

## بررسی ارتعاشات آزاد هیدروالاستیک ورق دایروی قائم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال ساکن

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود و غیرقابل تراکم پرداخته شده است. ابتدا معادلات حاکم بر ورق دایروی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی یا تئوری میندلین با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و نیروهای برشی استخراج شده است. برای تقریب جابجایی‌های ورق از توابع پذیرفتنی هارمونیک چبیشف همراه با توابع مرزی استفاده شده است. سپس معادلات حاکم بر نوسان سیال با بهره‌گیری از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت و ارضای شرایط مرزی حاصل شده است. با استفاده از روش ریتز، فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های ورق دایروی در تماس با سیال بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استخراج شده‌اند. در ادامه، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل ارتفاع سیال درون مخزن، چگالی سیال، نسبت کسر حجمی ماده تابعی و طول مخزن روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور حصول اطمینان از نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی حاصل از ورق دایروی در تماس با سیال در حالت خاص ورق همگن آلومینیومی با نتایج حاصل از آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است.

شهرزاد یوسفزاده<sup>۱</sup>

استادیار

علی اصغر جعفری<sup>۲</sup>

استاد

علیرضا محمدزاده<sup>۳</sup>

دانشیار

واژه‌های راهنما: ورق دایروی، فرکانس طبیعی، ماده مدرج تابعی، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی.

### ۱- مقدمه

ارتعاشات وارد به یک سازه در تماس با سیال پدیده‌ای است که در آن یک سازه با سیال تأثیر متقابل دارد. این پدیده می‌تواند در مواردی موجب از کارافتادگی و خستگی سازه گردد. بنابراین کنترل و حتی تعدیل آن برای موقعیت‌های حساس دارای اهمیت زیادی می‌باشد. بررسی مشخصات ارتعاشی ورق‌ها در تماس با سیال با توجه به کاربرد آن‌ها در صنایع مختلف از مسائل کاربردی مهندسی بوده و مورد توجه بسیاری از محققان می‌باشد [۱]. مطالعه خواص ارتعاش هیدروالاستیک ورق‌ها در صنایع مختلفی از جمله صنایع هسته‌ای، مخازن سوخت، اجزای داخلی راکتورها، صفحات خورشیدی و سازه‌های دریایی و هوایی دارای اهمیت زیادی می‌باشد. بنابراین، آگاهی از رفتار سازه و سیال در اندرکنش دینامیکی بین آنها ضروری به نظر می‌رسد [۲].

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد الیگودرز، الیگودرز sh.yoosefzadeh@gmail.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران ajafari@kntu.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران a-mohamadzadeh@srbiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۳/۲۲، تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۴/۲۵

واضح است که فرکانس‌های طبیعی سازه‌ها از جمله ورق در حالت تماس با سیال متفاوت از فرکانس‌های آن در حالت بدون تماس با سیال می‌باشد [۳]. محققان مطالعات زیادی در زمینه ارتعاشات ورق در تماس با سیال انجام دادند. الهوردی زاده و همکاران یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاشات یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی ارائه دادند. آنها معادلات حاکم بر ورق دایروی را با پاسخهای فرضی و روش کانترویچ حل کردند [۴]. تاریخچه‌ی لو و همکاران به منظور مطالعه ارتعاشات ورق دایروی در تماس با سیال غیرقابل تراکم، با محاسبه جرم افزوده<sup>۱</sup> فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی را تعیین کردند. آنها از دو روش برای استخراج فرکانسهای طبیعی استفاده کردند [۵]. جئونگ<sup>۲</sup> به بررسی ارتعاشات دو ورق دایروی یکسان در تماس با سیال محدود و نامحدود پرداخت. او برای تحلیل خود از روش بسط بسط-فوریه و روش ریلی ریتز کمک گرفت. همچنین اثر فاصله دو ورق روی فرکانسهای طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت [۶].

در سال (۲۰۱۰) دونگ<sup>۳</sup>، به بررسی ارتعاش آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد هدمند در حالت سه بعدی پرداخت. وی در تحقیق خود از روش چبیشف-ریتز با در نظر گرفتن حاصلضرب سریهای چندجمله‌ای چبیشف در توابع مرزی که شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند، برای استخراج فرکانسهای طبیعی استفاده کرد. وی، برای معرفی خواص مادی ورق، تغییرات خواص را در جهت ضخامت به دو صورت در نظر گرفت [۷]. کواک<sup>۴</sup> به مطالعه تأثیر جرم مجازی ناشی از تماس آب روی فرکانسهای طبیعی ورق دایروی پرداخت. او با بکارگیری تبدیل فوریه به محاسبه فاکتورهای نمو جرم مجازی افزوده در حالت بی‌بعد پرداخت [۸].

در سال (۱۹۹۵) امابیلی<sup>۵</sup> به بررسی تأثیر عمق سیال روی رفتار ارتعاشی ورق‌های دایروی و توخالی در تماس با سیال غیرقابل تراکم و غیرویسکوز پرداخت. وی در تحقیق خود از روش‌های مودال و ریلی-ریتز برای تعیین مقادیر ویژه مساله استفاده کرد و در نهایت اثر پارامترهای مختلف روی جرم افزوده را مورد مطالعه قرار داد [۹]. در سال (۲۰۰۰) زو<sup>۶</sup> و چئونگ<sup>۷</sup>، اثر فشار هیدرواستاتیک سیال غیرقابل تراکم روی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در تحقیق خود ورق مستطیلی را که به عنوان دیواره مخزن مکعبی حاوی سیال قرار گرفته مدنظر قرار دادند و برای بدست آوردن مساله مقدار ویژه از روش ریتز استفاده کردند [۱۰].

در سال (۲۰۱۲) حسینی هاشمی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی در تماس با سیال پرداختند. آنها برای استخراج روابط حاکم بر ورق از تئوری میندلین و برای استخراج روابط حاکم بر سیال از معادله برنولی استفاده کردند. در این تحقیق، فرکانس‌های طبیعی ورق در دو حالت ورق در تماس با سیال از یک وجه و دو وجه استخراج شد [۱۱]. اخیراً جئونگ و همکاران ارتعاش آزاد یک ورق دایروی با تکیه گاه گیردار در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها جابجایی دینامیکی ورق در تماس با سیال را با استفاده از ترکیب توابع مودال ورق خشک تعیین کردند.

<sup>1</sup> Added mass

<sup>2</sup> Jeong, K. H.

<sup>3</sup> Dong, C. Y.

<sup>4</sup> Kwak, M. K.

<sup>5</sup> Amabili M.

<sup>6</sup> Zhou, D.

<sup>7</sup> Cheung, Y. K.

توابع ویژه مسئله را از روش ریلی-ریتز بدست آورده که برای استخراج شکل مودها و فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال استفاده کردند. نتایج حاصل از این روش با نتایج عددی مورد مقایسه قرار گرفت [۱۲]. در سال (۲۰۰۳) مایونگ مو جانگ<sup>۱</sup> و همکاران، فرکانسهای طبیعی دو ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای معادله حرکت ورقهای در تماس با سیال از روش بسط سریهای بسل-فوریه و روش ریلی-ریتز استفاده کردند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج عددی حاصل از نرم افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در نهایت فرکانسهای طبیعی دو ورق در تماس با سیال و بدون تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفته و اثر فاصله دو ورق بر فرکانسهای طبیعی ورقها مورد مطالعه قرار گرفت [۱۳]. در سال (۱۳۹۲) قدیریان و همکاران به بررسی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل کامپوزیتی در تماس با سیال پرداختند. آنها در تحقیق خود از کامپوزیت نوع ارتوتروپیک و برای تحلیل ارتعاشات آزاد از روش ریلی-ریتز استفاده کردند. تحقیق آنها نشان داد که تحت تأثیر ارتعاش ورق در سیال حرکتی ایجاد می شود که باعث افزایش انرژی جنبشی سیستم می شود [۱۴].

احسان عسگری و همکاران در سال (۲۰۱۳) ارتعاش یک ورق دایروی غوطه ور در سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند. برای دستیابی به پتانسیل سرعت سیال از هر دو روش حداقل مربعات و گالرکین برای تعیین ضرایب مجهول و برای تعیین فرکانسهای طبیعی ورق از روش ریلی-ریتز استفاده کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها با نتایج آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفت [۱۵].

در سال (۱۳۹۴) رضوانی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق تقویت شده در آب پرداختند. آنها مطالعه خود را با سه روش تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام دادند و از تئوری ورق ارتوتروپیک برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند. همچنین آنها از روش جرم افزوده برای مدلسازی اثر سیال روی ارتعاشات ورق بهره بردند [۱۶].

در سال (۲۰۱۶) ونگ<sup>۲</sup> و همکاران به مطالعه ارتعاشات یک ورق مستطیلی متحرک در درون سیال به صورت عمودی پرداختند. آنها برای مدلسازی رفتار ورق از تئوری کلاسیک و برای مدلسازی رفتار سیال از رابطه برنولی و پتانسیل سرعت استفاده کردند. همچنین، با محاسبه جرم افزوده روی ورق، فرکانسهای طبیعی و سرعت بحرانی آن را استخراج کردند [۱۷].

در سال (۲۰۱۷)، خورشیدی و همکاران ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی در تماس با سیال را بصورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. ورق مستطیل به عنوان یکی از دیوارههای مخزن مکعبی حاوی سیال در نظر گرفته شده است. آنها از آزمایش مودال برای استخراج فرکانسهای طبیعی ورق استفاده کردند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ابعاد مخزن روی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل در تماس با سیال را بررسی کردند [۱۸]. مواد هدفمند (FGM<sup>۳</sup>) مواد مرکب جدید با ریزساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته و طبق یک تابع معین از یک سطح به سطح دیگر تغییر می کند. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته ای از سرامیک و فلز است.

<sup>1</sup> Myung, M. J.

<sup>2</sup> Wang Y. Q.

<sup>3</sup> Functionally Graded Material

این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. مزیت اصلی استفاده از این مواد این است که قادر به تحمل درجه حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده و مقاوم در برابر خوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارد. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که در مقابل درجه حرارت بالا باید مقاوم باشند استفاده می‌شود. این نوع از مواد به دلیل ویژگی خاص در سپرهای حرارتی موشک‌ها، مخازن شیمیایی و محیط‌های سایشی بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۹]. با توجه به اهمیت مواد هدفمند در صنایع، محققین زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این نوع از مواد پرداختند.

در سال (۲۰۰۹) جعفری مهرآبادی و همکارانش ارتعاش آزاد یک ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک بدست آورده و برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده کردند. سپس برای دو نوع شرط مرزی اثر نسبت کسر حجمی و ضخامت لایه های پیزوالکتریک روی فرکانسهای طبیعی را مورد تحلیل قرار دادند [۲۰].

حسینی هاشمی و همکاران ارتعاشات ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای تحلیل ارتعاشات ورق روی بستر الاستیک از روش تحلیلی استفاده کردند [۲۱]. در سال (۲۰۱۴) علی بخششی و کوروش خورشیدی ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تقریب جابجایی های ورق با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم از توابع سعی هارمونیک مثلثاتی استفاده کردند. برای دستیابی به فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش ریلی-ریتز بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استفاده کردند. در نهایت تأثیر پارامترهای ضریب توانی نسبت حجمی، نسبت طول، نسبت ضخامت ورق، ارتفاع سیال، عرض مخزن و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی قرار گرفت [۲۲]. مرور کارهای انجام شده توسط محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاش ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود کارهای محدودی انجام شده است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد تابعی با ضخامت ثابت در تماس با سیال محدود با بکارگیری تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق یک مجموعه توابع پذیرفتنی چبیشف که شرایط مرزی را بطور کامل ارضا می‌کنند در نظر گرفته شده است. برای استخراج روابط انرژی کرنشی و جنبشی حاکم بر رفتار دینامیکی ورق از رابطه‌ی خطی کرنش-جابجایی استفاده شده است. برای دستیابی به فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش انرژی ریتز و بر مبنای کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. معادلات حاکم بر رفتار نوسانی سیال، با حل معادله لاپلاس و ارضای شرایط مرزی سیال به دست آمده است.

در تحقیق حاضر، اثر سیال روی نوسانات ورق دایروی بدون استفاده از جرم افزوده که روش تقریبی است بررسی شده است و در فرمولاسیون ارائه شده اندرکنش بین سیال و ورق بصورت دائمی بوده و نوسان هر کدام روی دیگری قابل محاسبه است. برای دستیابی به نتایج عددی برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب تهیه شده و در بخش نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب توانی کسر حجمی، نسبت ضخامت به شعاع ورق، شعاع مخزن، ارتفاع سیال و چگالی سیال روی فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی

و تحلیل قرار گرفته است. برای حصول اطمینان از جوابها، نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده در حالت خاص ورق دایروی همگن (آلومینیوم) در تماس با سیال با نتایج حاصل از آزمایشات تجربی آنالیز مودال مورد مقایسه قرار گرفته است.

## ۲- روابط حاکم

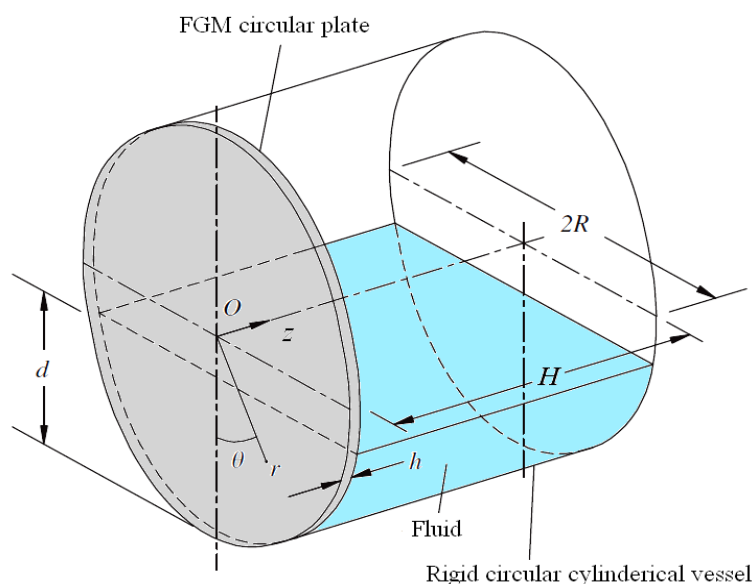
### ۲-۱- روابط حاکم بر ورق دایروی

ورق دایروی از جنس مواد تابعی را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۱) به عنوان درپوش یک مخزن استوانه‌ای با دیواره‌های صلب در تماس با سیال محدود قرار گرفته است.  $d$  و  $h$  به ترتیب بیانگر شعاع ورق، ارتفاع سیال درون مخزن و ضخامت ورق و  $H$  بیانگر طول مخزن می‌باشد.

مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی یا تئوری میندلین، مولفه‌های جابجایی یک نقطه از ورق طبق رابطه زیر تعیین می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r + z\psi_r \\ u_2 &= u_\theta + z\psi_\theta \\ u_3 &= u_z \end{aligned} \quad (1)$$

که  $z$  فاصله یک نقطه از لایه میانی و  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب نشان دهنده جابجایی‌های ورق در راستای محورهای  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  است.  $u_r$  و  $u_\theta$  جابجایی‌های صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای  $r$  و  $\theta$  است. همچنین،  $\psi_r$  و  $\psi_\theta$  شیب‌های ورق ناشی از خمش به ترتیب در راستای محورهای  $r$  و  $\theta$  است.



شکل ۱- هندسه ورق دایروی در تماس با سیال و نحوه استقرار محورهای مختصات.

با فرض تغییر شکل‌های کوچک و روابط تنش- کرنش خطی، مولفه‌های کرنش ورق دایروی طبق روابط زیر قابل بیان است [۱۹]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_1}{\partial r} = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{z}{r} \left( \psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right), \\ 2\varepsilon_{rz} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) = \left( \psi_r + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) = \left( \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right),\end{aligned}\quad (۲)$$

با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای برای ورق از جنس مواد تابعی، تنش‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{r\theta}), \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{\theta z}), \\ \sigma_{rz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{rz})\end{aligned}\quad (۳)$$

که  $\nu$  بیانگر ضریب پواسون است و در این تحقیق مقدار آن ثابت در نظر گرفته شده است.  $E(z)$  مدول الاستیسیته ورق می‌باشد که در راستای  $Z$  طبق رابطه ساده توانی زیر تغییر می‌کند [۱۸]:

$$E(z) = E_c + (E_m - E_c) \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^p \quad (۴)$$

که در آن  $E_m$  و  $E_c$  به ترتیب بیانگر مدول الاستیسیته فلز و سرامیک و  $p$  ضریب توانی کسر حجمی است که مقدار آن بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد. واضح است با انتخاب  $p = 0$  به ورق همگن از جنس فلز دست می‌یابیم. مقادیر بی‌بعد زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{2r}{R} - \delta, & \bar{\theta} &= \theta, & \bar{z} &= \frac{2z}{h}, \\ \eta &= \frac{a}{b}, & \lambda &= \frac{h}{b}\end{aligned}\quad (۵)$$

که در آن  $\bar{R} = b - a$  و  $\delta = (b + a)/(b - a)$  است. برای ارتعاشات آزاد، جابجایی‌های ورق طبق توابع سعی هارمونیک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \bar{U}_r(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} = F_1^b(\bar{r}) \sum_{i=1}^I u_{ri} R_i(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \quad (۶)$$

$$u_\theta(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \bar{U}_\theta(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} = F_2^b(\bar{r}) \sum_{j=1}^J u_{\theta j} R_j(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \quad (۷)$$

$$u_z(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \bar{U}_z(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} = F_3^b(\bar{r}) \sum_{k=1}^K u_{zk} R_k(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \quad (۸)$$

$$\psi_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \bar{\psi}_r \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} = F_r^b(\bar{r}) \sum_{l=1}^L \psi_{rl} R_l(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \quad (۹)$$

$$\psi_\theta(\bar{r}, \bar{\theta}, t) = \bar{\psi}_\theta \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} = F_\theta^b(\bar{r}) \sum_{q=1}^Q \psi_{\theta q} R_q(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \quad (۱۰)$$

در روابط فوق،  $\psi_{\theta q}$  و  $\psi_{rl}$ ،  $u_{zk}$ ،  $u_{\theta j}$ ،  $u_{ri}$  در روابط فوق،  $L$ ،  $K$ ،  $J$ ،  $I$  و باید تعیین شوند و  $Q$  تعداد جمله‌های مورد نیاز توابع پذیرفتنی برای تقریب جابجایی ورق می‌باشد. ( $f = R_f(\bar{r})$ )  
 $i, j, k, l, q$ ) چند جمله‌ای مرتبه‌ی  $f$ ام چبیشف است که بصورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$R_f(\bar{r}) = \cos(f \cos^{-1} \bar{r}), \quad \bar{r} \in [-1, 1], \quad f = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۱)$$

برای  $F_e^b(\bar{r})$  ( $e = 1, 2, 3, r, \theta$ ) توابع مرزی هستند که شرایط مرزی لبه‌ی ورق دایروی را ارضا می‌کنند. برای لبه گیردار این توابع مساوی  $1 - \bar{r}$  می‌باشد [۲۳].

با جایگذاری روابط (۶) تا (۱۰) در مولفه‌های کرنش رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{2}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{2}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \left[ (\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left( -\frac{2}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} (n\bar{U}_r + \bar{U}_\theta) + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{U}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \\ &+ \bar{z} \frac{h}{2} \left( -\frac{2}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} (n\bar{\psi}_r + s\bar{\psi}_\theta) + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \left( \bar{\psi}_r + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \left( \bar{\psi}_\theta - \frac{2n}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \bar{U}_z \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (۱۲)$$

جایگذاری مولفه‌های کرنش در رابطه (۱۲) در رابطه (۳) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \left[ \frac{2}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) + \right. \\ &\left. \frac{2\nu}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \left[ (\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \left[ \frac{2}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \left[ (\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \right. \\ &\left. + \frac{2\nu}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[ \left( -\frac{2}{\bar{R}(\bar{r}+\delta)} (n\bar{U}_r + \bar{U}_\theta) + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{U}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ &+ \left. \bar{z} \frac{h}{2} \left( -\frac{2}{\bar{R}(\bar{r}+\delta)} (n\bar{\psi}_r + s\bar{\psi}_\theta) + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \right] \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left( \bar{\psi}_r + \frac{2}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{rz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left( \bar{\psi}_\theta - \frac{2n}{\bar{R}(\bar{r}+\delta)} \bar{U}_z \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}\end{aligned}$$

انرژی کرنش الاستیک ورق  $U_p$  از رابطه زیر تعیین می‌شود [۲۵]:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) r dr d\theta dz \quad i, j = r, \theta, z \quad (14)$$

رابطه انرژی کرنشی  $U_p$  برحسب پارامترهای بی‌بعد معرفی شده در رابطه (۵) بصورت زیر درمی‌آید:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \left( \frac{\bar{R}}{2} \right)^2 \left( \frac{h}{2} \right) (\bar{r} + \delta) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} \quad i, j = r, \theta, z \quad (15)$$

انرژی جنبشی  $T_p$  ورق طبق رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho(z) [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] r dr d\theta dz, \quad i, j = r, \theta, z \quad (16)$$

رابطه (۱۶) برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر می‌شوند:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \rho(z) [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] \left( \frac{\bar{R}}{2} \right)^2 \left( \frac{h}{2} \right) (\bar{r} + \delta) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $\rho(z)$  چگالی ورق می‌باشد که طبق قانون ساده توانی برای مواد هدفمند مطابق رابطه (۱۸) در جهت ضخامت ورق تغییر می‌کند [۲۵]:

$$\rho(z) = \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^p \quad (18)$$

## ۲-۲- معادلات حاکم بر نوسان سیال

شکل (۱) شکل شماتیک یک مخزن استوانه‌ای صلب را نشان می‌دهد که حاوی سیال غیرویسکوز و غیرقابل تراکم می‌باشد. از تابع پتانسیل سرعت  $\Phi(r, \theta, z, t)$  برای توصیف نوسانات سیال درون مخزن استفاده شده است. حرکت سیال ناشی از ارتعاش ورق دایروی درون مخزن استوانه‌ای از حل معادله لاپلاس برحسب پتانسیل سرعت به شکل زیر قابل تعیین است [۲۶]:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$



در دیواره‌ها و انتهای مخزن که صلب هستند، سرعت سیال مساوی صفر است. در نتیجه:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0. \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\frac{h}{2}+H} = 0. \quad (21)$$

با استفاده از روش تفکیک متغیرها، پاسخ معادله (۱۹) به شکل  $\Phi(r, \theta, z, t) = i\omega\varphi(r, \theta, z)\exp(i\omega t)$  قابل بیان است. جایگذاری این پاسخ در معادله (۱۹) و با اعمال شرایط مرزی (۲۰) و (۲۱)، پاسخ عمومی معادله مذکور به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = i\omega \cos n\theta \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n\left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) \left[ \cosh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) \right] e^{i\omega t} \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)،  $J_n\left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right)$  تابع بسل نوع اول است. پارامتر فرکانسی  $\beta_{ns}$  با استفاده از شرط مرزی (۲۰) طبق رابطه (۲۳) تعیین شود:

$$J_n(\beta_{ns}) = 0 \quad (23)$$

که در آن (۴) بیانگر مشتق تابع بسل نسبت به متغیر  $r$  است. حل معادله (۲۳) منجر به تعیین پارامتر فرکانسی  $\beta_{ns}$  برای هر مقدار از  $n$  و  $s$  می‌شود.

### ۳-۲- اندرکنش بین ورق و سیال

جابجایی دینامیکی سیال در راستای عمود بر سطح ورق باید جابجایی ورق در همان راستا برابر باشد. به عبارت دیگر، در محل تماس ورق و سیال باید شرط پیوستگی یا سازگاری برقرار باشد. این شرط بیان می‌کند که بین ورق و سیال یک تماس دائمی در محل تماس وجود دارد. طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial u_z}{\partial t}. \quad (24)$$

جایگذاری روابط (۸) و (۲۲) در رابطه (۲۴)، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n\left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) \left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[ \sinh\left(\frac{\beta_{ns}\left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns}\left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) \right] \cos n\theta \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^K u_{3k} F_3^b(\bar{r}) R_k(\bar{r}) \cos n\theta$$

با استفاده از سری‌های فوریه [۲۱]، ضریب  $E_{ns}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{ns} = \frac{\int_0^R r (\sum_{k=1}^K u_{zk} F_3^b(\bar{r}) R_k(\bar{r})) J_n\left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) dr}{\left[ \sinh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) \right]} \times \frac{1}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \int_0^R r J_n^2\left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) dr} \quad (26)$$

طبق این رابطه، پتانسیل سرعت سیال برحسب جملات مجهول  $u_{zk}$  به جای ضرایب مجهول  $E_{ns}$  بیان می‌شود. از آنجایی که سیال موردنظر بصورت ایده‌ال، غیرقابل تراکم و غیرویسکوز در نظر گرفته شده است، امواج سطح آزاد سیال به واسطه ارتعاش ورق نادیده گرفته شده است. به عبارت دیگر، از اغتشاش سیال صرفنظر شده است. انرژی جنبشی سیال طبق رابطه (۲۷) بیان می‌شود [۲۸]:

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\theta \int_0^R \left[ \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=\frac{h}{2}} r dr d\theta \quad (27)$$

که  $\rho_f$  چگالی سیال و محدوده انتگرال‌گیری مساحتی است که ورق در تماس با سیال است. همچنین محدوده تغییرات  $\theta$  را در دو حالت  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  یا  $d \leq R$  و  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$  یا  $d \geq R$  در نظر می‌گیریم که رابطه (۲۷) برای این دو حالت بصورت زیر در می‌آید.

وقتی ارتفاع سیال برابر  $d \leq R$  باشد:

$$T_{f1} = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\theta \int_{\bar{R}}^R \left[ \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=\frac{h}{2}} r dr d\theta, \quad (28)$$

که در آن  $\bar{R} = \frac{R-d}{\cos \theta}$  و  $\theta = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{d}{R} \right)$

وقتی ارتفاع سیال برابر  $d \geq R$  باشد:

$$T_{f2} = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\pi \int_0^R \left[ \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=\frac{h}{2}} r dr d\theta - \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\theta \int_{\bar{R}}^R \left[ \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=\frac{h}{2}} r dr d\theta \quad (29)$$

که در آن  $\bar{R} = \frac{d-R}{\cos \theta}$  و  $\theta = \cos^{-1} \left( \frac{d}{R} - 1 \right)$

برای محاسبه  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$  از شرط سازگاری در رابطه (۲۴) بهره می‌گیریم:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = i\omega \cdot F_3^b(\bar{r}) \sum_{k=1}^K u_{3k} R_k(\bar{r}) \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (30)$$

با جایگذاری روابط (۲۲) و (۳۰) در روابط (۲۸) و (۲۹) و انتگرال‌گیری از روابط حاصل، انرژی جنبشی سیال برای دو حالت مذکور بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$(T_{f1}, T_{f2}) = -\frac{1}{2} \rho_f(\Gamma_1, \Gamma_2) \omega^2 \int_0^R F_3^b(\bar{r}) \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n \left( \frac{\beta_{ns} r}{R} \right) \times \left[ \cosh \left( \frac{\beta_{ns} Z}{R} \right) + \tanh \left( \frac{\beta_{ns} \left( H + \frac{h}{2} \right)}{R} \right) \sinh \left( \frac{\beta_{ns} Z}{R} \right) \right] \times \left( \sum_{k=1}^K u_{3k} R_k(\bar{r}) e^{2i\omega t} \right) r dr \quad (31)$$

که در آن:

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( 1 - \frac{d}{R} \right) + \frac{1}{4} \sin 2 \left[ \tan^{-1} \left( 1 - \frac{d}{R} \right) \right] \quad (32)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( 1 - \frac{d}{R} \right) - \frac{1}{4} \sin 2 \left[ \tan^{-1} \left( 1 - \frac{d}{R} \right) \right] \quad (33)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۳۱)، رابطه زیر برای انرژی جنبشی سیال حاصل می‌شود:

$$(T_{f1}, T_{f2}) = -\frac{1}{2} \rho_f(\Gamma_1, \Gamma_2) \omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K A_{ns} B_{ns} u_{zk}^2 e^{2i\omega t} \quad (34)$$

که مقدار ضرایب  $A_{ns}$  و  $B_{ns}$  در ضمیمه آمده است.

#### ۴-۲- روش حل

در حالت ارتعاش آزاد، انرژی کل سیستم از مجموع انرژی کرنشی و انرژی جنبشی ورق و سیال حاصل می‌شود. طبق این تعریف داریم:

$$\Pi = (U_p)_{max} - (T_f + T_p)_{max} \quad (35)$$

روش ریتز ایجاب می‌کند که انرژی کل رابطه (۳۱) باید نسبت به ضرایب مجهول کمینه شود. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{ri}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_{\theta j}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_{zk}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{rl}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{\theta q}} = 0 \quad (36)$$

رابطه (۳۲) منجر به معادله مقدار ویژه زیر می‌شود:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = 0 \quad (37)$$

در رابطه (۳۳)،  $[K]$  و  $[M]$  به ترتیب ماتریس‌های مربع سختی و جرم هستند که ابعاد آنها برابر مجموع  $[I, J, K, L, Q]$  است. همچنین،  $\{\Delta\}$  بردار ستونی ضرایب به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\Delta\} = \{ \{u_{ri}\} \quad \{u_{\theta j}\} \quad \{u_{zi}\} \quad \{\psi_{rl}\} \quad \{\psi_{\theta q}\} \}^T \quad (38)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \{u_{ri}\} &= \{u_{r1} \quad u_{r2} \quad \dots \quad u_{rI}\}^T \\ \{u_{\theta j}\} &= \{u_{\theta 1} \quad u_{\theta 2} \quad \dots \quad u_{\theta J}\}^T \\ \{u_{zi}\} &= \{u_{z1} \quad u_{z2} \quad \dots \quad u_{zK}\}^T \end{aligned} \quad (39)$$

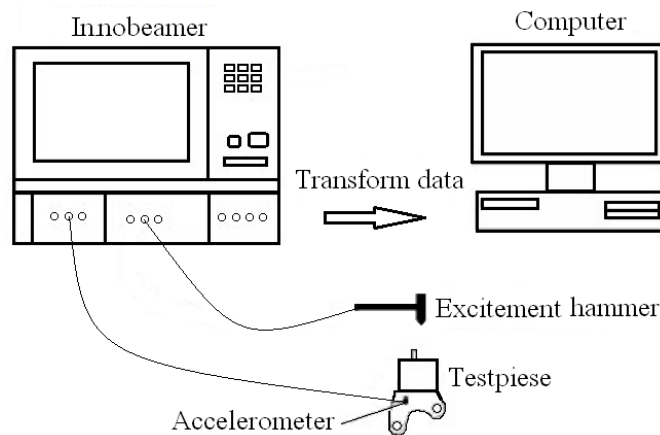
$$\begin{aligned} \{\psi_{rL}\} &= \{\psi_{r1} \quad \psi_{r2} \quad \dots \quad \psi_{rL}\}^T \\ \{\psi_{\theta Q}\} &= \{\psi_{\theta1} \quad \psi_{\theta2} \quad \dots \quad \psi_{\theta Q}\}^T \end{aligned}$$

فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال، با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب در رابطه (۳۷) قابل تعیین است. ریشه‌های دترمینان مذکور مربع مقادیر ویژه (فرکانس‌های ویژه) است. توابع ویژه یا همان شکل مودهای متناظر با مقادیر ویژه با جایگذاری مقادیر ویژه در دستگاه معادلات رابطه (۳۷) و حل آنها به دست می‌آید.

### ۳- آزمایش مودال

تعیین فرکانس طبیعی یک سازه از اهداف مهم مهندسان و طراحان در مطالعه دینامیکی سازه‌ها می‌باشد. فرکانسهای طبیعی یک سازه در حین ساخت با روشهای تحلیلی قابل تعیین است اما لازم است فرکانسهای بعد از ساخت و مونتاژ سازه تعیین شود که در این حالت روش تجربی یکی از روشهای کارآمد به شمار می‌رود. آزمایش مودال<sup>۱</sup> کلاسیک یکی از آزمایشات ارزشمند در تعیین پارامترهای مودال (فرکانس‌ها، نسبت‌های میرایی و شکل مودها) با اندازه‌گیری پاسخ‌های فرکانسی سازه می‌باشد [۲۹].

این آزمایش با اندازه‌گیری داده‌های ورودی و خروجی توابع پاسخ فرکانس (FRF<sup>۲</sup>) در حوزه فرکانسی یا توابع پاسخ ضربه (IRF<sup>۳</sup>) در حوزه زمان قابل اجرا می‌باشد [۳۰]. برای انجام آزمایش مودال کلاسیک نیاز به تجهیزاتی همچون چکش ضربه، شتاب سنج، کارت داده‌برداری<sup>۴</sup> و سیستم رایانه می‌باشد که شکل شماتیک و نحوه مونتاژ آنها در انجام این آزمایش در شکل (۲) به نمایش در آمده است.



شکل ۲- شکل شماتیک تجهیزات آزمایش مودال و نحوه مونتاژ آنها

<sup>۱</sup>Modal test

<sup>۲</sup> Frequency response function

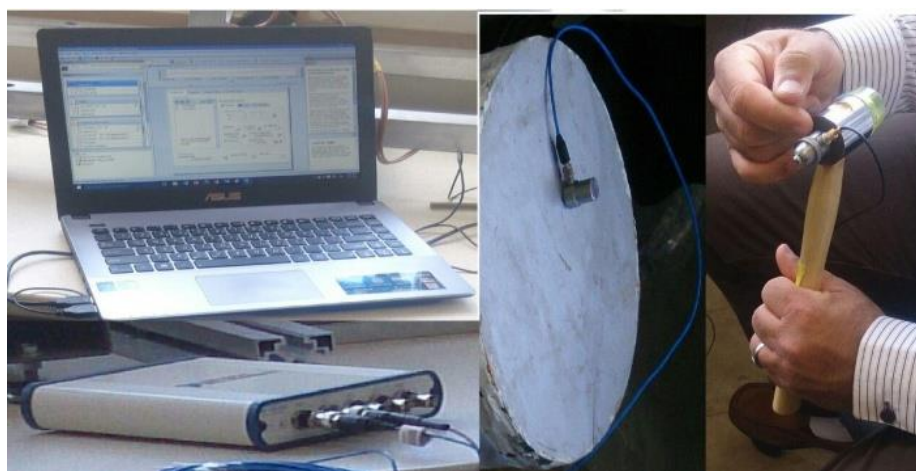
<sup>۳</sup> Impact response function

<sup>۴</sup> Innobeamer

برای انجام آزمایش مودال ورق دایروی همگن از جنس آلومینیوم، ابتدا مخزن استوانه‌ای یکسان با دیواره‌های صلب از جنس فولاد ST37، با ضخامت دیواره 5mm، قطر خارجی 22cm و طول 33cm مطابق شکل (۳-ا) تهیه شد و ورق‌های دایروی از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته  $E = 70GPa$ ، با ضخامت 2mm ساخته شد و در چهار حالت مخزن حاوی سیال با ارتفاع‌های  $d = 0.5R$ ،  $d = R$ ،  $d = 1.5R$  و  $d = 2R$  مورد آزمایش قرار گرفت. به منظور حصول اطمینان از نتایج آزمایش، مقرر شد هر تست سه بار انجام شود. لذا جمعاً ۱۲ بار آزمایش انجام گرفت. در شکل (۳-ب) یک نمونه ورق با ضخامت 2mm و شعاع 22cm نمایش داده شده است. مطابق شکل (۳-ا) ورق‌های تهیه شده به یک سر مخزن با چسب چسبانده شد تا شرایط مرزی گیردار فراهم شود. واضح است سطحی از ورق دایروی که در تماس با سیال قرار می‌گیرد دارای قطر 21cm می‌باشد.



شکل ۳- (a) مخزن ساخته شده برای انجام تست مودال (b) ورق دایروی از جنس آلومینیوم خالص



شکل ۴- آزمایش مودال ورق دایروی و نحوه نصب تجهیزات

تجهیزات بکار رفته برای انجام آزمایش مودال این پژوهش که در آزمایشگاه دینامیک و ارتعاشات دانشگاه صنعتی اراک انجام گرفت به شرح زیر می‌باشد: شتاب سنج از نوع 87002b100m1، نیروسنج از نوع 9712b50 و کارت داده برداری از نوع Ni USB-4432 ساخت شرکت کیستلر<sup>۱</sup> سوئیس.

تجهیزات مطابق شکل (۴) مونتاژ و آماده آزمایش شدند.

برای اطمینان از دقت جواب‌های بدست آمده، آزمایش در هر حالت روی سه مخزن با شرایط یکسان تکرار شد و نتایج حاصل بصورت جدولی ارائه گردید. سپس میانگین جواب‌ها به عنوان جواب نهایی ثبت گردید که در بخش بعدی ارائه شده است.

#### ۴- بحث بر روی نتایج

در این تحقیق، برای صحنه‌گذاری نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده، نتایج به دست آمده از این روش در حالت خاص ورق همگن آلومینیومی در تماس با سیال با نتایج حاصل از آزمایش مودال در حالت لبه گیردار مورد مقایسه قرار گرفته است. سیال مورد استفاده در این تحقیق آب است که چگالی آن در حدود  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است. برای اطمینان از نتایج آزمایشات، هر آزمایش روی سه نمونه ورق یکسان در تماس با سیال تکرار شد و میانگین فرکانس‌های حاصل به عنوان نتیجه نهایی در نظر گرفته شد. برای تشخیص اینکه فرکانس بدست آمده مربوط به کدام مود ارتعاشی ورق می‌باشد نتایج حاصل با نتایج حاصل از کار تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت و از تطابق پاسخ‌ها مود ارتعاشی متناظر با آن مشخص گردید. در جداول (۲) و (۳) فرکانس‌های طبیعی حاصل از دو روش تحلیلی و تجربی برای ورق با ضخامت 2mm و در دو حالت مخزن حاوی آب با ارتفاع‌های  $d = R$  و  $d = 2R$  مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تطابق خوبی بین نتایج دو روش وجود دارد. همچنین به منظور درک بهتر اختلاف فرکانس‌های هر آزمایش، انحراف معیار استاندارد برای هر کدام محاسبه شده است.

#### جدول ۲- مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیومی با شعاع 21cm.

ضخامت 2mm و ارتفاع سیال  $d = R$

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
دهم	نهم	هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	
1249	1130	1045	930	831.2	658.5	512.8	275.2	234.6	91.4	نتایج آزمایش
2.87	2.66	0.9	2.7	6.33	4.02	2.15	3.25	4.5	3.03	ا.م.* آزمایشها
1301	1201	1095	1024	909	621	498	302	250	93	نتایج تحلیلی
4.1	6.2	4.7	10.1	9.3	5.6	2.8	9.6	6.56	1.72	درصد خطا

\* انحراف معیار استاندارد

<sup>1</sup> Kistler

### جدول ۳- مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیومی با شعاع 21cm.

ضخامت 2mm و ارتفاع سیال  $d = 2R$

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نتایج آزمایش	85.75	175.6	255.8	438	487.3	542	646	696.2	713	805.5
ا.م.* آزمایشها	2.85	4.65	3.02	4.15	6.16	2.25	5.85	0.45	3.11	4.47
نتایج تحلیلی	90	159	261	423	463	526	707	729	762	795
درصد خطا	4.77	9.4	2	3	4.9	2.9	9.4	4.7	6.8	1.3

\* انحراف معیار استاندارد

### جدول ۴- خواص مکانیکی ماده مدرج تابعی و سیال

نوع ماده	چگالی	مدول یانگ	ضریب پواسون
آلومینیوم	$2700 \text{ kg/m}^3$	$70 \text{ GPa}$	۰,۳
آلومینا	$4500 \text{ kg/m}^3$	$380 \text{ GPa}$	۰,۳
سیال	$1000 \text{ kg/m}^3$	-	-

برای دستیابی به نتایج عددی، یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی متشکل از آلومینیوم (به عنوان فلز) و آلومینا (به عنوان سرامیک) در تماس با سیال در نظر گرفته شده است. مشخصات ورق و سیال مطابق جدول (۴) در نظر گرفته شده است.

برای دستیابی به نتایج کلی‌تر، پارامتر فرکانسی بی‌بعد به صورت  $\beta = \omega R^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$  تعریف گردیده که در آن  $D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$  [۳۱].

در جدول (۵) پارامتر بی‌بعد فرکانسی مربوط به ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف ارتفاع سیال درون مخزن، طول مخزن و نسبت ضخامت ورق بر شعاع آن با در نظر گرفتن  $p = 1$  و  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  و  $n = 1$  ارائه شده است.

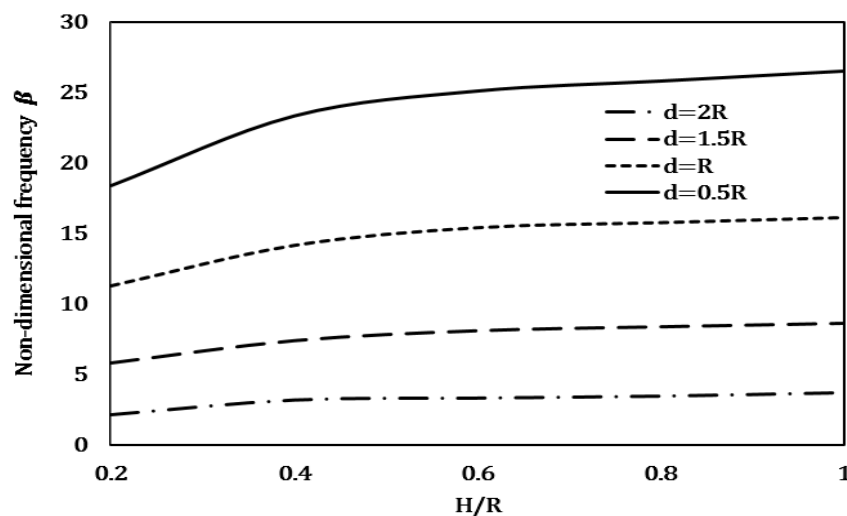
نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش طول استوانه، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال افزایش می‌یابد و این تغییر در ابتدا با شیب تند انجام می‌گیرد ولی رفته رفته از شدت آن کاسته می‌شود. این موضوع بیانگر آن است که سیالات دوردست تأثیر چندانی بر رفتار ارتعاشی ورق ندارند. همچنین، طبق این جدول، برای تمام مقادیر ضخامت ورق، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال با افزایش ارتفاع سیال درون مخزن کاهش می‌یابد. این امر نیز به دلیل افزایش جرم سیستم به دلیل افزایش سیال درون مخزن می‌باشد.

در شکل (۶) تأثیر تغییرات طول مخزن بر فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با شرایط مرزی لبه گیردار برای مقادیر مختلف ارتفاع سیال درون مخزن نمایش داده شده است. در ترسیم این نمودارها از مقادیر  $p = 2$ ،  $n = 1$  و  $h = 4 \text{ mm}$  و چگالی سیال  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  استفاده شده است.

از نمودارهای این شکل نتیجه می‌شود که با افزایش طول مخزن فرکانسهای طبیعی ورق افزایش می‌یابد. این افزایش در ابتدا با شیب تند انجام می‌شود ولی با افزایش بیشتر طول مخزن نمودارهای تغییرات فرکانس طبیعی افقی شده و به عدد ثابتی همگرا می‌شوند. طبق این شکل، افزایش ارتفاع سیال درون مخزن نیز باعث کاهش فرکانسهای طبیعی ورق دایروی می‌شود.

**جدول ۵-** پارامتر بی‌بعد فرکانسی  $\beta = \omega R^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$  برای ارتعاش آزاد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف  $d$  و  $H$

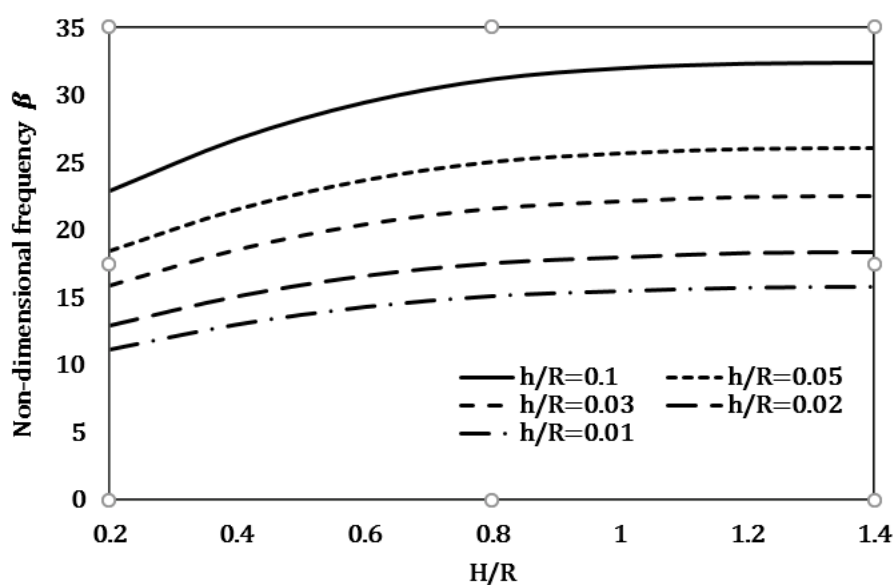
h/R	H	d=0	d=0.2R	d=0.4R	d=0.6R	d=0.8R	d=R
0.1	H=0.2R	15.07	11.69	9.25	7.03	5.43	3.47
	H=0.4R	15.57	12.05	9.78	7.35	5.75	3.78
	H=0.6R	15.89	12.50	9.98	7.59	5.94	3.93
	H=0.8R	17.93	13.19	10.43	7.78	6.13	4.01
	H=R	18.06	13.47	10.55	7.87	6.20	4.05
	H=1.2R	18.15	13.49	10.57	7.89	6.22	4.06
0.2	H=0.2R	20.15	16.48	12.12	9.88	8.08	5.64
	H=0.4R	21.29	17.55	13.17	10.92	9.11	6.65
	H=0.6R	22.29	18.06	14.50	11.14	10.27	7.75
	H=0.8R	25.17	19.22	15.24	12.61	11.61	8.94
	H=R	26.19	19.62	15.49	12.77	11.72	8.99
	H=1.2R	26.31	19.67	15.52	12.79	11.73	9.00
0.3	H=0.2R	25.78	22.33	18.00	15.29	14.96	10.18
	H=0.4R	27.99	25.41	20.18	17.45	15.11	11.31
	H=0.6R	29.80	26.43	21.65	18.72	16.21	12.23
	H=0.8R	30.15	27.91	22.00	19.65	20.13	13.22
	H=R	31.20	28.75	23.43	20.46	22.34	14.55
	H=1.2R	31.22	28.76	23.44	20.47	22.34	14.55



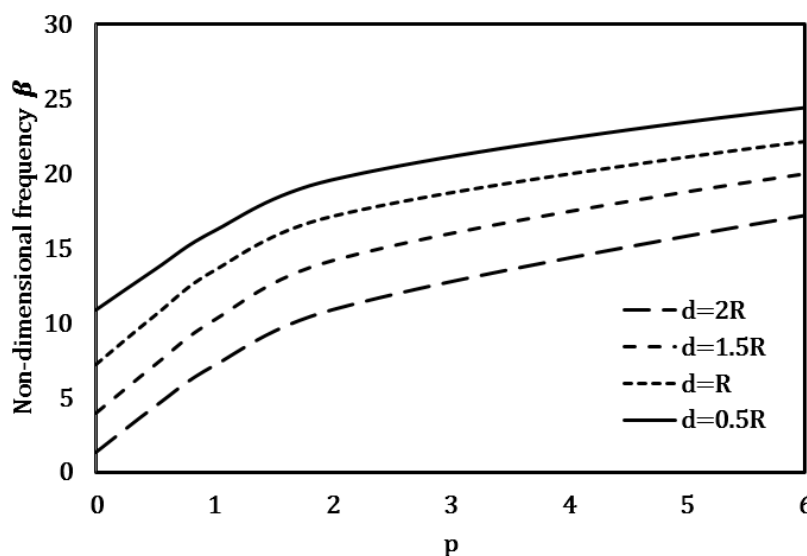
**شکل ۶-** نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال بر حسب تغییرات طول مخزن برای مقادیر مختلف  $d$ .



به منظور بررسی تأثیر طول مخزن حاوی سیال و ضخامت ورق دایروی روی فرکانس‌های طبیعی ورق از جنس مواد تابعی در تماس با سیال، نمودارهای شکل (۷) با شرایط تکیه‌گاهی لبه گیردار ترسیم شده‌اند. در ترسیم این نمودارها از مقادیر  $p = 1$ ،  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ،  $p = 2$ ،  $d=R$  و  $n = 1$  استفاده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش طول مخزن در ابتدا باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی می‌شود ولی رفته رفته این افزایش ناچیز شده و به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. همچنین نمودارهای این شکل نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق، فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش یافته و همگرایی فرکانس‌ها به یک مقدار ثابت با شیب تندتری اتفاق می‌افتد.



شکل ۷- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال بر حسب تغییرات طول مخزن برای مقادیر مختلف ضخامت ورق.

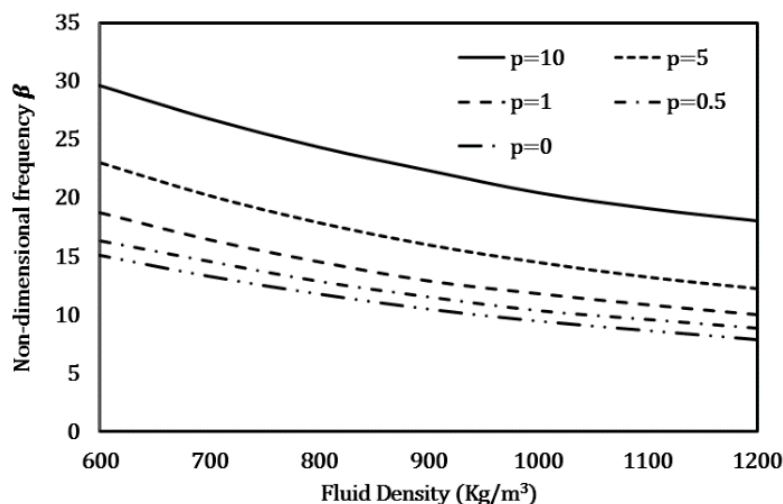


شکل ۸- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال بر حسب تغییرات توان کسر حجمی ماده تابعی برای مقادیر مختلف ارتفاع سیال درون مخزن.

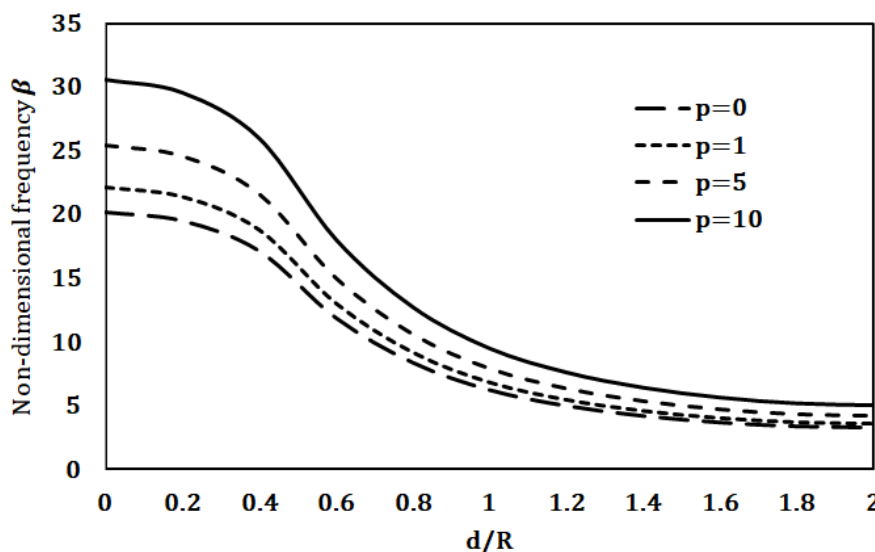
در شکل (۸) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با لبه‌های گیردار برحسب توان کسر حجمی ماده تابعی برای مقادیر مختلف ارتفاع سیال درون مخزن نمایش داده شده است. برای ترسیم این نمودار از مقادیر  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ،  $n = 1$  و  $H=2R$  استفاده شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که برای تمام مقادیر ارتفاع سیال درون مخزن، با افزایش توان کسر حجمی ماده تابعی، مقادیر پارامتر فرکانسی بی‌بعد افزایش می‌یابد که این افزایش برای مقادیر  $p \leq 2$  با شیب بیشتری افزایش می‌یابد.

در شکل (۹) نمودار تغییرات پارامتر بی‌بعد فرکانسی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با لبه‌های گیردار برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف توان کسر حجمی ماده تابعی به نمایش درآمده است. در ترسیم این نمودار از مقادیر  $d = R$  و  $H = 2R$  استفاده شده است. همانگونه که انتظار می‌رفت، نتایج این شکل بیان می‌کند که با افزایش چگالی سیال، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی کاهش می‌یابد. نتیجه دیگری که می‌توان از این شکل گرفت آن است که هر چه توان کسر حجمی ماده تابعی افزایش می‌یابد مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. این موضوع را می‌توان به دلیل افزایش سختی ورق به واسطه افزایش درصد سرامیک ماده تابعی دانست.

به منظور بررسی تأثیر ارتفاع سیال درون مخزن روی فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال، نمودارهای شکل (۱۰) با شرایط تکیه‌گاهی لبه گیردار ترسیم شده‌اند. در ترسیم این نمودارها از مقادیر  $h = 3\text{mm}$ ،  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  و  $n = 1$  استفاده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش ارتفاع سیال درون مخزن باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی می‌شود و این روند در محدوده ارتفاع سیال  $d=0.4R$  تا  $d=1.6R$  (یا ۲۰٪ الی ۸۰٪ ارتفاع سیال) با شیب تندتری اتفاق می‌افتد. این موضوع را افزایش سطح تماس سیال با ورق و نهایتاً افزایش جرم سیستم به واسطه افزایش حجم سیال پشت ورق در این محدوده نسبت داد.



شکل ۹- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و لبه‌های گیردار برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف  $p$ .



شکل ۱۰- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و لبه‌های گیردار بر حسب تغییرات ارتفاع سیال برای مقادیر مختلف  $p$ .

## ۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر ارتعاشات آزاد یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی واقع در یک سر مخزن استوانه‌ای حاوی سیال محدود مورد بررسی قرار گرفت و جهت تحلیل ورق از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده شد. برای تحلیل رفتار نوسانی سیال از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت استفاده شد. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شدند:

- مقادیر حاصل از حل تحلیلی ارائه شده تطابق خوبی با مقادیر حاصل از آزمایشات تجربی دارد.
- مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در حالت بدون تماس با سیال بیشتر از حالت تماس با سیال است.
- با افزایش طول مخزن، مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی تا مقدار معینی افزایش یافته سپس به عدد ثابتی همگرا می‌شود.
- با افزایش ارتفاع سیال درون مخزن، مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی بطور قابل توجهی کاهش می‌یابد.
- با افزایش توان کسر حجمی ماده تابعی مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد.
- اثر کاهش سیال روی فرکانس‌های طبیعی با افزایش ضخامت ورق افزایش می‌یابد.
- بیشترین اثر کاهش سیال درون مخزن روی فرکانس‌های طبیعی در محدوده ۲۰٪ الی ۸۰٪ ارتفاع مخزن اتفاق می‌افتد.

**ضمیمه:**

ثابت‌های  $A_{ns}$  و  $B_{ns}$  در رابطه (۲۹) بصورت زیر می‌باشند:

$$A_{ns} = \frac{\left[ \cosh\left(\frac{\beta_{ns}z}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns}z}{R}\right) \right]_{z=\frac{h}{2}}}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[ \sinh\left(\frac{\beta_{ns}\left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns}\left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) \right]_{z=\frac{h}{2}}}$$

یا

$$A_{ns} = \frac{\left[ \cosh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) - \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) \right]}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[ \sinh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) \right]}$$

و

$$B_{ns} = \int_0^R \frac{\int_a^b F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) \cos^2(k \cos^{-1} \bar{r}) J_n\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) r dr}{\int_0^R r J_n^2\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) dr} \times F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) J_n\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) r dr$$

## مراجع

- [1] Amiri, J. V., Nikkhoo, A., Davoodi, M. R., and Hassanabadi, M. E., "Vibration Analysis of a Mindlin Elastic Plate under a Moving Mass Excitation by Eigen-function Expansion Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 53-64, (2013).
- [2] Hasheminejad, S. M., Khaani, H. A., and Shakeri, R., "Free Vibration and Dynamic Response of a Fluid-coupled Double Elliptical Plate System using Mathieu Functions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 75, pp. 66-79, (2013).
- [3] Kerboua, Y., Lakis, A. A., Thomas, M., and Marcouiller. L., "Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with Fluid", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 12, pp. 2570-2586, (2008).
- [4] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., and Bahrami, M. N., "Nonlinear Free and Forced Vibration Analysis of Thin Circular Functionally Graded Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, No. 4, pp. 966-984, (2008).
- [5] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., and Shabani, R., "Asymmetric Free Vibration of Circular Plate in Contact with Incompressible Fluid", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, (2013).
- [6] Jeong, K. H., "Free Vibration of Two Identical Circular Plates Coupled with Bounded Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, No. 4, pp. 653-670, (2003).
- [7] Dong, C. Y., "Three-dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates using the Chebyshev-Ritz Method", *Materials & Design*, Vol. 29, No. 8, pp.1518-1525, (2008).
- [8] Kwak, M. K., "Hydroelastic Vibration of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201, No. 3, pp. 293-303, (1997).
- [9] Amabili, M., "Effect of Finite Fluid Depth on the Hydro Elastic Vibrations of Circular and Annular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, No. 4, pp. 909-925, (1996).
- [10] Zhou, D., and Cheung, Y. K., "Vibration of Vertical Rectangular Plate in Contact with Water on One Side", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, No. 5, pp. 693-710, (2000).
- [11] Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., and Rokni, H., "Natural Frequencies of Rectangular Mindlin Plates Coupled with Stationary Fluid", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 36, No. 2, pp. 764-778, (2012).
- [12] Jeong, K. H., Lee, G. M., and Kim, T. W., "Free Vibration Analysis of a Circular Plate Partially in Contact with a Liquid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 1, pp. 194-208, (2009).

- [13] Myung, J. J., and Young, H. C., "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-Coupled Circular Plates", *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, (2003).
- [۱۴] قدیریان، حسین، قضاوی، محمدرضا، دهقانی فیروزآبادی، روح الله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق های کامپوزیتی در تماس با سیال به روش ریتز، سومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات، تهران، انجمن آکوستیک و ارتعاشات ایران، (۱۳۹۲).
- [15] Askari, E., Jeong, K. H., and Amabili, M., "Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, (2013).
- [۱۶] رضوانی، حسین؛ فاضلی، حمید، سعید کیاست، مهدی، حاجی هاشمی، قاسم، محاسبه تأثیر پارامتر جرم افزوده بر روی فرکانس سازه در سیال توسط حل عددی، تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی، نشریه علمی و پژوهشی امیرکبیر، دوره ۴۷، شماره ۲، ۶۰-۷۰، (۱۳۹۴).
- [17] Wang, Y. Q., Xue, S. W., Huang, X. B., and Du, W., "Vibrations of Axially Moving Vertical Rectangular Plates in Contact with Fluid", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 1450092, (2016).
- [18] Khorshidi, K., Akbari, F., and Ghadirian, H., "Experimental and Analytical Modal Studies of Vibrating Rectangular Plates in Contact with a Bounded Fluid", *Ocean Engineering*, Vol. 140, pp. 146-154, (2017).
- [19] Jomehzadeh, E., Saidi, A. R., and Atashipour, S. R., "An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates", *Materials and Design*, Vol. 30, No. 9, pp. 3679-3685, (2009).
- [20] Mehrabadi, S. J., Kargarnovin, M. H., and Najafizadeh M. M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Coupled Circular Plate with Piezoelectric Layers", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, No. 8, pp. 2008-2021, (2009).
- [21] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., and Omid M., "Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates using First-order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, No. 5, pp. 1276-1291, (2010).
- [22] Khorshidi, K., and Bakhsheshy, A., "Free Natural Frequency Analysis of an FG Composite Rectangular Plate Coupled with Fluid using Rayleigh–Ritz Method", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, (2014).
- [23] Zhou, D., Au, F. T., Cheung, K. Y. K., and Lo, S. H., "Three-dimensional Vibration Analysis of Circular and Annular Plates Via the Chebyshev–Ritz Method", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 12, pp. 3089-3105, (2003).
- [24] Fox, L. P., "Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis", No. 519.4 F6, Oxford University Press, London, United Kingdom, (1968).

- [25] Hejripour, F., and Saidi A. R., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates using Differential Quadrature Method", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 226, No. 2, pp. 485-497, (2012).
- [26] Myung, J. J., and Young, H. C., "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-Coupled Circular Plates", KSME International Journal, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, (2003).
- [27] Bracewell, R., "The Fourier Transform and its Applications", Vol. 84, CRC Press, (2017).
- [28] Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., and Taher, H. R. D., "Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates on Elastic Foundations and Vertically in Contact with Stationary Fluid by the Ritz Method", Ocean Engineering, Vol. 37, No. 2, pp.174-185, (2010).
- [29] Rao, S., "Mechanical Vibrations", 4th Edition, Pearson Education, Upper Saddle River, USA, (2004).
- [30] Ren, W. X., Zhao, T., and Harik, I. E., "Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 130, No. 7, pp. 1022-1031, (2004).
- [31] Hosseini-Hashemi, S., Atashipoor, S. R., Karimi, M., and Es'haghi, M., "Free Vibration of Functionally Graded Elliptical Plates", Iranian Journal of Marine Engineering, Vol. 15, No. 8, pp. 43-60, (2012).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$u_1, u_2$  و  $u_3$ : جابجایی ورق در جهات  $r, \theta$  و  $z$

$\psi_r$  و  $\psi_\theta$ : چرخش ورق در راستای  $r, \theta$

$\nu$ : ضریب پواسون

$E(z)$ : مدول الاستیسیته

$p$ : ضریب توانی کسر حجمی

$F_e^b(\bar{r})$ : توابع مرزی

$u_{ri}, u_{\theta j}, u_{zk}, \psi_{rl}$  و  $\psi_{\theta q}$ : ضرایب مجهول میدان جابجایی ورق

$U_p$ : انرژی کرنشی ورق

$T_p$ : انرژی جنبشی ورق

$T_f$ : انرژی جنبشی سیال

$\rho(z)$ : چگالی ورق

$\Phi(r, \theta, z, t)$ : تابع پتانسیل سرعت

$J_n \left( \frac{\beta_{ns} r}{R} \right)$ : تابع بسل نوع اول

$\beta_{ns}$ : پارامتر فرکانسی

$\rho_f$ : چگالی سیال

$\Pi$ : انرژی کل سیستم

$\omega$ : فرکانس طبیعی

$H$ : ارتفاع سیال درون مخزن

$h$ : ضخامت ورق

$R$ : شعاع مخزن

$d$ : ارتفاع سیال درون مخزن



## Abstract

This study investigates the free vibration of a thick FG circular plate in contact with an inviscid and incompressible fluid. Analysis of the plate is based on First-order Shear Deformation Plate Theory (FSDT) with consideration of rotational inertial effects and transverse shear stresses. Dynamic transverse displacements of the plate are approximated by set of admissible Chebyshev functions which is required to satisfy the geometric boundary conditions. Potential theory together Bernouli's equation are utilized to obtain the fluid pressure on the free surface of the plate. The governing equation of the oscillatory behavior of the fluid is obtained by solving Laplace equation and satisfying its boundary conditions.

The natural frequencies and mode shapes of the plate are determined using Rayleigh-Ritz method based on minimizing the Rayleigh quotient. The effects of the geometrical parameters such as height of the fluid, plate thickness to its radius ratio, fluid density, vessel height and volume fraction index on natural frequencies and mode shapes are investigated. Comparison of analytically outcome of this study is made with results of the experimental modal test for homogeneous Aluminum plate.