

نایپاداری و تشدید پیزوالکتریکی صفحات S-PFG میرا واقع بر بستر با لایه برشی با استفاده از تئوری بهبود یافته FSDT

در این تحقیق نایپاداری دینامیکی و رفتار غیرخطی صفحات تابعی پیزوالکتریک سیگموئیدال (S-FGP) با بستر الاستیک خطی تحت تحریکات هارمونیک پیزوالکتریکی در غیاب/حضور میرایی مطالعه شد. بر اساس تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول اصلاح شده (FSDT) و اصل همیلتون، معادلات غیرخطی حاکم استخراج و با در نظر گرفتن شش شکل مود ارتعاشی و اعمال روش گالرکین، معادلات حاکم به معادلات غیرخطی ماتریو تبدیل و آنالیز نایپاداری انجام گردید. با بکارگیری روش اغتشاشات، معادلات پاسخ در شرایط پایا استخراج و آنالیز تشدید پارامتریک تحت تحریکات درون-صفحه‌ای پیزوالکتریک صورت گرفت. نشان داده شد که سفتی بستر و میرایی، اثرات عمده‌ای بر منحنی‌های مشخصه تشدید می‌گذارند.

موسی رضائی^۱
استاد

رضا جهانگیری^۲
استادیار

واژه‌های راهنما: رفتار غیرخطی، بستر الاستیک با لایه برشی، ولتاژ پیزوالکتریکی، روش اغتشاشات، دوشاخگی.

۱-مقدمه

امروزه آلیاژهای فلزی افق جدیدی در ساخت مواد پیشرفته‌ای همچون مواد مدرج تابعی که عملکرد بهینه در کاربردهای متنوع از قبیل سیستم‌های پیشرانس هواپیماها، تجهیزات فضایی و تجهیزات زیردریایی، پوشش حفاظتی پره‌های توربین و غیره دارند، باز کرده است.

سازه‌های ساندویچی از هسته‌ای که توسط لایه‌های رویین پوشش داده شده‌اند، تشکیل شده‌اند و به علت خواص مطلوبی از قبیل صلبیت خمشی بالا، وزن مخصوص پایین، مشخصات ارتعاشی مطلوب و مقاومت در برابر خستگی بصورت متداول مورد استفاده قرار می‌گیرند. رشد روزافزون استفاده از لایه‌های انعطاف‌پذیر پیزوالکتریکی برای کنترل ارتعاشات سازه‌ای با استفاده از تحریکات پیزوالکتریکی، توجه بسیاری محققان را به خود معطوف کرده است. این لایه‌ها تحت عنوان لایه‌های میهمان روی لایه سازه میزبان نصب شده و می‌توانند با استفاده از مود سنسوری (خواص مستقیم پیزوالکتریکی) رفتار سازه را پایش کرده و با استفاده از مود عملگری (خواص معکوس پیزوالکتریکی) رفتار سازه‌ها را تصحیح کنند.

^۱ نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز m_rezaee@tabrizu.ac.ir

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۰/۱۱، تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۲/۲۲

از این رو بررسی ناپایداری دینامیکی سازه‌های هوشمند از موضوعات مهم در دینامیک سازه‌ها می‌باشد. از طرف دیگر، هنگامی که لایه‌های پیزوالکتریکی عملگری وصله شده به سازه میزبان، تحت تاثیر تحریکات میدان الکتریکی هارمونیک قرار می‌گیرند ممکن است در بازه وسیعی از فرکانسهای اعمالی و تحت شرایط خاصی پدیده تشدید در سازه اتفاق افتد طوریکه یک اغتشاش پیزوالکتریکی با دامنه کوچک می‌تواند باعث رشد نامحدود دامنه ارتعاشی شده و منجر به خسارت جبران ناپذیر گردد. حال اگر میدان الکتریکی اعمالی در جهت قطبش اولیه لایه‌های هوشمند پیزوالکتریکی باشد و توسط قیود خاص تکیه‌گاهی جلو تغییر شکل سازه گرفته شود، پدیده تشدید پارامتریک ممکن است حتی در ولتاژهای تحریک کمتر از ولتاژ بحرانی نیز باعث ناپایداری گردد. از این رو مطالعه رفتار دینامیکی صفحات ساندویچی تابعی پیزوالکتریک با تکیه‌گاه‌های ساده غیرمتحرک، تحت تحریکات هارمونیک پیزوالکتریکی از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این راستا، جای کومار و همکارانش [۱] با بکارگیری روش اصلاح شده گالرکین، تغییر شکل‌های نسبتاً بزرگ صفحات کامپوزیتی پیزوالکتریک، تحت بارهای عرضی و یکنواخت را مطالعه کردند و نشان دادند که با اعمال میدان الکتریکی مناسب در امتداد ضخامت لایه‌های پیزوالکتریکی، می‌توان تغییر شکل سازه را کاهش داد. برای اولین بار، زنگ و همکارانش [۲] دینامیک دوشاخگی و آشوبناک صفحات کامپوزیتی ضخیم پیزوالکتریکی را تحت تاثیر همزمان بارهای عرضی، درون-صفحه‌ای و تحریکات پیزوالکتریکی مطالعه کردند و حالات وجود تشدید و آشوب را به صورت عددی بررسی کردند. فخاری و همکارانش [۳] با استفاده از روش المان محدود، پاسخ زمانی و فرکانسی صفحات تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک ضخیم تحت بارهای حرارتی، الکتریکی و مکانیکی را مطالعه کردند و اثر شاخص کسر حجمی، گرادیان دمایی و ولتاژ پیزوالکتریکی بر روی ارتعاشات مسأله را بررسی کردند.

وَنگ و همکارانش [۴] با بکارگیری روش المان-آزاد گالرکین، تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک بر روی رفتار صفحات ویسکو-الاستیک تحت بارهای برشی پیرو را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که با جایابی بهینه محل لایه‌های پیزوالکتریکی، پایداری صفحات به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد. بهجت و همکارش [۵] غیرخطی بودن هندسی روی رفتار استاتیکی و ارتعاشات صفحات FG پیزوالکتریکی را مطالعه کردند و اثر خواص مواد و شرایط مرزی را بر پاسخ غیرخطی مسأله بررسی کردند. کولیکوف و همکارش [۶] از روش جدیدی با عنوان نمونه برداری از سطوح، مبتنی بر چند جمله‌ای‌های چیشف، برای بدست آوردن حل دقیق سه بعدی میدان تنش الکتروالاستیکی داخل صفحات ساندویچی تابعی ضخیم پیزوالکتریک را، ارائه کردند. رفیعی و همکارانش [۷] بر اساس تئوری تغییرشکل‌های مرتبه اول، ناپایداری دینامیکی غیرخطی صفحات کامپوزیتی پیزوالکتریک، تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی با عیوب هندسی اولیه را مطالعه کردند و اثرات پارامترهای مسأله از قبیل ولتاژ اعمالی، الگوی توزیع نانولوله‌های تقویتی کربنی را بر روی تشدید پارامتریک مسأله بررسی کردند.

اخیراً استفاده از صفحات تابعی در کاربردهای صنعتی و بویژه پوشش رویین سازه‌های ساندویچی به صورت چشمگیری گسترش یافته است. در برخی از این کاربردها می‌توان پوشش رویه را به صورت صفحه تابعی با بستر الاستیک مدل‌سازی کرد [۸]. از این رو بررسی و مطالعه ناپایداری استاتیکی/دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی این سازه‌ها نیز مورد توجه قرار گرفته است.

در این زمینه ونگ و همکارش [۹] پاسخ دینامیکی غیرخطی صفحات ساندویچی با بستر الاستیک و پوشش رویین تابعی در حضور محیط‌های حرارتی را بررسی کردند و نشان دادند که سفتی بستر و تنش‌های اولیه تاثیر بسزایی بر رفتار دینامیکی صفحات تابعی تک‌لایه و ساندویچی می‌گذارد. در تحقیق دیگری، شن و همکارش [۱۰] ارتعاشات غیرخطی صفحات هیبریدی پیزوالکتریک در معرض محیط‌های حرارتی و روی بستر الاستیک را بررسی کردند. تینج و همکارانش [۱۱] نیز با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول، ارتعاشات صفحات کامپوزیتی ضخیم با بستر الاستیک ناهمگن را مطالعه کردند.

بافرانی و همکارش [۱۲] اثر بارگذاری‌های درون-صفحه‌ای بر ارتعاشات غیرخطی صفحات با بستر الاستیک را مطالعه کرده و نشان دادند که با افزایش ثابت سفتی بستر وینکلر، نیروی متناظر با حالت کماتش افزایش می‌یابد و تاثیر پارامترهای بستر پاسترناک بر فرکانس طبیعی، به مراتب بیشتر از وینکلر می‌باشد. صبحی [۱۳] کماتش و ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی تابعی نمائی روی بستر الاستیک را مطالعه کرده و تاثیر شرایط مرزی تکیه‌گاهی و ضخامت لایه‌ها را بر فرکانس طبیعی مطالعه کرد.

اخیراً رضائی و همکارش [۱۴] با بکارگیری تئوری کلاسیک صفحات و در نظر گرفتن اثر میدان تغییر مکان‌های درون-صفحه‌ای غیرخطی، ناپایداری استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحات FG با بستر الاستیک تحت تشدید پارامتریک نیرویی را مورد تحلیل قرار دادند و نشان دادند که حضور بستر، تاثیر بسزایی بر منحنی‌های مشخصه تشدید نیرویی می‌گذارد.

در تحقیق دیگری رضائی و همکارش [۱۵] با بکارگیری تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول پیستون، فلاتر سوپرسونیک، ارتعاشات غیرخطی و آشوبناک صفحه آبرو-الاستیک تابعی پیزوالکتریک تحت تحریکات پارامتریک نیرویی و اولیه پیزوالکتریکی را مورد بررسی قرار دادند و با استخراج منحنی‌های مشخصه پاسخ، نشان دادند که تحت شرایط خاصی، صفحه رفتار پرودیک چندگانه و آشوبناک از خود نشان می‌دهد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که در پژوهش‌های پیشین تاکنون رفتار دینامیکی و غیرخطی صفحات ساندویچی سیگموئیدال تابعی کوپله شده با لایه‌های پیزوالکتریکی با بستر الاستیک پاسترناک، تحت تشدیدهای پارامتریک پیزوالکتریکی به صورت جامع مورد مطالعه قرار نگرفته است. با توجه به اینکه در بعضی از کاربردها، حضور همزمان لایه‌های پیزوالکتریکی و بستر الاستیک تاثیر عمده بر رفتار دینامیکی صفحات دارند از این‌رو بررسی ناپایداری دینامیکی صفحات S-FGP در غیاب/حضور اثر میرایی و آنالیز رفتار غیرخطی آنها در حضور بستر نیز حائز اهمیت است.

تا به حال در اکثر تحقیقات صورت گرفته بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول [۷، ۱۶، ۱۷ و ۱۸]، برای تصحیح تنش‌های برشی، از روابط تقریبی برای محاسبه ضریب تصحیح تنش‌های برشی استفاده شده است. در این راستا و برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر، رضائی و همکارش [۱۹] با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول و تصحیح ضرایب تنش‌های برشی روی مقاطع عرضی صفحات ساندویچی تابعی، ارتعاشات غیرخطی صفحات ساندویچی تابعی با بستر پاسترناک غیرخطی تحت شرایط تشدید اولیه را بررسی کردند و با آنالیز تشدید اولیه نشان دادند که با تغییر پارامترهای مسأله در محدوده تشدید اولیه، پدیده جهش دامنه اتفاق افتاده و سیستم رفتار هیستریزیس^۱ از نوع سخت شونده از خود نشان می‌دهد.

^۱ hysteretic

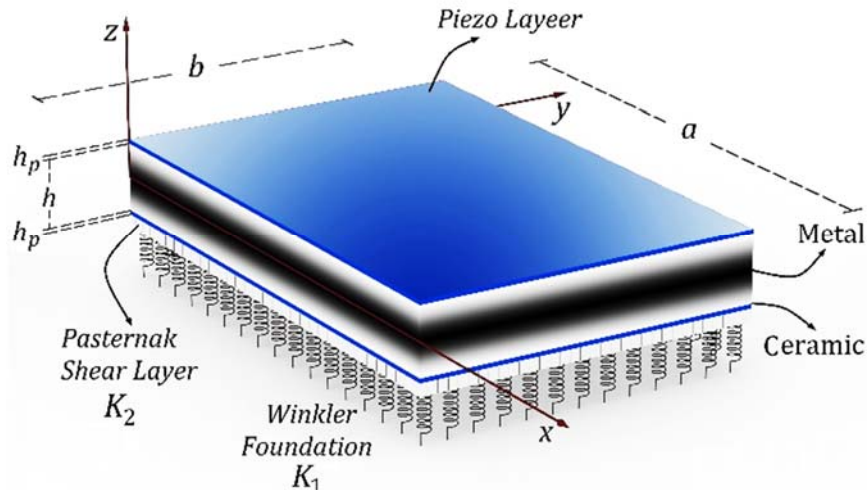
در تحقیق حاضر به عنوان یکی از نوآوری‌های ارائه شده، از روش مطرح شده در مراجع [۲۰ و ۲۱] برای محاسبه ضریب تصحیح اصلاح شده تنش‌های برشی استفاده شده است. در این تحقیق، ناپایداری پیزوالکتریکی دینامیکی و ارتعاشات پارامتریک صفحه ساندویچی مستطیلی وصله شده با لایه‌های پیزوالکتریکی عملگری با بستر الاستیک پاسترناک، تحت تحریکات هارمونیک پیزوالکتریکی مطالعه شده و رفتار غیرخطی آن تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده غیرمتحرک بررسی شده است. برای این منظور با صرف نظر کردن از اثرات اینرسی‌های درون-صفحه‌ای و دورانی و با استفاده از کرنش‌های فون-کارمن و تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول اصلاح شده، معادلات دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی صفحه با وجود بستر الاستیک استخراج گردید و اثر وجود بستر پاسترناک بر نواحی ناپایداری دینامیکی پیزوالکتریکی صفحه ساندویچی مورد بررسی قرار گرفت. سپس با اعمال روش اغتشاشات، معادله غیرخطی حاکم حل شده و معادلات دامنه-پاسخ فرکانسی سیستم در شرایط مانا بدست آمد و منحنی‌های مشخصه دامنه-تشدید و دوشاخگی بر حسب پارامترهای مساله در شرایط مانا استخراج شد و پایداری جوابهای بدیهی/ غیر بدیهی تحلیل گردید و با آنالیز تشدید پارامتریک، تاثیر هر یک از پارامترها بویژه لایه‌های پیزوالکتریکی و مشخصات فیزیکی بستر الاستیک بر روی پاسخ غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- فرمول بندی مسأله

در شکل (۱) صفحه ساندویچی مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت کلی $H = h + h_p$ نشان داده شده است که روی سطوح فوقانی و تحتانی آن، لایه‌های پیزوالکتریکی با ضخامت h_p جاسازی شده است. هسته صفحه ساندویچی میزبان، متشکل از دو لایه FG با توزیع سیگموئیدال متقارن از ترکیب خواص سرامیکی و فلزی نسبت به صفحه میانی می‌باشد. لایه‌های فوقانی و تحتانی این هسته میزبان تابعی از دو لایه همگن پیزوالکتریکی با خواص ایزوتروپیک تشکیل شده است.

مطابق این شکل، دستگاه مختصات دکارتی $Oxyz$ منطبق بر صفحه میانی صفحه در نظر گرفته شده است. (U, V, W) و (u, v, w) به ترتیب نشان‌دهنده مولفه‌های تغییر مکان نقطه دلخواهی در داخل صفحه و نقطه‌ای در روی صفحه خنثی فیزیکی ($z = 0$) در امتداد محورهای x ، y و z هستند. ϕ_x و ϕ_y به ترتیب نشان‌دهنده چرخش بردارهای عمود بر مقاطع عرضی، حول محورهای y و z در آن نقطه دلخواه باشند [۲۲]. با توجه به شکل (۱) فرض می‌شود که لایه‌های پیزوالکتریکی عملگری فوقانی و تحتانی، بصورت یکسان تحت اعمال ولتاژ هارمونیک به صورت، $V(t) = V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t$ قرار دارند، که در آن V_{ac} و V_{dc} به ترتیب نشان‌دهنده ولتاژ استاتیکی، ولتاژ دینامیکی و فرکانس تحریک می‌باشند. که این همانندی مود تحریک لایه‌های پیزوالکتریکی فوقانی و تحتانی عملگری، سبب انقباض و انبساط درون-صفحه‌ای این لایه‌ها در جهت‌ها عمود بر جهت قطبش اولیه می‌شود.

با توجه به شکل (۱) فرض می‌کنیم که بستر الاستیک ساختار پیوسته دارد و هنگام تغییر شکل صفحه، بستر تماس خود را با صفحه حفظ می‌نماید.



شکل ۱- شماییک هندسی صفحه ساندویچی مدرج تابعی پیزوالکتریک روی بستر پاسترناک، تحت تحریکات پیزوالکتریکی.

رابطه بین بار و جابجایی بستر الاستیک به صورت زیر فرض می‌شود [۲۳]:

$$q_e = K_1 w(x, y, z) + K_2 \nabla^2 w(x, y, z) \quad (1)$$

صفحه تابعی می‌باشد. q_e نشان دهنده نیروی وارد بر واحد سطح صفحه بوده و K_1 نشان دهنده پارامتر سفتی وینکلر و K_2 ثابتی است که نشان دهنده سفتی برشی بستر پاسترناک است.

۳- خواص مواد

با فرض اینکه توزیع خواص مواد در راستای ضخامت هسته تابعی صفحه ساندویچی از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد تبعیت کند، داریم:

$$P = P_m V_m(z) + P_c V_c(z) \quad (2)$$

در رابطه (۲)، P_m و P_c به ترتیب معرف خواص فلزی و سرامیکی، و V_m و V_c معرف کسر حجمی جزءهای فلزی و سرامیکی در داخل لایه‌های تابعی تحتانی و فوقانی صفحه ساندویچی می‌باشند. با استفاده از قانون توزیع توانی، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه از ضخامت صفحه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^n & z \in [0, +\frac{h}{2}] \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^n & z \in [-\frac{h}{2}, 0] \end{cases} \quad (3)$$

$$V_m(z) + V_c(z) = 1 \quad (4)$$

که در آن n یک عدد حقیقی نامنفی بوده و مشخص کننده شاخص کسر حجمی سرامیک می‌باشد و نحوه توزیع جزء سرامیکی در امتداد ضخامت صفحه ساندویچی روی قسمت فوقانی و تحتانی سطح میانی را بیان می‌کند. با توجه به روابط فوق، می‌توان توزیع خواص تاثیرپذیر مواد تابعی از قبیل مدول یانگ E ، نسبت پواسون ν و جرم واحد حجم ρ در امتداد ضخامت لایه‌های تابعی را به صورت زیر بیان کرد:

$$E(z) = (E_m - E_c)V_m(z) + E_c \quad (5)$$

$$\nu(z) = (\nu_m - \nu_c)V_m(z) + \nu_c \quad (6)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c)V_m(z) + \rho_c \quad (7)$$

۴- معادلات غیرخطی حرکت

بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول صفحات^۱ (FSDT)، میدان جابجایی نقاط داخل صفحه مستطیلی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد [۷، ۲۰، ۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} U(x, y, z, t) \\ V(x, y, z, t) \\ W(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \phi_x(x, y, t) \\ \phi_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

با استفاده از مولفه‌های کرنش غیرخطی فون-کارمن و رابطه (۸)، روابط بین مولفه‌های کرنش و تغییر مکان مربوط به نقاط داخل صفحه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۸]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_0} + z \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}}_{\kappa} \quad (9)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}}_{\gamma_0} = \begin{Bmatrix} \phi_y + w_{,y} \\ \phi_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

در روابط اخیر، ε_0 ، معرف بردار کرنش‌های غشائی، κ ، بردار کرنش‌های خمشی و γ_0 بردار کرنش‌های برشی روی مقاطع عرضی می‌باشد. روابط متشکله تنش-کرنش صفحه ساندویچی تابعی ایزوتروپیک وصله شده با لایه‌های پیزوالکتریکی همگن ایزوتروپیک در راستای ضخامت به شکل زیر است [۷]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}$$

که در آن مولفه‌های $Q_{11}(z)$ بیانگر ثابت‌های سفتی کاهش یافته صفحه ساندویچی بوده و از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}$$

$$Q_{12}(z) = Q_{21}(z) = \nu(z)Q_{11}(z) \quad (12)$$

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

با توجه به کوچک بودن ضخامت لایه‌های پیزوالکتریکی عملگری، اثرات اختلاف پتانسیل اعمالی در جهت ضخامت بسیار غالب بر اثرات پتانسیل القاء شده است و لذا می‌توان رابطه بین ولتاژ الکتریکی و میدان الکتریکی ایجاد شده در جهت ضخامت لایه‌های عملگری را به صورت زیر توصیف کرد [۷]:

¹ First-Order Shear Deformation Theory

$$E_z = -\frac{V(t)}{h_p} \quad (13)$$

با جایگذاری میدان کرنش (۹) و (۱۰) در روابط تنش (۱۱) و با استفاده از روابط (۱۲) می‌توان نتیجه‌های نیروهای محوری و برشی و گشتاورهای خمشی مربوط به صفحه ساندویچی پیزوالکتریک را با انتگرالگیری روی مقطع عرضی آن، از روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^P \\ \sigma_{yy}^P \\ \sigma_{xy}^P \end{Bmatrix} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{FG} \\ \sigma_{yy}^{FG} \\ \sigma_{xy}^{FG} \end{Bmatrix} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^P \\ \sigma_{yy}^P \\ \sigma_{xy}^P \end{Bmatrix} dz - \begin{Bmatrix} N_{xx}^E \\ N_{yy}^E \\ N_{xy}^E \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^P \\ \sigma_{yz}^P \end{Bmatrix} dz + K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^{FG} \\ \sigma_{yz}^{FG} \end{Bmatrix} dz + K_s \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^P \\ \sigma_{yz}^P \end{Bmatrix} dz \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^P \\ \sigma_{yy}^P \\ \sigma_{xy}^P \end{Bmatrix} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{FG} \\ \sigma_{yy}^{FG} \\ \sigma_{xy}^{FG} \end{Bmatrix} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^P \\ \sigma_{yy}^P \\ \sigma_{xy}^P \end{Bmatrix} dz - \begin{Bmatrix} M_{xx}^E \\ M_{yy}^E \\ M_{xy}^E \end{Bmatrix} \quad (16)$$

باجایگذاری (۱۱) در روابط (۱۴) تا (۱۶)، روابط بین منته‌تنش و منته‌های کرنش به شکل ماتریسی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{B} \\ \bar{B} & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^E \\ M^E \end{Bmatrix}, \quad Q = A_s \gamma_0 \quad (17)$$

که در آن:

$$N = \{N_{xx} \ N_{yy} \ N_{xy}\}^T, \quad M = \{M_{xx} \ M_{yy} \ M_{xy}\}^T \quad (18)$$

در رابطه (۱۷) اجزاء نیروها و گشتاورهای پیزوالکتریکی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^E & M_{xx}^E \\ N_{yy}^E & M_{yy}^E \\ N_{xy}^E & M_{xy}^E \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} [1 \ z] E_z dz - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} [1 \ z] E_z dz \quad (19)$$

در اینجا، ماتریس‌های A ، \bar{B} ، D ، و A_s به ترتیب نشان‌دهنده سفتی‌های محوری، کوپلینگ خمشی-کششی، خمشی و برشی هستند و عناصر این ماتریس‌ها، از روابط زیر بدست می‌آید [۱۶]:

$$\langle A_{ij}, \bar{B}_{ij}, D_{ij} \rangle = \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}+h_p} Q_{ij} \langle 1, z, z^2 \rangle dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (20)$$

$$A_{sij} = K_s \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}+h_p} Q_{ij} dz, \quad i, j = 4, 5$$

با ضرب طرفین رابطه (۱۷) در ماتریس انعطاف‌پذیری داریم:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{B} \\ \bar{B} & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N - N^E \\ M - M^E \end{Bmatrix} \quad (22)$$

با استفاده از (۲۲) و با بکارگیری روش ارائه شده در مرجع [۲۰]، یعنی فرض استفاده از موده‌های خمشی استوانه‌ای [۲۴] با فرض ناچیز بودن اثرات منته‌جه نیروهای غشائی بر منته‌جه نیروهای برشی، می‌توان کرنش‌های غشائی را برحسب گشتاورهای خمشی بیان کرده و با استفاده از معادلات تعادل صفحه، تنش‌های برشی روی مقاطع عرضی را از روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \bar{m}_{11}(z)Q_x, \quad \sigma_{yz} = \bar{m}_{22}(z)Q_y \\ \bar{m}_{11}(z) &= - \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^z Q_{11}(b_{11} + \tau b_{11}) + Q_{12}(b_{21} + \tau b_{21}) dz \\ \bar{m}_{22}(z) &= - \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^z Q_{21}(b_{12} + \tau b_{12}) + Q_{22}(b_{22} + \tau b_{22}) dz \end{aligned} \quad (23)$$

در اینجا b_{ij} و d_{ij} درایه‌های ماتریس انعطاف‌پذیری در رابطه (۲۲) می‌باشند. با توجه به بالانس انرژی مربوط به کرنش‌های برشی، ضریب تصحیح اصلاح شده تنش‌های برشی (K_s) را به شکل زیر بیان کرد:

$$K_s = K_{44} = K_{55} = \frac{H_{55}}{\sum_{k=1}^4 \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}+h_p} Q_{55}^{(k)}(z) dz} \quad (24)$$

در اینجا H_{55} نشان‌دهنده سفتی برشی اصلاح شده می‌باشد که برای صفحات ساندویچی متشکل از $k = 4$ لایه ایزوتروپیک، با انتگرالگیری در کل ضخامت صفحه، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{44} = H_{55} &= \sum_{k=1}^4 \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{[\bar{m}_{55}^{(k)}(z)]^2}{Q_{55}^{(k)}(z)} dz \\ Q_{44}^{(k)}(z) &= Q_{55}^{(k)}(z) \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به مرجع [۱۹]، معادلات غیرخطی حاکم بر حرکات درون-صفحه‌ای و عرضی صفحه نسبتاً ضخیم ساندویچی با هسته تابعی و لایه‌های بیرونی پیزوالکتریک واقع بر بستر پاسترناک، را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\phi}_x \quad (26)$$

$$N_{xy,x} + N_{yy,y} = I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\phi}_y \quad (27)$$

$$M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_y = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\phi}_x \quad (28)$$

$$M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_x = I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\phi}_y \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_{x,x} + Q_{y,y} + (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y})_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y})_{,y} - \mu \dot{w} - m \ddot{w} - K_1 w \\ + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

که m و μ به ترتیب نشان‌دهنده جرم واحد سطح و میرایی واحد سطح صفحه می‌باشند. با صرفنظر کردن از اثرات اینرسی و با جایگذاری مولفه‌های کرنش از روابط (۹) در معادلات (۲۶) تا (۲۹)، می‌توان این معادلات را برحسب مولفه‌های جابجائی درون-صفحه‌ای و دورانی بصورت زیر بیان کرد:

$$(31)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

(۳۲)

$$A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A_{21} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - A_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (A_{21} + A_{66}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

(۳۳)

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \phi_x - A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

(۳۴)

$$(B_{21} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - A_{44} \phi_y - A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{21} + B_{66}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

در این قسمت به منظور بی‌بعدسازی معادلات حاکم، از پارامترها و متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{b}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \delta = \frac{\mu}{m\omega^*},$$

$$k_1 = \frac{a^4 k_1}{D_{11}}, \quad k_2 = \frac{a^2 k_2}{D_{11}}, \quad \bar{t} = \omega^* t, \quad \omega^* = \sqrt{D_{11}/ma^4}$$

(۳۵)

در اینجا ω^* نشان دهنده فرکانس مرجع و δ میرایی سازه‌ای بدون بعد است. در تحقیق حاضر فرض می‌کنیم که شرایط مرزی حاکم بر حرکات لبه‌های صفحه، از نوع ساده نامتحرک با مدل $SS-3$ بوده و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$x = 0, a : u = v = w = \phi_y = M_x = 0$$

$$x = 0, a : u = v = w = \phi_x = M_x = 0$$

(۳۶)

تحقیقات انجام گرفته بر روی ارتعاشات غیرخطی صفحات تابعی مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده نشان داده است که تاثیر شکل مودهای مربوط به فرکانس‌های پایین بسیار چشمگیرتر و غالب بر اثرات شکل مودهای متناظر با فرکانس‌های بالا می‌باشد [۲۵]. لذا برای مطالعه و بررسی ارتعاشات عرضی و غیرخطی این صفحات، در تقریب گالرکین می‌توان از چند شکل مود اول ارتعاشی صفحه که شرایط مرزی ساده تکیه‌گاهی مربوط به لبه‌های صفحه را ارضاء می‌کنند، استفاده کرد و معادلات حرکت کوپله‌شده دیفرانسیلی با مشتقات جزئی را به فرم معادلات دیفرانسیلی غیرخطی معمولی تبدیل نمود.

در ادامه برای سادگی از بالانویس (-) از روی پارامترهای مکانی بی‌بعد شده (۳۵) پرهیز کرده و از تعداد نه شکل مد ارتعاشی اول صفحه در تقریب میدان جابجایی‌های عرضی صفحه با مدل $SS-3$ را به شکل بیان کرد:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{m,n}(t) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

(۳۷)

که M و N به ترتیب نشان دهنده تعداد نیم موجها در جهت‌ها x و y ، و $w_{m,n}(t)$ نشان دهنده دامنه وابسته به زمان در شکل مود مربوطه است.

با توجه به اینکه معادلات (۳۱) تا (۳۴) دربرگیرنده دستگاه معادلات کوپل غیرخطی می‌باشد و پیدا کردن حل دقیق این معادلات بسیار پیچیده است، لذا می‌توان همانند مراجع [۱۹]، [۲۶] و [۲۷] حل تقریبی

مولفه‌های جابجایی u, v, ϕ_x و ϕ_y برای صفحه‌ای با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده نامتحرک با مدل SS - 3 را به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{m,n}(t) \sin 2m\pi x \cos n\pi y \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{m,n}(t) \cos m\pi x \sin 2n\pi y \\ \phi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{x_{m,n}}(t) \cos m\pi x \sin n\pi y \\ \phi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{y_{m,n}}(t) \sin m\pi x \cos n\pi y \end{aligned} \quad (38)$$

با جایگذاری حل‌های (۳۸) در معادلات (۳۱) تا (۳۴) و با استفاده از پروسه گالرکین، معادلات حرکت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{m=1}^M \left(\alpha_m^{(1)} U_m(t) + \beta_m^{(1)} V_m(t) + \gamma_m^{(1)} \Phi_{x_m}(t) + \eta_m^{(1)} \Phi_{y_m}(t) \right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \chi_{mn}^{(1)} w_m(t) w_n(t) = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{m=1}^M \left(\alpha_m^{(2)} U_m(t) + \beta_m^{(2)} V_m(t) + \gamma_m^{(2)} \Phi_{x_m}(t) + \eta_m^{(2)} \Phi_{y_m}(t) \right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \chi_{mn}^{(2)} w_m(t) w_n(t) = 0 \quad (40)$$

$$\sum_{m=1}^M \left(\alpha_m^{(3)} U_m(t) + \beta_m^{(3)} V_m(t) + \gamma_m^{(3)} \Phi_{x_m}(t) + \eta_m^{(3)} \Phi_{y_m}(t) \right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \chi_{mn}^{(3)} w_m(t) w_n(t) = 0 \quad (41)$$

$$\sum_{m=1}^M \left(\alpha_m^{(4)} U_m(t) + \beta_m^{(4)} V_m(t) + \gamma_m^{(4)} \Phi_{x_m}(t) + \eta_m^{(4)} \Phi_{y_m}(t) \right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \chi_{mn}^{(4)} w_m(t) w_n(t) = 0 \quad (42)$$

در روابط فوق $\alpha_m^{(i)}, \beta_m^{(i)}, \gamma_m^{(i)}$ و $\eta_m^{(i)}$ ($i=1, \dots, 5$) ضرایب ثابت بوده که در برگیرنده مشخصات هندسی و ضرایب سفتی صفحه می‌باشند که با حل معادلات فوق می‌توان $U_m(t), V_m(t), \Phi_{x_m}(t)$ و $\Phi_{y_m}(t)$ را برحسب توان‌های مرتبه اول و مرتبه دوم از دامنه شکل موده‌های طولی و عرضی ارتعاشی بیان کرد:

$$U_m(t) = a_m w_m(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} w_m(t) w_n(t) \quad (43)$$

$$V_m(t) = b_m w_m(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} w_m(t) w_n(t) \quad (44)$$

$$\Phi_{x_m}(t) = c_m w_m(t) \quad (45)$$

$$\Phi_{y_m}(t) = e_m w_m(t) \quad (46)$$

در روابط فوق $\alpha_m, \alpha_{mn}, b_m, b_{mn}, e_m, c_m$ ($m, n=1, 2, \dots, 9$) ضرایب ثابت بوده و ترم دوم در $U_m(t)$ و $V_m(t)$ توابعی غیرخطی مرتبه دوم و حاصلضرب‌های مرتبه دوم از دامنه زمانی موده‌های عرضی می‌باشند.

از طرف دیگر، جملات در عبارات $\Phi_{x_m}(t)$ و $\Phi_{y_m}(t)$ نیز توابعی خطی از دامنه زمانی عرضی مربوطه هستند. در ادامه با استفاده از (۴۳) تا (۴۶) و با بکارگیری پروسه گالرکین، می‌توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر

حرکات عرضی (۳۰)، را در حضور تحریکات پیزوالکتریک هارمونیک را به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر استخراج کرد:

$$\ddot{w}_i + \delta \dot{w}_i + (\omega_i^2 + a_i V_{ac} \cos \Omega t) w_i + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \Gamma_{imnp} w_m w_n w_p = 0, \quad (47)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 9)$$

معادلات (۴۷) شامل جملات ولتاژ تحریک پیزوالکتریک هارمونیک و جملات غیرخطی هندسی می‌باشد که این جملات هندسی غیرخطی در برگرفته جملات غیرخطی مرتبه دوم و سوم و حاصلضرب آنها از دامنه زمانی حرکات عرضی می‌باشند.

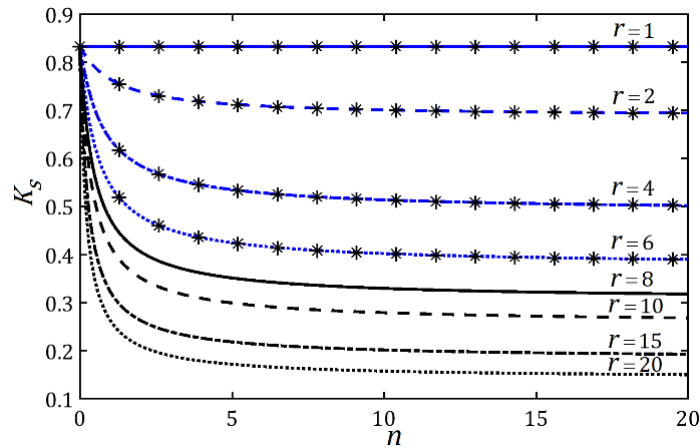
۵- اثرات خواص و هندسه صفحه ساندویچی تابعی روی ضریب تصحیح تنش‌های برشی

در این بخش اثر شاخص کسر حجمی ضخامت هسته صفحه و نسبت مدول الاستیک مواد متشکله، $r = E_c/E_c$ ، روی ضریب تصحیح تنش‌های برشی واقع بر مقاطع عرضی صفحه ساندویچی بررسی می‌شود. در این راستا، ابتدا به منظور صحت گذاری بر نتایج حاصله، مشابه مرجع [۲۰] فرض می‌کنیم که صفحه ساندویچی از سه قسمت رویه تابعی بالایی، هسته مرکزی همگن فلزی و رویه تابعی پایینی تشکیل شده است.

h_0 و h_3 به ترتیب نشان دهنده، موقعیت قائم وجوه تحتانی و فوقانی و h_1 و h_2 نشان دهنده موقعیت قائم محل اتصال لایه‌ها می‌باشند که با ضخامت‌های لایه تابعی تحتانی e_{fb} ، هسته مرکزی e_c و لایه تابعی فوقانی e_{ft} رابطه مستقیم دارند. همانند مرجع مذکور و با استفاده از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه از ضخامت صفحه ساندویچی به صورت زیر بیان می‌شود:

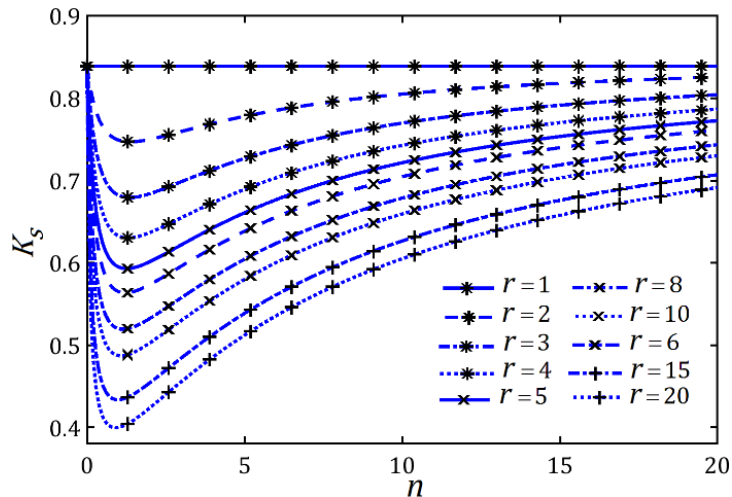
$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^n & z \in [h_2, h_3] \\ 1 & z \in [h_1, h_2] \\ \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^n & z \in [h_0, h_1] \end{cases} \quad (48)$$

شکل (۲) تغییرات ضرایب تصحیح در برابر شاخص کسر حجمی n را برای ۸ حالت از نسبت E_c/E_c در یک مقدار خاص $e_c/e_{ft} = 4$ نشان می‌دهد. از شکل (۲) پیداست که با افزایش E_c/E_c ، مقدار ضریب تصحیح کاهش می‌یابد. با توجه به این شکل و نتایج مرجع [۲۰] می‌توان دریافت که ضریب تصحیح شدیداً به مقادیر n ، E_c/E_c و e_c/e_{ft} وابسته می‌باشد. از این رو به هنگام استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول صفحات، استفاده از مقدار اصلاح شده ضریب تصحیح تنش‌های برشی ضروری است.



شکل ۲- تغییرات ضریب تصحیح برشی در برابر شاخص کسر حجمی،

برای ۸ حالت از نسبت $r = E_c/E_c$ با $e_c/e_{ft} = 4$ ، $e_{ft} = e_{fb} = 0.01$ و $\nu = 0.3$.

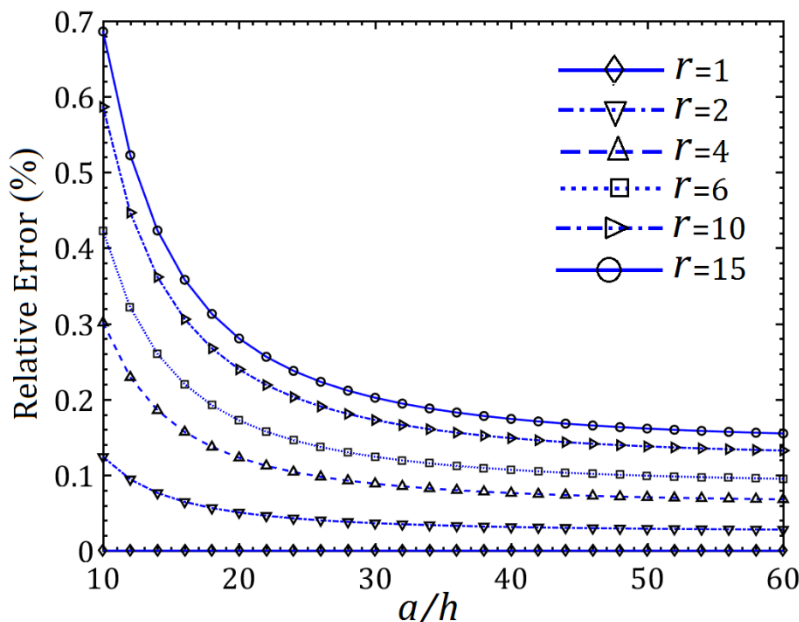


شکل ۳- تغییرات ضریب تصحیح برشی در برابر شاخص کسر حجمی n ، برای ۱۲ حالت

از نسبت $r = E_c/E_m$ با $e_c/e_{ft} = 0$ ، $e_{ft} = e_{fb} = 0.03$.

با در نظر گرفتن $e_c = 0$ در رابطه (۴۸)، مدل در نظر گرفته شده در تحقیق حاضر، رابطه (۳)، حاصل می‌شود. بنابراین می‌توان روش بکار رفته در مرجع [۲۰]، ضریب تصحیح تنش‌های برشی روی مقاطع عرضی صفحه سیگموئیدال تابعی (S-FGP) حاضر در حضور لایه‌های پیزوالکتریک را اصلاح کرد. در شکل (۳) تغییرات ضرایب تصحیح مدل بکار رفته در تحقیق حاضر در حضور لایه‌های پیزوالکتریک در برابر شاخص کسر حجمی n ، برای ۱۰ حالت از نسبت E_c/E_c در یک مقدار خاص $e_c/e_{ft} = 0$ نشان داده شده است. از شکل (۳) دیده می‌شود که با افزایش r و مقدار شاخص کسر حجمی، ضریب تصحیح اصلاح شده تنش‌های برشی به سمت مقدار حدی متناظر با حالت همگن بودن کامل صفحه، یعنی $5/6$ میل می‌کند. به منظور بررسی چگونگی تغییرات خطای نسبی تغییر مکان ماکزیمم مرکز صفحه ساندویچی با مدل (۳)، خطای نسبی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد [۲۰]:

$$error (\%) = \frac{M_c - M_m}{M_m} \times 100\% \quad (49)$$



شکل ۴- تغییرات خطای نسبی ماکزیمم تغییر مکان در برابر پارامتر نسبت ابعاد n ، برای ۶ حالت از نسبت $r = E_c/E_m$ با $n = 5$.

که در آن M_m نشان دهنده تغییر مکان ماکزیمم مرکز صفحه با استفاده از مدل حاضر (تصحیح تنش‌های برشی اصلاح شده) و M_c نشان دهنده تغییر مکان ماکزیمم بدست آمده برای مرکز صفحه با استفاده از ضریب تصحیح ثابت $5/6$ می‌باشد. در شکل (۴) منحنی تغییرات خطای نسبی در برابر پارامتر نسبت ابعاد a/h ، بین نتایج مستخرج از مدل حاضر در مقایسه با نتایج مدل ضریب تصحیح $5/6$ برای شش مقدار مختلف از نسبت $r = E_c/E_m$ نشان شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که خطای نسبی دو مدل با افزایش r افزایش می‌یابد زیرا در تمام حالات با افزایش r ضریب تصحیح شدیداً کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با توجه به این شکل پیداست که خطای نسبی برای هر کدام از حالات با افزایش نسبت ابعاد a/h به سمت یک مقدار حدی همگرا شده و در آن مقدار تثبیت می‌شود.

۶- تحلیل غیرخطی تغییر مکان‌های عرضی صفحه

برای صحه‌گذاری مدل غیرخطی حاضر و نتایج حاصله، فرض می‌شود که صفحه مربعی ایزوتروپیک تحت تاثیر بار عرضی با توزیع یکنواخت قرار گرفته است. مطابق مراجع [۲۸] و [۲۹] خواص هندسی و مکانیکی صفحه به صورت $E = 7.8 \times 10^6$ Psi، $h = 1$ in و $a/h = 10$ و $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده است. با توجه به مراجع مذکور، دو نوع شرط مرزی تکیه‌گاهی با عناوین SS-1 و SS-3 به ترتیب به صورت:

$$\text{SS-1: } x=0, a: v=w=\phi_y=0 \quad (50)$$

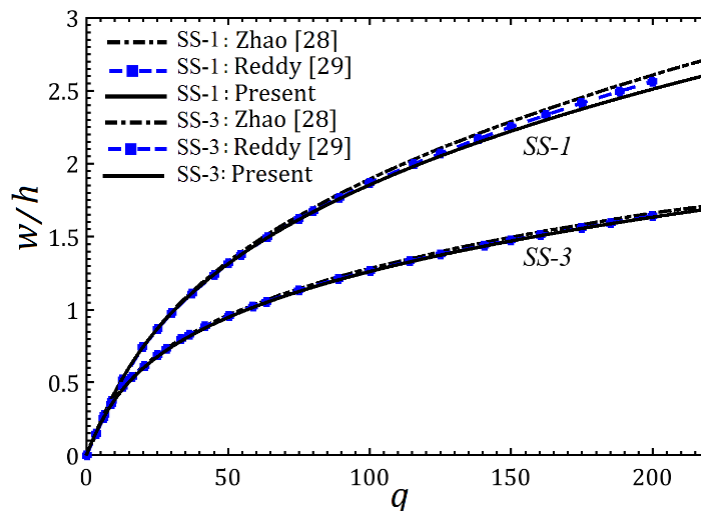
$$y=0, b: u=w=\phi_x=0$$

$$\text{SS-3: } x=0, a, y=0, b: u=v=w=0 \quad (51)$$

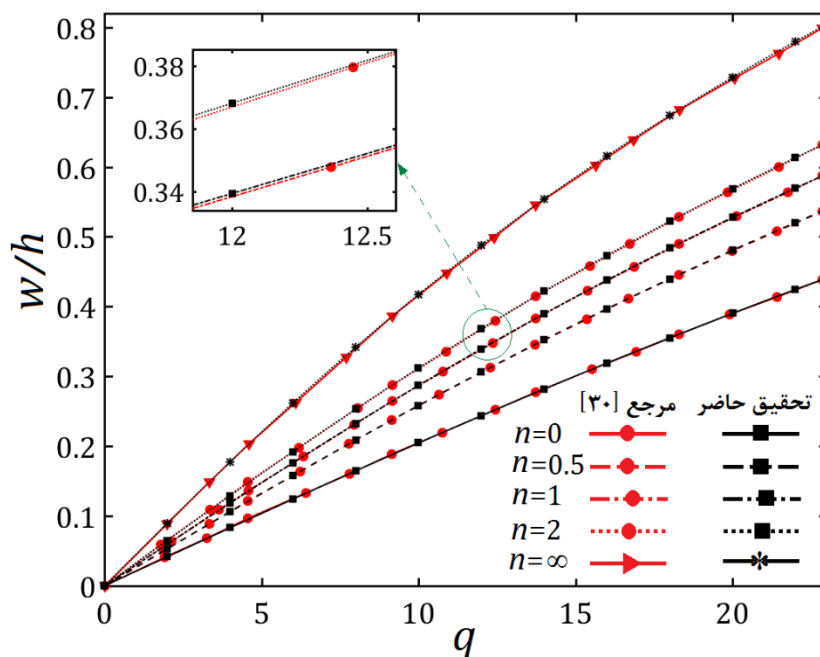
در نظر گرفته می‌شوند. در شکل (۵) تغییرات تغییرمکان بی‌بعد مرکز صفحه همگن در برابر پارامتر بارگذاری عرضی بدون بعد $q = q_0 a^4 / Eh^4$ نشان داده شده است. حل ارائه شده حاضر برای نوع 1-SS، با استفاده از روش مود فرضی و برای نه مقدار از (m, n) به صورت $(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (1,5), (5,1), (5,5), (1,7), (7,1)$ بدست آمده است. به طریق مشابه، نتایج در حالت 3-SS، برای $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (1,3), (3,3), (1,5)$ و $(5,1)$ نیز بدست آمده است. با توجه به شکل (۵) می‌توان دریافت که حل غیرخطی بدست آمده بر اساس FSDT، برای $a/h = 10$ دارای سازگاری بسیار خوبی با حل‌های متناظر بدست آمده توسط زائو و همکارش [۲۸] و ردی [۲۹] می‌باشد.

۷- صفحه سنجی ناهمگنی ساختاری تغییرمکان‌های غیرخطی

به منظور صفحه سنجی نتایج مدل غیرخطی حاضر برای صفحات مدرج تابعی، فرض می‌کنیم که صفحه مربعی با نسبت ابعاد $(a/h = 20)$ ، دارای ناهمگنی ساختاری تابعی بوده، بنحویکه تحت تاثیر بار عرضی بدون بعد با توزیع یکنواخت قرار دارد. در این راستا، مطابق مرجع [۳۰] فرض می‌شود که صفحه تابعی Al/ZrO_2 از دو جزء حجمی سرامیکی با مشخصات مکانیکی $E_c = 151Gpa$ و $\nu_c = 0.3$ و جزء حجمی فلزی با $E_m = 70Gpa$ و $\nu_m = 0.3$ تشکیل شده است. مشابه این مرجع، نوع شرط مرزی تکیه‌گاهی حاکم بر لبه‌های صفحه را از نوع ساده متحرک با عنوان 1-SS به صورت (۵۱) در نظر می‌گیریم. در شکل (۶) تغییرات تغییرمکان بی‌بعد مرکز صفحه تابعی در برابر پارامتر بارگذاری عرضی بدون بعد $q = q_0 a^4 / E_m h^4$ برای پنج مقدار مختلف از شاخص کسر حجمی اختلاط مواد متشکله تابعی نشان داده شده است. حل ارائه شده در این حالت، با استفاده از روش مود فرضی و برای نه مقدار از (m, n) به صورت $(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (1,5), (5,1), (5,5), (1,7), (7,1)$ بدست آمده است. با توجه به این شکل پیداست که حل غیرخطی بدست آمده بر اساس FSDT، دارای سازگاری و انطباق کامل با حل متناظر بدست آمده توسط ترن و همکارانش [۳۰] می‌باشد.



شکل ۵- جابجائی عرضی بدون بعد مرکز صفحه مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده در برابر پارامتر بار عرضی یکنواخت بر اساس FSDT.



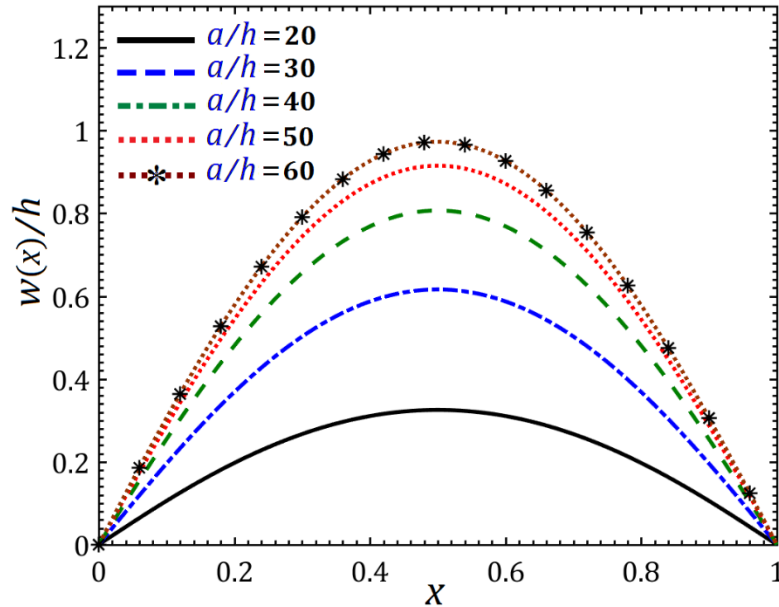
شکل ۶- تغییر مکان عرضی بدون بعد مرکز صفحه مربعی مدرج تابعی در برابر بار عرضی یکنواخت با استفاده از FSDT

همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار شاخص کسر حجمی از مقدار $n=0$ به سمت مقادیر بالاتر $n = \infty$ ، متناظر با افزایش جزء حجمی فلزی و با توجه به کوچک بودن مدول الاستیک جزء فلزی نسبت به سرامیکی، دامنه جابجائی‌های غیرخطی مرکز صفحه افزایش می‌یابد. با توجه به این شکل منحنی متناظر با $n=0$ نشان دهنده منحنی تغییر مکان صفحه خالص سرامیکی و $n = \infty$ متناظر با منحنی تغییر مکان صفحه خالص فلزی می‌باشد. لازم به ذکر است که منحنی‌های تغییر مکان غیرخطی صفحه تابعی در گستره $0 < n < \infty$ همواره ما بین منحنی‌های متناظر با صفحات همگن خالص فلزی و سرامیکی قرار دارند.

۸- مطالعه اثر نسبت ابعاد هندسی روی تغییر مکان‌های غیرخطی صفحه تابعی

به منظور مطالعه اثر پارامترهای هندسی صفحه مربع تابعی روی تغییر شکل‌های غیرخطی صفحه، فرض می‌کنیم صفحه تحت شرط مرزی تکیه‌گاهی ساده نامتحرک با عنوان $SS-1$ دارای ناهمگنی ساختاری با $n=2$ بوده و تحت تاثیر بار عرضی بدون بعد یکنواخت $q=10$ قرار دارد. با استفاده از مشخصات مکانیکی و شکل مودهای فرضی انتخابی بخش ۷ می‌باشد، به بررسی و مطالعه رفتار غیرخطی هندسی صفحه نسبت به تغییرات نسبت ابعاد (ضریب منظر) صفحه می‌پردازیم.

در شکل (۷) پروفیل تغییر مکان استاتیکی نقاط واقع بر صفحه تابعی $y=0.5$ و $0 < x < 1$ برای مقدار خاصی از $a=0.2$ و برای پنج مقدار مختلف از نسبت ابعاد a/h نشان داده شده است. با توجه به این شکل همچنانکه انتظار می‌رود، در تمام حالات حداکثر تغییر مکان غیرخطی استاتیکی در مرکز صفحه در طول مشخصه بدون بعد $x=0.5$ اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر، با توجه به این شکل و همچنانکه انتظار می‌رود با افزایش نسبت ابعاد از مقدار $a/h=20$ متناظر با صفحات نسبتاً ضخیم، به سمت مقادیر بالاتر $a/h=60$ متناظر با صفحات نازک، دامنه جابجائی‌های غیرخطی صفحه افزایش می‌یابد.



شکل ۷- پروفیل تغییر مکان عرضی نقاط واقع روی صفحه تابعی ناهمگن تک لایه تابعی $(n=2)$ با احتساب اثر جملات غیرخطی هندسی و جابجایی محور خنثی هندسی متناظر با مقدار $q=10$.

۹- مشخصات هندسی و فیزیکی مسأله

فرض می‌شود که خواص طرفین صفحه تابعی ساندویچی در راستای ضخامت دارای توزیع توانی بوده و به صورت پیوسته و تدریجی از خواص خالص فلزی از جنس آلومینیم با $\rho_m = 2707 \text{ Kg/m}^3$ ، $E_m = 70 \text{ GPa}$ و $\nu_m = 0.3$ در سطح میانی به خواص خالص سرامیکی از جنس زیرکونیم با $\rho_c = 3000 \text{ Kg/m}^3$ ، $E_c = 151 \text{ GPa}$ و $\nu_c = 0.3$ در سطوح تحتانی و فوقانی تغییر می‌کند [۳۱]. شاخص کسر حجمی اختلاط مواد $n = 3$ در نظر گرفته شد. خواص ماده روی لایه‌های پیزوالکتریکی شامل سفتی الاستیکی، ثابت کرنش پیزوالکتریکی، سفتی‌های پیزوالکتریکی و ضریب پواسون بترتیب برابر $E_{11}^p = 63 \text{ GPa}$ ، $d_{31} = 2.54 \times 10^{-10} \text{ mV}^{-1}$ ، $e_{32} = e_{31} = 17.6 \text{ Cm}^{-2}$ و $\nu_p = 0.3$ فرض می‌شوند [۳۲، ۳۳]. همچنین فرض می‌کنیم که حداکثر ولتاژ فیزیکی متناظر با میدان الکتریکی قابل تحمل توسط لایه‌های پیزوالکتریک، برابر $V_{max} = \pm 1000 \text{ V}$ می‌باشد.

۱۰- استخراج نواحی ناپایداری دینامیکی در غیاب/حضور میرایی

با چشم‌پوشی از اثر جملات غیرخطی موجود در معادلات (۴۷)، معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی صفحه به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی معمولی ماتریو توصیف کننده ناپایداری دینامیکی صفحه، کاهش می‌یابد. با قرار دادن حل همگن در دستگاه معادلات خطی کاهش یافته و با صرف نظر کردن از جملات تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی و میرایی می‌توان ولتاژ بدون بعد اعمالی متناظر با کماتش بحرانی پیزوالکتریکی، V_{cr} ، را با حل مسأله مقدار ویژه بدست آورد. یادآوری این نکته ضروری است که از لحاظ فیزیکی رسیدن به مقدار ولتاژ بحرانی امکان ندارد، زیرا صفحات و سازه‌های پیزوالکتریک مقادیر بالایی از این

قبیل ولتاژها را نمی‌توانند تحمل کنند. لذا مقدار بحرانی V_{cr} فقط از جنبه محاسباتی برای تحلیل نواحی ناپایداری دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷]. مشابه روش ارائه شده توسط رامچاندرا و همکارش [۳۴] در استخراج نواحی ناپایداری پارامتریک نیرویی، در اینجا نیز فرض می‌کنیم که $\alpha = V_{dc}/V_{cr}$ و $\beta = V_{ac}/V_{cr}$ به ترتیب نشان دهنده ضریب ولتاژ استاتیکی و دینامیکی می‌باشند.

از این رو مشابه مرجع [۳۴]، می‌توان تقریب مرتبه اول محدوده ناپایداری دینامیکی پیزوالکتریکی مربوط به پریود $2T$ (به علت اهمیت کاربردی) را از حل معادله فرکانسی زیر بدست آورد:

$$|K^* \pm 0.5\beta V_{cr} K_G - 0.25M\Omega_1^2| = 0 \quad (52)$$

ضمناً مشابه همان مرجع، با حل معادله فرکانسی (۵۲) و با استفاده از جوابهای حاصل از آن، می‌توان تقریب مرتبه دوم محدوده ناپایداری دینامیکی را از حل معادله فرکانسی زیر بدست آورد:

$$\begin{vmatrix} K^* \pm 0.5\beta V_{cr} K_G & -0.5\beta V_{cr} K_G \\ -0.5\beta V_{cr} K_G & K^* - 2.25M\Omega_1^2 \end{vmatrix} - \Omega_2^2 \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

که در آن $K^* = K_L - V_{dc}K_G$ بوده و ماتریس‌های M ، K_L و K_G به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های جرم، سفتی خطی و سفتی هندسی معادلات خطی شده ماتیو می‌باشند [۳۴ و ۳۵].

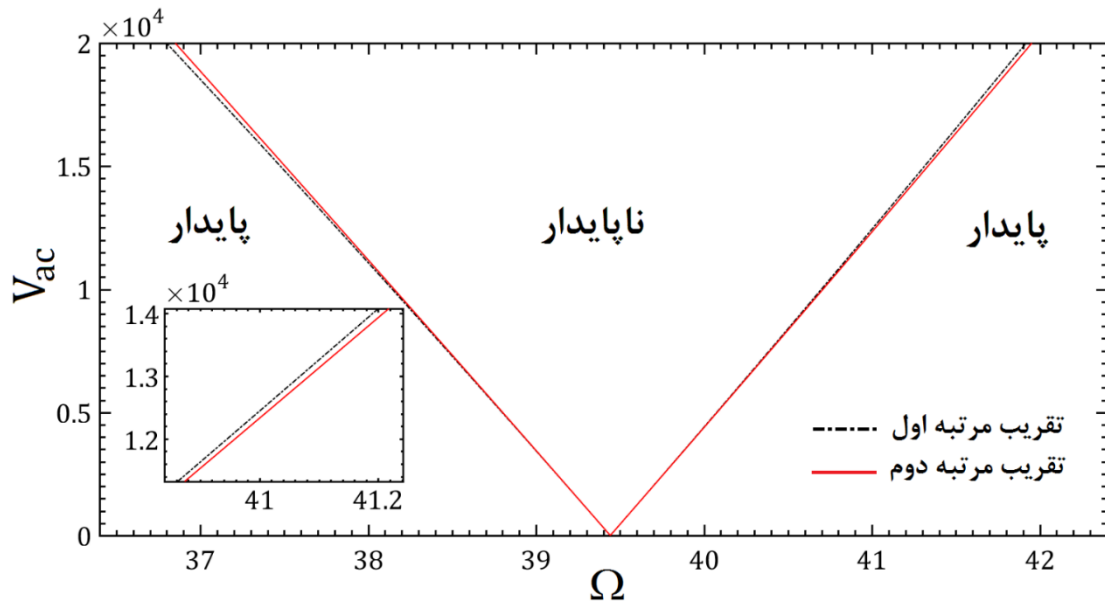
شکل (۸) نشان دهنده محدوده ناپایداری دینامیکی حاصل از دو تقریب مرتبه اول و دوم، در غیاب اثر بستر می‌باشد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که در هر دو حالت با افزایش دامنه ولتاژ تحریک هارمونیک، ناحیه ناپایداری دینامیکی افزایش می‌یابد. از طرف دیگر پیداست که ناحیه ناپایداری متناظر با تقریب مرتبه دوم در مقایسه با تقریب مرتبه اول، به صورت جزئی به سمت فرکانس‌های بالاتر منتقل می‌گردد.

با توجه به محدودیت ولتاژ قابل تحمل توسط مواد پیزوالکتریک، رسیدن به سطح ولتاژهای بسیار بالای نشان داده شده در شکل (۸) عملاً غیر ممکن می‌باشد و در محدوده سطح ولتاژهای پائین‌تر و قابل تحمل توسط لایه‌های پیزوالکتریک، محدوده ناپایداری مستخرج از هر دو تقریب بر هم منطبق است.

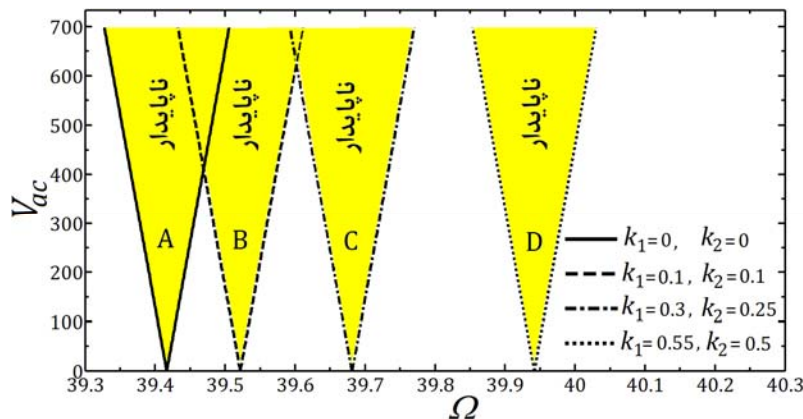
در ادامه به منظور مطالعه اثر تغییرات پارامترهای بستر روی محدوده اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده نامتحرک، از شش مقدار (m, n) بصورت $(1,1)$ ، $(1,3)$ ، $(3,1)$ ، $(3,3)$ ، $(1,5)$ و

و $(5,5)$ در تخمین میدان جابجایی‌های (۳۷) و (۳۸)، استفاده می‌کنیم.

در شکل (۹) تغییرات فرکانس تحریک Ω بر حسب تغییرات ولتاژ دینامیکی، $V_{ac} = \beta V_{cr}$ ، برای چهار حالت از مقادیر ضرایب بدون بعد بستر k_1 و k_2 و برای مقدار خاصی از ولتاژ استاتیکی $V_{dc} = +100$ V، نشان داده شده است. مطابق این شکل با افزایش ضرایب ثابت بستر پاسترناک فرکانس طبیعی صفحه تحت تحریک افزایش می‌یابد و ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد.



شکل ۸- تقریب‌های مرتبه اول و دوم ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریک، تحت تحریک با ولتاژ هارمونیک، در غیاب اثر بستر.



شکل ۹- تقریب مرتبه دوم ناحیه اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریک، تحت تحریک با ولتاژ هارمونیک، برای چهار حالت از ضرایب بستر.

به منظور مطالعه اثر میرایی روی ناپایداری دینامیکی مساله حاضر، می‌توان همانند روش ارائه شده توسط کومار و همکارانش [۳۵]، از مدل میرایی خطی ریلی و تقریب مرتبه اول جهت استخراج نواحی ناپایداری اصلی مربوط به پریود $2T$ استفاده کرد.

$$\begin{vmatrix} K^* \pm 0.5\beta V_{cr} K_G & +0.5C\Omega_1 \\ -0.5C\Omega_1 & K^* - 0.5\beta V_{cr} K_G - 0.25M\Omega_1^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

که در اینجا C نشان دهنده ماتریس میرایی بوده که می‌توان با استفاده از مدل میرایی ریلی آن را به صورت ترکیبی از ماتریس‌های جرم و سفتی بصورت زیر توصیف کرد:

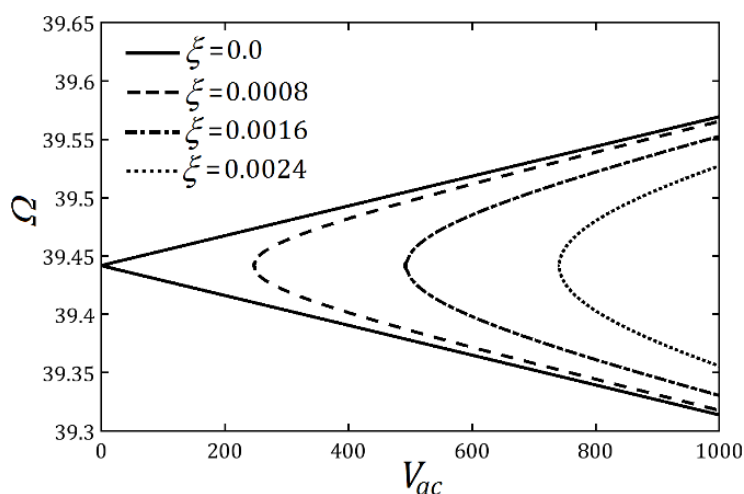
$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K_L \quad (55)$$

در اینجا α_1 و α_2 ثابت‌های تناسبی جرم و سفتی خطی بوده که مقادیر بهینه آنها با بکارگیری فرآیند قطری سازی معادله (۴۰) با استفاده از شکل مودهای ارتعاشی مربوطه و سپس حل مساله حداقل مربعات مربوطه بدست آورد. اما در اینجا همانند مرجع [۳۶]، و با فرض اینکه شکل مودهای اساسی اول و دوم ارتعاشی نقش قابل توجهی در پاسخ دینامیکی مساله دارند، می‌توان ضرایب α_1 و α_2 را از تقریب زیر بدست آورد:

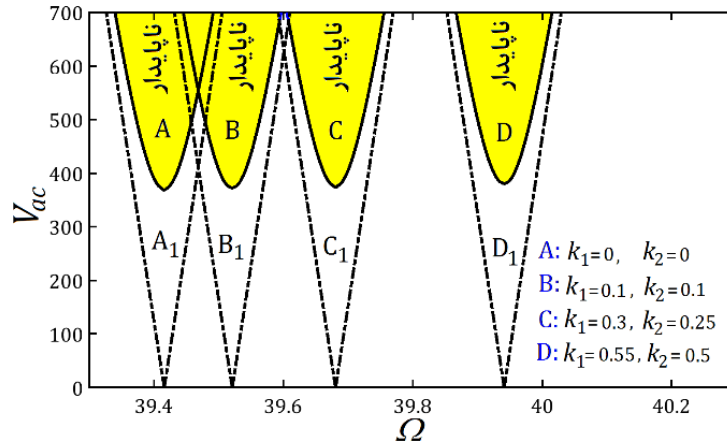
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{2\omega_{n1}\omega_{n2}}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2} \begin{bmatrix} \omega_{n2} & -\omega_{n1} \\ -1/\omega_{n2} & 1/\omega_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

که در رابطه اخیر ξ_1 و ξ_2 نشان دهنده ضرایب استهلاک متناظر با فرکانس‌های ارتعاشی طبیعی اول و دوم مساله می‌باشند و فرض می‌کنیم که $\xi_2 = \xi_1 = \xi$ می‌باشد.

در شکل (۱۰) تغییرات فرکانس تحریک Ω بر حسب تغییرات ولتاژ دینامیکی، $V_{ac} = \beta V_{cr}$ ، با فرض $V_{ac} = +100$ V برای چهار حالت از مقادیر ضرایب استهلاک $\xi = 0$ ، $\xi = 0.0008$ ، $\xi = 0.0016$ و $\xi = 0.0024$ نشان داده شده است. مطابق این شکل می‌توان دریافت که در غیاب اثر بستر، با افزایش ضرایب استهلاک، منطقه ناپایداری دینامیکی کاهش یافته و ناپایداری در ولتاژهای پیزوالکتریکی بالاتر رخ می‌دهد. در شکل (۱۱) نیز تغییرات فرکانس تحریک Ω در برابر تغییرات ولتاژ دینامیکی، برای چهار مقدار خاص از ضرایب بدون بعد بستر k_1 و k_2 و متناظر با دو حالت، الف) عدم وجود میرایی ($\xi = 0$) و ب) وجود میرایی با $\xi = 0.0012$ نشان داده شده است. مطابق این شکل نواحی A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 متناظر با حالت $\xi = 0$ بوده طوریکه در این حالت، افزایش ضرایب بستر، سبب انتقال فرکانس طبیعی اساسی صفحه به مقادیر بالاتر شده و در نتیجه ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر اتفاق می‌افتد. با توجه به این شکل، نواحی A ، B ، C و D نیز نشان دهنده نواحی ناپایداری دینامیکی متناظر با حالت $\xi = 0.0012$ می‌باشند. از این شکل پیداست که وجود میرایی سبب کاهش منطقه ناپایداری دینامیکی شده و مشابه حالت قبل، با افزایش ضرایب بستر، ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۰- تقریب مرتبه اول نواحی اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریک، برای چهار حالت از ضرایب استهلاک $\xi = 0$ ، $\xi = 0.0008$ ، $\xi = 0.0016$ و $\xi = 0.0024$ در غیاب اثر بستر.



شکل ۱۱- تقریب مرتبه اول نواحی اصلی ناپایداری دینامیکی صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریک برای چهار حالت مختلف از ضرایب بستر، الف) نواحی A_1, B_1, C_1 و D_1 در غیاب میرایی، ب) نواحی A, B, C و D در حضور میرایی.

۱۱- تحلیل غیرخطی با روش اغتشاشات

در این بخش، رفتار غیرخطی صفحه تابعی تحت تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی در شکل مود اول ارتعاشی ($m=1, n=1$) بررسی و مطالعه می‌شود. با جایگذاری $w(x, y, t) = w_1(t) \sin \pi x \sin \pi y$ در روابط (۴۷)، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکات عرضی صفحه ساندویچی پیزوالکتریکی تابعی در شکل مود ارتعاشی اول و در حضور تحریک پیزوالکتریکی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{w}_1 + \delta \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + a_1 V_{ac} \cos \Omega t w_1 + a_2 w_1^2 + a_3 w_1^3 = 0 \quad (57)$$

معادله فوق شامل جمله تحریک پارامتریک و جملات مرتبه دوم و سوم از w_1 می‌باشد. این جملات در برگیرنده اثر تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی و غیرخطی بودن حرکات عرضی صفحه می‌باشند طوریکه ضرایب ثابت موجود در این جملات بر حسب پارامترهای مسأله بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{388.918 - 0.005V_{ac} + k_1 + 19.739k_2} \\ a_1 &= -0.005 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 406.619 \end{aligned} \quad (58)$$

در این قسمت اثر ولتاژ DC پیزوالکتریک V_{ac} و پارامترهای خطی بستر k_1 و k_2 روی پاسخ غیرخطی صفحه تحت تشدید پارامتریک در شکل مود اول ارتعاشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. از آنجائیکه تحلیل معادلات غیرخطی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در مقایسه با روش‌های هارمونیک بالانس و ... از دقت بالاتری برخوردار است [۳۷]. بنابراین با فرض اینکه دامنه جمله هارمونیک ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریکی عملگری (V_{ac})، میرایی و جملات غیرخطی در مقایسه با جملات خطی از مرتبه پایین‌تر هستند و می‌توان با وارد کردن پارامتر کوچک و بدون بعد ε که نشان دهنده مرتبه دامنه حرکات عرضی صفحه است و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله (۵۷) را به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\ddot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 = -\varepsilon \delta \dot{w}_1 - \varepsilon \eta_1 V_{ac} \cos \Omega t - \varepsilon \eta_2 w_1^2 - \varepsilon \eta_3 w_1^3 = 0, \quad (59)$$

$$(a_i = \varepsilon \eta_i, \quad i = 1, 2, 3)$$

هنگامی که Ω فرکانس تحریک ولتاژ اعمالی در محدوده دو برابر فرکانس طبیعی ω_1 سیستم باشد، کوچکترین تغییر در پارامترهای سیستم، می‌تواند منجر به وجود آمدن پاسخ‌هایی با دامنه‌های بزرگ شود. لذا جهت بررسی کیفی و مطالعه رفتار غیرخطی سیستم هنگام تشدید پارامتریک، با وارد کردن پارامتر تنظیم σ می‌توان رابطه فرکانس در ناحیه تشدید را به شکل زیر بیان کرد:

$$\Omega = 2\omega_1 + \sigma \varepsilon \quad (60)$$

حل تقریبی و مرتبه اول معادله (۵۹) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$w_1(t, \varepsilon) = w_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon w_{11}(T_0, T_1) \quad (61)$$

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1$$

با تعریف اپراتورهای دیفرانسیلی به صورت:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (62)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots$$

که در اینجا $D_j = \partial / \partial T_j$, ($j = 0, 1$) است و با جایگذاری (۶۰) تا (۶۲) در معادله (۵۹) و با متحد قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه از ε خواهیم داشت:

$$\varepsilon^0: D_0^2 w_{10} + \omega_1^2 w_{10} = 0 \quad (63)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 w_{11} + \omega_1^2 w_{11} = -2D_0 D_1 w_{10} - 2\sigma w_{10} - \delta D_0 w_{10} - \eta_1 V_{ac} w_{10} \cos \Omega T_0 - \eta_2 w_{10}^2 - \eta_3 w_{10}^3 \quad (64)$$

حل همگن معادله (۶۳) به صورت زیر است:

$$w_{10}(T_0, T_1) = A_1(T_1) e^{i\Omega T_0/2} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\Omega T_0/2} \quad (65)$$

که در آن $A_1(T_1)$ تابع مجهول بوده و $\bar{A}_1(T_1)$ مزدوج مختلط آن می‌باشد. با جایگذاری حل همگن (۶۵) در (۶۴) داریم:

$$D_0^2 w_{11} + \omega_1^2 w_{11} = -\left(i\Omega D_1 A_1 + \frac{1}{2} \eta_1 V_{ac} \bar{A}_1 + \frac{1}{2} \delta i\Omega A_1 + 3i\eta_3 A_1^2 \bar{A}_1 - \sigma \Omega A_1 \right) e^{i\Omega T_0/2} - 2\eta_2 A_1 \bar{A}_1 - \left(\frac{1}{2} \eta_1 V_{ac} A_1 + \eta_3 A_1^3 \right) e^{3i\Omega T_0} - \eta_2 A_1^2 e^{i\Omega T_0} + c. c. \quad (66)$$

برای حذف جملات سکولار از حل w_{11} بایستی داشته باشیم:

$$2i\Omega D_1 A_1 - 2\sigma \Omega A_1 + \eta_1 V_{ac} \bar{A}_1 + \delta i\Omega A_1 + 6i\eta_3 A_1^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (67)$$

برای توصیف معادله (۶۷) در دستگاه مختصات دکارتی، می‌توان تابع $A_1(T_1)$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$A_1(T_1) = x_1(T_1) + ix_2(T_1) \quad (68)$$

در رابطه فوق $x_1(T_1)$ و $x_2(T_1)$ نشان دهنده توابعی حقیقی از دامنه و فاز نوسانات غیرخطی صفحه می‌باشند. با جایگذاری (۶۸) در (۶۷) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dT_1} &= +\sigma x_2 - \frac{1}{2}\delta x_1 + \frac{1}{2\Omega}\eta_1 V_{ac} x_2 - \frac{3}{\Omega}\eta_3 x_1^2 x_2 - \frac{3}{\Omega}\eta_3 x_2^3 \\ \frac{dx_2}{dT_1} &= -\sigma x_2 - \frac{1}{2}\delta x_2 + \frac{1}{2\Omega}\eta_1 V_{ac} x_1 + \frac{3}{\Omega}\eta_3 x_1^3 + \frac{3}{\Omega}\eta_3 x_1 x_2^2 \end{aligned} \quad (69)$$

معادلات پاسخ فرکانسی سیستم، در حالت پایا متناظر با $dx_1/dT_1 = 0$ و $dx_2/dT_1 = 0$ با ثابت ماندن دامنه و فاز نسبت به زمان بدست می‌آید. با فرض اینکه x_{1s} و x_{2s} به ترتیب نشان‌دهنده حل بدیهی و غیربدیهی معادلات (۶۹) در شرایط پایا باشند، $a_1 = \sqrt{x_{1s}^2 + x_{2s}^2}$ نشان‌دهنده دامنه سیستم در شرایط پایا خواه د بود. برای بررسی پایداری حل‌های پایای معادلات (۶۹)، فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1(T_1) &= x_{1s} + x_{1p}(T_1) \\ x_2(T_1) &= x_{2s} + x_{2p}(T_1) \end{aligned} \quad (70)$$

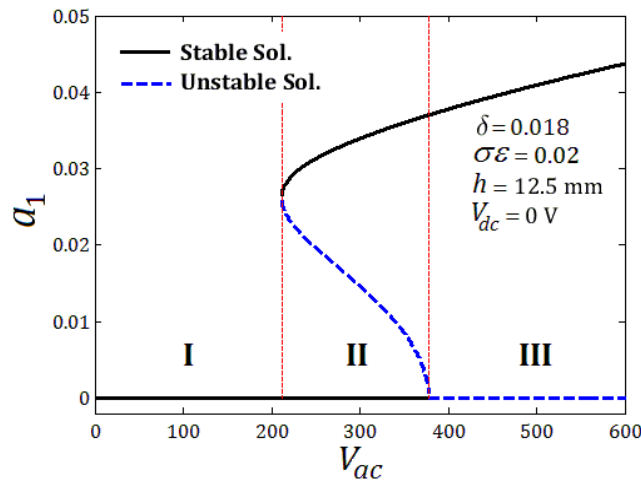
که در اینجا x_{1p} و x_{2p} بیانگر اغتشاشات جزئی حل‌های سیستم نسبت به حل‌های وضعیت پایا می‌باشند. با جایگذاری روابط (۷۰) در (۶۹) و نگه داشتن جملات خطی نسبت به x_{1p} و x_{2p} می‌توان گفت که اگر بخش حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس ضرایب سیستم خطی‌سازی شده (۶۹)، حول حل پایای بدیهی/ غیربدیهی، منفی باشند، حل بدیهی/ غیربدیهی سیستم پایدار خواهد بود [۳۸].

۱۲- مطالعه رفتار غیرخطی و پایداری

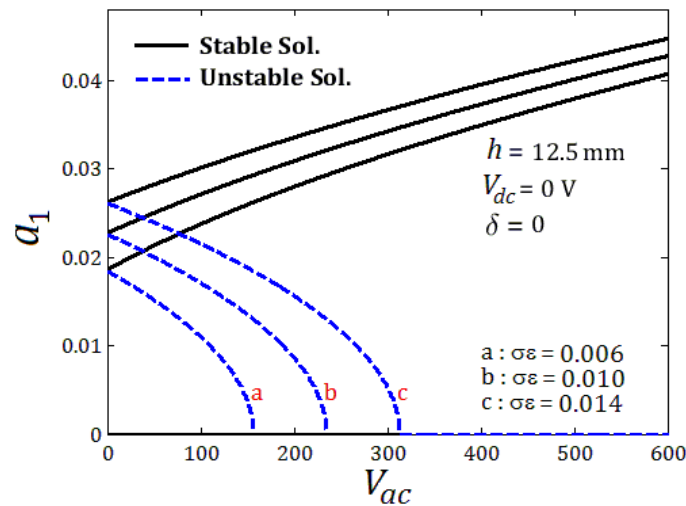
در این بخش به بررسی عددی رفتار صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریکی مربعی با نسبت ابعاد $a/h = 40$ ، تحت تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی پرداخته می‌شود. با فرضیات فوق و در غیاب اثر بستر و با ثابت نگه داشتن جمله ولتاژ استاتیکی $V_{dc} = 0 V$ ، تغییرات دامنه تشدید صفحه در برابر دامنه ولتاژ تحریک V_{ac} ، در حضور اثرات میرایی سازه‌ای با $\delta = 0.018$ در شکل (۱۲-الف) نشان داده شده است.

مطابق این شکل، منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید پیزوالکتریکی در برگزیده حل‌های بدیهی و غیربدیهی می‌باشد. در این شکل منحنی‌های پیوسته بیانگر حل پایدار و منحنی‌های منقطع بیانگر حل ناپایدار است. با توجه به این شکل در ناحیه I اثر میرایی سازه‌ای غالب بر اثر دامنه تحریک است طوری که در این ناحیه فقط یک حل بدیهی پایدار برای دامنه تشدید وجود دارد و بنابراین در این ناحیه، تشدید پیزوالکتریک صفحه تحریک نخواهد شد. اما در ناحیه II با توجه به تعامل بین δ و V_{ac} دو حل غیربدیهی پایدار و ناپایدار برای دامنه تشدید وجود دارد. مطابق شکل (۱۲-الف) در ناحیه III اثر دامنه تحریک غالب بر اثر میرایی بوده و یک حل غیربدیهی پایدار وجود دارد و تشدید اتفاق می‌افتد.

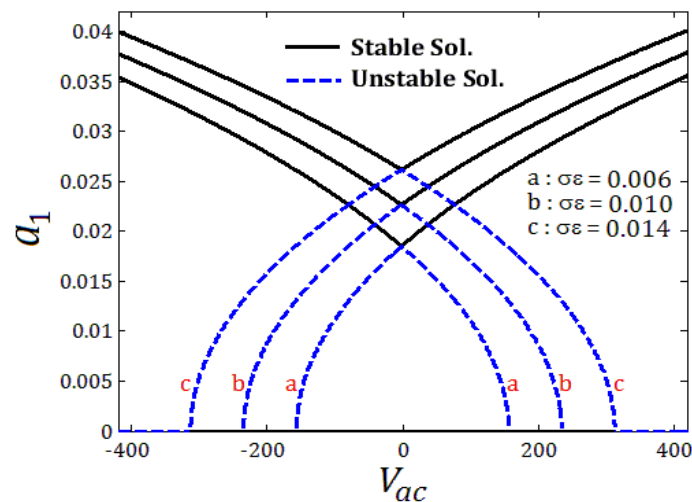
در شکل‌های (۱۲-ب) و (۱۲-ج) منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه ولتاژ تحریک (منحنی‌های دوشاخگی) برای سه مقدار پارامتر تنظیم کننده $\sigma\epsilon = 0.006$ ، $\sigma\epsilon = 0.01$ و $\sigma\epsilon = 0.014$ ترسیم شده است. از روی این شکل می‌توان دریافت در غیاب میرایی، تشدید صفحه همواره تحریک شده و کاهش پارامتر $\sigma\epsilon$ صرفاً باعث افزایش اندازه دامنه تشدید شده و تغییرات آن تاثیری بر عرض منطقه تشدید ندارد.



شکل ۱۲-الف - تغییرات دامنه تشدید در برابر دامنه ولتاژ تحریک برای صفحه مربعی ($a/h = 40$) در غیاب بستر با $k_1 = k_2 = 0$ با فرض $\delta = 0.018$ ، $V_{dc} = 0$ V و $\sigma\epsilon = 0.02$.



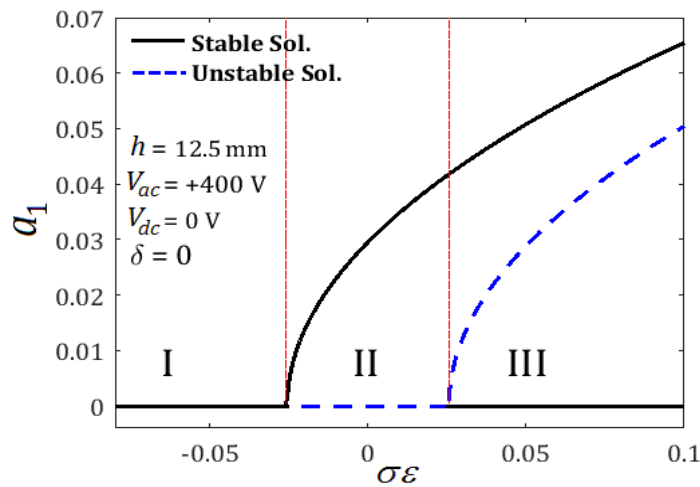
شکل ۱۲-ب - منحنی های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه ولتاژ تحریک در غیاب بستر الاستیک، برای سه مقدار از پارامتر تنظیم کننده $\sigma\epsilon = 0.006$ ، $\sigma\epsilon = 0.01$ و $\sigma\epsilon = 0.014$.



شکل ۱۲-ج - تغییرات دامنه تشدید با افزایش دامنه ولتاژ تحریک در غیاب اثر بستر، برای سه مقدار پارامتر تنظیم کننده $\sigma\epsilon = 0.006$ ، $\sigma\epsilon = 0.01$ و $\sigma\epsilon = 0.014$.

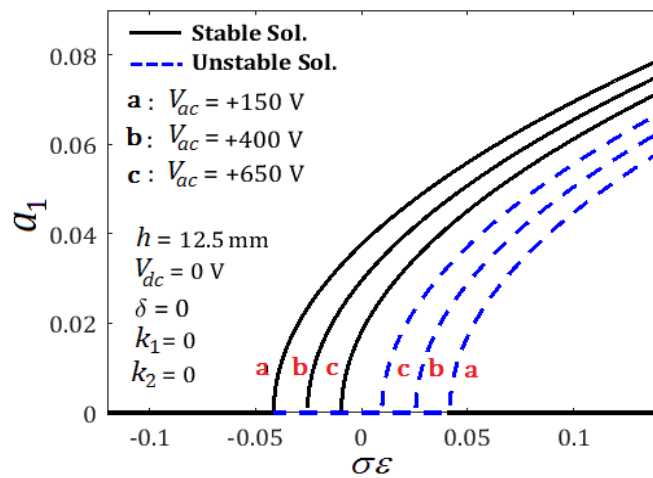
در شکل (۱۳-الف)، منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی در غیاب اثر میرایی سازه‌ای و بدون وجود بستر الاستیک ($k_1 = k_2 = 0$)، نشان داده شده است. با توجه به این شکل دیده می‌شود که در ناحیه I با افزایش $\sigma\epsilon$ در بازه فرکانسی داده شده، ابتدا یک حل غیربديهي ناپایدار و یک حل غیربديهي پایدار برای دامنه تشدید پیزوالکتریکی وجود دارد.

با افزایش تدریجی پارامتر $\sigma\epsilon$ اندازه دامنه‌های تشدید کاهش می‌یابد تا اینکه اولین نقطه دوشاخگی ظاهر می‌شود و بعد از این نقطه دوشاخگی، حل ناپایدار از بین رفته و فقط یک حل پایدار وجود خواهد داشت (ناحیه II). با ادامه افزایش پارامتر تنظیم و بعد از گذر از نقطه صفر نقطه دوشاخگی دوم نیز ظاهر می‌شود و بعد از عبور از نقطه دوشاخگی دوم، حل پایدار نیز از بین رفته و سیستم حل غیربديهي نخواهد داشت (ناحیه III) به عبارت دیگر در این ناحیه، تشدید صفحه تحریک نخواهد شد.



شکل ۱۳-الف - منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای صفحه مربعی در غیاب اثرات میرایی $\delta = 0$

برای $V_{ac} = 400 \text{ V}$ و $V_{dc} = 0 \text{ V}$

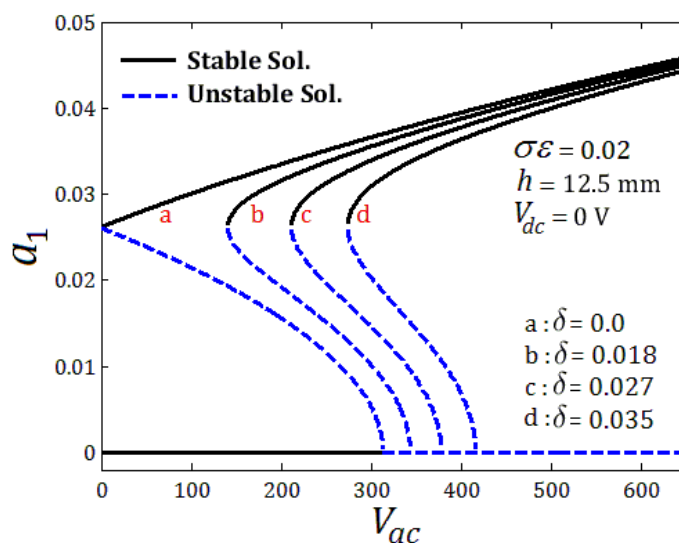


شکل ۱۳-ب - منحنی‌های پاسخ فرکانسی متناظر با $V_{dc} = 0 \text{ V}$ برای سه مقدار دامنه

ولتاژ تحریک $V_{ac} = +200 \text{ V}$ ، $V_{ac} = +400 \text{ V}$ و $V_{ac} = +600 \text{ V}$.

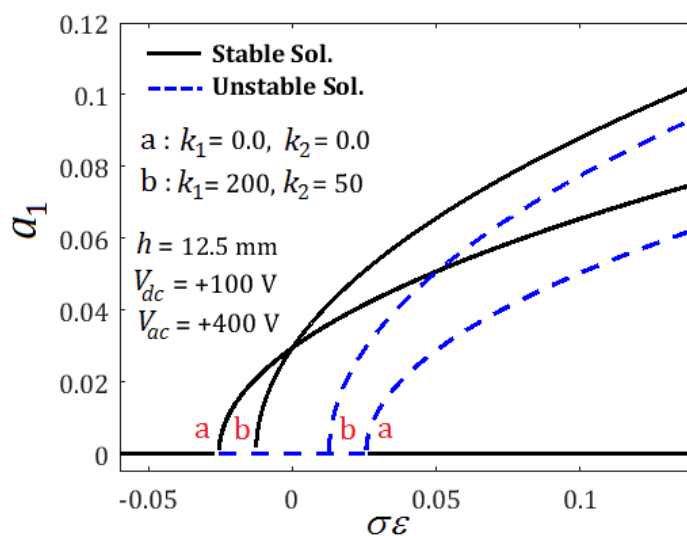
در شکل (۱۳-ب) منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای سه مقدار از دامنه هامونیک ولتاژ تحریک، $V_{ac} = 200 V$ ، $V_{ac} = 400 V$ و $V_{ac} = 600 V$ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که افزایش اندازه دامنه تحریک باعث بزرگتر شدن ناحیه وجود تشدید صفحه می‌شود.

در شکل (۱۴) منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک (منحنی‌های دوشاخگی) در غیاب اثر بستر الاستیک و در حضور اثرات میرایی بدون بعد نشان داده شده است. با توجه به شکل (۱۴) می‌توان دریافت که افزایش پارامتر δ باعث انتقال اولین نقطه دوشاخگی منحنی‌ها به سمت راست شده و سبب کاهش عرض منطقه وجود تشدید می‌شود.



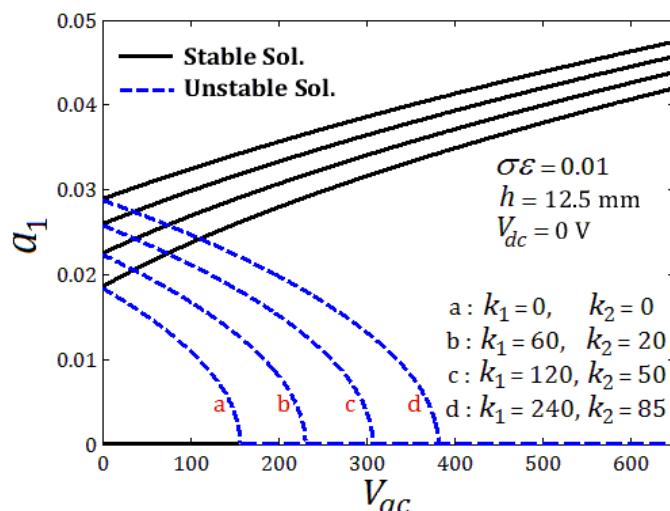
شکل ۱۴- منحنی‌های دوشاخگی در غیاب اثر بستر ($k_1 = k_2 = 0$) و متناظر با $V_{ac} = 0 V$

برای چهار مقدار میرایی $\delta = 0$ ، $\delta = 0.018$ ، $\delta = 0.027$ و $\delta = 0.035$.



شکل ۱۵- مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی متناظر با $V_{ac} = +400 V$ و $V_{dc} = +100 V$

برای دو حالت مختلف: (a) بدون وجود بستر، $k_1 = k_2 = 0$ ، (b) با وجود بستر الاستیک با $k_1 = 200$ و $k_2 = 50$.

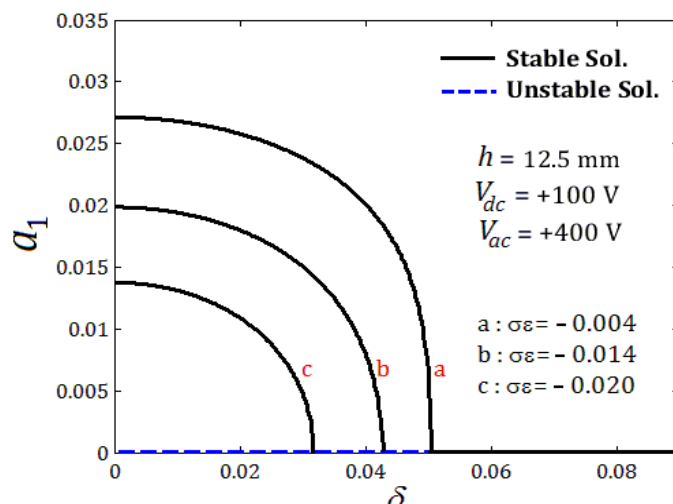


شکل ۱۶- مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای چهار حالت مختلف: (a) بدون وجود بستر با $k_1 = k_2 = 0$ ، (b) با وجود بستر با $k_1 = 60$ و $k_2 = 20$ (c) با وجود بستر با $k_1 = 120$ و $k_2 = 50$ و (d) با وجود بستر با $k_1 = 240$ و $k_2 = 85$.

در این قسمت، اثر بستر الاستیک بر مشخصات تشدید صفحه تابعی بررسی می‌شود. در شکل (۱۵) منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی صفحه در غیاب اثرات میرایی سازه‌ای برای دو حالت مختلف: (a) بدون وجود بستر الاستیک، $k_1 = k_2 = 0$ (b) با وجود بستر، $k_1 = 200$ و $k_2 = 50$ نشان داده شده است. با توجه این شکل دیده می‌شود که بستر الاستیک از نوع پاسترناک، باعث برخاستگی منحنی‌های پاسخ فرکانسی به سمت بالا شده (نسبت به حالت بدون بستر) و همچنان که انتظار می‌رود وجود بستر الاستیک سبب افزایش سفتی صفحه شده و باعث کوچک شدن ناحیه وجود تشدید می‌شود.

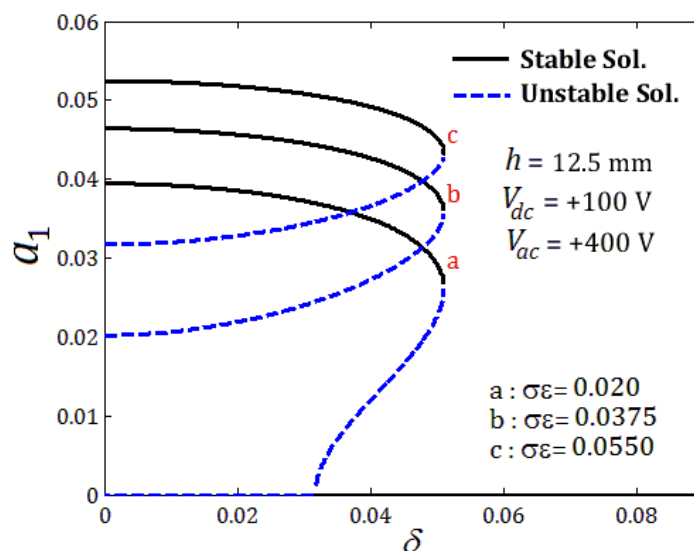
در شکل (۱۶) اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک برای چهار حالت از مقادیر ضرایب سفتی بستر پاسترناک، ترسیم شده است. از روی این شکل می‌توان دریافت در غیاب میرایی، تشدید صفحه همواره تحریک شده و افزایش ضرایب سفتی بستر سبب افزایش دامنه تشدید می‌شود و عرض منطقه وجود جواب بدیهی هم افزایش می‌یابد.

شکل‌های (۱۷-الف) و (۱۷-ب) منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید نسبت به پارامتر میرایی (منحنی‌های پاسخ میرایی) در غیاب اثر بستر برای دو حالت از مقادیر منفی و مثبت پارامتر تنظیم کننده، نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۱۷-الف)، کاهش پارامتر تنظیم منفی سبب کاهش اندازه دامنه و عرض منطقه وجود تشدید از حالت a به c می‌شود و با توجه به شکل (۱۷-ب)، افزایش مقدار پارامتر تنظیم مثبت سبب افزایش اندازه دامنه تشدید از حالت a به c شده، اما تاثیری بر روی عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.



شکل ۱۷-الف - تغییرات دامنه تشدید با پارامتر میرایی، در غیاب الاستیک،

برای سه مقدار منفی از پارامتر تنظیم $\sigma_\varepsilon = -0.004$ ، $\sigma_\varepsilon = -0.014$ و $\sigma_\varepsilon = -0.020$.



شکل ۱۷-ب - تغییرات دامنه تشدید با پارامتر میرایی، در غیاب بستر،

برای سه مقدار مثبت از پارامتر تنظیم $\sigma_\varepsilon = 0.02$ ، $\sigma_\varepsilon = 0.0375$ و $\sigma_\varepsilon = 0.55$.

۱۳- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر ابتدا با تصحیح ضریب تنش‌های برشی روی مقاطع عرضی صفحه، مسأله ناپایداری دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی صفحه ساندویچی تابعی پیزوالکتریکی با بستر الاستیک و تحت تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی مورد بررسی قرار گرفت و معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک صفحه با وجود غیرخطی بودن هندسی و ناهمگنی ساختاری استخراج شد.

نتایج بدست آمده نشان داد که ضریب تصحیح تنش‌های برشی شدیداً به نسبت مدول مواد متشکله، شاخص کسر حجمی و ضخامت هسته مرکزی صفحه ساندویچی وابسته بوده و مقدار این ضریب برای صفحات ساندویچی با مقدار آن برای صفحات همگن متفاوت است.

همچنین نشان داده شد که با افزایش مقادیر پارامترهای بستر، فرکانس تشدید صفحه افزایش می‌یابد و ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر اتفاق می‌افتد. علاوه بر این نشان داده شده که میرایی اثر پایدار کننده داشته و سبب کاهش منطقه ناپایداری دینامیکی می‌گردد.

در ادامه با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادلات پاسخ فرکانسی بدست آمد و پایداری حل‌های بدیهی و غیربدیهی این معادلات در شرایط مانا مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و اثرات تغییرات پارامترهای مسأله بر تشدید صفحه بررسی گردید. نتایج نشان دادند که با قرار گرفتن فرکانس تحریک پارامتریک در محدوده معین، تشدید صفحه تحریک می‌شود طوری که با تغییر پارامتر تنظیم در بخشی از این محدوده تشدید، سیستم دو حل غیربدیهی ناپایدار و پایدار خواهد داشت و در بخش دیگری از این محدوده تشدید، سیستم فقط یک حل غیربدیهی پایدار خواهد داشت. علاوه بر این نشان داده شد که:

الف) با تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی صفحه در غیاب بستر الاستیک و اثرات میرایی، کاهش مقدار پارامتر تنظیم کننده فقط باعث افزایش دامنه تشدید منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید- دامنه ولتاژ تحریک شده و تاثیری بر عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.

ب) در غیاب بستر الاستیک و با تحریک پارامتریک صفحه، افزایش میرایی بی‌بعد خطی سیستم سبب انتقال نقاط دوشاخگی منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید- دامنه ولتاژ پیزوالکتریکی تحریک به سمت راست شده و عرض منطقه وجود تشدید کاهش می‌یابد.

ج) با تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی صفحه در غیاب بستر الاستیک و در غیاب اثر میرایی، افزایش دامنه ولتاژ هارمونیک پیزوالکتریکی در مود عملگری، سبب عریض‌تر شدن منطقه تشدید می‌شود.

ه) با تحریک پارامتریک پیزوالکتریکی در حضور بستر الاستیک و در غیاب اثر میرایی، افزایش پارامترهای بستر، سبب برخاستگی منحنی‌های مشخصه پاسخ فرکانسی شده و دوشاخگی منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید- پارامتر تنظیم کننده به سمت راست خم شده و عرض منطقه وجود تشدید کاهش می‌یابد.

و) در غیاب اثر میرایی و با تحریک پارامتریک صفحه توسط ولتاژ هارمونیک پیزوالکتریکی با مولفه استاتیکی ثابت، افزایش پارامترهای سفتی بستر باعث افزایش دامنه تشدید منحنی‌های مشخصه دامنه تشدید- دامنه ولتاژ تحریک شده و تاثیری بر عرض منطقه وجود تشدید نمی‌گذارد.

مراجع

- [1] Jayakumar, K., Yadav, D., and Rao, B. N., "Moderately Large Deflection Analysis of Simply Supported Piezo-laminated Composite Plates under Uniformly Distributed Transverse Load", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 49, pp. 137-144, (2013).
- [2] Zhang, W., Yao, Z. G., and Yao, M. H., "Periodic and Chaotic Dynamics of Composite Laminated Piezoelectric Rectangular Plate with One-to-Two Internal Resonance", *Sci. China. Ser. E-Tech. Sci.*, Vol. 52, No. 3, pp. 731-742, Mar (2009).

- [3] Fakhari, V., Ohadi, A., and Yousefian, P., "Nonlinear Free and Forced Vibration Behavior of Functionally Graded Plate with Piezoelectric Layers in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2310-2321, (2011).
- [4] Wang, Y., Wang, Z., and Zu, L., "Stability of Viscoelastic Rectangular Plate with a Piezoelectric Layer Subjected to Follower Force", *Arch. Appl. Mech.* Vol. 83, pp. 495-507, (2013).
- [5] Behjat, B., and Khoshravan, M. R., "Geometrically Nonlinear Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Plates", *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 874-882, (2012).
- [6] Kulikov, G. M., and Plotnikova, S. V., "A New Approach to Three-dimensional Exact Solutions for Functionally Graded Piezoelectric Laminated Plates", *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 33-46, (2013).
- [7] Rafiee, M., He, X.Q., and Liew, K. M., "Nonlinear Dynamic Stability of Piezoelectric Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates with Initial Geometric Imperfection", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 59, pp. 37-51, (2014).
- [8] Shen, H. S., and Wang, Z. X., "Nonlinear Bending of FGM Plates Subjected to Combined Loading and Resting on Elastic Foundations", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2517-2524, (2010).
- [9] Wang, Z. X., and Shen, H. S., "Nonlinear Dynamic Response of Sandwich Plates with FGM Face Sheets Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Ocean Engineering*, Vol. 57, pp. 99-110, (2013).
- [10] Shen, H. S., and Wang, Z. X., "Nonlinear Vibration of Hybrid Laminated Plates Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 6275-6290, (2012).
- [11] Thinh, T. L., Nguyen, M.C., and Ninh, D. G., "Dynamic Stiffness Formulation for Vibration Analysis of Thick Composite Plates Resting on Non-homogenous Foundations", *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 684-695, (2014).
- [12] Baferani, A. H., and Saidi, A. R., "Effects of In-plane Loads on Vibration of Laminated Thick Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation: An Exact Analytical Approach", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 42, pp. 299-314, (2013).
- [13] Sobhy, M., "Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions", *Composite Structures*, Vol. 99, pp. 76-87, (2013).
- [14] Rezaee, M., and Jahangiri, R., "Static/Dynamic Instability and Nonlinear Vibrations of FG Plates Resting on Elastic Foundation under Parametric Forcing Excitation", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 172-182, (2015).

- [15] Rezaee, M., and Jahangiri, R., "Nonlinear and Chaotic Vibration and Stability Analysis of an Aero-elastic Piezoelectric FG Plate under Parametric and Primary Excitations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 344, pp. 277–296, (2015).
- [16] Lee, Y. Y., Zhao, X., and Reddy, J. N., "Postbuckling Analysis of Functionally Graded Plates Subject to Compressive and Thermal Loads", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1645–1653, (2010).
- [17] Zhu, P., and Liew, K. M., "Free Vibration Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Plates by Local Kriging Meshless Method", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2925-2944, (2011).
- [18] Sohn, K. J., and Kim, J. H., "Nonlinear Thermal Flutter of Functionally Graded Panels under a Supersonic Flow", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 380-387, (2009).
- [19] Rezaee, M., and Jahangiri, R., "Nonlinear Vibrations of Sandwich FG Plates Resting on Nonlinear Pasternak Foundation under Primary Resonance Excitation using Modified FSDT", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 186-198, (2015).
- [20] Thai, H. T., Nguyen, T. K., Vo, T.P., and Lee, J., "Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates using a New First-order Shear Deformation Theory", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 45, pp. 211-225, (2014).
- [21] Nguyen, T. K., Sab, K., and Bonnet, G., "First-order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials", *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 25–36, (2008).
- [22] Rashidi, M. M., Shooshtari, A., and Beg, O. A., "Homotopy Perturbation Study of Nonlinear Vibration of von Karman Rectangular Plates", *Computers and Structures*, Vol. 106(107), pp. 46-55, (2012).
- [23] Duc, N. D., and Pham, H. C., "Nonlinear Postbuckling of an Eccentrically Stiffened Thin FGM Plate Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Thin-Walled Structures*, Vol. 57, pp. 103-112, (2014).
- [24] Rolfes, R., and Rohwer, K., "Improved Transverse Shear Stresses in Composite Finite Elements Based on First-order Shear Deformation Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 51-60, (1997).
- [25] Zhang, W., Yang, J., and Hao, Y., "Chaotic Vibration of an Orthotropic FGM Rectangular Plate Based on Third-order Shear Deformation Theory", *Nonlinear Dynamic*, Vol. 59, pp. 619-660, (2010).
- [26] Fu, Y. M., and Ruan, J. L., "Nonlinear Active Control of Damaged Piezoelectric Smart Laminated Plates and Damage Detection", *Appl. Math. Mech*, Vol. 29, No. 4, pp. 421–436, (2008).
- [27] Amabili, M., and Farhadi, S., "Shear Deformable Versus Classical Theories for Nonlinear Vibrations of Rectangular Isotropic and Laminated Composite Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 320, pp. 649–667, (2009).

- [28] Zhao, X., and Liew, K. M., "Geometrically Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates using the Element-free Kp-Ritz Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2796-2811, (2009).
- [29] Reddy, J. N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", Second Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, (2004).
- [30] Tran, L.V., Phung-Van, P., Lee, J., Wahab, M.A., and Nguyen-Xuan, H., "Isogeometric Analysis for Nonlinear Thermomechanical Stability of Functionally Graded Plates", *Composite Structures*, Vol. 140, pp. 655–667, (2016).
- [31] Praveen, G. N., and Reddy, J. N., "Nonlinear Transient Thermo-elastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, (1998).
- [32] Rafiee, M., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Thermal Bifurcation Buckling of Piezoelectric Carbon Nanotube Reinforced Composite Beams", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 66, pp. 1147–1160, (2013).
- [33] Shariyat, M., "Vibration and Dynamic Buckling Control of Imperfect Hybrid FGM Plates with Temperature-dependent Material Properties Subjected to Thermo-electro-mechanical Loading Conditions", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 240-252, (2009).
- [34] Ramachandra, L. S., and Kumar Panda, S., "Dynamic Instability of Composite Plates Subjected to Non-uniform In-plane Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 53-65, (2012).
- [35] Kumar, R., Ramachandra, L. S., and Banerjee, B., "Dynamic Instability of Damped Composite Skew Plates under Non-uniform In-plane Periodic Loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 103, pp. 74–88, (2015).
- [36] Clough, R. W., and Penzien, J., "*Dynamics of Structures*", Computers & Structures, Inc., Berkeley, CA, (2003).
- [37] Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., "*Nonlinear Oscillations*", New York, John Wiley & Sons (1979).
- [38] Guo, X. Y., Zhang, W., and Yao, M.H., "Nonlinear Dynamics of Angle-ply Composite Laminated Thin Plate with Third-order Shear Deformation", *Sci China Tech Sci*, Vol. 53, pp. 3612-3622, (2010).

فهرست نمادهای انگلیسی

a, b : طول و عرض صفحه ساندویچی تابعی

a_1 : دامنه حل پایا

A, A_s : ماتریس های سفتی محوری و برشی

B : ماتریس کوپلینگ سفتی های محوری و خمشی

b_{ij}, d_{ij} : درایه‌های ماتریس انعطاف‌پذیری

D : ماتریس سفتی خمشی

e_c : ضخامت هسته تابعی

e_{ij} : ثابت سفتی پیزوالکتریکی

e_{ft} : ضخامت لایه تابعی فوقانی

e_{fb} : ضخامت لایه تابعی تحتانی

E : مدول یانگ لایه تابعی

E_m, E_c : مدول یانگ جزء فلزی و جزء سرامیکی

E_z : میدان الکتریکی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریکی

h : ضخامت هسته تابعی صفحه ساندویچی

h_0 : موقعیت قائم وجه تحتانی

h_1 : موقعیت قائم محل اتصال لایه تحتانی به هسته

h_2 : موقعیت قائم محل اتصال هسته به لایه تحتانی

h_3 : موقعیت قائم وجه فوقانی

h_p : ضخامت لایه های فوقانی و تحتانی پیزوالکتریکی

H : ضخامت کلی صفحه

H_{ij} : سفتی‌های برشی اصلاح شده ($i=4,5$)

k_1, k_2 : سفتی‌های خطی و برشی بدون بعد

K_1, K_2 : ضریب سفتی خطی و برشی بستر

K_L, K_G : ماتریس‌های سفتی خطی و سفتی هندسی

K_s : ضریب تصحیح تنش‌های برشی روی مقاطع عرضی صفحه

m : جرم واحد سطح صفحه

M : ماتریس جرم

M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} : منتجه‌های گشتاوری در راستای محور x ، محور y و نیروی برشی در صفحه $x-y$.

n : شاخص کسر حجمی سرامیکی

N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} : منتجه‌های نیروی محوری در راستای محور x ، محور y و نیروی برشی در صفحه $x-y$.

N^E, M^E : بردار منتجه‌های محوری و خمشی الکتریکی

N, Q, M : بردارها منتجه‌های نیروی محوری، برشی و گشتاور خمشی

P_m, P_c : خاصیت فلزی و خاصیت سرامیکی

q : دامنه بار عرضی گسترده بدون بعد

q_0 : دامنه بار عرضی گسترده یکنواخت

- q_e : نیروی وارد بر واحد سطح صفحه
- Q_{ij} : ثابت سفتی کاهش یافته صفحه \bar{t} : زمان بدون بعد
- r : نسبت مدول الاستیک مواد متشکله
- T_n : زمان مقیاس شده ($n=0,1$)
- u, v, w : مولفه‌های جابجایی درون-صفحه‌ای طولی و عرضی نقاط واقع بر سطح میانی
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: مولفه‌های جابجایی بدون بعد درون-صفحه‌ای طولی و عرضی
- U, V, W : مولفه‌های جابجایی درون-صفحه‌ای طولی و عرضی نقاط داخل صفحه
- $U_{m,n}$: دامنه وابسته به زمان مود درون-صفحه‌ای طولی
- V_m, V_c : کسر حجمی جزء فلزی و جزء سرامیکی
- V_{dc}, V_{ac} : ترم استاتیکی و دینامیکی ولتاژ تحریک هارمونیک
- V_{cr} : ولتاژ بحرانی پیزوالکتریکی
- $V_{m,n}$: دامنه وابسته به زمان مود درون-صفحه‌ای عرضی
- $W_{m,n}$: دامنه وابسته به زمان مود عرضی (m, n)
- W_{10}, W_{11} : حل‌های تقریبی خطی و غیرخطی مرتبه اول
- X_i : تابع حقیقی ($i=1,2$)
- x_{i_s}, x_{i_p} : حل بدیهی/غیربدیهی پایا و اغتشاشی ($i=1,2$)

نمادهای یونانی

- α_1, α_2 : ثابت‌های تناسبی جرم و سفتی خطی
- α, β : ضریب ولتاژ استاتیکی و دینامیکی
- γ_0 : بردار کرنش‌های برشی
- δ : میرایی بدون بعد
- \mathcal{E} : ضریب بدون بعد جمله غیرخطی
- \mathcal{E}_0 : بردار کرنش‌های غشائی
- \mathcal{E}_{ij} : مولفه‌های تانسور کرنش
- η_i : ضریب خطی/غیرخطی معادله ماتیو
- \mathcal{K} : بردار کرنش‌های خمشی
- μ : میرایی واحد سطح صفحه
- ν : نسبت پواسن لایه تابعی
- ν_p : نسبت پواسن لایه پیزوالکتریکی
- ν_m, ν_c : نسبت پواسن جزء فلزی و جزء سرامیکی
- ξ : ضریب استهلاک

ρ : چگالی جرمی لایه تابعی

ρ_m, ρ_c : چگالی جرمی جزء فلزی و جزء سرامیکی

σ : پارامتر تنظیم فرکانس

σ_{ij} : مولفه‌های تانسور تنش

ϕ_x, ϕ_y : چرخش بردار عمود بر مقطع عرضی حول محورهای x و y

$\Phi_{m,n}^x$: دامنه وابسته به زمان جابجایی دورانی حول محور y .

$\Phi_{m,n}^y$: دامنه وابسته به زمان جابجایی دورانی حول محور x

ω^* : فرکانس مرجع

ω_n : فرکانس طبیعی در شکل مود الاستیک n ام

Ω : فرکانس تحریک هارمونیک

Abstract

In this study, dynamic instability and nonlinear behavior of sigmoidal-functionally Graded piezoelectric (S-FGP) plates resting on linear elastic foundation under parametric harmonic piezoelectric excitation is investigated. Based on Modified FSDT, applying Hamilton's principle, the governing nonlinear coupled partial differential equations are derived. By considering six vibration modes, the Galerkin's procedure is used to reduce the equations of motion to nonlinear Mathieu equations, and dynamic instability of the problem in absence/presence of the Rayleigh's proportional damping model and foundation is analyzed. In the absence of foundation, the validity of the modeling for analyzing the maximum nonlinear deflection and the modified shear correction factors are accomplished by comparing the results with those of the literature. It is shown that as the parameters of the foundation increase, the piezoelectric instability occurs at higher excitation frequencies and increasing the damping makes the region of the instability to be shrunk. By applying the perturbation method, steady-state response equations are derived and the parametric resonance of the system under the piezoelectric excitation is analyzed. Then, the conditions of existence and stability of trivial/nontrivial solutions are discussed. Moreover, the effects of the system parameters, including excitation frequency, amplitude of harmonic excitation voltage, foundation parameters and damping, on the nonlinear dynamics of the S-FGP plate are studied and it is shown that the presence of the damping/foundation has a considerable influence on the resonance characteristic curves.