو حالتی که هسته ورق ساندویچی نرم و یا سفت باشد تئوری جواب‌های قابل قبولی ارائه داده است. در نهایت بعد از صحت‌سنجی، تاثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد ورق به دقت بررسی شده است.

آیدین غزنوی اسگوئی<sup>۲</sup>  
دانشجوی دکترا

واژه‌های راهنما : تئوری عمومی - محلی، هسته تغییر شکل‌پذیر، ورق ساندویچی، المان محدود

## ۱-مقدمه

از آنجا که تحلیل ورق‌های ساندویچی با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی دارای محدودیت‌های فراوانی است [۱]، تحلیل این گونه سازه‌ها براساس تئوری‌های ورق و پوسته مورد توجه قرار گرفته است. روش‌های مختلفی برای تبدیل مدل‌های سه بعدی ورق‌های چند لایه به مدل‌های دوبعدی ارائه شده‌اند که عموماً دارای سه گروه کلی: تئوری‌های تک لایه معادل، تئوری‌های لایه مجزا، و تئوری‌های مبتنی بر اصل برهم‌نهی، می‌باشند [۲]. هر چند برخی از تئوری‌های ارائه شده نیز از ضعف‌هایی در محاسبه برخی از پارامترها برخوردارند. به عنوان نمونه، در بسیاری از موارد، تئوری‌های عمومی توانایی ارزیابی درست جابجایی‌های محلی را ندارند. در نتیجه میدان کرنش و تنش ارزیابی شده توسط این تئوری‌ها نیز دقیق نخواهد بود. بنابر این تئوری‌های تک لایه معادل [۳-۵] در چنین مواردی نتایج دقیقی ارائه نمی‌دهند.

<sup>۱</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران shariyat@kntu.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
aidin.ghaznavi@yahoo.com

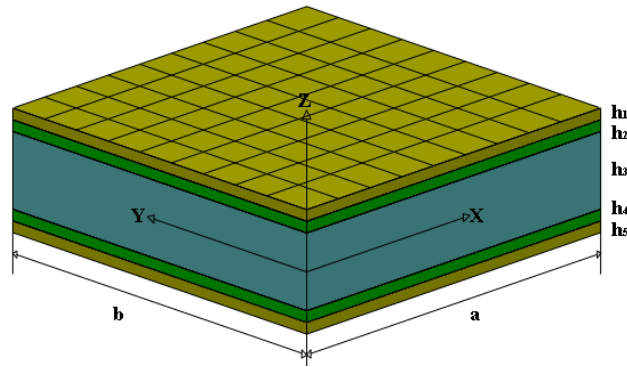
تاریخ دریافت: ۹۵/۰۹/۱۹، تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۲/۰۳

تئوری‌های تک‌لایه معادل [۶ و ۷] معمولاً برای تحلیل رفتار کلی سازه‌ها به کار می‌روند [۸]. در مقابل، دقت و توانمندی بالای تئوری لایه مجزا در محاسبه مؤلفه‌های جابجایی و تنش، موجب گسترش استفاده از این تئوری در تحلیل ورق‌ها گردیده است [۱۰-۸]. اما این تئوری‌ها به دلیل بالا بودن مجهولات، دارای زمان حل زیاد می‌باشند [۴]. از این‌رو، تئوری‌های مبتنی بر اصل برهم نهی که دارای ویژگی‌های هر دو دسته تئوری یاد شده می‌باشند، مورد توجه فراوان قرار گرفته‌اند. ماتسونگا [۱۱]، یک تئوری عمومی مرتبه بالا را به منظور تحلیل کمانش مکانیکی - حرارتی ورق‌های ساندویچی و کامپوزیتی چندلایه ارائه داد. شرعیات [۱۲ و ۱۳]، کمانش دینامیکی صفحات دارای نقص هندسی اولیه با عملگرها و حس‌گرهای پیزوالکتریک را تحت حالت‌های مختلف، بر اساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی به همراه یک الگوریتم عددی موثر برای حل معادلات غیرخطی، بررسی کرد. دفته‌دار و همکارانش [۱۴] تئوری مرتبه بالای عمومی ترکیبی را ارائه داد. ملک‌زاده و همکاران [۱۵]، یک تئوری مرتبه بالا بهبود یافته برای تحلیل رفتار دینامیکی صفحه ساندویچی با هسته انعطاف پذیر ارائه کردند. در این روش، در رویه‌ها از تئوری مرتبه اول ورق و در هسته از تئوری الاستیسیته استفاده شد. کررا و همکارانش [۱۶] در سال (۲۰۰۹)، به بررسی و ارزیابی دقت انواع تئوری دوبعدی شامل تک‌لایه معادل، لایه‌گون (مرتبه اول تا مرتبه هفتم)، زیگزاگ و ترکیبی (مخلوط) در تحلیل استاتیکی و ارتعاشی ورق‌های ساندویچی پرداختند. بریشتو و همکاران [۱۷]، با افزودن تابع زیگزاگ در تئوری مرتبه اول و سوم برشی، نتایج تحلیل خمش ورق ساندویچی را برای نسبت‌های مختلف سفتی رویه به هسته بررسی نموده‌اند. لی و لو [۳۰] تئوری زیگ زاگ را بسط دادند تا از روش برهم نهی دوگانه استفاده کنند. شرعیات [۱۸] اثر کرنش‌های قائم عرضی را به تئوری برهم نهی مضاعف اضافه نموده و از آن، جهت بررسی مسائل استاتیکی، دینامیکی و کمانشی صفحات مرکب و ساندویچی استفاده نمود. کیپوریا و همکارانش [۱۹] به ارزیابی دقت تئوری‌های کلی - محلی در تحلیل خمش و ارتعاشات ورق‌های چندلایه و ساندویچی پرداختند.

در این مقاله یک تئوری عمومی-محلی اصلاح شده ارائه شده است که از دقت مناسبی برخوردار است. مزیت عمده تئوری برآورده کردن شرایط پیوستگی تنش‌های عرضی بین لایه‌ای و در نظر گرفتن تغییرشکل-پذیری هسته در راستای ضخامت می باشد. همچنین پایین بودن هزینه محاسبات در عین بالا بودن دقت نتایج، می‌باشد. همانطور که در قسمت نتایج مقاله مشاهده می‌شود، تغییرات مؤلفه‌های محلی جابجایی و تنش با دقت مناسبی ارزیابی شده است. همچنین برای محاسبه تنش‌های عرضی از معادلات تعادل الاستیسیته استفاده شده و تغییرات عرضی خیز در هسته، با تابع مرتبه دو توصیف شده است.

## ۲- استخراج معادلات ورق ساندویچی با استفاده از تئوری عمومی-محلی پیشنهادی

هندسه ورق‌های ساندویچی مورد مطالعه و موقعیت دستگاه مختصات، در شکل (۱) نشان داده شده است. مبدأ دستگاه مختصات کلی، در صفحه میانی ورق قرار داشته و محور  $Z$  به سمت بالا مثبت در نظر گرفته شده است. طول و عرض ورق در راستای  $x$  و  $y$  به ترتیب  $a$  و  $b$ ، ضخامت کل ورق  $H$  می‌باشد ورق کامپوزیتی یا ساندویچی به صورت سه لایه و یا پنج لایه مدلسازی می‌شود. در صورتی که ورق ساندویچی سه لایه باشد، ضخامت لایه بالایی  $h_1$ ، ضخامت هسته  $h_2$  و ضخامت لایه پایینی  $h_3$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- هندسه و مبدا مختصات در یک ورق ساندویچی پنج لایه

تحلیل‌های پژوهش کنونی بر پایه فرضیاتی مانند: جابجایی‌های کوچک، خطی بودن رفتار مواد، عدم جدایش لایه‌ها یا ایجاد آسیب در اثر بارگذاری و عدم وجود تغییر شکلها، نقصها و تنشهای اولیه، ارائه شده‌اند. در ابتدا میدان جابجایی ورق ساندویچی سه لایه بررسی می‌شود. مولفه‌های جابجایی درون صفحه ورق از ترکیب دو بخش محلی و عمومی در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} u^k(x, y, z) = u_G(x, y, z) + u_L^k(x, y, z) \\ v^k(x, y, z) = v_G(x, y, z) + v_L^k(x, y, z) \end{cases} \quad (k=1,2,3) \quad (1)$$

$u_G$  و  $v_G$  مولفه‌های عمومی میدان جابجایی می‌باشند که به شرح زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{cases} u_G(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v_G(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

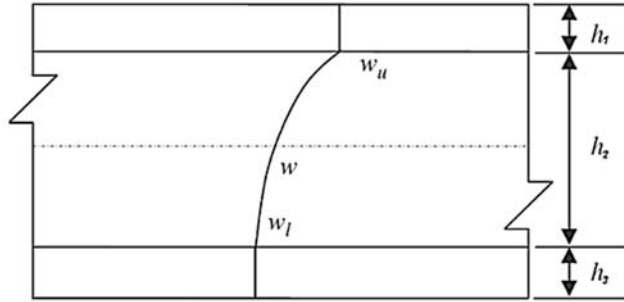
همچنین  $u_L$  و  $v_L$  نیز مولفه‌های محلی میدان جابجایی بوده و عبارتند از:

$$\begin{cases} u_L^k(x, y, z) = u_0^k(x, y) + z\varphi_x^{(k)}(x, y) \\ v_L^k(x, y, z) = v_0^k(x, y) + z\varphi_y^{(k)}(x, y) \end{cases} \quad (k=1,2,3) \quad (3)$$

با اعمال شرایط پیوستگی و ساده‌سازی، در نهایت معادلات (۴) حاصل خواهند شد:

$$\begin{cases} \begin{cases} u_1 = u_0 + z\varphi_x + (z - z_1^u)\varphi_x^{(1)} + z_1^u\varphi_x^{(2)} \\ v_1 = v_0 + z\varphi_y + (z - z_1^u)\varphi_y^{(1)} + z_1^u\varphi_y^{(2)} \end{cases} & z_1^u \leq z \leq z_2^u \\ \begin{cases} u_2 = u_0 + z(\varphi_x + \varphi_x^{(2)}) \\ v_2 = v_0 + z(\varphi_y + \varphi_y^{(2)}) \end{cases} & z_1^l \leq z \leq z_1^u \\ \begin{cases} u_3 = u_0 + z\varphi_x + (z - z_1^l)\varphi_x^{(3)} + z_1^l\varphi_x^{(2)} \\ v_3 = v_0 + z\varphi_y + (z - z_1^l)\varphi_y^{(3)} + z_1^l\varphi_y^{(2)} \end{cases} & z_2^l \leq z \leq z_1^l \end{cases} \quad (4)$$

اگر مسیر مشابهی برای محاسبه مولفه‌های جابجایی ورق ساندویچی ۵ لایه در نظر گرفته شود، در نهایت مولفه‌های جابجایی درون صفحه عبارت خواهند بود از:



شکل ۲- تغییرات مولفه عرضی جابجایی در راستای ضخامت ورق ساندویچی

$$\begin{cases} u^{(1)} = u_0 + z\phi_x + (z - z_2^u)\phi_x^{(1)} + (z_2^u - z_1^u)\phi_x^{(2)} + z_1^u\phi_x^{(3)} \\ v^{(1)} = v_0 + z\phi_y + (z - z_2^u)\phi_y^{(1)} + (z_2^u - z_1^u)\phi_y^{(2)} + z_1^u\phi_y^{(3)} \end{cases} ; z_2^u \leq z \leq z_3^u \\
 \begin{cases} u^{(2)} = u_0 + z\phi_x + (z - z_1^u)\phi_x^{(2)} + z_1^u\phi_x^{(3)} \\ v^{(2)} = v_0 + z\phi_y + (z - z_1^u)\phi_y^{(2)} + z_1^u\phi_y^{(3)} \end{cases} ; z_1^u \leq z \leq z_2^u \\
 \begin{cases} u^{(3)} = u_0 + z(\phi_x + \phi_x^{(3)}) \\ v^{(3)} = v_0 + z(\phi_y + \phi_y^{(3)}) \end{cases} ; z_1^l \leq z \leq z_1^u \quad (5) \\
 \begin{cases} u^{(4)} = u_0 + z\phi_x + (z - z_1^l)\phi_x^{(4)} + z_1^l\phi_x^{(3)} \\ v^{(4)} = v_0 + z\phi_y + (z - z_1^l)\phi_y^{(4)} + z_1^l\phi_y^{(3)} \end{cases} ; z_2^l \leq z \leq z_1^l \\
 \begin{cases} u^{(5)} = u_0 + z\phi_x + (z - z_2^l)\phi_x^{(5)} + (z_2^l - z_1^l)\phi_x^{(4)} + z_1^l\phi_x^{(3)} \\ v^{(5)} = v_0 + z\phi_y + (z - z_2^l)\phi_y^{(5)} + (z_2^l - z_1^l)\phi_y^{(4)} + z_1^l\phi_y^{(3)} \end{cases} ; z_3^l \leq z \leq z_2^l
 \end{cases}$$

یکی از برتریهای مقاله کنونی، در نظر گرفتن تغییرات مرتبه دو برای مولفه جابجایی عرضی  $W$  در هسته می باشد (شکل ۲)؛ به گونه ای که:

$$\bar{W} = \begin{cases} w_u & ; \text{ for the upper face sheet} \\ L_1 w_u + L_2 w + L_3 w_l & ; \text{ for the core} \\ w_l & ; \text{ for the lower face sheet} \end{cases} \quad (6)$$

$w_u$ ،  $w_l$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در بالا، پایین و وسط هسته بوده و  $L_1$  و  $L_2$  و  $L_3$  توابع درونی می باشند:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \left[ z^2 - (z_0 + z_1^l)z + z_0 z_1^l \right] \\ L_2 &= \frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \left[ z^2 - (z_1^u + z_1^l)z + z_1^u z_1^l \right] \\ L_3 &= \frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \left[ z^2 - (z_1^u + z_0)z + z_1^u z_0 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

لذا، ورق ساندویچی سه لایه، دارای ۱۳ پارامتر مستقل جابجایی و ورق ساندویچی پنج لایه، دارای ۱۷ پارامتر مستقل جابجایی خواهد بود. پارامترهای مستقل ورق سه لایه عبارتند از:

$$u_0, v_0, \phi_x, \phi_y, \phi_x^{(1)}, \phi_y^{(1)}, \phi_x^{(2)}, \phi_y^{(2)}, \phi_x^{(3)}, \phi_y^{(3)}, w_u, w, w_l$$

### ۳- استخراج معادلات حاکم

معادلات حاکم با استفاده از اصل کمینه انرژی استخراج شده است:

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) - \int_A q \delta \bar{W} dA = 0 \quad (۸)$$

که در آن،  $q$  بار گسترده عرض است. با جایگذاری روابط تنش و کرنش در رابطه (۸)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_A \int_{z_1^u}^{z_1^l} \{ \sigma_{xx}^{(1)} \delta [u_{0,x} + z \varphi_{x,x} + (z - z_1^u) \varphi_{x,x}^{(1)} + z_1^u \varphi_{x,x}^{(2)}] + \sigma_{yy}^{(1)} \delta [v_{0,y} + z \varphi_{y,y} + \\ & (z - z_1^u) \varphi_{y,y}^{(1)} + z_1^u \varphi_{y,y}^{(2)}] + \sigma_{xz}^{(1)} \delta (\varphi_x^{(1)} + \varphi_x + w_{,x}^u) + \sigma_{yz}^{(1)} \delta (\varphi_y^{(1)} + \varphi_y + w_{,y}^u) + \sigma_{zz}^{(1)} \\ & \delta w_{,z}^u + \sigma_{xy}^{(1)} \delta [u_{0,y} + z \varphi_{x,y} + v_{0,x} + z \varphi_{y,x} + (z - z_1^u) (\varphi_{x,y}^{(1)} + \varphi_{y,x}^{(1)}) + z_1^u (\varphi_{x,y}^{(2)} + \\ & \varphi_{y,x}^{(2)})] \} dz + \int_{z_1^l}^{z_1^u} \{ \sigma_{xx}^{(2)} \delta (u_{0,x} + z \varphi_{x,x} + z \varphi_{x,x}^{(2)}) + \sigma_{yy}^{(2)} \delta (v_{0,y} + z \varphi_{y,y} + z \varphi_{y,y}^{(2)}) + \sigma_{xz}^{(2)} \\ & \delta (\varphi_x^{(2)} + \varphi_x + \frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} [z^2 - (z_0 + z_1^l)z + z_0 z_1^l]) w_{,x}^u + w_{,x} ([z^2 - (z_1^u \\ & + z_1^l)z + z_1^u z_1^l] \frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)}) + (\frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} [z^2 - (z_1^u + z_0)z + z_1^u z_0]) \\ & w_{,x}^l) + \sigma_{yz}^{(2)} \delta (\varphi_y^{(2)} + \varphi_y + w_{,y}^u (\frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} [z^2 - (z_0 + z_1^l)z + z_0 z_1^l]) + w_{,y} \\ & (\frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} [z^2 - (z_1^u + z_1^l)z + z_1^u z_1^l]) + w_{,y}^l (\frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} [z^2 - (z_1^u \\ & + z_0)z + z_1^u z_0]) + \sigma_{zz}^{(2)} \delta ((\frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} [2z - (z_0 + z_1^l)]) w^u + w \\ & (\frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} [2z - (z_1^u + z_1^l)]) + (\frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} [2z - (z_1^u + z_0)]) w^l) \\ & + \sigma_{xy}^{(2)} \delta [u_{0,y} + v_{0,x} + z (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} + \varphi_{x,y}^{(2)} + \varphi_{y,x}^{(2)})] \} dz + \int_{z_1^l}^{z_1^u} \sigma_{xx}^{(3)} \delta [u_{0,x} + z \varphi_{x,x} + \\ & (z - z_1^l) \varphi_{x,x}^{(3)} + z_1^l \varphi_{x,x}^{(2)}] + \sigma_{xz}^{(3)} \delta (\varphi_x^{(3)} + \varphi_x + w_{,x}^l) + \sigma_{yy}^{(3)} \delta [v_{0,y} + z \varphi_{y,y} + (z - z_1^l) \varphi_{y,y}^{(3)} \\ & + z_1^l \varphi_{y,y}^{(2)}] + \sigma_{yz}^{(3)} \delta (\varphi_y^{(3)} + \varphi_y + w_{,y}^l) + \sigma_{zz}^{(3)} \delta w_{,z}^l + \sigma_{xy}^{(3)} \delta [u_{0,y} + v_{0,x} + z \varphi_{x,y} + z \varphi_{y,x} \\ & + (z - z_1^l) (\varphi_{x,y}^{(3)} + \varphi_{y,x}^{(3)}) + z_1^l (\varphi_{x,y}^{(2)} + \varphi_{y,x}^{(2)})] \} dz \} dA - \int_A q \delta \bar{W} dA = 0 \end{aligned} \quad (۹)$$

انتگرال گیری جزء به جزء از معادله (۹) و منظم کردن آن بر اساس مولفه های جابجایی، منجر به معادلات زیر خواهد شد که معادلات حاکم بر رفتار ورق می باشند:

$$\delta u \neq 0: \quad N_{xx,x}^{(1)} + N_{xx,x}^{(2)} + N_{xx,x}^{(3)} + N_{xy,y}^{(1)} + N_{xy,y}^{(2)} + N_{xy,y}^{(3)} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\delta v \neq 0: \quad N_{yy,y}^{(1)} + N_{yy,y}^{(2)} + N_{yy,y}^{(3)} + N_{xy,x}^{(1)} + N_{xy,x}^{(2)} + N_{xy,x}^{(3)} = 0 \quad (۱۱)$$

$$\delta \varphi_x \neq 0: \quad M_{xx,x}^{(1)} + M_{xx,x}^{(2)} + M_{xx,x}^{(3)} + M_{xy,y}^{(1)} + M_{xy,y}^{(2)} + M_{xy,y}^{(3)} - P_x^{(1)} - P_x^{(2)} - P_x^{(3)} = 0 \quad (۱۲)$$

$$\delta \varphi_y \neq 0: \quad M_{yy,y}^{(1)} + M_{yy,y}^{(2)} + M_{yy,y}^{(3)} + M_{xy,x}^{(1)} + M_{xy,x}^{(2)} + M_{xy,x}^{(3)} - P_y^{(1)} - P_y^{(2)} - P_y^{(3)} = 0 \quad (۱۳)$$

$$\delta \varphi_x^{(1)} \neq 0: \quad M_{xx,x}^{(1)} + M_{xy,y}^{(1)} - z_1^u (N_{xx,x}^{(1)} + N_{xy,y}^{(1)}) + P_x^{(1)} = 0 \quad (۱۴)$$

$$\delta\varphi_y^{(1)} \neq 0: \quad M_{yy,y}^{(1)} + M_{xy,x}^{(1)} - z_1^u (N_{yy,y}^{(1)} + N_{xy,x}^{(1)}) + P_y^{(1)} = 0 \quad (15)$$

$$\delta\varphi_x^{(2)} \neq 0: \quad z_1^u (N_{xx,x}^{(1)} + N_{xy,y}^{(1)}) + M_{xx,x}^{(2)} + M_{xy,y}^{(2)} + z_1^l (N_{xx,x}^{(3)} - N_{xy,y}^{(3)}) + P_x^{(2)} = 0 \quad (16)$$

$$\delta\varphi_y^{(2)} \neq 0: \quad z_1^u (N_{yy,y}^{(1)} + N_{xy,x}^{(1)}) + M_{yy,y}^{(2)} + M_{xy,x}^{(2)} + z_1^l (N_{yy,y}^{(3)} - N_{xy,x}^{(3)}) + P_y^{(2)} = 0 \quad (17)$$

$$\delta\varphi_x^{(3)} \neq 0: \quad M_{xx,x}^{(3)} + M_{xy,y}^{(3)} - z_1^l (N_{xx,x}^{(3)} + N_{xy,y}^{(3)}) + P_x^{(3)} = 0 \quad (18)$$

$$\delta\varphi_y^{(3)} \neq 0: \quad M_{yy,y}^{(3)} + M_{xy,x}^{(3)} - z_1^l (N_{yy,y}^{(3)} + N_{xy,x}^{(3)}) + P_y^{(3)} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta w^u \neq 0: & \left( \frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) R_{x,x}^{(2)} - \left( \frac{(z_0 + z_1^l)}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) Q_{x,x}^{(2)} + \left( \frac{z_0 z_1^l}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) P_{x,x}^{(2)} \\ & + \left( \frac{1}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) R_{y,y}^{(2)} - \left( \frac{(z_0 + z_1^l)}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) Q_{y,y}^{(2)} + \left( \frac{z_0 z_1^l}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) P_{y,y}^{(2)} \\ & + \left( \frac{2}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) M_{zz}^{(2)} - \left( \frac{(z_0 + z_1^l)}{(z_1^u - z_0)(z_1^u - z_1^l)} \right) N_{zz}^{(2)} + N_{zz,z}^{(1)} - q \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta w \neq 0: & \left( \frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) R_{x,x}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_1^l)}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) Q_{x,x}^{(2)} + \left( \frac{z_1^u z_1^l}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) P_{x,x}^{(2)} \\ & + \left( \frac{1}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) R_{y,y}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_1^l)}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) Q_{y,y}^{(2)} + \left( \frac{z_1^u z_1^l}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) P_{y,y}^{(2)} \\ & + \left( \frac{2}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) M_{zz}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_1^l)}{(z_0 - z_1^u)(z_0 - z_1^l)} \right) N_{zz}^{(2)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta w^l \neq 0: & \left( \frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) R_{x,x}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_0)}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) Q_{x,x}^{(2)} + \left( \frac{z_1^u z_0}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) P_{x,x}^{(2)} \\ & + \left( \frac{1}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) R_{y,y}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_0)}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) Q_{y,y}^{(2)} + \left( \frac{z_1^u z_0}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) P_{y,y}^{(2)} \\ & + \left( \frac{2}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) M_{zz}^{(2)} - \left( \frac{(z_1^u + z_0)}{(z_1^l - z_1^u)(z_1^l - z_0)} \right) N_{zz}^{(2)} + N_{zz,z}^{(3)} \end{aligned} \quad (22)$$

در معادلات (۱۰) تا (۲۲):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} N_{ij}^{(1)} \\ M_{ij}^{(1)} \\ O_{ij}^{(1)} \end{array} \right\} &= \int_{z_1^u}^{z_2^u} \sigma_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, & \left\{ \begin{array}{l} N_{ij}^{(2)} \\ M_{ij}^{(2)} \\ O_{ij}^{(2)} \end{array} \right\} &= \int_{z_1^l}^{z_1^u} \sigma_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, & \left\{ \begin{array}{l} N_{ij}^{(3)} \\ M_{ij}^{(3)} \\ O_{ij}^{(3)} \end{array} \right\} &= \int_{z_2^l}^{z_1^l} \sigma_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, \\ \left\{ \begin{array}{l} P_k^{(1)} \\ Q_k^{(1)} \\ R_k^{(1)} \end{array} \right\} &= \int_{z_1^u}^{z_2^u} \sigma_{kz} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, & \left\{ \begin{array}{l} P_k^{(2)} \\ Q_k^{(2)} \\ R_k^{(2)} \end{array} \right\} &= \int_{z_1^l}^{z_1^u} \sigma_{kz} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, & \left\{ \begin{array}{l} P_k^{(3)} \\ Q_k^{(3)} \\ R_k^{(3)} \end{array} \right\} &= \int_{z_2^l}^{z_1^l} \sigma_{kz} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} dz, \quad (k=x,y) \end{aligned} \quad (23)$$

#### ۴-مدلسازی اجزاء محدود

برای حل معادلات، از روش اجزاء محدود استفاده شده است. در مقاله کنونی، از المان مربعی برای تحلیل ورق استفاده شده است. به طور کلی، برای هر المان، می‌توان بردار توابع جابجایی مجهول را بر اساس ماتریس توابع شکل و مقادیر گره‌ای نوشت:

$$\delta = N\delta^{(e)} \quad (24)$$

که  $N$ ،  $\delta$  و  $\delta^{(e)}$  به ترتیب ماتریس توابع شکل کل المان، بردار توابع جابجایی مجهول و مقادیر توابع جابجایی در نقاط گره‌ای می‌باشند. با استفاده از روابط تنش و کرنش لایه‌ای، مولفه‌های تنش و کرنش را می‌توان بصورت ماتریسی براساس جابجایی‌ها بیان نمود:

$$\{\varepsilon\}^{(i)} = [d] \begin{Bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \end{Bmatrix} = [d][B][N]\{\delta^{(e)}\} = [T]\{\delta^{(e)}\}, \quad \{\sigma\}^{(i)} = [\hat{C}]\{\varepsilon\}^{(i)} = [\hat{C}][T]\{\delta^{(e)}\} \quad (25)$$

در رابطه فوق، ماتریس  $T$  شامل عملگرهای مشتق‌گیری و توابع شکل مربوط به مدل اجزاء محدود و ماتریس  $\hat{C}$  شامل ماتریس سفتی و ماتریس انتقال می‌باشد. معادلات حاکم را می‌توان به شیوه‌های متعددی مانند روش مانده‌های وزنی (از جمله، روش گلرکین) یا روش حساب تغییرات (از جمله استفاده از اصل انرژی پتانسیل کل کمینه) یافت. با جایگذاری روابط (۲۴) و (۲۵) در معادله (۸) خواهیم داشت:

$$\delta\Pi = \int_V \left( \delta\{\delta^{(e)}\}^T [T]^T [\hat{C}][T]\{\delta^{(e)}\} \right) dV - \int_A \delta\{\delta^{(e)}\}^T N^{wT} q dA \quad (26)$$

و با مرتب کردن رابطه یاد شده خواهیم داشت:

$$K^{(e)} \delta^{(e)} = F^{(e)}, \quad K = \int_V [T]^T [\hat{C}][T] dV \quad (27)$$

#### ۵-محاسبه تنش‌های عرضی

محاسبه تنش‌های عرضی با استفاده از معادلات سازگاری در تئوری مرتبه اول برشی دارای خطای زیادی می‌باشد و همچنین توزیع تنش برشی در راستای ضخامت را ثابت در نظر می‌گیرد و به فاکتور اصلاح تنش برشی نیز نیاز است. در اینجا پس از محاسبه تنش‌های درون صفحه‌ای، با استفاده از معادلات تعادل مقادیر تنش‌های عرضی محاسبه می‌شود، لازم بذکر است شرایط پیوستگی تنش بین لایه‌ها و صفر بودن تنش عرضی در سطوح آزاد برقرار می‌گردد. در این حالت نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نیز نمی‌باشد. در این حالت نه تنها تنش‌های عرضی در امتداد ضخامت ثابت نیستند، بلکه به صورت غیر خطی خواهد بود. همچنین برخلاف فرضیات تئوری‌های مرتبه بالای ساندویچی، از اثرات برشی رویه‌ها و اثرات خمش صفحه‌ای هسته صرف نظر نمی‌شود.

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz}^{(1)} = -\int_{z_1''}^z (\sigma_{x,x}^{(1)} + \tau_{xy,y}^{(1)}) dz & z_1'' \leq z \leq z_2'' \\ \tau_{xz}^{(2)} = -\int_{z_1'}^z (\sigma_{x,x}^{(2)} + \tau_{xy,y}^{(2)}) dz + \tau_{xz}^{(1)}|_{z=z_1''} & z_1' \leq z \leq z_1'' \\ \tau_{xz}^{(3)} = -\int_{z_2'}^z (\sigma_{x,x}^{(3)} + \tau_{xy,y}^{(3)}) dz & z_2' \leq z \leq z_1' \end{cases} \quad (29)$$

$$\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yz,z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau_{yz}^{(1)} = -\int_{z_1''}^z (\sigma_{y,y}^{(1)} + \tau_{xy,x}^{(1)}) dz & z_1'' \leq z \leq z_2'' \\ \tau_{yz}^{(2)} = -\int_{z_1'}^z (\sigma_{y,y}^{(2)} + \tau_{xy,x}^{(2)}) dz + \tau_{yz}^{(1)}|_{z=z_1''} & z_1' \leq z \leq z_1'' \\ \tau_{yz}^{(3)} = -\int_{z_2'}^z (\sigma_{y,y}^{(3)} + \tau_{xy,x}^{(3)}) dz & z_2' \leq z \leq z_1' \end{cases} \quad (30)$$

## ۶- بررسی نتایج عددی

در این بخش، علاوه بر صحنه‌گذاری نتایج بدست آمده، به ارائه نتایج جدید نیز پرداخته می‌شود. علاوه بر صحنه‌گذاری نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر، موضوع همگرایی نتایج المان محدود و مستقل از اندازه مش‌ها نیز بررسی شده است. در تمام نتایج ارائه شده، اندازه المان‌ها به نحوی انتخاب شده است که تغییر تعداد آن‌ها تاثیر محسوسی در نتایج نداشته باشد. در نهایت می‌توان گفت اندازه مش‌بندی  $40 \times 40$  نتایج دقیق‌تر و مناسب‌تری در تمام ابعاد مسئله ارائه می‌دهد. شرایط مرزی گوناگونی از جمله، تکیه-ساده، تکیه‌گاه گیردار و ترکیبی از این تکیه‌گاه‌ها بررسی شده است.

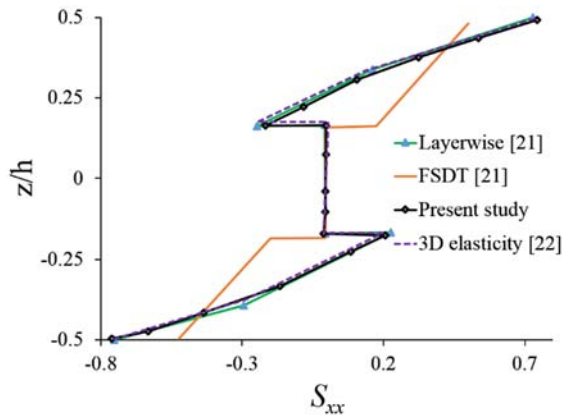
### ۶-۱- ورق چندلایه کامپوزیتی ضخیم تحت بار گسترده سینوسی

ضخامت بالای ورق ساندویچی، خواص ارتوتروپیک رویه‌های کامپوزیتی (ناهمسانگردی درون صفحه‌ای)، تفاوت سفتی مواد رویه و هسته در سازه‌های ساندویچی، باعث پیچیدگی مطالعه رفتار سازه‌های ساندویچی می‌گردد. لذا، ابتدا صحنه‌گذاری نتایج تئوری پیشنهادی با استفاده از تحلیل چندلایه کامپوزیتی ارتوتروپیک با ناهمسانگردی درون صفحه‌ای و دارای ضخامت بالا انجام می‌شود تا دقت تئوری نسبت به افزایش ضخامت و ناهمسانگردی درون صفحه‌ای ارزیابی شود. در اولین مثال، یک ورق چندلایه متقارن مربعی با چیدمان لایه (0/90/0) که دارای رویه‌های ارتوتروپیک با ضخامت یکسان می‌باشد، با استفاده از مدل پیشنهادی تحلیل شده است.

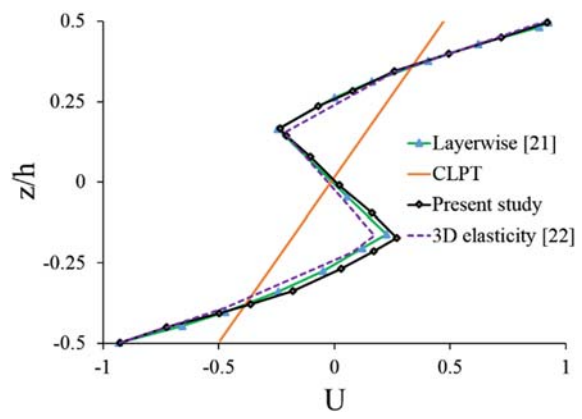
تکیه‌گاه‌های ورق در چهار لبه از نوع ساده بوده و تحت بار سینوسی  $q(x,y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$  قرار گرفته است. این ورق ضخیم دارای نسبت طول به ضخامت  $a/h=4$  می‌باشد. خواص مواد به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5, \quad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

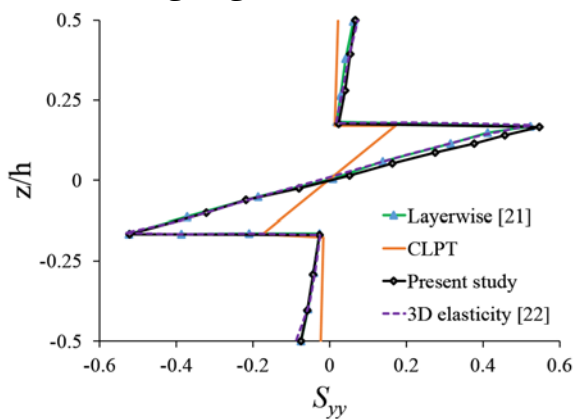




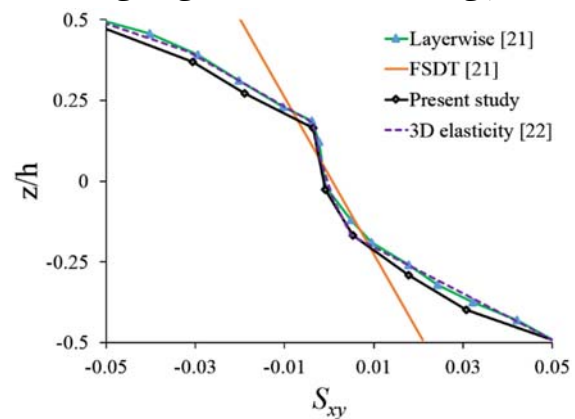
شکل ۴- توزیع عرضی تنش نرمال  $S_{xx}$  ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )



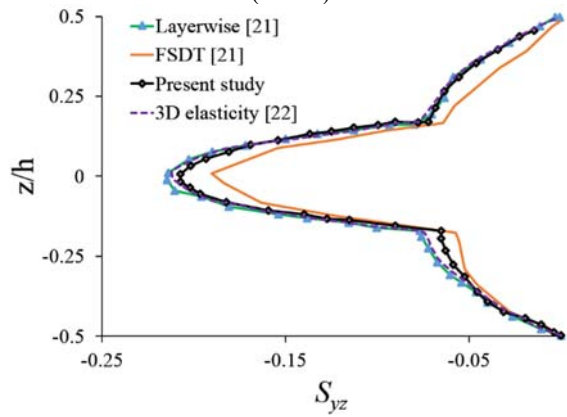
شکل ۳- توزیع عرضی جابجایی درون صفحه‌ای ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )



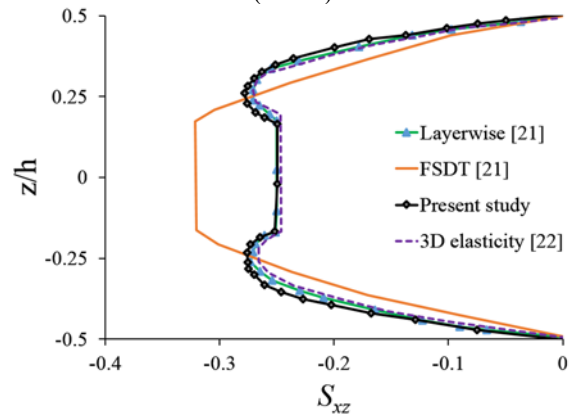
شکل ۶- توزیع عرضی تنش برشی درون صفحه‌ای  $S_{yy}$  ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )



شکل ۵- توزیع عرضی تنش برشی درون صفحه‌ای  $S_{xy}$  ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )



شکل ۸- توزیع تنش برشی عرضی  $S_{yz}$  در راستای ضخامت برای ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )



شکل ۷- توزیع تنش برشی عرضی  $S_{xz}$  در راستای ضخامت برای ورق ساندویچی (0/90/0) تحت بار سینوسی برشی ( $a/h=4$ )

جابجایی‌ها و تنش‌ها نیز به صورت زیر بدون بعد شده‌اند:

$$U = \frac{E_2 100h^2}{a^3 q_0} u, (S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}) = \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xy}), (S_{yz}, S_{zx}) = \frac{h}{q_0 a} (\sigma_{yz}, \sigma_{zx})$$

در شکل‌های (۳) تا (۸)، نمودار توزیع عرضی جابجایی درون صفحه‌ای، تنش‌های قائم درون صفحه‌ای، تنش برشی صفحه‌ای و تنش‌های برشی عرضی چندلایه (0/90/0) ضخیم ( $a/h=4$ ) تحت بار سینوسی، به ترتیب، نشان داده شده است. در این شکلها، نتایج تئوری عمومی-محلی کنونی، با نتایج تئوری تک لایه معادل (یا مرتبه اول برشی) و تئوری لایه‌ای ارائه شده در مرجع [۲۱] و نتایج تحلیل الاستیسیته سه بعدی [۲۲] مقایسه شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، تئوری تک لایه معادل (یا تغییر شکل برشی مرتبه اول) توانایی ردگیری تغییرات چندضابطه‌ای مولفه جابجایی درون صفحه‌ای در اثر خواص متفاوت لایه‌ها (اثر زیگزگ) را ندارد. چون در این تئوری‌ها، جابجایی‌ها به صورت توابعی از راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شوند که باعث می‌شود کرنش‌های عرضی به صورت پیوسته پدیدار می‌شوند. در حالیکه رفتار زیگزگ جابجایی درون صفحه‌ای ورق در راستای ضخامت در تئوری‌های الاستیسیته [۲۲]، لایه‌ای [۲۱] و تئوری حاضر کاملاً مشخص است. در این نمودارها، همچنین ضعف تئوری‌های تک لایه معادل در پیش‌بینی توزیع تنش‌های صفحه‌ای (قائم و برشی) و تنش‌های عرضی برشی به خوبی نمایان است. به طور کلی، مطابقت بسیار خوبی در نتایج جابجایی، تنش‌های صفحه‌ای و عرضی حاصل از تئوری عمومی-محلی حاضر با تئوری لایه‌ای [۲۱] و به ویژه، الاستیسیته سه بعدی [۲۲] مشاهده می‌شود؛ به گونه‌ای که نتایج کنونی، سازگاری بیشتری با تئوری الاستیسیته نشان می‌دهد. این سازگاری می‌تواند ناشی از در نظر گرفتن چرخش‌های موضعی درون لایه‌ای، اصلاح نتایج با تئوری الاستیسیته و در نظر گرفتن تغییرات ضخامت در تئوری کنونی باشد. همچنین، در تئوری کنونی، پیوستگی تنش‌های عرضی در سطح مشترک لایه‌ها نیز برقرار شده است. علاوه بر نتایج ارائه شده در شکل‌های (۳) تا (۸)، در جدول (۱) مقایسه‌ای میان نتایج تنش‌های عرضی بدست آمده از تئوری کنونی با نتایج تئوریهای زیگزگ معروف مراجع [۲۳] و [۲۴] و نتایج تئوری الاستیسیته دقیق پاگانو [۲۲]، برای ورق‌های ضخیم و نازک، ارائه شده است. همچنین، به طور همزمان، روند همگرایی نتایج کنونی بر پایه افزایش تعداد المانهای انتخابی، در این جدول بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شوند نتایج تنش‌های عرضی اصلاح شده بر پایه تئوری الاستیسیته سه بعدی کنونی، با نتایج حل دقیق [۲۲] همخوانی مناسبی دارند. در ضمن تنش قائم عرضی نیز از دقت قابل قبولی برخوردار است. بدیهی است که در تعداد المانهای کمتر، سیستم صلب‌تر است و در نتیجه، دقت ردگیری تغییرات توسط المان‌بندی کمتر است.

**جدول ۱- توزیع تنش‌های بین لایه‌ای در طول ضخامت برای ورق ساندویچی تحت بار سینوسی برشی**

a/h	Pagano [۲۲]	Sheikh [23]	Cho [24]	Present Study( Mesh density)			
				16×16	30×30	40×40	
4	$S_{xz} (L/2,0,0)$	0.256	0.2023	0.238*	0.2706*	0.2557*	0.2515*
	$S_{yz} (0,L/2,0)$	0.2172	0.1831	0.229*	0.2258*	0.2185*	0.2180*
	$S_{zz} (L/2,L/2,0)$	0.4926	—	0.498*	0.553	0.5373	0.5152
10	$S_{xz} (L/2,0,0)$	0.357	0.2437	0.356*	0.3361*	0.3402*	0.3498*
	$S_{yz} (0,L/2,0)$	0.1228	0.1015	0.124*	0.1153*	0.1185*	0.1203*
	$S_{zz} (L/2,L/2,0)$	0.4994	—	0.499*	0.5362	0.5284	0.5203

\*نتایج با استفاده از معادلات تعادل الاستیسیته اصلاح شده‌اند.

## ۶-۲- ورق ساندویچی سه لایه تحت بار یکنواخت

در این حالت یک ورق ساندویچی سه لایه با تکیه گاه‌های ساده تحت بار یکنواخت گسترده  $q$  قرار گرفته است.

جنس لایه بالا و لایه پایین به صورت یکسان در نظر گرفته شده و خواص ماده آن عبارت است از:

$$C_{22}/C_{11} = 0.543103, \quad C_{12}/C_{11} = 0.23319, \quad C_{23}/C_{11} = 0.098276, \quad C_{33}/C_{11} = 0.543103$$

$$C_{13}/C_{11} = 0.01077, \quad C_{55}/C_{11} = 0.266810, \quad C_{44}/C_{11} = 0.159914, \quad C_{66}/C_{11} = 0.26293$$

ضخامت هسته عبارت است از  $h_c = 0.8 \text{ h}$  و ضخامت پوسته‌ها با هم برابر است. نمادهای  $C_{11}^{(1)}$  و  $C_{11}^{(2)}$  به ترتیب نشان دهنده مولفه های  $C_{11}$  لایه اول و دوم می باشد.  $\gamma = C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}$  نشان دهنده اختلاف خاصیت مواد لایه اول و دوم می باشد. زمانی که  $\gamma$  برابر ۱ می باشد، ورق به صورت همگن می باشد.

در حالت کلی ورق ساندویچی  $\gamma$  مخالف ۱ می باشد. مولفه‌های جابجایی و تنش به صورت زیر بدون بعد شده و نتایج مورد نظر در قسمت های مختلف ورق در جدول (۲) ارائه شده است. و با حل دقیق ارائه شده توسط فن و یی [۲۵] و سیرویناس و رو [۲۶] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود جواب‌ها از دقت قابل قبولی برخوردار می باشند، به نحوی که بیشترین خطا بین تمامی نتایج محاسبه شده کمتر از ۴٪ می باشد. و این در حالی است که به نسبت حجم محاسبات انجام شده کاهش یافته است. این موضوع به خاطر در نظر گرفتن تغییر شکل پذیری هسته در راستای ضخامت، در نظر گرفتن تعادل الاستیک تنشهای میان لایه‌ای و همچنین نحوه محاسبه تنش‌های برشی می باشد. در این بررسی، خیز و تنشهای بی بعد، به صورت زیر در نظر

$$W = wC_{11}^{(2)}/hq, \quad (S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}) = \frac{1}{q_0} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xy})$$

جدول ۲- اثر ضریب  $\gamma$  در جابجایی و مولفه‌های مختلف تنش در نقاط مختلف ورق ساندویچی سه لایه تحت بار یکنواخت

$\gamma$	Present study			Fan and Ye [25]			Sirvinas and Roa [26]		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
$W(a/2, b/2, 0)$	681.6	255	155.3	688.5	258.9	159.3	688.5	258.9	159.3

$S_{xx}(a/2, b/2)$									
Top ply at top surface	35.2	58.6	63.6	35.9	60.1	65.0	35.9	60.1	65
Top ply at interface	28	47.1	49.8	28.4	46.4	48.6	28.4	46.4	48
Mid ply at upper interface	28	9.4	4.7	28.4	9.2	4.85	28.4	9.2	4.8
Mid ply at lower interface	-28	-9.4	-5.01	-28.5	-9.34	-4.9	-28.5	-9.3	-4.9
Bottom ply at interface	-28	-47.7	-49.6	-28.5	-46.6	-48.9	-28.5	-49.6	-46.8
Bottom ply at surface	-35.2	-61.3	-66.5	-35.9	-60.2	-65.2	-36	-60.3	-65.3

$S_{yy}(a/2, b/2)$									
Top ply at top surface	22.2	38.05	42.7	22.1	38.7	43.9	22.1	38.7	43.9
Top ply at interface	17.6	37.6	34.4	17.6	30.3	33.7	17.6	30.3	33.7
Mid ply at upper interface	17.6	5.9	3.4	17.6	6.05	3.3	17.6	6.0	3.3
Mid ply at lower interface	-17.5	-6	-3.4	-17.6	-6.1	-3.5	-17.6	-6.1	-3.4
Bottom ply at interface	-17.5	-29.4	-34.3	-17.6	-30.1	-33.4	-17.6	-30.0	-33.4
Bottom ply at surface	-22.2	-37.5	-44.5	-22.1	-38.4	-43.5	-22.2	-38.4	-43.5

$S_{zz}(a/2, b/2)$									
Mid ply at lower interface	-0.93	-0.92	-0.91	-0.95	-0.94	-0.93			
Mid ply at upper interface	0.02	0.04	-0.05	0.02	0.04	-0.051			

### ۳-۶- ورق ساندویچی با روبه و هسته ایزوتروپیک و بررسی اثر $E_f/E_c$ و $a/h$

در مثال کنونی، یک ورق ساندویچی متقارن مربعی با چیدمان لایه  $(Al/core/Al)$  که روبه‌های آن از جنس آلومینیم و ضخامت یکسان معادل  $0.1h$  و ضخامت هسته معادل  $0.8h$  می‌باشد، با استفاده از مدل پیشنهادی تحلیل و اثر نسبت  $E_f/E_c$  و  $a/h$  بررسی شده است. شرایط مرزی ورق، ساده و ورق تحت بار سینوسی  $q(x, y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$  می‌باشد. خواص مواد پوسته و هسته بشرح ذیل می‌باشد [۱۷]. لازم بذکر است که به منظور مطالعه پارامتری، هسته در دو حالت مختلف بررسی می‌شود.

$$\nu = 0.34, E_f = 73 \text{ GPa}, FCSR = 10 \Rightarrow E_c = 7.3 \text{ GPa}, FCSR = 10^5 \Rightarrow E_c = 0.73 \text{ MPa}$$

تحلیل‌ها برای دو نمونه ورق ساندویچی دارای هسته سفت ( $E_f/E_c=10$ ) و هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ ) در سه حالت ضخیم ( $a/h=4$ )، نسبتاً ضخیم ( $a/h=10$ ) و نازک ( $a/h=100$ ) بررسی شده است. جابجایی‌ها و تنشها با کمک رابطه زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$W = w \frac{100E_{skin} h^3}{a^4 q_0}, \quad U, V = (u, v) \frac{100E_{skin} h^2}{a^3 q_0},$$

$$S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} = \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}), \quad S_{yz}, S_{zx} = \frac{h}{q_0 a} (\sigma_{yz}, \sigma_{zx})$$

در جدول (۳)، نتایج خیز بی‌بعد مرکز ورق ساندویچی بدست آمده توسط تئوری عمومی - محلی کنونی، با نتایج روش الاستیسیته سه بعدی 3D، تک لایه معادل، مرتبه اول، مرتبه چهارم، زیگزاگ مرتبه ۳ برای ضخامت‌های مختلف، مقایسه شده‌اند. نتایج حاکی از آن است که تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول برشی فقط برای ورق‌های ساندویچی نازک با هسته سفت دقت مناسب دارند. تئوری تک لایه معادل مرتبه بالا برای ورق‌های ضخیم با هسته سفت نیز اختلافی حدود ۶٪ دارند. ملاحظه می‌شود که تئوری‌های تک لایه معادل با هر مرتبه‌ای (حتی مرتبه ۴) قادر به پیش‌بینی صحیح جابجایی عرضی ورق ساندویچی با هسته نرم نمی‌باشند. در حالیکه تئوری‌هایی که در میدان جابجایی خود بخش محلی نیز در نظر می‌گیرند (تئوری زیگزاگ و تئوری حاضر) دقت بسیار بالایی در ساندویچ پل‌های با هسته سفت با هر ضخامتی دارند.

### جدول ۳ - نتایج خیز بی‌بعد بیشینه در مرکز ورق ساندویچی سه لایه با هسته ایزوتروپیک و روبه‌های ایزوتروپیک حاصل از

تئوری حاضر و مقایسه آن با تئوری‌های تک لایه معادل، زیگزاگ و 3D مراجع [۱۷ و ۲۷]

Moduli ratio	Theory	$a/h=4$		$a/h=10$		$a/h=100$	
		$W$	Disc. (%)	$W$	Disc. (%)	$W$	Disc. (%)
$E_f/E_c=10$	3D	13.294	-	6.3923	-	5.0649	-
	Present	13.028	2	6.4881	1.5	5.1079	0.85
	CLT	5.0515	62.3	5.0515	21	5.0515	0.26
	FSDT	8.0821	39.2	5.5364	13.4	5.0563	0.17
	ED4	12.497	6.00	6.2671	1.96	5.0637	0.02
	ZZ3	13.343	0.37	6.3935	0.00	5.0649	0.02
$E_f/E_c=10^5$	3D	1299.4	-	1230.6	-	126.70	-
	Present	1269.5	2.3	1209.67	1.7	128.347	1.3
	CLT	5.5815	>100	5.5814	>100	5.5814	>100
	FSDT	9.8240	>100	6.2602	>100	5.5852	>100
	ED4	112.51	>100	24.078	>100	5.7692	>100
	ZZ3	994.51	23.5	933.11	24.2	122.92	2.98

در نمونه با هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ )، تئوری زیگزاگ اگرچه برای پنل نازک نتایج خوبی ارائه می‌دهد، اما برای پنل‌های ضخیم ( $a/h=4$ ) و نسبتاً ضخیم ( $a/h=10$ ) انحراف حدود ۲۳٪ نشان می‌دهد. نتایج تئوری حاضر دارای انحراف کمتر از ۳٪ برای ورق ساندویچی ضخیم با هسته نرم می‌باشد، این در حالی است که تئوری حاضر به دلیل استفاده از میدان جابجایی مرتبه اول از نظر محاسباتی هزینه کمتری دارد. در جدول (۴) نیز نتایج تنش برشی عرضی ورق ساندویچی با هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ ) حاصل از تئوری‌های مختلف ارائه شده در مرجع [۱۷] و تئوری حاضر مقایسه شده است. تئوری‌های تک‌لایه معادل برای ورق‌های نازک جواب قابل قبول با انحراف حدود ۱۰٪ دارند اما برای پنل‌های ضخیم ضعف بسیار بزرگی دارند (انحراف بیش از ۱۰۰٪) و نتایج ارائه شده تفاوت چشمگیری با حل دقیق 3D دارد. تئوری زیگزاگ برای پنل‌های نازک نتایج قابل قبول حدود ۳٪ و برای حالت ضخیم نیز انحراف حدود ۲۶٪ نشان می‌دهد.

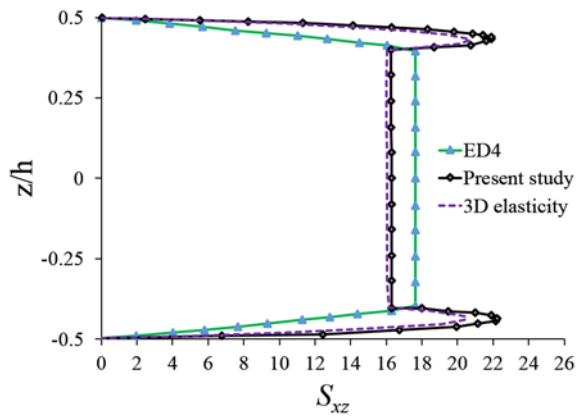
نتایج تئوری استفاده شده در این تحقیق (عمومی-محلی) برای ورق ضخیم با هسته نرم کمتر از ۳٪ می‌باشد که نشان دقت بسیار خوب این تئوری است. استفاده از معادلات تعادل الاستیسیته جهت محاسبه تنش‌های عرضی دلیل دقت بیشتر تئوری حاضر نسبت به تئوری زیگزاگ مرتبه ۳ بوده است. لازم به ذکر است که نتایج ارائه شده در جداول فوق فقط مربوط به نقاط خاص و مهم ورق ساندویچی می‌باشد و قطعاً دقت تئوری‌های ذکر شده در تمامی نقاط یکسان نمی‌باشد. لذا جهت بررسی بیشتر می‌بایست نمودار جابجایی و تنش در راستای ضخامت ورق نیز بررسی شود. در شکل‌های (۹) و (۱۰)، به ترتیب نمودار تنش برشی عرضی  $S_{zx}$  ورق ساندویچی نازک و ضخیم با هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ ) در راستای ضخامت ترسیم شده است و نتایج تئوری حاضر با نتایج الاستیسیته 3D و تئوری تک‌لایه معادل مرتبه ۴ (ED4) مقایسه شده است [۱۷ و ۲۷].

تئوری تک‌لایه معادل (حتی مرتبه بالا) قادر به مدلسازی رفتار جابجایی صفحه‌ای ورق نمی‌باشد. درحالی‌که تئوری حاضر (عمومی-محلی) رفتار ورق‌های نازک را به خوبی شبیه‌سازی می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج تئوری استفاده شده در این تحقیق در هسته و روکش‌ها تطبیق بسیار خوبی با حل دقیق 3D دارد، هر چند این تئوری رفتار تنش برشی بین لایه‌ها را به درستی شبیه‌سازی می‌کند اما مقدار بیشینه تنش در رویه‌ها را متفاوت با مقدار 3D نمایش می‌دهد که با توجه به فرضیات تئوری و مرتبه اول بودن آن قابل انتظار می‌باشد. معمولاً طراحان برای جلوگیری از این رفتار در نمونه‌های کاربردی، از لایه‌های با خواص نسبتاً ضعیف ایزوتروپیک (سوزنی) در اطراف هسته استفاده می‌کنند تا این جهش تفاوت سفتی رخ ندهد و چسبندگی هسته به رویه‌ها نیز بیشتر شود.

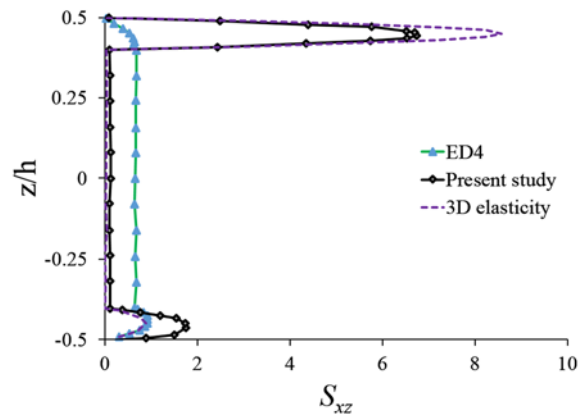
**جدول ۴-** مقایسه نتایج تنش برشی عرضی بی‌بعد ( $S_{zx}$ ) در ورق ساندویچی سه لایه با هسته ایزوتروپیک نرم ( $E_f/E_c=10^5$ )

و رویه‌های ایزوتروپیک با نتایج تئوری‌های تک‌لایه معادل، زیگزاگ و 3D مرجع [۱۷]

Theory	$a/h=4$		$a/h=10$		$a/h=100$	
	Result	Disc.(%)	Result	Disc.(%)	Result	Disc.(%)
3D	0.0111	-	0.1627	-	16.039	-
present	0.0114	3	0.1672	2.8	16.343	1.9
CLT	0.7045	>100	1.7612	>100	17.612	9.81
FSDT	0.7045	>100	1.7612	>100	17.612	9.81
ED4	0.6502	>100	1.7379	>100	17.609	9.79
ZZ3	0.0082	26.1	0.1225	24.7	15.537	3.13



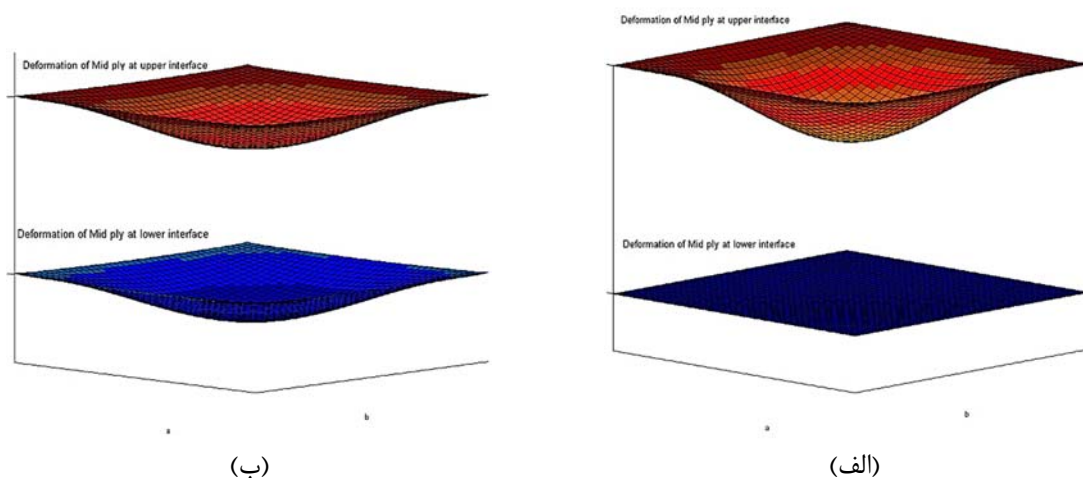
شکل ۱۰- توزیع تنش برشی عرضی ( $S_{xz}$ ) در راستای ضخامت ورق ساندویچی نازک با هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ )



شکل ۹- توزیع تنش برشی عرضی ( $S_{xz}$ ) در راستای ضخامت ورق ساندویچی ضخیم با هسته نرم ( $E_f/E_c=10^5$ )

لذا دقت تئوری حاضر برای نمونه‌های کاربردی و صنعتی هوایی و دریایی قابل قبول می‌باشد [۲۷]. همانطور که در شکل (۹) مشاهده می‌شود رفتار رویه بالا و پایین متقارن نمی‌باشد که این موضوع بدلیل ضخامت ورق و نرمی هسته می‌باشد که با جابجایی هسته ورق ساندویچی در راستای ضخامت به خوبی شبیه سازی شده است. بزرگترین دلیلی که تئوری‌های مختلف از جمله زیگزاگ در ورق‌های ساندویچی ضخیم و به خصوص با هسته نرم خطای زیادی دارند، عدم مدل‌سازی جابجایی هسته در راستای ضخامت می‌باشد.

به طوریکه وقتی هسته بسیار نرم می‌باشد، عملاً نیرویی به پوسته زیری اعمال نشده و پوسته پایینی دچار تغییر شکل نخواهد شد. لذا به تعبیر دیگر تغییر شکل صفحه بالایی هسته با تغییر شکل صفحه پایینی هسته اختلاف فاحشی خواهد داشت. از اینرو در مدل ارائه شده در این مقاله، برای رفع این مشکل جابجایی عرضی هسته با تابع درجه دو شبیه‌سازی شده است. از اینرو نتایج بدست آمده با حل سه بعدی دقیق همخوانی بسیار مناسبی دارد. در شکل (۱۱) جابجایی صفحه بالایی و پایینی هسته حالت ورق ساندویچی ضخیم، با هسته نرم و سفت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود بیشترین اختلاف در حالت ورق ساندویچی ضخیم با هسته نرم است.



شکل ۱۱- خیز لایه‌های بالایی و صفحه پایینی هسته ورق ساندویچی ضخیم: (الف) هسته نرم، (ب) هسته سفت

در حالیکه در ورق ساندویچی ضخیم با هسته سفت چنین اختلافی بین جابجایی بالا و پایین هسته مشاهده نمی‌شود. به بیان دیگر در حالتی که هسته از صلبیت کافی برخوردار است عملاً هر دو پوسته با هم تغییر شکل می‌دهند. اما در حالتی که هسته از مواد بسیار نرم تشکیل شده است عملاً دو پوسته به صورت کاملاً مجزا از یکدیگر عمل می‌کنند. از طرفی با نازک شدن ورق ساندویچی این اختلاف نیز به نسبت کاهش می‌یابد، هر چند همچنان بین دو حالت هسته نرم و سفت اختلاف وجود خواهد داشت.

همچنین تاثیر هسته بر رفتار لایه پایینی در دو حالتی که هسته نرم و سفت است در شکل‌های (۹) و (۱۰) نیز مشاهده می‌شود. به طوریکه در هسته نرم عدم تقارن محسوسی بین بیشترین تنش برشی عرضی در پوسته بالایی و پوسته پایینی وجود دارد که با نازک شدن ورق ساندویچی این موضوع کمتر می‌شود. لازم بذکر است که نتایج با مش بندی  $40 \times 40$  که همگرا شده بودند، ارائه شده است.

#### ۶-۴- ورق ساندویچی با رویه کامپوزیتی و هسته ارتوتروپیک

در این مثال یک ورق ساندویچی سه لایه متقارن مربعی با رویه‌ها و هسته ارتوتروپیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ضخامت رویه‌ها یکسان و معادل  $0.1h$  و ضخامت هسته معادل  $0.8h$  می‌باشد. شرایط مرزی ورق در هر چهار

وجه تکیه‌گاه ساده و ورق تحت بار سینوسی  $q(x, y) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$  می‌باشد. ویژگی‌های مکانیکی رویه‌ها و هسته بشرح ذیل می‌باشند:

$$(E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}) = (25E, E, E, 0.5E, 0.5E, 0.2E) \text{ GPa}, \nu = 0.25 \quad \text{رویه‌ها:}$$

$$(E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}) = (0.04E, 0.04E, 0.5E, 0.016E, 0.06E, 0.06E) \text{ GPa}, \nu = 0.25 \quad \text{هسته:}$$

هدف از این تحلیل صحت‌گذاری نتایج تئوری حاضر با ارتوتروپیک شدن رویه‌ها نسبت به مثال قبل و بررسی پارامتری برای نسبت طول به ضخامت  $a/h = 4, 10, 100$  می‌باشد.

#### جدول ۵- نتایج بی‌بعد جابجایی عرضی، تنش‌های عمودی و تنش‌های برشی صفحه‌ای و عرضی در نقاط مهم ورق

ساندویچی سه لایه متقارن با رویه‌ها و هسته‌ی ارتوتروپیک

$a/h$	Approach	W (a/2, b/2, 0)	$S_x$ (a/2, b/2, h/2)	$S_y$ (a/2, b/2, h/2)	$S_{xz}$ (0, b/2, 0)	$S_{zy}$ (a/2, 0, 0)	$S_{xy}$ (0, 0, h/2)
4	3D [22]	7.59620	1.556	0.2595	0.239	0.1072	0.1437
	ZigZag[28] (Disc.%)	7.65570 (0.78%)	1.5158 (2.59%)	0.2495 (3.86%)	0.2509 (4.98%)	0.1151 (7.37%)	0.1462 (1.74%)
	Present (Disc.%)	7.4062 (2.5%)	1.5248 (2%)	0.2548 (1.8%)	0.2335 (2.3%)	0.1039 (3%)	0.1494 (3.95%)
10	3D [22]	2.200	1.153	0.1104	0.30	0.0527	0.0707
	ZigZag[28] (Disc.%)	2.2003 (0.0%)	1.1438 (0.81%)	0.1082 (1.99%)	0.3146 (4.87%)	0.0567 (7.59%)	0.0709 (0.28%)
	Present (Disc.%)	2.1362 (2.9%)	1.1912 (2.3%)	0.1085 (1.7%)	0.3069 (2.33%)	0.0548 (4.11%)	0.0685 (3%)
100	3D [22]	0.8923	1.098	0.0550	0.324	0.0297	0.0433
	ZigZag[28] (Disc.%)	0.8917 (0.07%)	1.1092 (0.99%)	0.0546 (0.72%)	0.3407 (5.14%)	0.0323 (8.57%)	0.0434 (0.23%)
	Present (Disc.%)	0.8833 (1%)	1.1111 (1.25%)	0.0541 (1.5%)	0.3132 (3.33%)	0.0281 (5.38%)	0.0431 (3.93%)

تحلیل‌ها برای ورق ساندویچی با هسته ارتوتروپیک نرم است. جابجایی‌ها و تنش‌ها همچون قبل بی‌بعد شده‌اند. در جدول (۵)، نتایج جابجایی عرضی بیشینه در مرکز ورق، تنش عمودی صفحه‌ای و تنش برشی صفحه‌ای و عرضی در نقاط مهم ورق ساندویچی محاسبه شده و با نتایج حل سه بعدی [۲۲] و زیگزاک مرتبه بالا [۲۸] مقایسه شده است. انحراف نتایج خیز در مرکز ورق محاسبه شده توسط تئوری حاضر در حالت‌های مختلف ورق کمتر از ۳٪ می‌باشد. اختلاف نتایج مولفه‌های تنش‌های صفحه‌ای و عرضی با نتایج مرجع [۲۲] حداکثر ۵٪ در ورق ضخیم می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که اگرچه تئوری حاضر به صورت تکه‌ای خطی (مرتبه اول) است اما دقت آن در تحلیل ورق ساندویچی با رویه ارتوتروپیک و هسته ارتوتروپیک هم ضخامت نازک و هم خیلی ضخیم تطابق خوبی با نتایج حل سه بعدی و زیگزاک مرتبه بالا دارد.

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله، یک مدل عمومی-محلی برای بررسی جابجایی و تنش‌های ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی با در نظر گرفتن تغییر شکل‌پذیری هسته، ارائه شد. همچنین برای محاسبه تنش‌های عرضی از حل معادلات تعادل الاستیسیته استفاده شده است. به همین دلیلی شرط پیوستگی تنش‌های بین لایه‌ای به خوبی برآورده شده است. از مزایای مهم مدل ارائه شده، دستیابی به ویژگی‌های مختلف رفتار خمش ورق بصورت کامل، با حداقل هزینه محاسباتی و دقت بسیار مناسب می‌باشد.

این مطالعه نشان داد که مدل ارائه شده به دلیل استفاده از بخش محلی، دارای قابلیت‌های گسترده‌ای بوده و همچنین در شرایط مختلف مورد بررسی، نتایج بسیار مناسبی بدست می‌دهد. بر اساس نتایج حاصله برای ورق‌های ساندویچی، شرایط پیوستگی جابجایی‌ها و تنش‌های عرضی بصورت کامل برقرار گردیده و این نتایج حتی برای ورق‌های ساندویچی با هسته نرم نیز دقت بسیار بالایی داشته است. همچنین جابجایی هسته در راستای ضخامت برای ورق‌های با هسته نرم را نیز به خوبی شبیه‌سازی می‌کند. تئوری کنونی، با توصیف سه خطی از توزیع میدان جابجایی در راستای ضخامت، می‌تواند تا حدی، حالتی مجانبی از تئوری مرتبه سه Reddy تلقی شود. لذا، همانگونه که تئوری مرتبه سه Reddy برای ورق ضخیم معتبر است، تئوری کنونی، محدود به ورق نازک نخواهد بود.

تئوری کنونی، مزایای متعددی نیز نسبت به تئوری مرتبه سه Reddy دارد؛ از جمله: (الف) امکان تطبیق با توزیع نامتقارن جابجایی در راستای ضخامت (تابع توزیع Reddy بر حسب  $z$ ، تابع پادمتقارنی است و لذا، در حالت کلی، توانایی انطباق با فرم کلی میدان جابجایی ندارد)، (ب) تصحیح نتایج با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، (ج) برآورده ساختن پیوستگی تنش‌های عرضی در مرز لایه‌ها (در هیچیک از تئوری‌های مرتبه بالای تک لایه معادل و تئوری‌های لایه‌ای، این موضوع در نظر گرفته نشده است. لذا دقت تئوری کنونی، از تئوری‌های لایه‌ای و زیگزاک نیز بالاتر است؛ ضمن آنکه هزینه محاسباتی آن کمتر می‌باشد) و (د) رویه‌ها، عملاً ورق نازک هستند و لذا می‌توان  $W$  را در رویه‌ها ثابت فرض کرد. در ضخیم‌ترین جزء ورق یعنی هسته، توزیع جابجایی  $W$  بر خلاف تئوری‌های متداول، غیر خطی (مرتبه دو) است که نکته آخر بسیار مهم می‌باشد.



## مراجع

- [1] Kant, T., and Swaminathan, K., "Estimation of Transverse/Interlaminar Stresses in Laminated Composites, A Selective Review and Survey of Current Developments", *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 65–75, (2000).
- [2] Shariyat, M., Khalili, S. M. R., and Rajabi, I., "A Global–local Theory with Stress Recovery and a New Post-processing Technique for Stress Analysis of Asymmetric Orthotropic Sandwich Plates with Single/Dual Cores", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 286, pp. 192-215, (2015).
- [3] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", CRC Press, 2<sup>nd</sup> Edition, (2004).
- [4] Wanji, C., and Zhen, W., "A Selective Review on Recent Development of Displacement-Based Laminated Plate Theories", *Recent Patents on Mechanical Engineering*, Vol. 44, pp. 1-29, (2008).
- [5] Carrera, E., Brischetto, S., and Nali, P., "*Plates and Shells for Smart Structures*", John Wiley & Sons, Chichester, United Kingdom, (2011).
- [6] Babu, C.S., and Kant, T., "Refined Higher-order Finite Element Models for Thermal Buckling of Laminated Composite and Sandwich Plates", *J. Thermal Stresses*, Vol. 23, pp. 11–30, (2000).
- [7] Nayak, A.K., Moy, S.S.J., and Sheno, R.A., "A Higher Order Finite Element Theory for Buckling and Vibration Analysis of Initially Stressed Composite Sandwich Plates", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 286.4, pp. 763-780, (2005).
- [8] Shariyat, M., "Thermal Buckling Analysis of Rectangular Composite Plates with Temperature-dependent Properties Based on a Layerwise Theory", *Thin-Walled Struct.*, Vol. 45, pp. 439–452, (2007).
- [9] Robbins, D.H., and Reddy, J.N., "Modeling of Thick Composites using a Layer-wise Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 655-677, (1993).
- [10] Garcia Lage, R., MotaSoares, C.M., MotaSoares, C.A., and Reddy, J.N., "Analysis of Adaptive Plate Structures by Mixed Layerwise Finite Elements", *Composite Structures*, Vol. 66, pp. 269-276, (2004).
- [11] Matsunaga, H., "Thermal Buckling of Angle-ply Laminated Composite and Sandwich Plates According to a Global Higher-order Deformation Theory", *Composite Structure*, Vol. 72, pp. 177–192, (2006).
- [12] Shariyat, M., "Dynamic Buckling of Suddenly Loaded Imperfect Hybrid FGM Cylindrical Shells with Temperature-dependent Material Properties under Thermo-electro-Mechanical Loads", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 50, pp. 1561–1571, (2008).

- [13] Shariyat, M., "Vibration and Dynamic Buckling Control of Imperfect Hybrid FGM Plates with Temperature-dependent Material Properties Subjected to Thermo-electro-Mechanical Loading Conditions", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 4501-4517, (2009).
- [14] Dafedar, J.B., Desai, Y.M., and Mufti, A., "Stability of Sandwich Plates by Mixed, Higher-order Analytical Formulation", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40.17, pp. 40-45, (2003).
- [15] Malekzadeh, K., Khalili, M.R., and Mittal, R.K., "Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 7, pp. 431-456, (2005).
- [16] Carrera, E., and Brischetto, S., "A Survey with Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 62, pp. 010803, (2009).
- [17] Brischetto, S., Carrera, E., and Demasi, L., "Improved Bending Analysis of Sandwich Plates using a Zig-Zag Function", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 408-415, (2009).
- [18] Li, X., and Liu, D., "Generalized Laminate Theories Based on Double Superposition Hypothesis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 7, pp. 1197-1212, (1997).
- [19] Shariyat, M., "A Generalized Global-local High-order Theory for Bending and Vibration Analyses of Sandwich Plates Subjected to Thermo-mechanical Loads", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 52, pp. 495-514, (2010).
- [20] Kapuria, S., and Nath, J.K., "On the Accuracy of Recent Global-local Theories for Bending and Vibration of Laminated Plates", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 163-172, (2013).
- [21] Cetkovic, M., and Vuksanovic, D., "Free Vibrations and Buckling of Laminated Composite and Sandwich Plates using a Layerwise Displacement Model", *Composite Structures*, Vol. 88, No. 2, pp. 219-227, (2009).
- [22] Pagano, N.J., "Exact Solutions for Rectangular Bi-directional Composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 20-34, (1970).
- [23] Sheikh, A.H., and Chakrabarti, A., "A New Plate Bending Element Based on Higher-order Shear Deformation Theory for the Analysis of Composite Plates", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 39, pp. 883-903, (2003).
- [24] Cho, M., and Oh, J., "Higher Order Zig-Zag Theory for Fully Coupled Thermo-electric-Mechanical Smart Composite Plate", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1331-1356, (2004).
- [25] Fan, J., and Ye, J., "An Exact Solution for the Statics and Dynamics of Laminated Thick Plates with Orthotropic Layers", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 26.5, pp. 655-662, (1990).
- [26] Srinivas, S., and Rao, A. K., "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6.11, pp. 1463-1481, (1970).

- [27] Khalili, S. M. R., Shariyat, M., and Rajabi, I., "A Finite Element Based Global-local Theory for Static Analysis of Rectangular Sandwich and Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 177-189, (2014).
- [28] Mihir, K., Pandita, A., Sheikh, H., Bhrigu, A., and Singh, N., "An Improved Higher Order ZigZag Theory for the Static Analysis of Laminated Sandwich Plate with Soft Core", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 44, pp. 602-610, (2008).

## فهرست نمادهای انگلیسی

- $a$ : طول ورق  
 $B^j$ : سفتی کوپلینگ  
 $b$ : عرض ورق  
 $b$ : اندیس بیانگر پایین  
 $u$ : اندیس بیانگر بالا  
 $C$ : ضخامت هسته  
 $C_{ij}^k$ : ماتریسهای سفتی لایه  $k$ ام  
 $d$ : اپراتور دیفرانسیلی  
 $h$ : ضخامت  
 $F$ : بردار نیرو  
 $[K^e]$ : ماتریس سفتی المانی  
 $k$ : اندیس بیانگر لایه  $k$ ام  
 $N$ : تابع شکل  
 $U$ : انرژی پتانسیل داخلی  
 $u$ : جابجایی در راستای  $x$   
 $V$ : انرژی پتانسیل خارجی  
 $v$ : جابجایی در راستای  $y$   
 $w$ : جابجایی در راستای  $z$   
 $\sigma$ : تنش  
 $\epsilon$ : کرنش  
 $\delta$ : بردار جابجایی  
 $\zeta_k$ : مختصات بی بعد محلی  
 $T$ : تنش برشی عرضی هسته  
 $\gamma$ : کرنش برشی عرضی هسته  
 $v$ : ضریب پواسون  
 $\Pi$ : انرژی پتانسیل کل

**Abstract**

In the present article, a global-local theory with three-dimensional elasticity corrections is employed to trace the local and instantaneous variations of various displacement and stress components of sandwich and composite plates. The governing equations are extracted based on Hamilton principle. One of the key features of the proposed theory is incorporation of the transverse flexibility of the core; a fact that is crucial when studying behaviors of thick or soft core sandwich plates. Since the transverse shear stresses are extracted based on the 3D elasticity theory, the interlaminar continuity condition of the transverse shear stresses is met.

The verification results show that the presented finite element formulation is efficient and leads to accurate results, even for thick or soft core sandwich plates. A comprehensive parametric study is accomplished to evaluate effects of different parameters such as stiffness of the core material and boundary conditions. Finally, the obtained results verified by the available results existed in the literature.