تحلیل تنش در صفحه مستطیلی از جنس ماده الکترو مگنتو الاستیک با رفتار تابعی حاوی چندین ترک

رسول باقری[۱]
استادیار

مجتبی محمودی منفرد[۲]
استادیار

ولی انجیل الی[۳]
استادیار

در این مطالعه، تحلیل تنش در صفحه مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک، تحت بار نقطه ای خارج صفحه ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی انجام شده است. در این مطالعه فرض شده که رفتار محیط الاستیک خطی است و سطوح ترکها هموار بوده و صفحه مستطیلی نازک می‌باشد. از روش نابجایی، تبدیل فوریه محدود و روش جداسازی متغیرها برای بدست آوردن معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی استفاده شده است. فرض شده است که خواص ماده بطور نمایی در جهت عرض صفحه مستطیلی تغییر می‌کند. معادلات حاکم بر مسأله با توجه به شرایط مرزی و چند مقداری بودن تغییر مکان و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی خط نابجایی با استفاده از تبدیل فوریه محدود حل شده و میدان‌های تنش و جابجایی الکترومغناطیسی ارائه می‌شود. سپس با استفاده از روش توزیع نابجایی، معادلات انتگرالی تکین برای تحلیل مسأله چندین ترک در صفحه مستطیلی بدست می‌آید. این معادلات با استفاده از روش عددی حل می‌گردند تا توابع توزیع نابجایی‌ها بدست آید. بعد از بدست آوردن توزیع نابجایی ها می‌توان ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در نوک ترک را بدست آورد. در انتها برای صحت سنجی نتایج، تاثیرات ثوابت ماده، طول ترکها، محل اعمال بار نقطه ای و نحوه چیدمان ترکها بر روی ضرایب شدت میدانی، مثالهایی آورده شده است.

واژه های راهنما: چندین ترک، مواد هوشمند، مواد تابعی، تکینگی کوشی، روش نابجایی

۱-مقدمه

شبکه مواد الکترومگنتوالاستیک شناخته شده‌ترین مواد هوشمند هستند. هنگامیکه این مواد در معرض میدان الکترومغناطیسی قرار می‌گیرند، در آنها کرنش ایجاد می‌شود و بالعکس وقتی به آنها نیرو (تنش) اعمال می‌شود ولتاژ تولید می‌کنند. بنابراین ماده الکترومگنتوالاستیک می‌تواند به عنوان تبدیل کننده انرژی الکتریکی و مغناطیسی به مکانیکی و یا حرارتی و بالعکس مشاهده شود. این مواد دارای چقرمگی پائین بوده و بسیار تردد می‌باشند. از طرفی، مواد تابعی به دلیل مقاومت حرارتی و مقاومت سایش بالا، کاربرد وسیعی در

[۱] نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مکاترونیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز، ایران
r.bagheri@kiau.ac.ir
[۲] استادیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، واحد هشتگرد، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز، ایران
mo_m_monfared@yahoo.com
[۳] استادیار، دانشکده مکاترونیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، البرز، ایران
v_enjil@yahoo.com

صنعت دارند. در نتیجه استفاده از آنها بمنظور کاهش تنش‌های پسماند و تنش‌های حرارتی در دهه اخیر کاربرد بسیاری داشته است. بنابراین تحلیل تنش در مواد الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی دارای ترک از اهمیت به سزایی برخوردار است. در سالهای اخیر محققان زیادی در زمینه تحلیل تنش مواد هوشمند، کارهای ارزشمندی انجام داده اند [۱-۳]. در ابتدا مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل تنش محیط‌های ساخته شده از مواد الکترومگنتوالاستیک و مواد تابعی حاوی ترک انجام می‌شود.

ضریب شدت تنش دینامیکی در یک صفحه مستطیلی محدود حاوی یک جفت ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی خارج صفحه‌ای توسط Zhang [۴] بدست آمده است. میدان تنش در ورق مستطیلی حاوی یک ترک خارج از مرکز تحت مود سوم مکانیک شکست توسط Ma Zhang and [۵] مطالعه شد. آنها ضریب شدت تنش برای نوک ترک را تعیین کرده و پارامترهای هندسی را مورد بررسی قرار دادند.

تنش تکین و میدان الکتریکی برای صفحه مستطیلی از جنس مواد پیزوالکتریک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی توسط Lee and Kwon [۶] مورد تحلیل قرار گرفت. آنها در این مطالعه از تئوری خطی پیزوالکتریسیته بهره بردند.

در مقاله ای دیگر از ایشان [۷]، ضرایب شدت تنش و جابجایی الکتریکی و همچنین نرخ رهایی انرژی تحت بار ضربه ای الکترومکانیکی در صفحه مستطیلی از جنس مواد سرامیک پیزوالکتریک حاوی یک ترک مرکزی نشت پذیر و نشت ناپذیر مورد بررسی قرار گرفت.

Li and Lee [۸] تحلیل تنش الکتروالاستیک برای یک ترک با موقعیت دلخواه در یک صفحه مستطیلی از جنس سرامیک پیزوالکتریک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی انجام دادند. Zhou و همکارانش [۹] حل مسأله ماده پیزوالکتریک/پیزومغناطیس تابعی تحت بارگذاری مکانیکی خارج صفحه‌ای و الکترومغناطیسی درون صفحه‌ای را ارائه دادند. روابط بین جابجایی الکتریکی، میدان مغناطیسی و میدان تنش در نزدیکی نوک ترکها مشخص گردید. در انتها تاثیر پارامتر ماده تابعی بر روی ضریب شدت تنش بدست آمد. حل مسأله صفحه مستطیلی الکترومگنتوالاستیک تابعی حاوی یک ترک متحرک تحت بار خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی توسط Qin و همکارانش [۱۰] انجام پذیرفت. در ادامه تاثیر هندسه، سرعت ترک و ثوابت ماده در ماده پیزوالکتریک روی ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل تنش از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک حاوی یک ترک سکه ای شکل و دو ترک همراستا تحت بارگذاری ضربه‌ای خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی توسط Zhong and Zhang [۱۱] انجام شده است.

تحلیل دینامیکی مکانیک شکست یک ورق مستطیلی الکترومگنتوالاستیک همگن حاوی یک ترک با شرط نشت پذیر توسط Zhang [۱۲] بدست آمده است. در این مقاله از روش اشمیت بهره گرفته شد.

Faal و همکارانش [۱۳]، مسأله مکانیک شکست در یک صفحه مستطیلی ایزوتروپیک تضعیف شده توسط چندین ترک و حفره با شرایط مرزی مختلف را تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای حل نمودند. آنها از روش جداسازی متغیرها برای حل مسأله نابجایی از نوع ولترا استفاده کردند. در ادامه، ضریب شدت تنش اطراف نوک ترک و تنش های محیطی روی حفره را تعیین نمودند.

Bagheri و همکارانش[۱۴-۱۵] باریکه ساخته شده از ماده پیزوالکتریک و الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی را بررسی کردند. آنها تغییرات مدول برشی ماده تابعی را بصورت یک تابع نمایی متغیر در راستای عرض باریکه در نظر گرفتند. سپس به کمک حل نابجایی بدست آمده، مسأله باریکه حاوی چندین ترک متحرک را حل نمودند. تاثیر طول ترک، سرعت حرکت ترک و پارامترهای ماده روی ضرایب شدت میدانی ارائه شد.

Ayatollahi و همکارانش [۱۶] نیم صفحه ساخته شده از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی حاوی چندین ترک متحرک را بررسی کردند. آنها هر دو شرط ترک نشت پذیر و نشت ناپذیر را در نظر گرفته و از تبدیل فوریه بهره بردند. آنها تاثیر سرعت حرکت ترک، پارامتر ماده تابعی و طول ترک را روی ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی نشان دادند.

همچنین Bagheri و همکارانش [۱۷]، در مطالعه‌ای دیگر، باریکه پیزوالکتریک تقویت شده با پوششی از ماده ارتوتروپیک دارای خاصیت تابعی تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی استاتیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی را بررسی کردند. آنها ضریب چسبندگی پوشش و باریکه را بصورت یک فنر خطی مدل کرده و بمنظور تحلیل تنش باریکه پیزوالکتریک تضعیف شده توسط چندین ترک، از حل نابجایی استفاده کردند. در ادامه معادلات انتگرالی تکین با دانسیته نابجایی مجهول تشکیل گردید و با توجه به شرایط مرزی دانسیته نابجایی مجهول تعیین و ضرایب شدت تنش و جابجایی الکتریکی بدست آمد. تأثیر خواص پوشش ارتوتروپیک ساخته شده از ماده تابعی و همچنین مشخصات ماده پیزوالکتریک، تعداد و هندسه ترکها بر روی ضرایب شدت تنش و جابجایی الکتریکی بدست آمد.

تحلیل تنش صفحه مستطیلی با رفتار تابعی حاوی چندین ترک مستقیم و منحنی شکل، تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای بر پایه استفاده از روش توزیع نابجایی توسط Faal و Dehghan [۱۸] ارائه شد. آنها تاثیر طول ترک و اندرکنش بین آنها را بر روی ضریب شدت تنش مطالعه نمودند.

در این مقاله حل تحلیلی مسأله ورق مستطیلی نازک الکترومگنتوالاستیک با رفتار تابعی حاوی چندین ترک مستقیم و منحنی، تحت بار نقطه‌ای خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی توسط روش توزیع نابجایی انجام شده است. در این مطالعه، با استفاده از روش نابجایی ولترا و با حل معادله حاکم، اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی مربوط به نابجایی، معادلات انتگرالی توزیع نابجایی روی ترکها تعیین شده است. این معادلات دارای تکینگی از نوع کوشی بوده که از حل آنها توزیع نابجایی روی ترکها و سپس ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی ترکها بدست آمده است.

مثالهای عددی حل شده، تاثیر طول ترک، محل اعمال بار نقطه‌ای، ثوابت ماده و همچنین اندرکنش بین ترکها را روی ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی نشان می‌دهند. در اکثر مطالعات انجام شده تا به حال، محققین فقط قادر به حل مسائل با تعداد ترک محدود بوده اند در حالیکه روش حل نابجایی مستقل از تعداد و هندسه ترک با سطح هموار می‌باشد.

۲- معادلات حاکم و حل نابجایی صفحه مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک با رفتار تابعی

ورق مستطیلی مورد مطالعه دارای طول a در راستای محور x و عرض h در راستای محور y بوده و تحت بار نقطه‌ای خارج صفحه‌ای مکانیکی و بار درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی در صفحه x, y می‌باشد.

مولفه‌های درون صفحه‌ای میدان الکتریکی و مغناطیسی در جهت محورهای x و y و همچنین مولفه $w = w(x, y)$ در مود سوم مکانیک شکست که مستقل از مود اول و دوم بوده، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$E_x = E_x(x, y),\ E_y = E_y(x, y),\ E_z = 0$$
$$H_x = H_x(x, y),\ H_y = H_y(x, y),\ H_z = 0$$
$$u = 0, v = 0, w = w(x, y) \qquad (۱)$$

در رابطه بالا $[E_x, E_y, E_z]$ مولفه‌های میدان الکتریکی، $[H_x, H_y, H_z]$ مولفه‌های میدان مغناطیسی و $[u, v, w]$ مولفه‌های میدان جابجایی می‌باشند. روابط بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی $\phi(x, y)$ و همچنین بین میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی $\psi(x, y)$ عبارتند از:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$
$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (۲)$$

در این حالت، معادلات حاکم بر ماده الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zx} & \sigma_{zy} \\ D_x & D_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44}(y) & e_{15}(y) & h_{15}(y) \\ e_{15}(y) & -d_{11}(y) & -\beta_{11}(y) \\ h_{15}(y) & -\beta_{11}(y) & -\gamma_{11}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که $c_{44}(y)$ ثابت الاستیسیته ، $e_{15}(y)$ و $h_{15}(y)$ به ترتیب ثابت پیزوالکتریک و پیزومغناطیس، $\beta_{11}(y)$ ثابت الکترومغناطیس و $d_{11}(y)$ و $\gamma_{11}(y)$ به ترتیب ثابت گذردهی دی الکتریک و ثابت نفوذ مغناطیسی می‌باشند. در این مطالعه، معادلات حاکم عبارت است از:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \qquad (۴)$$

با جایگذاری (۳) در (۴) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$c_{44}(y)\nabla^2 w+e_{15}(y)\nabla^2\phi+h_{15}(y)\nabla^2\psi+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial c_{44}(y)}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial e_{15}(y)}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial h_{15}(y)}{\partial y}=0$$
$$e_{15}(y)\nabla^2 w-d_{11}(y)\nabla^2\phi-\beta_{11}(y)\nabla^2\psi+\frac{\partial e_{15}(y)}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial d_{11}(y)}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial \beta_{11}(y)}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$
$$h_{15}(y)\nabla^2 w-\beta_{11}(y)\nabla^2\phi-\gamma_{11}(y)\nabla^2\psi+\frac{\partial h_{15}(y)}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial \beta_{11}(y)}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{11}(y)}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \quad (۵)$$

در رابطه بالا ∇^2 اپراتور لاپلاس در صفحه می‌باشد. با در نظر گرفتن نوع خاصی از جنس مواد الکترومگنتوالاستیک تابعی که با یک نمای یکسان نمایی در جهت عرض ورق مستطیلی تغییر می‌کنند، روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$[c_{44}(y),e_{15}(y),h_{15}(y),d_{11}(y),\beta_{11}(y),\gamma_{11}(y)]=[c_{440},e_{150},h_{150},d_{110},\beta_{110},\gamma_{110}]e^{2\lambda y} \quad (۶)$$

که λ ثابت ماده تابعی بوده و $[c_{440},e_{150},h_{150},d_{110},\beta_{110},\gamma_{110}]$ ثوابت ورق مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی در $y=0$ است. با جایگذاری معادله (۶) در روابط (۵) نتیجه می شود که

$$\begin{bmatrix} c_{440} & e_{150} & h_{150} \\ e_{150} & -d_{110} & -\beta_{110} \\ h_{150} & -\beta_{110} & -\gamma_{110} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla^2 w\\ \nabla^2\phi \\ \nabla^2\psi\end{bmatrix}+2\lambda\begin{bmatrix} c_{440} & e_{150} & h_{150} \\ e_{150} & -d_{110} & -\beta_{110} \\ h_{150} & -\beta_{110} & -\gamma_{110} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial w/\partial y\\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad (۷)$$

جهت ناهم بسته ساختن معادلات (۷) برای ورق مستطیلی از جنس مواد الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی، توابع بلوشتین [۱۹] بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{bmatrix}\bar{w}\\ \bar{\phi}\\ \bar{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w\\ \phi\\ \psi\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \alpha_2 w\\ \alpha_3 w\end{bmatrix} \quad (۸)$$

که در آن

$$\alpha_2=\frac{\gamma_{110}e_{150}-\beta_{110}h_{150}}{d_{110}\gamma_{110}-\beta_{110}^2},$$
$$\alpha_3=\frac{d_{110}h_{150}-\beta_{110}e_{150}}{d_{110}\gamma_{110}-\beta_{110}^2} \quad (۹)$$

می‌باشند. معادلات زیر با قرار دادن رابطه (۸) در (۷)، بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\nabla^2 w+2\lambda\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$
$$\nabla^2\bar{\phi}+2\lambda\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y}=0,$$
$$\nabla^2\bar{\psi}+2\lambda\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}=0 \quad (۱۰)$$

۲- شرایط صفر بودن تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی روی دو لبه مقابل و صفر بودن جابجایی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی دو لبه دیگر

در تئوری الکترواالاستیسیته شرایط مرزی مکانیکی درست همانند تئوری کلاسیک الاستیسیته می‌باشد. اما نکته قابل توجه چگونگی اعمال شرایط مرزی الکتریکی و مفهوم فیزیکی آنها است. شرایط مرزی در سازه-های الکتریکی بستگی به وجود و چگونگی قرارگیری الکترودها و حالتهای مختلفی دارد که در جسم، تحریک الکترواستاتیک ایجاد می‌شود. در تمامی موارد فرض بر این است که ضخامت الکترودهایی که بخشی از سطح ماده پیزوالکتریک را پوشش می‌دهند در مقایسه با کمترین ضخامت ماده پیزوالکتریک، ناچیز است. آنچه در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد یکی از انواع مهم شرایط مرزی الکتریکی رایج می‌باشد.

هرگاه صفحات سازه پیزوالکتریک مورد نظر با الکترود پوشانده شده و به الکترودها ولتاژ اعمال شود، شرایط مرزی الکتریکی بصورت نشت پذیر خواهد شد [۲۰] و اگر صفحات مربوط به سازه پیزوالکتریک مورد نظر بدون هیچ گونه پوشش الکترودی بوده و در تماس با یک محیط با قابلیت گذردهی خیلی کم (مثلا خلاء یا هوا) باشند، آنگاه این شرایط نشت ناپذیر [۲۱-۲۵] خواهد بود.
در این مقاله، شرط نشت ناپذیری ترک، بعلت نزدیک بودن به واقعیت مدنظر قرار گرفته است.
مطابق شکل (۱) نابجایی در موقعیت (η,ξ) قرار گرفته و خط نابجایی به موازات محور x در شکل مشخص شده است. در اینصورت شرایط مرزی ورق مستطیلی الکترومگنتواالاستیک با رفتار تابعی عبارتند از:

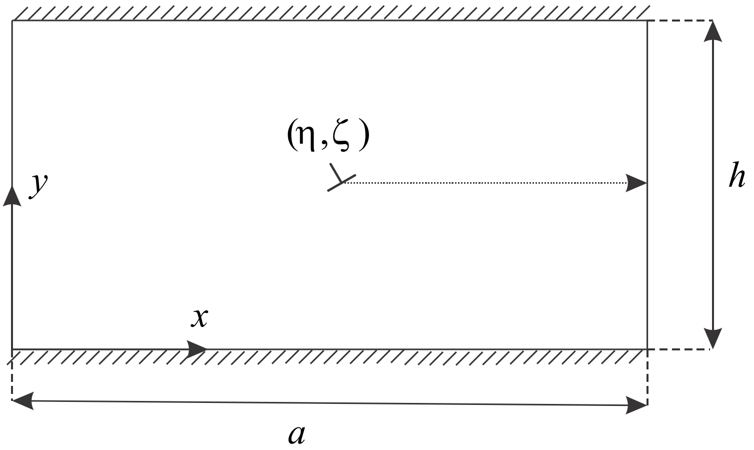
$$\begin{aligned}
&\sigma_{zx}(x,y)=0 \quad && at\ \ x=0, x=a;\ \ 0<y<h \\
&D_x(x,y)=0 && at\ \ x=0, x=a;\ \ 0<y<h \\
&B_x(x,y)=0 && at\ \ x=0, x=a;\ \ 0<y<h \\
&w(x,y)=0 && at\ \ y=0, x=h;\ \ 0<x<a \\
&\phi(x,y)=0 && at\ \ y=0, x=h;\ \ 0<x<a \\
&\psi(x,y)=0 && at\ \ y=0, x=h;\ \ 0<x<a
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

برای حل مسأله نابجایی از تبدیلات انتگرالی استفاده می‌شود که تبدیل مورد نظر در این مسأله تبدیل فوریه محدود کسینوسی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(n)=\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۱۲}$$

معکوس تبدیل فوریه محدود کسینوسی عبارت است از:

$$f(x)=\frac{F(0)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\cos\frac{n\pi x}{a} \tag{۱۳}$$



شکل۱- نمایش نابجایی در ورق مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی

با اعمال تبدیل فوریه محدود کسینوسی روی معادلات مشتق جزیی (۱۰) روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\frac{d^2W(n,y)}{dy^2}+2\lambda\frac{dW(n,y)}{dy}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}W(n,y)=(-1)^{n+1}\frac{\partial w(a,y)}{\partial x}+\frac{\partial w(0,y)}{\partial x}$$
$$\frac{d^2\overline{\Phi}(n,y)}{dy^2}+2\lambda\frac{d\overline{\Phi}(n,y)}{dy}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\overline{\Phi}(n,y)=(-1)^{n+1}\frac{\partial \phi(a,y)}{\partial x}+\frac{\partial \phi(0,y)}{\partial x}$$
$$\frac{d^2\overline{\Psi}(n,y)}{dy^2}+2\lambda\frac{d\overline{\Psi}(n,y)}{dy}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\overline{\Psi}(n,y)=(-1)^{n+1}\frac{\partial \psi(a,y)}{\partial x}+\frac{\partial \psi(0,y)}{\partial x} \quad (۱۴)$$

که $W(n,y)$، $\overline{\Phi}(n,y)$ و $\overline{\Psi}(n,y)$ به ترتیب تبدیل فوریه محدود کسینوسی $w(x,y)$، $\bar{\phi}(x,y)$ و $\bar{\psi}(x,y)$ می‌باشند. روابط مربوط به مولفه‌های تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی برای ورق مستطیلی با خاصیت تابعی که در رابطه (۳) ذکر شد، با استفاده از روابط (۶) و (۸) بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix}\sigma_{zx} & \sigma_{zy}\\ D_x & D_y\\ B_x & B_y\end{bmatrix}=\exp(2\lambda y)\begin{bmatrix}\tilde{c}_{44} & e_{150} & h_{150}\\ 0 & -d_{110} & -\beta_{110}\\ 0 & -\beta_{110} & -\gamma_{110}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}\\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

که $\tilde{c}_{44}=c_{440}+e_{150}\alpha_2+h_{150}\alpha_3$ ثابت الکترومگنتوالاستیک می‌باشد. با بکار بردن روابط (۱۱) و (۱۴)، توابع $W(n,y)$، $\overline{\Phi}(n,y)$ و $\overline{\Psi}(n,y)$ بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$W(0,y)=A_{k,0}+B_{k,0}\exp(-2\lambda y)$$
$$W(n,y)=\exp(-\lambda y)[A_{kn}\cosh(\beta_n y)+B_{kn}\sinh(\beta_n y)] \qquad n=1,2,,... \qquad 0\le y\le h$$
$$\overline{\Phi}(0,y)=C_{k,0}+D_{k,0}\exp(-2\lambda y)$$
$$\overline{\Phi}(n,y)=\exp(-\lambda y)[C_{kn}\cosh(\beta_n y)+D_{kn}\sinh(\beta_n y)] \qquad n=1,2,,... \qquad 0\le y\le h$$
$$\overline{\Psi}(0,y)=E_{k,0}+F_{k,0}\exp(-2\lambda y)$$
$$\overline{\Psi}(n,y)=\exp(-\lambda y)[E_{kn}\cosh(\beta_n y)+F_{kn}\sinh(\beta_n y)] \qquad n=1,2,,... \qquad 0\le y\le h \quad (۱۶)$$

که $\beta_n = \sqrt{\lambda^2 + (n^2\pi^2/a^2)}$ و اندیس $k=1,2$ مطابق شکل (۱)، به ترتیب اشاره به $y > \zeta$ و $y < \zeta$ دارد. تعریف نابجایی با ایجاد شکاف در امتداد خط نابجایی می‌باشد. با توجه به شکل (۱)، شرایط مرزی مربوط به خط تابجایی برای حالت ترک نشت ناپذیر بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w(x,\zeta^+) - w(x,\zeta^-) &= b_{wz} H(x-\eta) \\ \phi(x,\zeta^+) - \phi(x,\zeta^-) &= b_{\phi z} H(x-\eta) \\ \psi(x,\zeta^+) - \psi(x,\zeta^-) &= b_{\psi z} H(x-\eta) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷) $H(x)$ تابع پله‌ای هویساید، b_{wz}، $b_{\phi z}$و $b_{\psi z}$ مولفه‌های بردار برگرز نامیده می‌شوند. این روابط، شرط دو مقداری بودن تغییر مکان، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی خط نابجایی را نشان می دهند. اگرچه شکاف در پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی نوعی نابجایی نیست ولی در این مقاله نابجایی الکتریکی و مغناطیسی بعنوان ابزاری برای حل مساله بکارگرفته شده است. با بکاربردن رابطه (۸) و شرایط (۱۷)، روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} w(x,\zeta^+) - w(x,\zeta^-) &= b_{wz} H(x-\eta) \\ \bar{\phi}(x,\zeta^+) - \bar{\phi}(x,\zeta^-) &= (b_{\phi z} - \alpha_2 b_{wz}) H(x-\eta) \\ \bar{\psi}(x,\zeta^+) - \bar{\psi}(x,\zeta^-) &= (b_{\psi z} - \alpha_3 b_{wz}) H(x-\eta) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

شرایط مربوط به پیوستگی تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی روی خط نابجایی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{zy}(x,\zeta^-) &= \sigma_{zy}(x,\zeta^+) \\ D_y(x,\zeta^-) &= D_y(x,\zeta^+) \\ B_y(x,\zeta^-) &= B_y(x,\zeta^+) \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با اعمال تبدیل فوریه محدود کسینوسی روی شرایط (۱۸) و (۱۹) و با استفاده از معادلات (۱۵)، شرایط مربوط به خط نابجایی بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} W(n,\zeta^+) - W(n,\zeta^-) &= -\frac{b_{wz} a}{n\pi} \sin(\frac{n\pi\eta}{a}) \\ \overline{\Phi}(n,\zeta^+) - \overline{\Phi}(n,\zeta^-) &= -\frac{(b_{\phi z} - \alpha_2 b_{wz})a}{n\pi} \sin(\frac{n\pi\eta}{a}) \\ \overline{\Psi}(n,\zeta^+) - \overline{\Psi}(n,\zeta^-) &= -\frac{(b_{\psi z} - \alpha_3 b_{wz})a}{n\pi} \sin(\frac{n\pi\eta}{a}) \\ \frac{dW(n,\zeta^+)}{dy} &= \frac{dW(n,\zeta^-)}{dy} \\ \frac{d\overline{\Phi}(n,\zeta^+)}{dy} &= \frac{d\overline{\Phi}(n,\zeta^-)}{dy} \\ \frac{d\overline{\Psi}(n,\zeta^+)}{dy} &= \frac{d\overline{\Psi}(n,\zeta^-)}{dy} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با بکار بردن سه شرط آخر ذکر شده در رابطه (۱۱) به همراه شرایط (۲۰) به حل ارائه شده در رابطه (۱۶)، ضرایب مجهول بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$B_{1,0} = B_{2,0} = \frac{b_{wz}\eta}{\exp(-2\lambda h)-1},$$
$$A_{1,0} = \frac{b_{wz}\eta}{\exp(2\lambda h)-1}, \qquad A_{2,0} = \frac{b_{wz}\eta}{1-\exp(-2\lambda h)}$$
$$A_{1n} = -\frac{b_{wz}a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \sinh(\beta_n h), \qquad A_{2n} = 0$$
$$B_{1n} = \frac{b_{wz}a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \cosh(\beta_n h),$$
$$B_{2n} = \frac{b_{wz}a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\Gamma_n\omega_{3n}$$
$$D_{1,0} = D_{2,0} = \frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})\eta}{\exp(-2\lambda h)-1},$$
$$C_{1,0} = \frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})\eta}{\exp(2\lambda h)-1}, \qquad C_{2,0} = \frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})\eta}{1-\exp(-2\lambda h)}$$
$$C_{1n} = -\frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \sinh(\beta_n h), \qquad C_{2n} = 0$$
$$D_{1n} = \frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \cosh(\beta_n h),$$
$$D_{2n} = \frac{(b_{\phi z}-\alpha_2 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\Gamma_n\omega_{3n}$$
$$F_{1,0} = F_{2,0} = \frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})\eta}{\exp(-2\lambda h)-1},$$
$$E_{1,0} = \frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})\eta}{\exp(2\lambda h)-1}, \qquad E_{2,0} = \frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})\eta}{1-\exp(-2\lambda h)}$$
$$E_{1n} = -\frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \sinh(\beta_n h), \qquad E_{2n} = 0$$
$$F_{1n} = \frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\omega_{1n}\Gamma_n \cosh(\beta_n h),$$
$$F_{2n} = \frac{(b_{\psi z}-\alpha_3 b_{wz})a}{\pi}\exp(\lambda\zeta)\Gamma_n\omega_{3n} \quad (۲۱)$$

که در آن $\omega_{1n} = [-\lambda\sinh(\beta_n\zeta)+\beta_n\cosh(\beta_n\zeta)]$، $\omega_{2n} = [-\lambda\cosh(\beta_n\zeta)+\beta_n\sinh(\beta_n\zeta)]$، $\omega_{3n} = [\lambda\sinh(\beta_n(h-\zeta))+\beta_n\cosh(\beta_n(h-\zeta))]$ و $\Gamma_n = \sin(n\pi\eta/a)/[n\beta_n\sinh(\beta_n h)]$ است.

پس از بدست آوردن ضرایب مجهول و با استفاده از روبط (۱۳)، (۱۵) و (۱۶)، مولفه های تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در صفحه مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با رفتار تابعی بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\sigma_{zx}(x,y)=-\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(c_{440}b_{wz}+e_{150}b_{\phi z}+h_{150}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\sinh[\beta_n(y-h)]n\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad \zeta\le y\le h$$
$$\sigma_{zx}(x,y)=-\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(c_{440}b_{wz}+e_{150}b_{\phi z}+h_{150}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\sinh(\beta_n y)n\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad 0\le y\le \zeta$$
$$\sigma_{zy}(x,y)=(c_{440}b_{wz}+e_{150}b_{\phi z}+h_{150}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n(y-h))-\beta_n\cosh(\beta_n(y-h))]\}\qquad \zeta\le y\le h$$
$$\sigma_{zy}(x,y)=(c_{440}b_{wz}+e_{150}b_{\phi z}+h_{150}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n y)-\beta_n\cosh(\beta_n y)]\}\qquad 0\le y\le \zeta$$
$$D_x(x,y)=\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(-e_{150}b_{wz}+d_{110}b_{\phi z}+\beta_{110}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\sinh(\beta_n(y-h))n\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad \zeta\le y\le h$$
$$D_x(x,y)=\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(-e_{150}b_{wz}+d_{110}b_{\phi z}+\beta_{110}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\sinh(\beta_n y)n\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad 0\le y\le \zeta$$
$$D_y(x,y)=(e_{150}b_{wz}-d_{110}b_{\phi z}-\beta_{110}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n(y-h))-\beta_n\cosh(\beta_n(y-h))]\}\qquad \zeta\le y\le h$$
$$D_y(x,y)=(e_{150}b_{wz}-d_{110}b_{\phi z}-\beta_{110}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n y)-\beta_n\cosh(\beta_n y)]\}\qquad 0\le y\le \zeta$$
$$B_x(x,y)=\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(-h_{150}b_{wz}+\beta_{110}b_{\phi z}+\gamma_{110}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\sinh(\beta_n(y-h))n\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad \zeta\le y\le h$$

$$B_x(x,y)=\frac{2}{a}e^{\lambda(\zeta+y)}(-h_{150}b_{wz}+\beta_{110}b_{\phi z}+\gamma_{110}b_{\psi z})\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\sinh(\beta_n y)n\sin(\frac{n\pi x}{a}) \qquad 0\le y\le\zeta$$
$$B_y(x,y)=(h_{150}b_{wz}-\beta_{110}b_{\phi z}-\gamma_{110}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{1n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n(y-h))-\beta_n\cosh(\beta_n(y-h))]\} \qquad \zeta\le y\le h$$
$$B_y(x,y)=(h_{150}b_{wz}-\beta_{110}b_{\phi z}-\gamma_{110}b_{\psi z})\{\frac{2\lambda\eta e^{2\lambda h}}{a(e^{2\lambda h}-1)}-\frac{2}{\pi}e^{\lambda(\zeta+y)}\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{3n}\Gamma_n\cos(\frac{n\pi x}{a})[\lambda\sinh(\beta_n y)-\beta_n\cosh(\beta_n y)]\} \qquad 0\le y\le\zeta$$
(۲۲)

رفتار مجانبی مولفه تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی با نزدیک شدن به رأس نابجایی یعنی $x\to\eta$ و $y\to\xi$ بصورت تکینگی از نوع کوشی می‌باشد که به فرم کلی $\frac{1}{r}$ است [۱۸]. این بدین معنی است که در محل نابجایی مقدار تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی بی‌نهایت می‌شود که این از خصوصیات شناخته شده نابجایی است. مولفه های تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در روابط بالا مربوط به بارگذاری خارج صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی در ورق مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی می‌باشد. برای صحت سنجی روابط (۲۲) با صفر قرار دادن خواص الکترومغناطیس، مساله به حالت ورق مستطیلی با خاصیت تابعی تبدیل می‌شوند که توسط Faal and Dehghan [۱۸] ارائه شده است. مواد الکترومگنتوالاستیک عموما با ضخامتهای نازک تولید می‌شوند لذا یکی از ابعاد صفحه نازک در نظر گرفته می‌شود.

۴- میدان تنش در ورق مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی فاقد ترک

صفحه مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی تحت بار متمرکز خارج صفحه‌ای مکانیکی با دامنه τ_0 و درون صفحه‌ای الکتریکی و مغناطیسی D_0 و B_0 در لبه متناظر با $x=0$ مطابق شکل (۲) در نظر گرفته شده است.

$$\tau_{zx}(0,y)=\tau_0\delta(y-y_0)$$
$$D_x(0,y)=D_0\delta(y-y_0)$$
$$B_x(0,y)=B_0\delta(y-y_0)$$
(۲۳)

که $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است. از این حل بعنوان تابع گرین در صفحه مستطیلی تحت هر نوع بارگذاری خود تعادلی می توان استفاده نمود.

شرایط مرزی روی لبه های دیگر صفحه مستطیلی بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\tau_{zx}(a,y)=0, \quad D_x(a,y)=0, \quad B_x(a,y)=0,\\
&w(x,0)=0, \quad \bar{\phi}(x,0)=0, \quad \bar{\psi}(x,0)=0,\\
&w(x,h)=0, \quad \bar{\phi}(x,h)=0, \quad \bar{\psi}(x,h)=0,
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، حل عمومی معادلات (۱۰)، عبارت خواهند بود از:

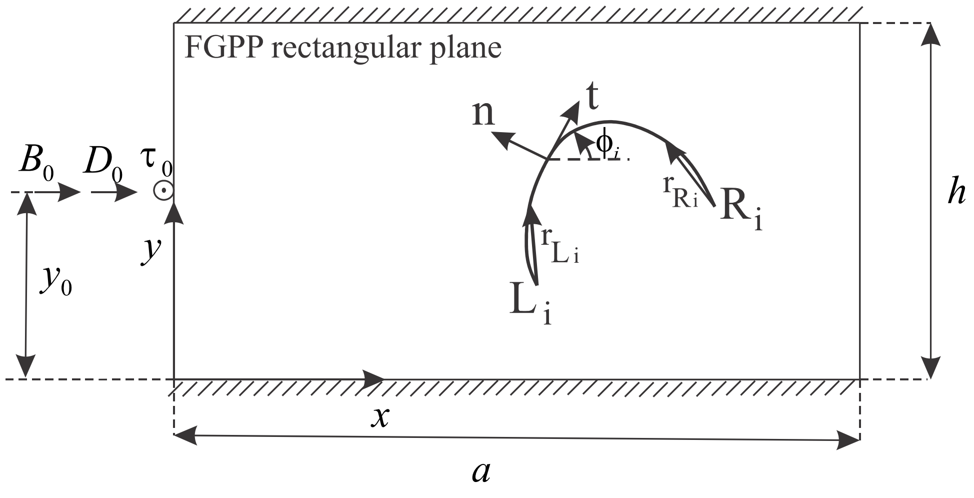
$$\begin{aligned}
w(x,y)&=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cosh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})+D_n\sinh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})\right)\times\\
&\quad\left(A_n\cos(P_nx)+B_n\sin(P_nx)\right)\\
\bar{\phi}(x,y)&=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty}\left(E_n\cosh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})+F_n\sinh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})\right)\times\\
&\quad\left(G_n\cos(P_nx)+H_n\sin(P_nx)\right)\\
w(x,y)&=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty}\left(I_n\cosh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})+J_n\sinh(y\sqrt{\lambda^2+P_n{}^2})\right)\times\\
&\quad\left(K_n\cos(P_nx)+L_n\sin(P_nx)\right)\\
&0\le x\le a, \quad 0\le y\le h
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

اعمال شرایط مربوط به جابجایی مکانیکی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی رابطه (۲۴) روی معادلات بالا، منجر به روابط زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&C_n=E_n=I_n=0\\
&P_n=i\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

در حالیکه $i=\sqrt{-1}$ است. در ادامه، با بکار بردن شرایط مربوط به تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی ذکر شده در رابطه (۲۴) و استفاده از معادلات (۲۵) و (۱۵) نتایج زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
B_n&=A_n\tan(P_na)\\
H_n&=G_n\tan(P_na)\\
L_n&=K_n\tan(P_na)
\end{aligned} \tag{۲۷}$$



شکل۲– نمایش ورق مستطیلی الکترومگنتواالاستیک با خاصیت تابعی تحت بار نقطه ای

بنابراین جابجایی مکانیکی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بصورت زیر ساده می‌شوند:

$$w(x,y)=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty} iD_n A_n \sin(n\pi y/h)\frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\cosh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)}$$
$$\bar{\phi}(x,y)=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty} iF_n G_n \sin(n\pi y/h)\frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\cosh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)}$$
$$\bar{\psi}(x,y)=\exp(-\lambda y)\sum_{n=0}^{\infty} iJ_n K_n \sin(n\pi y/h)\frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\cosh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)} \quad (۲۸)$$

استفاده از شرایط (۲۳) و روابط (۲۸)، روابط زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_{44}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iD_n A_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)+\\
&e_{150}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iF_n G_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)+\\
&h_{150}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iJ_n K_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)=\\
&\qquad -\tau_0\exp(-\lambda y)\delta(y-y_0)\\
&d_{110}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iF_n G_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)+\\
&\beta_{110}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iJ_n K_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)=\\
&\qquad D_0\exp(-\lambda y)\delta(y-y_0)\\
&\beta_{110}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iF_n G_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)+\\
&\gamma_{110}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,iJ_n K_n \sin(n\pi y/h)\tanh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)=\\
&\qquad B_0\exp(-\lambda y)\delta(y-y_0)
\end{aligned}$$

(۲۹)

با ضرب کردن طرفین معادله (۲۹) در $\sin(m\pi y/h)$ و انتگرال گیری نسبت به y از 0 تا h و با در نظر گرفتن رابطه (۲۸) توابع $w(x,y)$، $\bar{\phi}(x,y)$ و $\bar{\psi}(x,y)$ بصورت زیر ارائه می‌شوند:

$$w(x,y)=-\frac{2M_1}{\tilde{c}_{44}}\exp(-\lambda(y+y_0))\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}}\frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\sinh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)}$$

$$\bar{\phi}(x,y) = -2M_2 \exp(-\lambda(y+y_0))\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}} \frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\sinh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)}$$

$$\bar{\phi}(x,y) = -2M_3 \exp(-\lambda(y+y_0))\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}} \frac{\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]}{\sinh(\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}a)}$$

(۳۰)

که در آن

$$M_1 = \frac{1}{h}\left(\frac{D_0(h_{150}\beta_{110}-e_{150}\gamma_{110})+B_0(e_{150}\beta_{110}-h_{150}d_{110})}{(\beta_{110}{}^2-d_{110}\gamma_{110})}+\tau_0\right)$$

$$M_2 = \frac{D_0\gamma_{110}-B_0\beta_{110}}{h(\beta_{110}{}^2-d_{110}\gamma_{110})_0}$$

$$M_3 = \frac{B_0 d_{110}-D_0\beta_{110}}{h(\beta_{110}{}^2-d_{110}\gamma_{110})_0} \qquad (۳۱)$$

می‌باشند.

در نهایت، با استفاده از روابط (۱۵) و (۳۰) مولفه های میدان تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\sigma_{zx} = (M_1+e_{150}M_2+h_{150}M_3)\exp(\lambda(y-y_0))\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\sinh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]\right\}$$

$$\sigma_{zy} = (M_1+e_{150}M_2+h_{150}M_3)\exp(\lambda(y-y_0))\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)[\lambda\sin(n\pi y/h)-(n\pi/h)\cos(n\pi y/h)]}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]\right\}$$

$$D_x = (-d_{110}M_2-\beta_{110}M_3)\exp[\lambda(y-y_0)]\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\sinh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]\right\}$$

$$D_y = (-d_{110}M_2-\beta_{110}M_3)\exp[\lambda(y-y_0)]\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)[\lambda\sin(n\pi y/h)-(n\pi/h)\cos(n\pi y/h)]}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]\right\}$$

$$B_x = (-\beta_{110}M_2-\gamma_{110}M_3)\exp[\lambda(y-y_0)]\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)\sin(n\pi y/h)}{\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\sinh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}(a-x)]\right\}$$

$$B_y = (-\beta_{110}M_2-\gamma_{110}M_3)\exp[\lambda(y-y_0)]\times$$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi y_0/h)[\lambda\sin(n\pi y/h)-(n\pi/h)\cos(n\pi y/h)]}{\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,\sinh(a\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2})}\cosh[\sqrt{\lambda^2+(n\pi/h)^2}\,(a-x)]\right\} \quad (۳۲)$$

مولفه میدان تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در محل اعمال بار دارای تکینگی از نوع کوشی است. روابط بالا با نتایج بدست آمده درمرجع [۱۸] تطبیق کامل دارد. در ادامه حل نابجایی بدست آمده را می‌توان برای تحلیل ورق مستطیلی الکترومگنتوالاستیک ساخته شده از مواد تابعی حاوی چندین ترک بکار برد که این امر منجر به تشکیل معادلات انتگرالی با تکینگی از نوع کوشی می‌گردد. با حل معادلات انتگرالی، دانسیته نابجایی بر روی وجوه ترکهای احاطه شده در محیط بدست می‌آید و به کمک آن می‌توان ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی را در نوک ترکها محاسبه نمود.

۵- معادلات انتگرالی در محیط های حاوی ترک

حل نابجایی بدست آمده در بخش قبل را می‌توان برای تحلیل صفحه مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با رفتار تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک بکار برد. فرض کنید که در صفحه مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با رفتار تابعی N ترک وجود دارد. معادلات پارامتری ترکها بصورت زیر هستند.

$$x_i = x_i(s)$$
$$y_i = y_i(s) \qquad i\in\{1,2,...,N\} \qquad -1\le s\le 1 \quad (۳۳)$$

سیستم مختصات عمود بر هم t و n طوری انتخاب شده است که محور t مماس بر سطح ترک بوده و مبداء مختصات روی سطح ترک حرکت کند. بردار تنش خارج صفحه‌ای و جابجایی الکتریکی و مغناطیسی درون صفحه‌ای روی سطح ترک i ام بر حسب مولفه‌های تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در مختصات کارتزین بصورت زیر است:

$$\sigma_{zn}(x_i,y_i)=\sigma_{zy}\cos\phi_i-\sigma_{zx}\sin\phi_i$$
$$D_n(x_i,y_i)=D_y\cos\phi_i-D_x\sin\phi_i$$
$$B_n(x_i,y_i)=B_y\cos\phi_i-B_x\sin\phi_i \quad (۳۴)$$

در رابطه بالا ϕ_i زاویه بین محورهای x و t می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجایی با چگالی نامشخص $B_{wj}(t)$، $B_{\phi j}(t)$ و $B_{\psi j}(t)$ روی ترک j ام به مختصات $(x_j(t),y_j(t))$ روی المان بینهایت کوچک $l_j\,dt=\sqrt{[x'_j(t)]^2+[y'_j(t)]^2}\,dt$ میدان تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی ایجاد شده روی سطح ترک i ام بدست می‌آید که در صورتیکه N ترک وجود داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار عبارت خواهد شد از :

$$\sigma_{zn}(x_i(s), y_i(s)) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-1}^{1} [K_{ij}^{11}(s,t) B_{wj}(t) + K_{ij}^{12}(s,t) B_{\phi j}(t) + K_{ij}^{13}(s,t) B_{\psi j}(t)] \times \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$$

$$D_n(x_i(s), y_i(s)) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-1}^{1} [K_{ij}^{21}(s,t) B_{wj}(t) + K_{ij}^{22}(s,t) B_{\phi j}(t) + K_{ij}^{23}(s,t) B_{\psi j}(t)] \times \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$$

$$B_n(x_i(s), y_i(s)) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-1}^{1} [K_{ij}^{31}(s,t) B_{wj}(t) + K_{ij}^{32}(s,t) B_{\phi j}(t) + K_{ij}^{33}(s,t) B_{\psi j}(t)] \times \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$$

(۳۵)

طبق اصل باکنر[۲۶]، مولفه تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترکها در محیط بدون ترک بعد از تغییر علامت در رابطه (۳۵) قرار گرفته و دانسیته نابجایی $B_{wj}(t)$، $B_{\phi j}(t)$ و $B_{\psi j}(q)$ باید محاسبه گردد. در معادله انتگرالی (۳۵) کرنل $K_{ij}(s,t)$ تابع معلومی است.

توابع $\sigma_{zn}(x_i(s), y_i(s))$، $D_n(x_i(s), y_i(s))$ و $B_n(x_i(s), y_i(s))$ نیز توابع معلومی می‌باشند که با توجه به بارگذاری خارجی تعیین می‌شوند. با حل معادله انتگرالی (۳۵) که دارای تکینگی از نوع کوشی است توابع دانسیته نابجایی $B_{wj}(t)$، $B_{\phi j}(t)$ و $B_{\psi j}(q)$ بدست می‌آید.

پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترکهای احاطه شده در محیط بایستی روابطی ارائه نمود که بکمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در نوک ترکها را بر حسب دانسیته نابجایی بر روی ترکها تعیین کرد. با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی، بازشدگی دهانه ترک و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی برای ترک jام از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$w_j^-(s) - w_j^+(s) = \int_{-1}^{s} B_{wj}(t) \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$$

$$\phi_j^-(s) - \phi_j^+(s) = \int_{-1}^{s} B_{\phi j}(t) \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$$

$$\psi_j^-(s) - \psi_j^+(s) = \int_{-1}^{s} B_{\psi j}(t) \sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt \quad j = 1,2,\ldots, N \quad (۳۶)$$

که در آن -1 حد پایین که مشخص کننده ابتدای ترک با طول بی بعد شده واحد و N تعداد ترکها می‌باشد و $-1 \le t \le 1$ $\sqrt{[x_j'(t)]^2 + [y_j'(t)]^2}\, dt$ طول المان بی‌بعد شده ترک است. $w_j^+(s)$ و $w_j^-(s)$ به ترتیب نشان دهنده تغییر مکان لبه بالایی و پایینی، $\phi_j^+(s)$ و $\phi_j^-(s)$ به ترتیب نشان دهنده پتانسیل الکتریکی لبه بالایی و پایینی ترک و $\psi_j^+(s)$ و $\psi_j^-(s)$ به ترتیب نشان دهنده پتانسیل مغناطیسی لبه بالایی و پایینی ترک در نقطه ای واقع بر ترک است.

از آنجائی که باز شدگی خارج از ترکها صفر می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت.

$$\int_{-1}^{1} B_{kj}(t)\sqrt{[x_j'(t)]^2+[y_j'(t)]^2}\,dt=0 \qquad k\in\{w,\phi,\psi\} \tag{۳۷}$$

روابط بالا به معادلات انتگرالی بدست آمده باید اضافه شود تا به لحاظ ریاضی جواب یکتا برای معادلات انتگرالی بدست آید. رابطه (۳۷) از نظر فیزیکی تک مقداری بودن تابع تغییر مکان، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی خارج از ترکها را ایجاب می‌کند.

دانسیته نابجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۳۵) و (۳۷) بدست می‌آید. بعلت تکینگی تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی در نوک ترکها تابعیت دانسیته نابجایی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود که $g_{kj}(t)$ تابع محدود و پیوسته می-باشد.

$$B_{kj}(t)=\frac{g_{kj}(t)}{\sqrt{1-t^2}},\quad -1\le t\le 1,\quad k\in\{w,\phi,\psi\} \tag{۳۸}$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی اولین بار توسط Erdogan و همکاران [۲۷] ارائه گردید. در این روش معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه‌های چندجمله ای چبیشهف و نظائر آن تعیین می‌شود گسسته شده و به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می‌شود با حل این سیستم معادلات جبری دانسیته نابجایی در نقاطی که در آنها معادلات گسسته شده‌اند بدست می‌آید.
ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی برای ترک iام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
(K_{III})_{Li} &= \frac{\sqrt{2}}{4}c_{44}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}+\frac{\sqrt{2}}{4}e_{15}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}\\
&\quad+\frac{\sqrt{2}}{4}h_{15}(y_{Li})\lim_{r_{L_i}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}\\
(K_{III})_{Ri} &= \frac{\sqrt{2}}{4}c_{44}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}+\frac{\sqrt{2}}{4}e_{15}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}\\
&\quad+\frac{\sqrt{2}}{4}h_{15}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}\\
(K_D)_{Li} &= \frac{\sqrt{2}}{4}e_{15}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}-\frac{\sqrt{2}}{4}d_{11}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}\\
&\quad-\frac{\sqrt{2}}{4}\beta_{11}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}\\
(K_D)_{Ri} &= \frac{\sqrt{2}}{4}e_{15}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}-\frac{\sqrt{2}}{4}d_{11}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}
\end{aligned}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\beta_{11}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}$$

$$(K_B)_{Li}=\frac{\sqrt{2}}{4}h_{15}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\beta_{11}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{11}(y_{Li})\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Li}}}$$

$$(K_B)_{Ri}=\frac{\sqrt{2}}{4}h_{15}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{w_i^-(s)-w_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\beta_{11}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\phi_i^-(s)-\phi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{11}(y_{Ri})\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{\psi_i^-(s)-\psi_i^+(s)}{\sqrt{r_{Ri}}}$$

(۳۹)

اندیس‌های L و R به ترتیب بیانگر نوک‌های چپ و راست ترک بوده که با رابطه زیر قابل بیان می باشد.

$$r_{Li}=\left\{[x_i(s)-x_i(-1)]^2+[y_i(s)-y_i(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$r_{Ri}=\left\{[x_i(s)-x_i(1)]^2+[y_i(s)-y_i(1)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(۴۰)

بعد از انجام عملیات جبری، ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$(K_{III}^m)_{Li}=\frac{c_{44}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{wzi}(-1)+$$

$$\frac{e_{15}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\phi i}(-1)+$$

$$\frac{h_{15}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\psi i}(-1)$$

$$(K_{III}^m)_{Ri}=-\frac{c_{44}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{wzi}(1)-$$

$$\frac{e_{15}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\phi i}(1)-$$

$$\frac{h_{15}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\psi i}(1)$$

$$(K_{III}^D)_{Li}=\frac{e_{15}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{wzi}(-1)-$$

$$\frac{d_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\phi i}(-1)-$$

$$\frac{\beta_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}}g_{\psi i}(-1)$$

$$
\begin{aligned}
(K_{III}^{D})_{Ri} = & -\frac{e_{15}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{wzi}(1)+ \\
& \frac{d_{11}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\phi i}(1)+ \\
& \frac{\beta_{11}(y_{Ri})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\psi i}(1) \\
(K_{III}^{B})_{Li} = & \frac{h_{15}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{wzi}(-1)- \\
& \frac{\beta_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\phi i}(-1)- \\
& \frac{\gamma_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(-1)]^2+[y_i'(-1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\psi i}(-1) \\
(K_{III}^{B})_{Ri} = & -\frac{h_{15}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{wzi}(-1)+ \\
& \frac{\beta_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\phi i}(-1)+ \\
& \frac{\gamma_{11}(y_{Li})}{2}\left\{[x_i'(1)]^2+[y_i'(1)]^2\right\}^{\frac{1}{4}} g_{\psi i}(-1)
\end{aligned}
$$

(۴۱)

۶- نتایج و مثالهای عددی

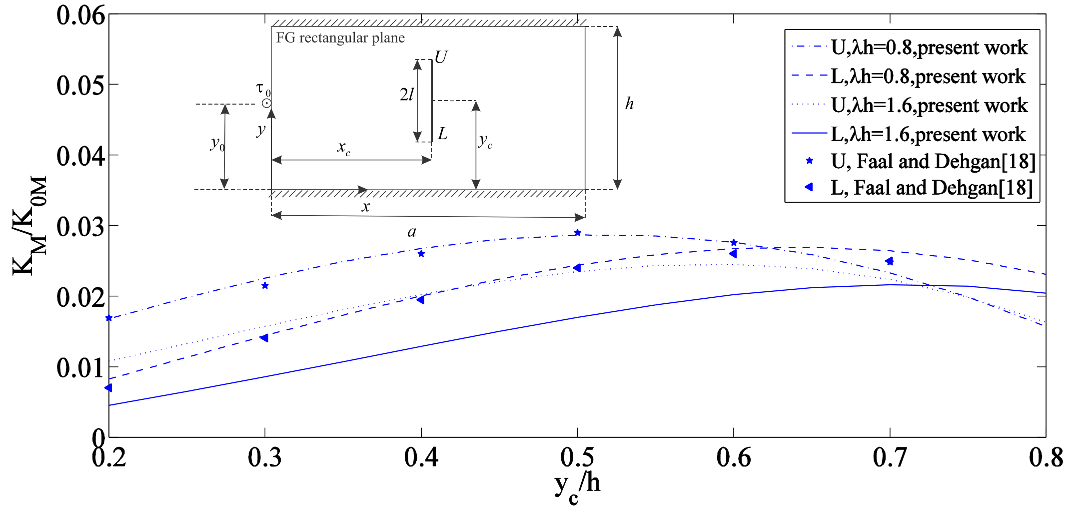
این بخش شامل دو قسمت مهم می‌باشد. در قسمت اول این بخش مثالهایی برای صحت سنجی نتایج و روابط بدست آمده و در بخش دوم مثالهایی برای نشان دادن تاثیر طول ترک و اندرکنش بین ترکها، محل اعمال بار نقطه ای و ثوابت ماده تابعی بر روی ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی انجام شده است. در این مثالها، خواص ماده بصورت زیر می‌باشد:

$$
c_{440}=4.4\times10^{10}\,\frac{N}{m^2},\, e_{150}=5.8\frac{C}{m^2},\, d_{110}=5.64\times10^{-9}\,\frac{C}{Vm^2}
$$
$$
h_{150}=275\frac{N}{Am},\; \gamma_{110}=-2.97\times10^{-4}\,\frac{Ns^2}{C^2},\, \beta_{110}=5.367\times10^{-12}\,\frac{Ns}{VC}
$$

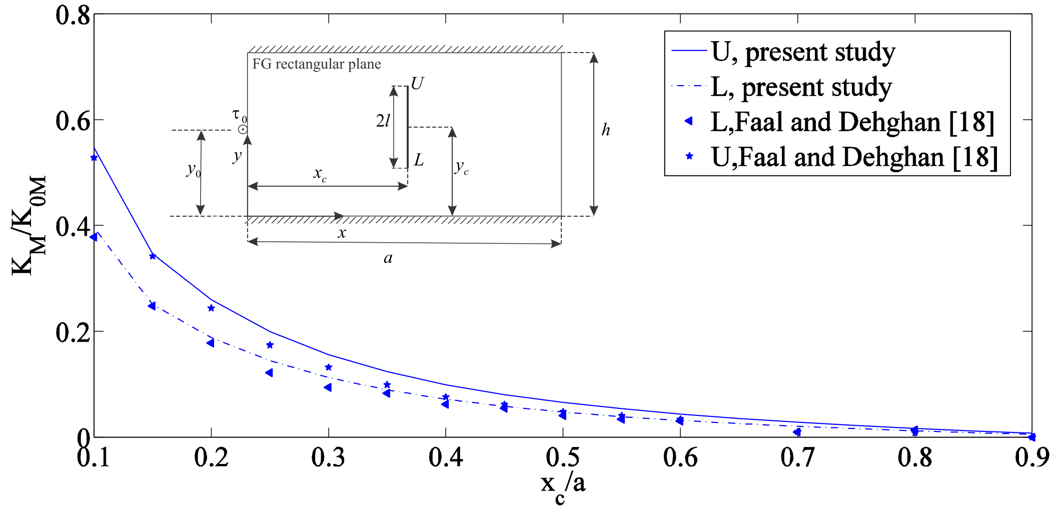
ضریب همبستگی الکترومکانیکی و مگنتومکانیکی که در این مقاله استفاده شده به ترتیب به صورت رابطه $\lambda_D = D_0 e_{150}/\tau_0 d_{110}$ و $\lambda_B = B_0 h_{150}/\tau_0 \beta_{110}$ تعریف می‌شود. ضرایب شدت تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب بوسیله $K_{0M}=\tau_0\big/\sqrt{l}$ ،$K_{0D}=(\tau_0 d_{110})/(e_{150}\sqrt{l})$ و $K_{0B}=(\tau_0\beta_{110})/(h_{150}\sqrt{l})$ بی‌بعد می‌شوند که l بیانگر نصف طول ترک می‌باشد. با صفر قرار دادن خواص الکترومغناطیس، مساله به حالت ورق مستطیلی با خاصیت تابعی تبدیل می‌شوند که توسط Faal and Dehgan [۱۸] ارائه شده است. شکلهای (۳) و (۴) تاثیر موقعیت ترک و ثابت تابعی λ را روی ضریب شدت تنش، برای صفحه مستطیلی با خاصیت تابعی با طول $a=2h$ و عرض h تضعیف شده توسط یک ترک عمودی با طول بی بعد شده $2l/h=0.2$ نشان می‌دهند. که همین دو مثال توسط Faal و Dehgan [۱۸] حل شده است و نتایج مقایسه

گردیده‌اند بطوریکه دیده می‌شود نتایج ارائه شده در این دو نمودار با نتایج ارائه شده توسط آنها تطبیق خوبی دارد. شکل (۳) ضریب شدت تنش بی بعد K_M/K_{0M} را بر حسب فاصله بی بعد y_c/h نشان می‌دهد در حالیکه y_c فاصله عمودی مرکز ترک از لبه پایینی صفحه مستطیلی است. L و U به ترتیب نشان دهنده نوکهای پایینی و بالایی ترک هستند. ضریب شدت تنش بی بعد شده برای دو نوک ترک در ابتدا با نزدیک شدن به بار نقطه ای افزایش یافته و سپس با دور شدن از بار کاهش می‌یابد.

شکل (۴) تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد K_M/K_{0M} را بر حسب فاصله بی بعد x_c/a نشان می‌دهد. چنانچه از نمودار شکل (۴) مشخص است، ضریب شدت تنش بی بعد شده برای دو نوک ترک با دور شدن از بار نقطه ای کاهش می‌یابد.

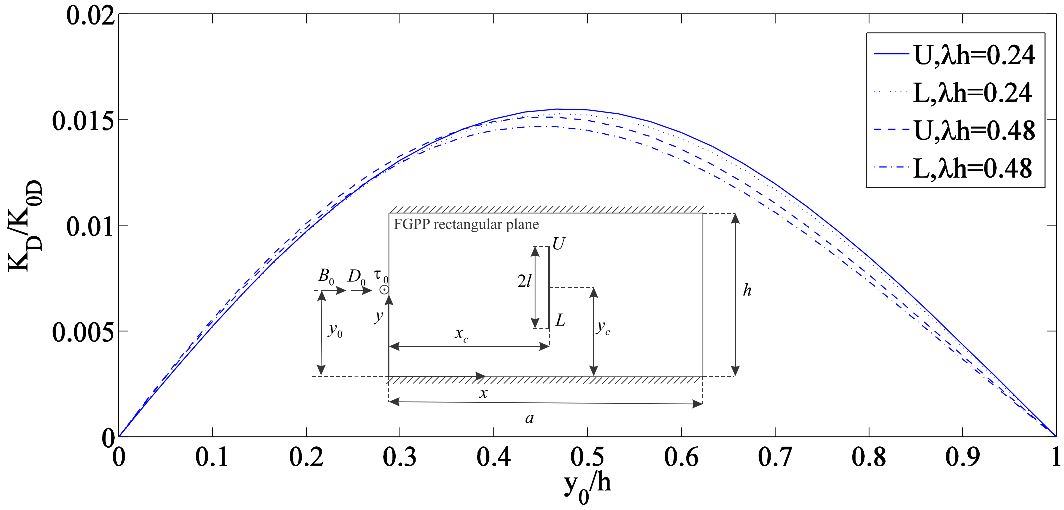


شکل ۳- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده برای یک ترک عمودی برحسب موقعیت ترک

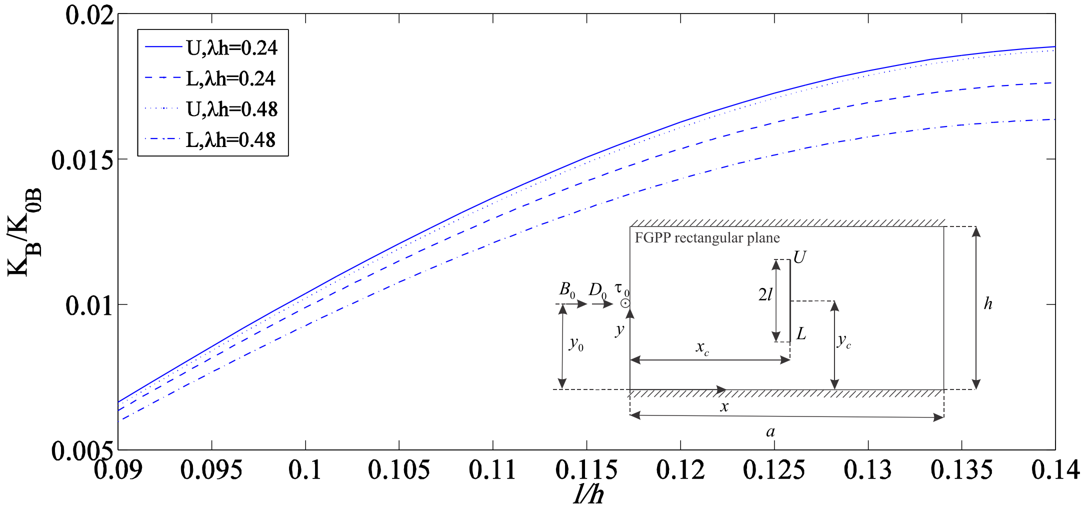


شکل ۴- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده برای یک ترک عمودی برحسب فاصله ترک از بار نقطه ای

در مثال بعدی، تاثیر محل اعمال بار نقطه‌ای روی ضریب شدت جابجایی الکتریکی برای یک صفحه مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتواالاستیک با ضخامت نازک حاوی یک ترک عمودی نشان داده شده است. در این مثال $\lambda_D = 2$ و $\lambda_B = 1$ بوده و $a/h = 3$ می‌باشد. در این مثال مرکز ترک در $y_c = 0.5h$ قرار داشته و طول ترک $l = 0.01(m)$ می‌باشد. K_D/K_{0D} برای نوک U بیشتر از نوک L می‌باشد. دلیل این امر آن است که نوک ترک U نسبت به نوک ترک L دارای مدول الاستیک بیشتری است. چنانچه از نمودار شکل (۵) مشخص است، با نزدیک شدن بار نقطه‌ای به نوکهای ترک، K_D/K_{0D} افزایش یافته و با دور شدن بار نقطه‌ای از نوکهای ترک دوباره کاهش می‌یابد. در شکل (۶)، نمودار ضریب شدت جابجایی مغناطیسی بی بعد بر حسب طول ترک بی بعد شده به ازای پارامترهای تابعی متفاوت $\lambda h = 0.24, 0.48$ برای ورق مستطیلی از جنس ماده الکترومگنتواالاستیک با ضخامت نازک نشان داده شده است. چنانچه از شکل زیر مشخص می‌باشد با افزایش طول ترک و کاهش λh، K_B/K_{0B} افزایش می‌یابد. از این مثال می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات λh، تاثیر زیادی بر روی K_B/K_{0B} دارد.



شکل ۵- نمودار تغییرات ضریب شدت جابجایی الکتریکی بی بعد بر حسب محل اعمال بار نقطه ای به ازای ثابت های

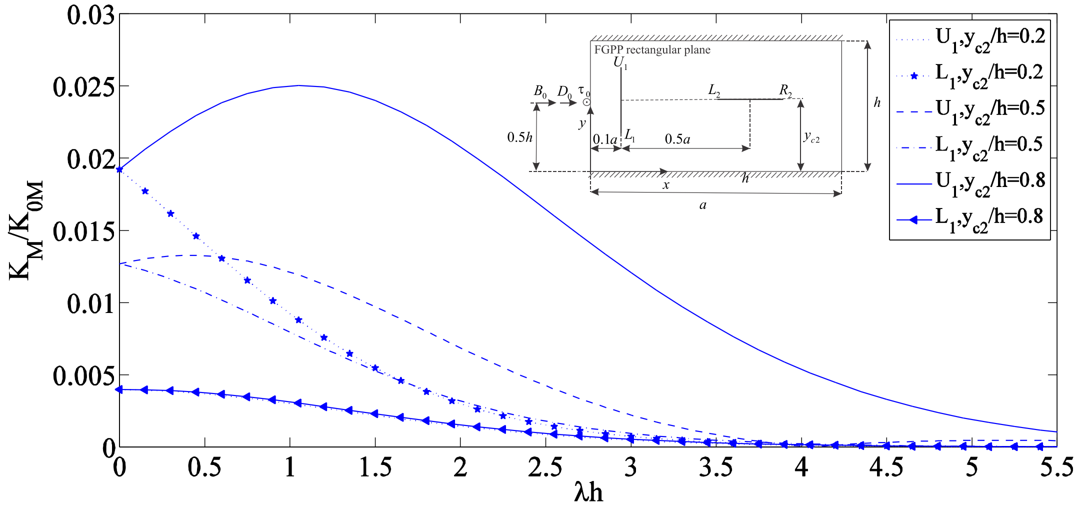


شکل ۶- نمودار تغییرات ضریب شدت جابجایی مغناطیسی بی بعد بر حسب طول ترک بی بعد شده

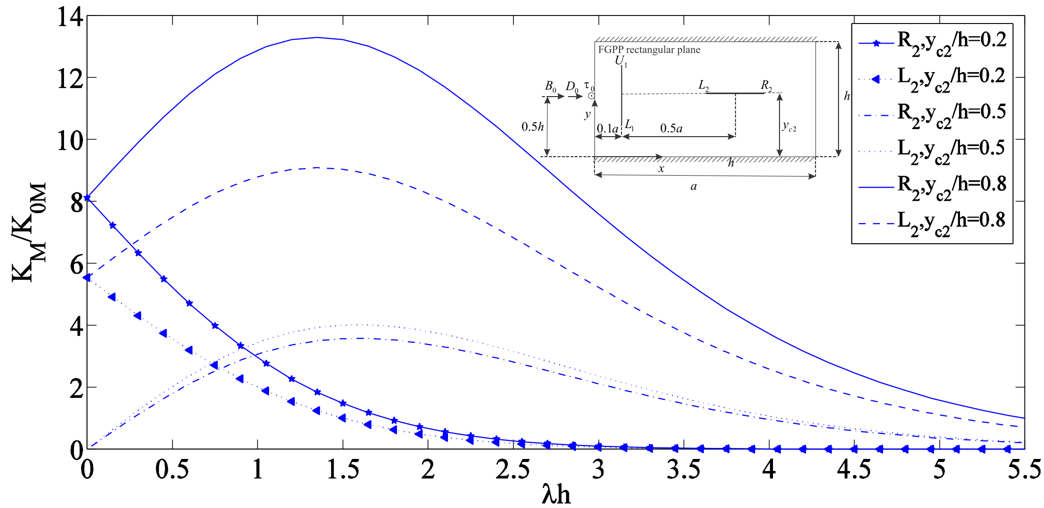
تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده برای دو ترک افقی و عمودی بر حسب λh برای سه مقدار متفاوت $y_{c2}/h = 0.2, 0.5, 0.8$ در شکلهای (۷) و (۸) رسم شده است. شکل (۷) تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد را برای ترک عمودی و شکل (۸) برای ترک افقی نشان می‌دهد. از نمودار شکل (۷) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش فاصله بین نوک ترکها، اندرکنش بین ترکها ضعیف شده و ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.

در شکل (۸) پدیده اثر حفاظتی ترک افقی ظاهر می‌شود. به عبارت دیگر برای $y_{c2}/h \neq 0.5$، ضریب شدت تنش نوک R_2 بیشتر از نوک L_2 است.

در دو مثال آخر، ترک دایروی به شعاع $R = 0.2h$ با معادلات پارامتری زیر مفروض است.



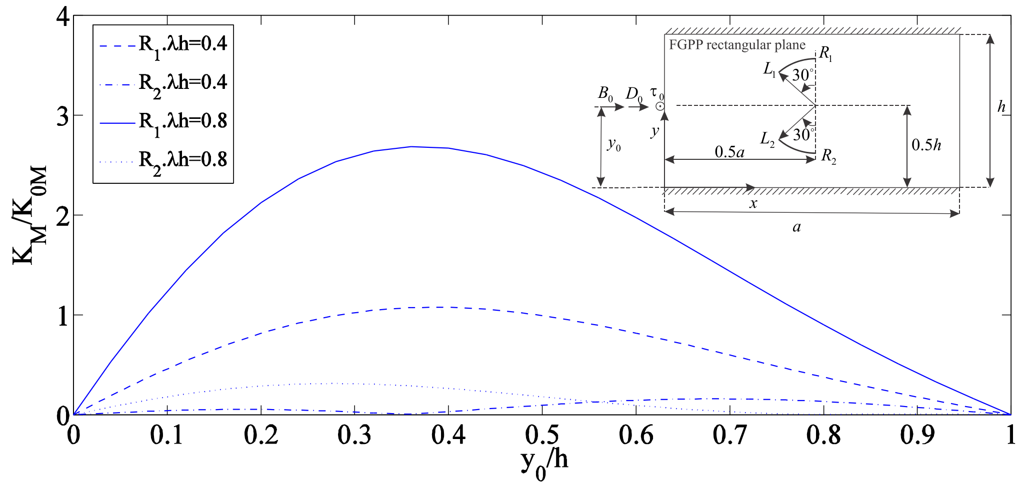
شکل ۷– نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بی‌بعد شده بر حسب ثابت ماده تابعی برای ترک عمودی



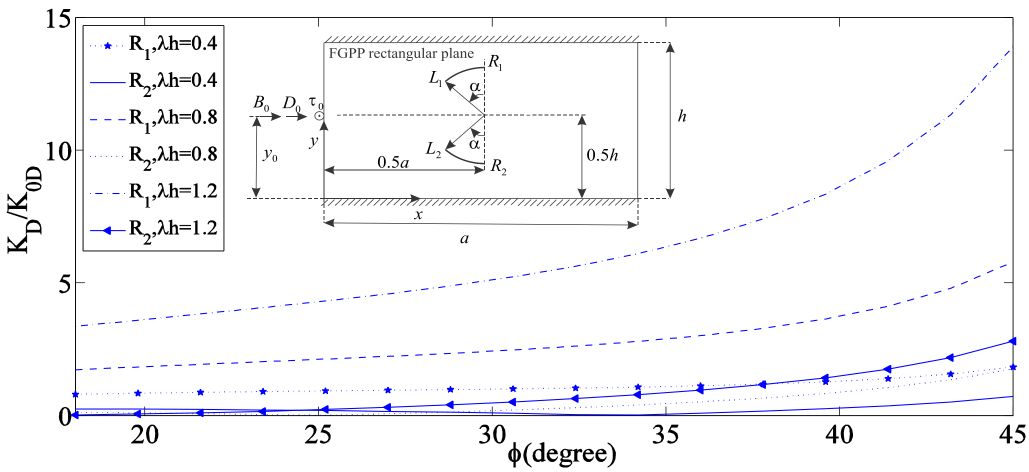
شکل ۸– نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بی‌بعد شده بر حسب ثابت ماده تابعی برای ترک افقی

$$x_1 = x_c + R\sin(\frac{\alpha}{2}(p-1))$$
$$y_1 = y_c + R\cos(\frac{\alpha}{2}(p-1))$$
$$x_2 = x_c + R\sin(\frac{\alpha}{2}(p-1)) \qquad -1 \le p \le 1$$
$$y_2 = y_c - R\cos(\frac{\alpha}{2}(p-1))$$

که (x_c, y_c) مختصات مرکز ترک را نشان می‌دهد. در این دو مثال نیز همانند مثالهای قبل، ورق مستطیلی نازک در نظر گرفته شده است. مقادیر ضرایب شدت تنش بی بعد در نوک ترکها برای دو مقدار متفاوت $\lambda h = 0.4, 0.8$ و برای زاویه $\alpha = \pi/6$ برحسب y_0/h در شکل (۹) ترسیم شده است. تغییرات ضریب شدت تنش برای دو ثابت ماده تابعی رفتار یکسانی دارند.



شکل۹- نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مکانیکی بی‌بعد شده بر حسب محل اعمال بار نقطه ای برای دو ترک منحنی



شکل۱۰- نمودار تغییرضریب شدت جابجایی الکتریکی بی‌بعد شده بر حسب زاویه بین دو ترک منحنی

مطابق این شکل نوک ترک R_1 ضریب شدت تنش بیشتری نسبت به نوک ترک R_2 دارد. زیرا افزایش مدول برشی در محل نوک ترک به نزدیک بودن محل اعمال بار نقطه ای غلبه کرده و موجب بالاتر بودن ضریب شدت تنش در نوک R_1 نسبت به نوک R_2 می‌شود. در نمودار شکل (۱۰) تغییرات ضریب شدت جابجایی الکتریکی بر حسب زاویه α برای سه مقدار متفاوت ثابت ماده تابعی $\lambda h = 0.4, 0.8, 1.2$ رسم شده است. چنانچه از شکل(۱۰) مشهود است، با افزایش زاویه α، طول ترک افزایش یافته و K_D / K_{0D} افزایش می‌یابد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل مکانیک شکست در ورق مستطیل شکل از جنس مواد هوشمند تابعی حاوی چندین ترک، تحت بار نقطه ای خارج صفحه ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکترومغناطیسی انجام شده است.
برای حل مساله، از روش تبدیل انتگرالی و روش توزیع نابجایی استفاده شد.

در این مطالعه حل نابجایی الکتریکی و مغناطیسی هم به همراه نابجایی مکانیکی انجام شده است که با تعریف این نوع نابجایی امکان حل مسائل ترک در محیط‌های الکترومگنتوالاستیک فراهم می‌گردد. همانطوریکه در بخش مربوط به حل مسأله نشان داده شد این نوع نابجایی هم دارای خواصی مشابه نابجایی مکانیکی است. به کمک شرایط مرزی و چند مقداری بودن تغییر مکان، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی خط نابجایی، مولفه های تنش، جابجایی الکتریکی و مغناطیسی بدست آمده است.
مسأله حل شده در این مقاله شامل تحلیل تنش مستطیلی الکترومگنتوالاستیک با خاصیت تابعی شامل تعدادی ترک می‌باشد که در مجموع، در مثالهای حل شده نتایج کلی زیر حاصل گردید.
در مثالهای حل شده برای محیط تضعیف شده توسط یک ترک عمودی، مشاهده شده است که طول ترک و ثابت ماده تابعی باریکه تاثیر زیادی در تغییرات ضرایب شدت میدانی دارد. همچنین تغییر جهت گیری ترک باعث تغییر بردار تنش روی سطح ترک شده و تاثیر زیادی در تغییرات ضرایب شدت میدانی دارد. برای محیط حاوی دو ترک تغییرات مشابهی مشاهده می‌گردد. علاوه بر این در محیط تضعیف شده توسط دو ترک، نوکهای نزدیک به علت اندرکنش بالا ضرایب شدت میدانی بالاتری نسبت به نوکهای دور از هم دارند. همچنین محل اعمال بار نقطه ای یا به عبارت دیگر دوری و نزدیکی بار نقطه ای به نوک ترک به ترتیب باعث کاهش یا افزایش ضرایب شدت میدانی خواهد شد.

تشکر و قدردانی

بدینوسیله از حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج در انجام این تحقیق کمال تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

[1] Gao, C.F., Tong, P., and Zhang, T.Y., ‘‘Fracture Mechanics for a Mode III Crack in a Magnetoelectroelastic’’, International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 6613–6629, (2004).

[2] Wang, B.L., and Mai, Y.W., "Fracture of Piezoelectromagnetic Materials", Mechanics Research Communications, Vol. 31, pp. 65–73, (2004).

[3] Zhong, X.C., and Li, X.F., "Magnetoelectroelastic Analysis for an Opening Crack in a Piezoelectromagnetic Solid", European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 26, pp. 405–417, (2007).

[4] Zhang, X.S., "A Finite Rectangular Sheet with a Pair of Edge Cracks Excited by a Normal Anti-plane Shear Wave", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 35, pp. 1037-1042, (1990).

[5] Ma, S.W., and Zhang, L.X., "A New Solution of an Eccentric Crack off the Center Line of a Rectangular Sheet for Mode-III", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 40, pp. 1-7, (1991).

[6] Lee, K.Y., and Kwon, S.M., "Analysis of Stress and Electric Fields in a Rectangular Piezoelectric Body with a Center Crack under Anti-plane Shear Loading", International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 4859-4869, (2000).

[7] Kwon, S.M., and Lee, K.Y., "Transient Response of a Rectangular Piezoelectric Medium with a Center Crack", European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 20, pp. 457-468, (2001).

[8] Li, X.F., and Lee, K.Y., "Electroelastic Behavior of a Rectangular Piezoelectric Ceramic with an Anti-plane Shear Crack at Arbitrary Position", European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 23, pp. 645-658, (2004).

[9] Zhou, Z.G., Wu, L.Z., and Wang, B., "The Behavior of a Crack in Functionally Graded Piezoelectric/Piezomagnetic Materials under Anti-plane Shear Loading", Archive of Applied Mechanics, Vol. 74, pp. 526–535, (2005).

[10] Qin, Q.H., Kang, Y.L., and Hu., K.Q., "A Moving Crack in a Rectangular Magnetoelectroelastic Body", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 74, pp. 751-770, (2007).

[11] Zhong, X.C., and Zhang, K.S., "Dynamic Analysis of a Penny-shaped Dielectric Crack in a Magnetoelectroelastic Solid under Impacts", European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 29, pp. 242–252, (2010).

[12] Zhang, P.W., "Dynamic Fracture of a Rectangular Limited-permeable Crack in Magneto-Electro-elastic Media under a Time-harmonic Elastic P-Wave", International Journal of Solids and Structures, Vol. 48, pp. 553-566, (2011).

[13] Faal, R.T., Daliri, M., and Milani, A.S., "Anti-plane Stress Analysis of Orthotropic Rectangular Planes Weakened by Multiple Defects", International Journal of Solids and Structures, Vol. 48, pp. 661–672, (2011).

[14] Bagheri, R., Ayatollahi, M., and Mousavi, S.M., "Stress Analysis of a Functionally Graded Magneto-electro-elastic Strip with Multiple Moving Cracks", Mathematics and Mechanics of Solids, Vol. 30, pp. 1-20, (2015).

[15] Bagheri, R., Ayatollahi, M., and Mousavi, S.M., "Analytical Solution of Multiple Moving Cracks in Functionally Graded Piezoelectric Strip", Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 36, pp. 777–792, (2015).

[16] Ayatollahi, M., Monfared, M.M., and Nourazar, M., "Analysis of Multiple Moving Mode-III Cracks in a Functionally Graded Magnetoelectroelastic Half-plane" Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 28, pp. 2823–2834, (2017).

[17] Bagheri, R., Ayatollahi, M., and Mousavi, S.M., "Analysis of Cracked Piezoelectric Layer with Imperfect Non-homogeneous Orthotropic Coating", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 93, pp. 93–101, (2015).

[18] Faal, R.T., and Dehghan, A.A., "Mode III Stress Intensity Factors for Cracked FGM Rectangular Plane", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 140, pp. 17-30, (2015).

[19] Bleustein, J.L., "A New Surface Wave in Piezoelectric Materials", Applied Physics Letters, Vol. 13, pp. 412-413, (1968).

[20] Zhou, Z.G., and Wang, B., "Two Parallel Symmetry Permeable Cracks in Functionally Graded Piezoelectric/Piezomagnetic Materials under Anti-plane Shear Loading", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 4407–4422, (2004).

[21] Deeg, W.F., "The Analysis of Dislocation, Crack and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids", Ph.D. Thesis, Stanford University, San Francisco, USA, (1980).

[22] Pak, Y.E., "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material", Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, pp. 647-653, (1990).

[23] Li, S., Gao, W., and Cross, L.E., "Stress and Electric Displacement Distribution Near Griffith's Type III Crack Tips in Piezoceramics", Materials Letters, Vol. 10, pp. 219-222, (1990).

[24] Sosa, H.A., "Three-dimensional Eigenfunction Analysis of a Crack in a Piezoelectric Material", International Journal of Solids and Structures, Vol. 36, pp. 1-15, (1990).

[25] Gao, H., Zhang, T.Y., and Tong, P., "Local and Global Energy Release Rates for an Electrically Yielded Crack in a Piezoelectric Ceramic", Journal of Mechanics and Physics Solids, Vol. 45, pp. 491-510, (1997).

[26] Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N., and Korsunsky, A.M., "*Solution of Crack Problems: the Distributed Dislocation Technique*", Kluwer: Academic Publishers, (1996)

[27] Erdogan, F., Gupta, G. D., and Cook, T. S., "*Numerical Solution of Singular Integral Equations, Method of Analysis and Solution of Crack Problems*", Edited by G. C. Sih, Noordhoof, Leyden, Holland, (1973).

فهرست نمادهای انگلیسی

$A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$	ضرایب ظاهر شده در تبدیل حل بار نقطه ای
$G_n, H_n, I_n, J_n, K_n, L_n,$	ضرایب ظاهر شده در تبدیل حل نابجایی

$A_{Kn}, B_{Kn}, C_{Kn}, D_{Kn}, E_{Kn}, F_{Kn}$ $A_{K,0}, B_{K,0}, C_{K,0}, D_{K,0}, E_{K,0}, F_{K,0}$ $K = 1,2$	
a	طول ورق مستطیلی
B_x	مولفه جابجایی مغناطیسی در جهت x
B_y	مولفه جابجایی مغناطیسی در جهت y
$B_{wj}, B_{\phi j}, B_{\psi j}$	تابع دانسیته نابجایی
$b_{wz}, b_{\phi z}, b_{\psi z}$	بردار برگرز
$c_{44}(y)$	ضریب الاستیک
D_x	مولفه جابجایی الکتریکی در جهت x
D_y	مولفه جابجایی الکتریکی در جهت y
$d_{11}(y)$	ثابت گذردهی دی الکتریک
$e_{15}(y)$	ثابت پیزوالکتریک
E_x	مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور x
E_y	مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور y
E_z	مولفه میدان الکتریکی عمود بر صفحه
$g_{wj}(t), g_{\phi j}(t), g_{\psi j}(t)$	تابع محدود و پیوسته
$H(x)$	تابع پله‌ای
H_x	مولفه میدان مغناطیسی درون صفحه‌ای در جهت محور x
H_y	مولفه میدان مغناطیسی درون صفحه‌ای در جهت محور y
H_z	مولفه میدان مغناطیسی عمود بر صفحه
h	عرض ورق مستطیلی
$h_{15}(y)$	ثابت پیزومغناطیس
$(K_{III}^B)_{Ri}, (K_{III}^B)_{Li}$	ضرایب شدت جابجایی مغناطیسی نوکهای سمت راست و چپ ترک
$(K_{III}^D)_{Ri}, (K_{III}^D)_{Li}$	ضرایب شدت جابجایی الکتریکی نوکهای سمت راست و چپ ترک
$(K_{III}^M)_{Ri}, (K_{III}^M)_{Li}$	ضرایب شدت تنش نوکهای سمت راست و چپ ترک
K_{0B}	ضریب شدت جابجایی مغناطیسی در صفحه بینهایت

K_{0D}	ضریب شدت جابجایی الکتریکی در صفحه بینهایت
K_{0M}	ضریب شدت تنش در صفحه بینهایت
$K_{ij}(s,t)$	کرنل معادله انتگرالی
l_i	نصف طول ترک iام
N	تعداد ترک
n	متغییر تبدیل فوریه کسینوسی محدود
u,v	مولفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x,y
$w(x,y)$	مولفه جابجایی خارج صفحه‌ای
$W(n,y)$	تبدیل فوریه محدود تغییر مکان $w(x,y)$
$\beta_{11}(y)$	ثابت الکترومغناطیس
$\gamma_{11}(y)$	ثابت نفوذ مغناطیسی
$\delta(x)$	تابع دلتای دیراک
λ	ثابت ماده تابعی
ψ	پتانسیل مغناطیسی
φ	پتانسیل الکتریکی
$\overline{\Phi}(n,y)$	تبدیل فوریه محدود $\bar{\phi}(x,y)$
$\overline{\Psi}(n,y)$	تبدیل فوریه محدود $\overline{\psi}(x,y)$
σ_{nz}	بردار تنش
σ_{zx},σ_{zy}	مولفه های تنش خارج صفحه ای
(η,ξ)	مختصات خط نابجایی

Abstract

In this paper, the static problem of several cracks in a functionally graded piezoelectric–piezomagnetic (FGPP) rectangular plane subjected to concentrated anti-plane mechanical and in-plane electric and magnetic fields is described. The material properties are assumed to vary continuously according to exponential functions along the transverse of the FGPP rectangular plane. The dislocation method and integral transforms technique are applied to obtain a set of Cauchy singular integral equations. The field intensity factors for cracks, are obtained by using the corresponding solution to these equations. The numerical examples of mode-III problem are presented to illustrate the interesting mechanical and electromagnetic coupling phenomena induced by multi-crack interactions. Finally, the effects of material non-homogeneity constant, the cracks length and the cracks configuration upon the field intensity factors are investigated. The obtained conclusions seem useful for design of the magneto-electro-elastic structures and devices of high performance.