

## مطالعه اثر فشار هیدرواستاتیک روی ارتعاشات آزاد ورق دایروی در تماس با سیال محدود روی بستر الاستیک

شهرزاد یوسفزاده<sup>۱</sup>

استادیار

محمد نجفی<sup>۲</sup>

دانشیار

حسین عسکری<sup>۳</sup>

کارشناسی ارشد

در این تحقیق به مطالعه اثر فشار هیدرواستاتیک روی ارتعاشات آزاد ورق دایروی روی بستر الاستیک در تماس با سیال غیرویسکوز و محدود پرداخته شده است. ابتدا با حل معادله حاکم بر ورق دایروی با در نظر گرفتن شرایط مرزی لبه گیردار، انرژی پتانسیل ورق روی بستر الاستیک حاصل شده است. سپس معادلات حاکم بر نوسان سیال با بهره‌گیری از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت و ارضای شرایط مرزی به دست آمده و در نهایت انرژی کل سیستم محاسبه شده است. با اعمال روش ریلی-ریتز بر انرژی کل سیستم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق دایروی در تماس با سیال استخراج شده‌اند. در ادامه، تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل ستون سیال، چگالی سیال، سختی بستر الاستیک، شماره موج و نسبت ضخامت بر شعاع ورق روی فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور حصول اطمینان از نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی حاصل از ورق دایروی در تماس با سیال در حالت ورق همگن آلومینیومی با نتایج حاصل از آزمایشات تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است.

واژه‌های راهنما: ورق دایروی، فرکانس طبیعی، بستر الاستیک، سیال غیرویسکوز، آزمایش مودال

### ۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، مطالعه رفتار سازه‌های در تماس با سیال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است چون این پدیده می‌تواند در مواردی موجب از کارافتادگی و خستگی سازه گردد. از این‌رو، کنترل و حتی تعدیل آن برای موقعیت‌های حساس دارای اهمیت زیادی می‌باشد. [۱]. در صنایع مختلفی از جمله صنایع هسته‌ای، مخازن سوخت، اجزای داخلی راکتورها، صفحات خورشیدی و سازه‌های دریایی و هوایی می‌توان اندرکنش سیال و سازه را مشاهده نمود.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز

sh.yoosefzadeh@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران m.njafi36@gmail.com

<sup>۳</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز hossain\_asgari@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۸/۲۸، تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۰/۲۶

بنابراین، آگاهی از رفتار سازه و سیال در تراکنش دینامیکی بین آنها ضروری به نظر می‌رسد [۲]. واضح است که فرکانس‌های طبیعی سازه‌ها از جمله ورق در حالت تماس با سیال متفاوت از فرکانس‌های آن در حالت بدون تماس با سیال می‌باشد [۳].

محققان مطالعات زیادی در زمینه ارتعاشات ورق در تماس با سیال انجام دادند. در سال (۱۹۹۵) امابیلی به بررسی تاثیر عمق سیال روی رفتار ارتعاشی ورق‌های دایروی و توخالی در تماس با سیال غیرقابل تراکم و غیرویسکوز پرداخت. وی در تحقیق خود از روش‌های مودال و ریلی-ریتز برای تعیین مقادیر ویژه مساله استفاده کرد و در نهایت اثر پارامترهای مختلف روی جرم افزوده<sup>۱</sup>، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را مورد مطالعه قرار داد [۴]. کواک به مطالعه تأثیر جرم مجازی ناشی از تماس آب روی فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی پرداخت. او با بکارگیری تبدیل فوریه به محاسبه فاکتورهای نمو جرم مجازی افزوده در حالت بی‌بعد پرداخت [۵]. جئونگ به بررسی ارتعاشات دو ورق دایروی یکسان در تماس با سیال محدود و نامحدود پرداخت. او برای تحلیل خود از روش بسط بسط-فوریه و روش ریلی ریتز کمک گرفت. همچنین اثر فاصله دو ورق روی فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت [۶]. در سال (۲۰۰۳) مایونگ مو جانگ و همکاران، فرکانس‌های طبیعی دو ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای معادله حرکت ورق‌های در تماس با سیال از روش بسط سری‌های بسط-فوریه و روش ریلی-ریتز استفاده کردند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج عددی حاصل از نرم افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در نهایت فرکانس‌های طبیعی دو ورق در تماس با سیال و بدون تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفته و اثر فاصله دو ورق بر فرکانس‌های طبیعی ورق‌ها مورد مطالعه قرار گرفت [۷]. الهوردی زاده و همکاران یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاشات یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی ارائه دادند. آنها معادلات حاکم بر ورق دایروی را با پاسخ‌های فرضی و روش کانترویچ حل کردند [۸].

در سال (۲۰۱۰) دونگ، به بررسی ارتعاش آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند در حالت سه بعدی پرداخت. وی در تحقیق خود از روش چبیشف-ریتز با در نظر گرفتن حاصل ضرب سری‌های چندجمله‌ای چبیشف در توابع مرزی که شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند، برای استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده کرد. وی، برای معرفی خواص مادی ورق، تغییرات خواص را در جهت ضخامت به دو صورت در نظر گرفت [۹]. اخیراً جئونگ و همکاران ارتعاش آزاد یک ورق دایروی با تکیه گاه گیردار در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها جابجایی دینامیکی ورق در تماس با سیال را با استفاده از ترکیب توابع مودال ورق خشک تعیین کردند. توابع ویژه مسئله را از روش ریلی-ریتز بدست آورده که برای استخراج شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال استفاده کردند. نتایج حاصل از این روش با نتایج عددی مورد مقایسه قرار گرفت [۱۰]. در سال (۲۰۰۹) جعفری مهرآبادی و همکارانش ارتعاش آزاد یک ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک بدست آورده و برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده کردند. سپس برای دو نوع شرط مرزی اثر نسبت کسر حجمی و ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی را مورد تحلیل قرار دادند [۱۱].

<sup>1</sup> Added mass

در سال (۲۰۱۲) حسینی هاشمی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی در تماس با سیال پرداختند. آنها برای استخراج روابط حاکم بر ورق از تئوری میندلین و برای استخراج روابط حاکم بر سیال از معادله برنولی استفاده کردند. در این تحقیق، فرکانس‌های طبیعی ورق در دو حالت ورق در تماس با سیال از یک وجه و دو وجه استخراج شد [۱۲]. تاریخچه‌ی لو و همکاران به منظور مطالعه ارتعاشات ورق دایروی در تماس با سیال غیرقابل تراکم، با محاسبه جرم افزوده فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی را تعیین کردند. آنها از دو روش برای استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده کردند [۱۳].

در سال (۱۳۹۲) قدیریان و همکاران به بررسی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل کامپوزیتی در تماس با سیال پرداختند. آنها در تحقیق خود از کامپوزیت نوع ارتوتروپیک و برای تحلیل ارتعاشات آزاد از روش ریلی-ریتز استفاده کردند. تحقیق آنها نشان داد که تحت تأثیر ارتعاش ورق در سیال حرکتی ایجاد می‌شود که باعث افزایش انرژی جنبشی سیستم می‌شود [۱۴]. عسگری و همکاران در سال (۲۰۱۳) ارتعاش یک ورق دایروی غوطه‌ور در سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه‌گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند. برای دستیابی به پتانسیل سرعت سیال از هر دو روش حداقل مربعات و گالرکین برای تعیین ضرایب مجهول و برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق از روش ریلی-ریتز استفاده کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها با نتایج آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفت [۱۵].

حسینی هاشمی و همکاران ارتعاشات ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای تحلیل ارتعاشات ورق روی بستر الاستیک از روش تحلیلی استفاده کردند [۱۶]. در سال (۲۰۱۴) بخششی و خورشیدی ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تقریب جابجایی‌های ورق با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم از توابع سعی هارمونیک مثلثاتی استفاده کردند. برای دستیابی به فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش ریلی-ریتز بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استفاده کردند. در نهایت تأثیر پارامترهای ضریب توانی نسبت حجمی، نسبت طول، نسبت ضخامت ورق، ستون سیال، عرض مخزن و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی قرار گرفت [۱۷].

در سال (۱۳۹۴) رضوانی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق تقویت شده در آب پرداختند. آنها مطالعه خود را با سه روش تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام دادند و از تئوری ورق ارتوتروپیک برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند. همچنین آنها از روش جرم افزوده برای مدلسازی اثر سیال روی ارتعاشات ورق بهره بردند [۱۸]. در سال (۲۰۱۷)، خورشیدی و همکاران ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی در تماس با سیال را بصورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. ورق مستطیل به عنوان یکی از دیواره‌های مخزن مکعبی حاوی سیال در نظر گرفته شده است. آنها از آزمایش مودال برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق استفاده کردند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ابعاد مخزن روی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل در تماس با سیال را بررسی کردند [۱۹]. در سال (۲۰۱۷)، کانالس و مانتاری یک روش تحلیلی برای مطالعه ارتعاشات ورق مستطیلی کامپوزیتی ضخیم در تماس با سیال محدود ارائه کردند. میدان جابجایی ورق با استفاده از روش ریتز تقریب زده شد.

آنها در تحقیق خود سیال را بصورت ایده‌ال، غیرویسکوز و غیرقابل تراکم فرض کردند. در نهایت اثر جهت گیری الیاف کامپوزیت به همراه پارامترهای هندسی ورق روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفت [۲۰]. مرور کارهای انجام شده توسط محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که در اغلب تحقیقات انجام شده در زمینه ارتعاش ورق دایروی در تماس با سیال محدود از روش جرم افزوده استفاده شده است که این روش دارای محدودیت‌ها و معایب خاص خود می‌باشد. در این پژوهش که مراحل آن بسیار دقیق انجام شده است ارتعاشات آزاد ورق دایروی همگن با ضخامت ثابت در تماس با سیال محدود با بکارگیری تئوری کلاسیک مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق یک مجموعه توابع پذیرفتنی که شرایط مرزی لبه گیردار را بطور کامل ارضا می‌کنند در نظر گرفته شده است. برای دستیابی به فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش انرژی ریتز و بر مبنای کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. معادلات حاکم بر رفتار نوسانی سیال، با حل معادله لاپلاس و ارضای شرایط مرزی سیال به دست آمده است. برای تعیین اثر سیال روی ورق از روش مستقیم که یک روش تحلیلی دقیق است استفاده شده است. در روش مذکور میدان جابجایی ورق برحسب جابجایی سیال نوشته می‌شود. برای دستیابی به نتایج عددی برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب تهیه شده و در بخش نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ستون سیال، چگالی سیال، سختی بستر الاستیک، شماره موج و نسبت ضخامت بر شعاع ورق روی فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. برای حصول اطمینان از جواب‌ها، نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده با نتایج حاصل از آزمایشات تجربی آنالیز مودال ورق دایروی در تماس با سیال بدون بستر الاستیک مورد مقایسه قرار گرفته است.

## ۲- روابط حاکم

### ۲-۱- روابط حاکم بر ورق دایروی و بستر الاستیک

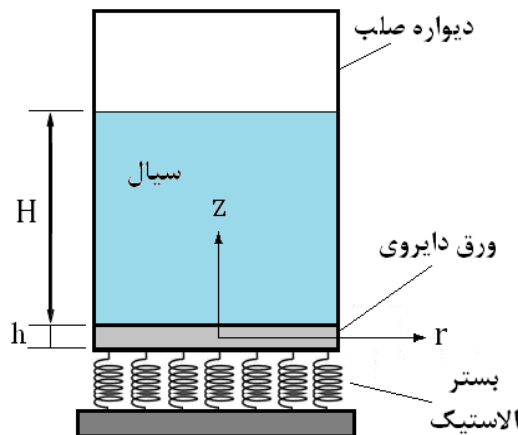
ورق دایروی همگن و ایزوتروپ را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۱) در تماس با سیال محدود در کف مخزن استوانه‌ای با دیواره‌های صلب قرار دارد.  $R$  و  $h$  به ترتیب بیانگر شعاع ورق دایروی یا مخزن و ضخامت ورق و  $H$  بیانگر ستون سیال درون مخزن صلب می‌باشد.

با در نظر گرفتن جابجایی‌های کوچک، معادله تعادل دینامیکی حاکم بر ورق دایروی در تماس با سیال بصورت زیر است [۵]:

$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = p_L \quad (1)$$

که در آن  $w$  خیز ورق و  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  صلبیت خمشی ورق می‌باشد. همچنین،  $\rho$ ،  $\nu$  و  $E$  به ترتیب نشان دهنده چگالی، ضریب پواسون و ضریب کشسانی ورق و  $p_L$  فشار سیال روی ورق دایروی می‌باشد. پاسخ معادله (۱) بدون در نظر گرفتن فشار سیال، طبق رابطه زیر قابل بیان است [۲۱]:

$$w(r, \theta, t) = \cos n\theta \sum_{m=1}^M q_m W_{nm}(r) e^{i\omega t} \quad (2)$$



شکل ۱- ورق دایروی در تماس با سیال به همراه محورهای مختصات

در روابط فوق، ضرایب مجهول هستند که باید تعیین شوند و  $M$  تعداد جمله‌های مورد نیاز تابع پذیرفتنی برای تقریب جابجایی ورق می‌باشد.  $m$  و  $n$  به ترتیب شماره موج در جهات  $r$  و  $\theta$  است. برای ورق با لبه گیردار، خیز ورق در لبه آن باید صفر شود. این شرط ایجاب می‌کند که جابجایی دینامیکی معادله (۲) به فرم زیر درآید [۲۱]:

$$W_{nm}(r) = J_n(\lambda_{nm}r) - J_n(\lambda_{nm}R) \frac{I_n(\lambda_{nm}r)}{I_n(\lambda_{nm}R)} \quad (۳)$$

که  $\lambda_{mn}$  پارامتر فرکانسی است که با توجه به شرایط مرزی ورق تعیین می‌شود و وابسته به فرکانس طبیعی  $\omega$  می‌باشد.  $J_n$  و  $I_n$  به ترتیب تابع بسل نوع اول و نوع اول اصلاح شده است. برای ورق با لبه گیردار مقادیر ویژه از مساوی صفر قرار دادن شیب ورق در لبه و شرایط اولیه بصورت رابطه (۴) حاصل می‌شود:

$$J_n(\lambda_{nm}R)I_{n+1}(\lambda_{mn}R) + J_{n+1}(\lambda_{nm}R)I_n(\lambda_{mn}R) = 0 \quad (۴)$$

انرژی کرنشی ورق دایروی از رابطه (۵) قابل محاسبه است:

$$U_p = \frac{1}{2} \Gamma_1 D \int_0^R \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right)^2 \right] \right\} r dr \quad (۵)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۵) و صرفنظر از جملات مرتبه بالاتر، انرژی کرنشی حداکثر ورق دایروی بصورت رابطه (۶) حاصل می‌شود:

$$U_p = D \Gamma_1 \{q\}^T [A] \{q\} \quad (۶)$$

که در آن  $\Gamma_1$  بردار ستونی  $\{q\}$  و ماتریس مربع  $[A]$  با ابعاد  $M \times M$  بصورت رابطه (۷) می‌باشد:

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{if } n = 0 \\ \pi, & \text{if } n > 0 \end{cases} \quad (۷)$$

$$\{q\}^T = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_M\}$$

$$[A] = A_{ik} = \frac{(\lambda_{ni}R)^4}{R^2} [J_n(\lambda_{ni}R)]^2 \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, M$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در بستر الاستیک وینکلر بصورت رابطه (۸) تعریف می‌شود [۲۲]:

$$U_E = \frac{1}{2} K_W \int_0^{2\pi} \int_0^R w^2 r dr d\theta \quad (۸)$$

که در آن  $K_W$  سختی بستر الاستیک است. با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه فوق مقدار  $U_E$  بصورت رابطه (۹) حاصل می‌شود:

$$U_E = \frac{1}{2} F_1 \{q\}^T [K] \{q\} \quad (۹)$$

که در آن:  $[K] = K_W R^2 [I]$  است.

## ۲-۲- معادلات حاکم بر نوسان سیال

شکل (۱) شکل شماتیک یک مخزن استوانه‌ای صلب را نشان می‌دهد که حاوی سیال غیرویسکوز و غیرقابل تراکم می‌باشد. از تابع پتانسیل سرعت  $\Phi(r, \theta, z, t)$  برای توصیف نوسانات سیال درون مخزن استفاده شده است. حرکت سیال ناشی از ارتعاش ورق دایروی درون مخزن استوانه‌ای از حل معادله لاپلاس برحسب پتانسیل سرعت به شکل زیر قابل تعیین است [۲۳]:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۰)$$

در دیواره‌ی مخزن و سطح سیال، سرعت سیال مساوی صفر است. در نتیجه:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R} = 0. \quad (۱۱)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=(H+h/2)} = 0. \quad (۱۲)$$

با استفاده از روش تفکیک متغیرها، پاسخ معادله (۱۰) به شکل  $\Phi(r, \theta, z, t) = i\omega \varphi(r, \theta, z) \exp(i\omega t)$  قابل بیان است. جایگذاری این پاسخ در معادله (۱۰) و با اعمال شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲)، پاسخ عمومی معادله مذکور به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ E_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \tanh \left( \beta_{ns} \left( H + \frac{h}{2} \right) \right) \sinh(\beta_{ns} z) \times \cos n\theta e^{i\omega t} \right\} \quad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳)،  $J_n(\beta_{ns} r)$  تابع بسل نوع اول است. پارامتر فرکانسی  $\beta_{ns}$  با استفاده از شرط مرزی (۱۱) طبق رابطه (۱۴) تعیین می‌شود:

$$J_n(\beta_{ns}) = 0 \quad (۱۴)$$

که در آن (۴) بیانگر مشتق تابع بسل نسبت به متغیر  $r$  است. حل معادله (۱۴) منجر به تعیین پارامتر فرکانسی  $\beta_{ns}$  برای هر مقدار از  $n$  و  $s$  می‌شود.

## ۳-۲- تراکنش بین ورق و سیال

جابجایی دینامیکی سیال در راستای عمود بر سطح ورق باید جابجایی ورق در همان راستا برابر باشد. به عبارت دیگر، در محل تماس ورق و سیال باید شرط پیوستگی یا سازگاری برقرار باشد. این شرط بیان می‌کند که تماس دائمی بین ورق و سیال در محل تماس وجود دارد. طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۱۳) در رابطه (۱۵)، رابطه (۱۶) حاصل می‌شود:

$$\sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \tanh\left(\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)\right) \cosh\left(\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)\right) \\ = \sum_{m=1}^M q_m \left[ J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) \frac{I_n(\lambda_{nm} r)}{I_n(\lambda_{nm} R)} \right] \quad (16)$$

با استفاده از سری فوریه [۲۴]، ضریب  $E_{ns}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{ns} = \frac{\left[ a_{nms} - a_{nms} \frac{I_n(\lambda_{nm} R)}{I_n(\lambda_{nm} R)} \right]}{\left[ \beta_{ns} \tanh\left(\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)\right) \cosh\left(\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)\right) \right]} \quad (17)$$

که در آن:

$$a_{nms} = \frac{2(\beta_{ns} R) J_n(\lambda_{nm} R)}{[(\beta_{ns} R)^2 - (\lambda_{nm} R)^2 J_{n+1}(\lambda_{nm} R)]} \quad (18)$$

$$b_{nms} = \frac{2(\beta_{ns} R) I_n(\lambda_{nm} R)}{[(\beta_{ns} R)^2 - (\lambda_{nm} R)^2 J_{n+1}(\lambda_{nm} R)]} \quad (19)$$

طبق این رابطه، پتانسیل سرعت سیال در رابطه (۱۳) به جای ضرایب مجهول  $E_{ns}$  بر حسب جملات مجهول  $q_m$  بیان می‌شود. به عبارت دیگر، با این کار اثرات سیال در رفتار نوسانی ورق ظاهر می‌شود. از آنجایی که سیال موردنظر بصورت ایده‌ال، غیرقابل تراکم و غیرویسکوز در نظر گرفته شده است، امواج سطح آزاد سیال به واسطه ارتعاش ورق نادیده گرفته شده است. به عبارت دیگر، از اغتشاش سیال صرفنظر شده است. انرژی جنبشی سیال طبق رابطه (۲۰) بیان می‌شود [۲۵]:

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \Phi \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right]_{z=\frac{h}{2}} r dr d\theta \quad (20)$$

که  $\rho_f$  چگالی سیال و محدوده انتگرال‌گیری مساحتی است که ورق در تماس با سیال است. برای محاسبه از شرط سازگاری در رابطه (۱۵) داریم:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t} = i\omega \sum_{m=1}^M q_m \left[ J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) \frac{I_n(\lambda_{nm} r)}{I_n(\lambda_{nm} R)} \right] \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (21)$$

با جایگذاری روابط (۱۳) و (۲۱) در رابطه (۲۰) و انتگرال‌گیری از رابطه حاصل، داریم:

$$T_f = -\frac{1}{2}\rho_f\Gamma_1\omega^2 \int_0^R \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n(\beta_{ns}r) \left[ \tanh\left(\beta_{ns}\left(H + \frac{h}{2}\right)\right) \sinh(\beta_{ns}z) \right] \sum_{m=1}^M q_m \left[ J_n(\lambda_{nm}r) - J_n(\lambda_{nm}R) \frac{I_n(\lambda_{nm}r)}{I_n(\lambda_{nm}R)} \right] e^{2i\omega t} r dr \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۲۲)، رابطه (۲۳) برای حداکثر انرژی جنبشی سیال حاصل می‌شود:

$$T_f = -\frac{1}{2}\rho_f\Gamma_1\omega^2 \{q\}^T [B] \{q\} \quad (23)$$

که در آن بردار ستونی  $\{q\}$  و ماتریس  $[B]$  با ابعاد  $M \times M$  بصورت زیر می‌باشد:

$$\{q\}^T = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_M\}$$

$$[B] = B_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8R^3(\beta_{ns}R)(\lambda_{ni}R)^2(\lambda_{nk}R)^2 J_n(\lambda_{ni}R) J_n(\lambda_{nk}R)}{[(\lambda_{ni}R)^4 - (\beta_{ns}R)^4][(\lambda_{nk}R)^4 - (\beta_{ns}R)^4]} \beta_{ns}, \quad i, k = 1, 2, \dots, M \quad (24)$$

#### ۴-۲- روش حل

در حالت ارتعاش آزاد، انرژی کل سیستم از مجموع انرژی کرنشی ورق و بستر الاستیک و انرژی جنبشی ورق و سیال حاصل می‌شود. طبق این تعریف داریم:

$$\Pi = (U_p + U_E)_{max} - (T_f + T_p)_{max} \quad (25)$$

روش ریتز ایجاب می‌کند که انرژی کل در رابطه (۲۵) باید نسبت به ضرایب مجهول  $q_m$  کمینه شود. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0, \quad (26)$$

رابطه (۲۶) منجر به معادله مقدار ویژه طبق رابطه (۲۷) می‌شود:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = 0 \quad (27)$$

در رابطه (۲۷)،  $[K]$  و  $[M]$  به ترتیب ماتریس‌های مربع سختی و جرم هستند که ابعاد آنها  $M \times M$  است. فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال، با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب  $([K] - \omega^2 [M])$  در رابطه (۲۷) قابل تعیین است. ریشه‌های دترمینان مذکور مربع مقادیر ویژه (فرکانس‌های ویژه) است. توابع ویژه یا همان شکل موده‌های متناظر با مقادیر ویژه با جایگذاری مقادیر ویژه در دستگاه معادلات رابطه (۲۷) و حل آنها به دست می‌آید.

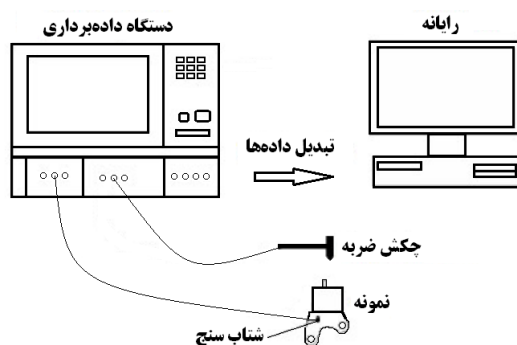
#### ۳- آزمایش مودال

آزمایش مودال<sup>۱</sup> کلاسیک یکی از آزمایشات ارزشمند در تعیین پارامترهای مودال (فرکانس‌ها، نسبت‌های میرایی و شکل مودها) با اندازه‌گیری پاسخ‌های فرکانسی سازه می‌باشد [۲۶]. این آزمایش با اندازه‌گیری

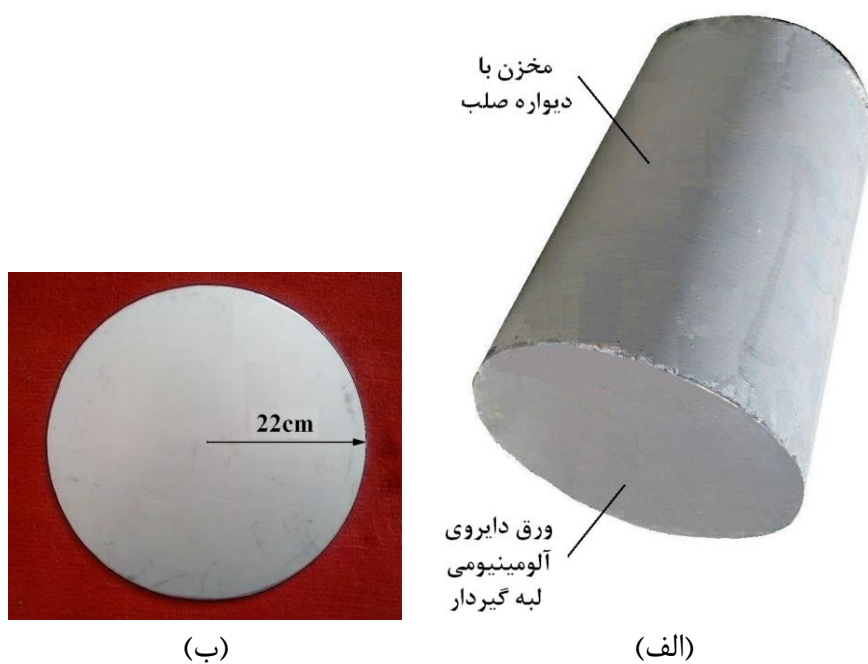
<sup>۱</sup>Modal test



داده‌های ورودی و خروجی توابع پاسخ فرکانس ( $FRF^1$ ) در حوزه فرکانسی یا توابع پاسخ ضربه ( $IRF^2$ ) در حوزه زمان قابل اجرا می‌باشد [۲۷]. برای انجام آزمایش مودال کلاسیک نیاز به تجهیزاتی همچون چکش ضربه، شتاب سنج، کارت داده‌برداری<sup>۳</sup> و سیستم رایانه می‌باشد که شکل شماتیک و نحوه مونتاژ آنها در انجام این آزمایش در شکل (۲) به نمایش در آمده است.



شکل ۲- شکل شماتیک تجهیزات آزمایش مودال و نحوه مونتاژ آنها



شکل ۳- (الف) مخزن ساخته شده برای انجام تست مودال (ب) نمونه ورق دایروی

<sup>1</sup> Frequency response function

<sup>2</sup> Impact response function

<sup>3</sup> Innobeamer

برای انجام آزمایش مودال ورق دایروی همگن از جنس آلومینیوم، ابتدا مخزن استوانه‌ای یکسان با دیواره‌های صلب از جنس فولاد ST37، با ضخامت دیواره 5mm، قطر خارجی 22cm و طول 33cm مطابق شکل (۳-الف) تهیه شد و ورق‌های دایروی از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته  $E = 70GPa$ ، هر کدام با ضخامت 1mm و 2mm ساخته شد و در دو حالت مخزن خالی و مخزن با ستون سیال  $H = 30cm$  مورد آزمایش قرار گرفت. به منظور حصول اطمینان از نتایج آزمایش، مقرر شد هر تست سه بار انجام شود. لذا جمعاً ۱۲ بار آزمایش انجام گرفت. در شکل (۳-ب) یک نمونه ورق با ضخامت 1mm و شعاع 22cm نمایش داده شده است. مطابق شکل (۳) ورق‌های تهیه شده به یک سر مخزن با چسب چسبانده شد تا شرایط مرزی گیردار فراهم شود. واضح است سطحی از ورق دایروی که در تماس با سیال قرار می‌گیرد با قطر 21cm می‌باشد. تجهیزات بکار رفته برای انجام آزمایش مودال این پژوهش که در آزمایشگاه دینامیک و ارتعاشات دانشگاه صنعتی اراک انجام گرفت به شرح زیر می‌باشد: شتاب سنج از نوع 87002b100m1، نیروسنج از نوع 9712b50 و کارت داده برداری از نوع Ni USB-4432 ساخت شرکت کیستلر<sup>۱</sup> سوئیس. تجهیزات مطابق شکل (۴) مونتاژ و آماده آزمایش شدند. برای اطمینان از دقت جواب‌های بدست آمده، آزمایش در هر حالت روی سه مخزن با شرایط یکسان تکرار شد و نتایج حاصل بصورت جدولی ارائه گردید. سپس میانگین جواب‌ها به عنوان جواب نهایی ثبت گردید که در بخش بعدی ارائه شده است.



شکل ۴- آزمایش مودال ورق دایروی و نحوه نصب تجهیزات

<sup>1</sup> Kistler

#### ۴- بحث بر روی نتایج

در این تحقیق، برای صحت‌گذاری نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده، نتایج به دست آمده از این روش در حالت خاص ورق همگن آلومینیومی در تماس با سیال بدون بستر الاستیک با نتایج حاصل از آزمایش مودال در حالت لبه گیردار مورد مقایسه قرار گرفته است.

سیال مورد استفاده در این تحقیق آب است که چگالی آن در حدود  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است. برای اطمینان از نتایج آزمایشات، هر آزمایش روی سه نمونه ورق یکسان در تماس با سیال تکرار شد و میانگین فرکانس‌های حاصل به عنوان نتیجه نهایی در نظر گرفته شد. برای تشخیص اینکه فرکانس بدست آمده مربوط به کدام مود ارتعاشی ورق می‌باشد نتایج حاصل با نتایج حاصل از کار تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت و از تطابق پاسخ‌ها مود ارتعاشی متناظر با آن مشخص گردید.

در جداول (۱) و (۲) فرکانس‌های طبیعی حاصل از دو روش تحلیلی و تجربی به ترتیب برای ورق‌های با ضخامت 1mm و 2mm و با ستون آب 30cm مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تطابق خوبی بین نتایج دو روش وجود دارد. همچنین به منظور درک بهتر اختلاف فرکانسهای هر آزمایش، انحراف معیار استاندارد برای هر کدام محاسبه شده است.

**جدول ۱-** مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیومی با ضخامت 1mm و ستون سیال 30cm

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
دهم	نهم	هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	
737	672	644	597	526	473	305	265	157	74	نتایج آزمایش
2.2	2.47	7.07	1.58	4.36	7.6	4.25	3.54	4.2	3.06	ا.م.* آزمایشها
789	738	673	617	532	523	319	275	170	78	نتایج تحلیلی
7.1	9.8	4.5	3.4	1.2	10.5	4.7	3.6	8	5.5	درصد خطا

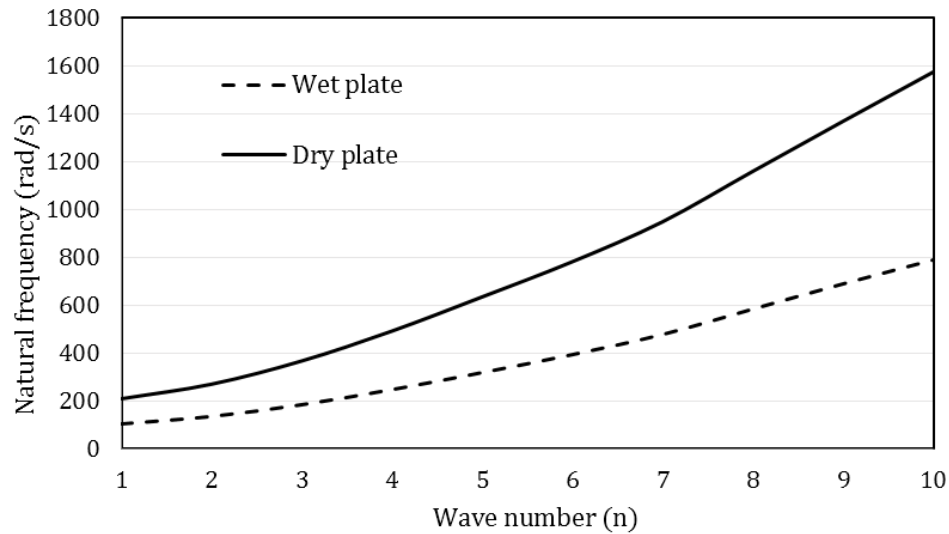
\* انحراف معیار استاندارد

**جدول ۲-** مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیومی با ضخامت 2mm و ستون سیال 30cm

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
دهم	نهم	هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	
781	720	702	656	578	525	372	331	203	92	نتایج آزمایش
3.78	2.35	0.55	5.10	4.02	3.21	4.57	6.25	1.58	3.52	ا.م.* آزمایشها
820	752	780	692	583	562	381	358	206	102	نتایج تحلیلی
4.81	4.25	10.01	5.21	0.87	6.54	2.36	7.45	1.25	9.8	درصد خطا

\* انحراف معیار استاندارد

برای دستیابی به نتایج کلی‌تر، پارامتر فرکانسی بی‌بعد به صورت  $\beta = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$  تعریف گردیده که در آن  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  می‌باشد. برای بررسی تأثیر سیال بر رفتار ارتعاشی ورق دایروی، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در دو حالت در تماس با سیال و بدون تماس با سیال با مقادیر  $R = H = 0.5m$  مطابق شکل (۵) ارائه شده است. همانطوری که نتایج این شکل نشان می‌دهد با افزایش  $n$  اثر کاهشی تماس با سیال در فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.



شکل ۵- مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در دو حالت تماس با سیال و بدون تماس با سیال.

جدول ۳- پارامتر بی‌بعد فرکانسی  $\beta$  برای ارتعاش آزاد ورق دایروی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف  $K_w$ ،  $H$  و  $h/R$ .

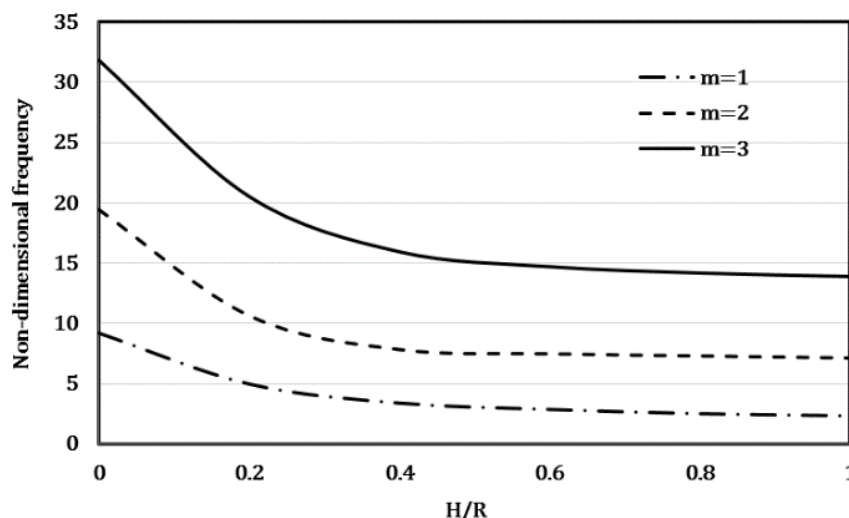
$h/R$	$K_w$	$H = 0$	$H = 0.2R$	$H = 0.4R$	$H = 0.6R$	$H = 0.8R$	$H = R$
0.3	0	19.39	17.48	15.54	14.52	13.86	12.00
	10	19.51	17.55	15.59	14.57	13.90	12.03
	100	20.44	18.06	15.95	14.84	14.13	12.19
	1000	23.07	19.22	16.76	15.41	14.59	12.47
	10000	24.01	21.62	17.04	16.61	15.74	13.56
	100000	26.12	24.67	19.08	18.63	17.76	15.57
0.5	0	25.46	24.33	22.00	21.13	20.58	19.15
	10	25.66	25.41	22.20	21.33	20.77	19.35
	100	27.32	26.43	23.81	22.88	22.29	20.79
	1000	37.72	34.91	30.80	28.91	27.68	23.92
	10000	42.35	37.75	34.58	32.34	30.71	24.43
	100000	45.37	40.76	37.59	36.34	33.72	27.44

در جدول (۳) پارامتر بی بعد فرکانسی مربوط به ورق دایروی با لبه‌های گیردار برای مقادیر مختلف سختی بستر الاستیک، نسبت ضخامت بر شعاع ورق و ستون سیال درون مخزن ارائه شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش ستون سیال درون مخزن، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال کاهش می‌یابد و این روند با افزایش هرچه بیشتر ستون سیال کندتر می‌شود. همچنین، طبق این جدول، با افزایش سختی بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد. این افزایش را می‌توان به افزایش سختی سیستم نسبت داد. علاوه بر این، از نتایج جدول (۳) می‌توان نتیجه گرفت که افزایش ضخامت ورق منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال می‌شود.

در شکل (۶) تأثیر تغییرات ستون سیال بر فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف  $m$  نمایش داده شده است. در ترسیم این نمودارها از  $n = 1$ ،  $K_w = 1000 \text{ kN/m}^3$ ،  $h = 2 \text{ mm}$  و چگالی سیال  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  استفاده شده است. از نمودارهای این شکل نتیجه می‌شود که برای تمام مقادیر  $m$ ، با افزایش ستون سیال درون مخزن، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی کاهش می‌یابد. این امر را می‌توان به افزایش جرم سیستم و فشار هیدرواستاتیکی آن نسبت داد. همچنین نتایج این شکل نشان می‌دهد که در مقادیر کم ستون سیال، کاهش فرکانس‌ها با شیب تندتری اتفاق می‌افتد و با ازدیاد ستون سیال تغییرات آن ناچیز می‌شود.

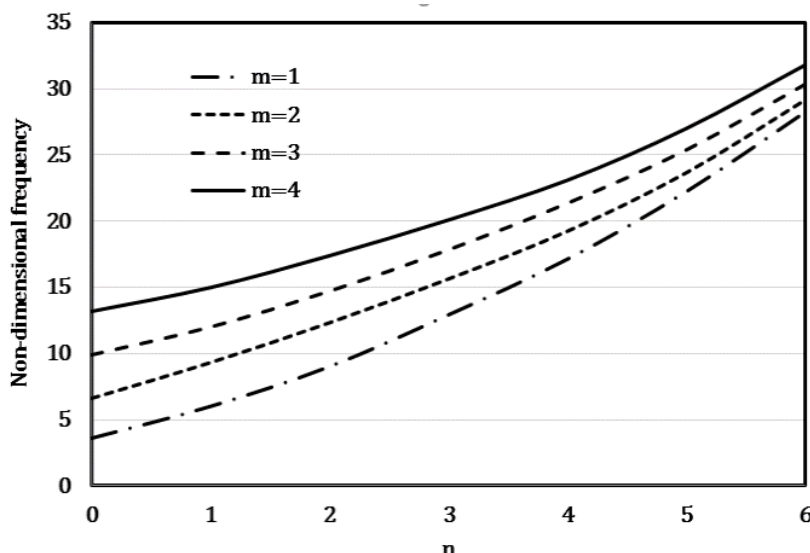
به منظور بررسی تأثیر تغییرات اعداد موج  $m$  و  $n$  بر فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال، نمودارهای شکل (۷) به نمایش در آمده است. در ترسیم این نمودارها از  $H = 0.5 \text{ m}$ ،  $K_w = 1000 \text{ kN/m}^3$  و چگالی سیال  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  استفاده شده است.

از نمودارهای این شکل نتیجه می‌شود که برای تمام مقادیر  $m$ ، با افزایش تعداد نیم‌موج‌های  $n$ ، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد.



شکل ۶- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی بعد ورق دایروی در تماس با سیال بر حسب تغییرات

نسبت ستون سیال بر شعاع ورق با لبه‌های گیردار.

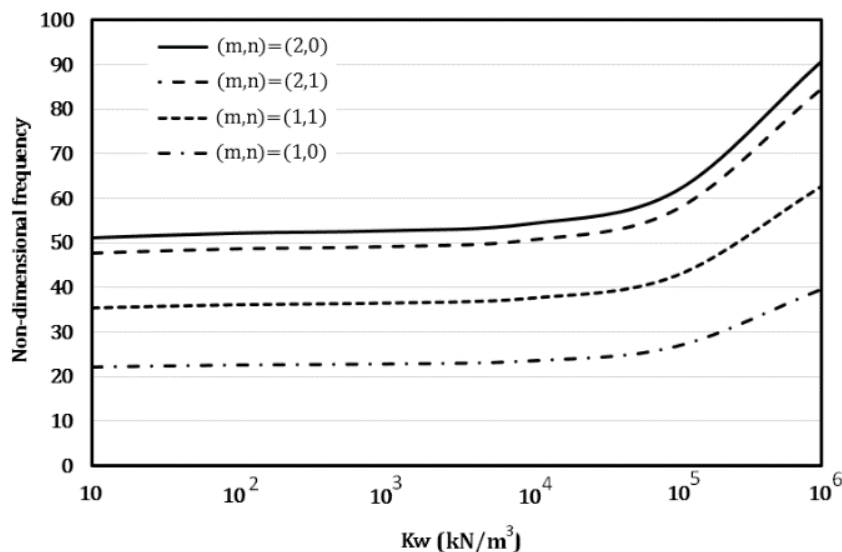


شکل ۷- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی در تماس با سیال برحسب تغییرات  $n$  و مقادیر مختلف  $m$ .

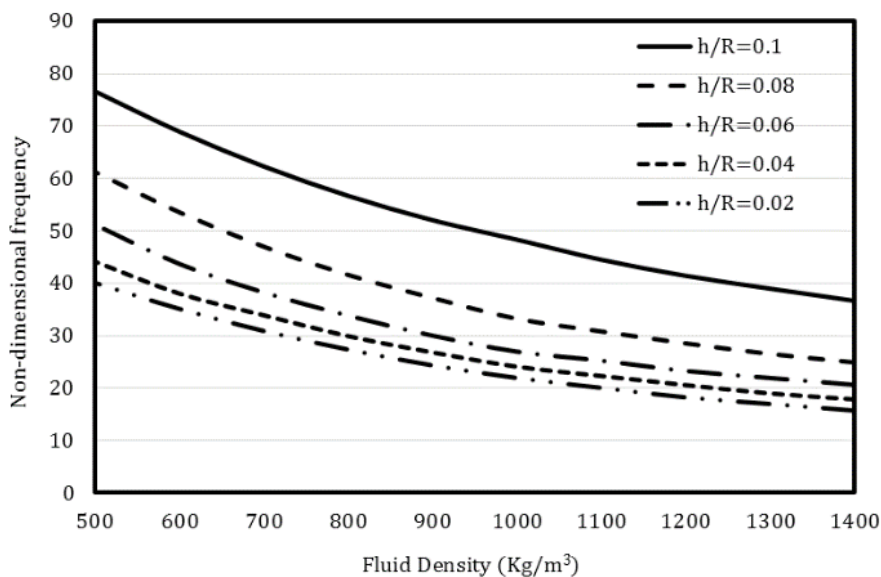
طبق این شکل در می‌یابیم که فرکانس اصلی ورق مربوط به شماره موج  $m = 0$  بوده و کمترین فرکانس طبیعی ورق در مود  $n = 0$  اتفاق می‌افتد. نتیجه دیگری که می‌توان از این شکل گرفت آن است که با افزایش شماره موج‌ها اختلاف فرکانس‌ها کاهش می‌یابد و بیشترین اختلاف مربوط به  $n = 0$  است.

در شکل (۸) تأثیر تغییرات سختی بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف  $m$  و  $n$  نمایش داده شده است. در ترسیم این نمودارها از ستون سیال  $H = 0.5m$  و چگالی سیال  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  استفاده شده است. از نمودارهای این شکل نتیجه می‌شود که برای تمام مقادیر  $m$  و  $n$ ، با افزایش سختی بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد که این افزایش در مقادیر پایینتر سختی بستر الاستیک ناچیز بوده ولی با افزایش آن، افزایش فرکانس طبیعی ورق چشم گیر می‌شود. چون در مقادیر کمتر از  $K_w = 1000 \text{ kN/m}^3$  سختی بستر الاستیک در مقایسه با سختی ورق ناچیز بوده و افزایش قابل توجهی در فرکانس‌های طبیعی روی نمی‌دهد اما برای مقادیر بزرگتر از  $K_w = 1000 \text{ kN/m}^3$  تأثیر سختی بستر الاستیک محسوس‌تر شده و افزایش فرکانس‌ها به صورت نمایی صورت می‌گیرد.

در شکل (۹) نمودار تغییرات پارامتر بی‌بعد فرکانسی ورق دایروی در تماس با سیال با لبه‌های گیردار برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت بر شعاع ورق دایروی به نمایش درآمده است. در ترسیم این نمودار از مقادیر  $h = 2 \text{ mm}$ ،  $K_w = 1000 \text{ kN/m}^3$  و  $n = 1$  و  $H = 0.5m$  استفاده شده است. همانگونه که انتظار می‌رفت، نتایج این شکل بیان می‌کند که با افزایش چگالی سیال، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی کاهش می‌یابد. این موضوع را می‌توان به افزایش جرم سیستم نسبت داد. نتیجه دیگری که می‌توان از این شکل گرفت آن است که هر چه نسبت ضخامت بر شعاع ورق دایروی افزایش می‌یابد مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و این روند با زیاد شدن ضخامت ورق تسریع می‌شود.



شکل ۸- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی در تماس با سیال برحسب تغییرات سختی بستر الاستیک برای مقادیر مختلف  $m$  و  $n$ .



شکل ۹- نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی در تماس با سیال برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت بر شعاع ورق.

### ۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر ارتعاشات آزاد یک ورق دایروی روی بستر الاستیک در تماس با سیال محدود مورد بررسی قرار گرفت و جهت تحلیل ورق از شرایط مرزی لبه گیردار استفاده شد. برای تحلیل رفتار نوسانی سیال از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت استفاده شد. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شدند:

- مقادیر حاصل از حل تحلیلی ارائه شده تطابق خوبی با مقادیر حاصل از آزمایشات تجربی دارد.
- مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی در حالت بدون تماس با سیال بیشتر از حالت در تماس با سیال است و این اختلاف با افزایش شماره مود افزایش می‌یابد.
- با افزایش ستون سیال درون مخزن مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی کاهش می‌یابد و رفته رفته تغییرات آن ناچیز می‌شود.
- با افزایش ضخامت ورق در تماس با سیال، فرکانسهای طبیعی افزایش می‌یابد و با افزایش ضخامت ورق این روند تسریع می‌شود.
- با افزایش شماره مودهای ارتعاشی ورق دایروی، فرکانسهای طبیعی ورق افزایش می‌یابد.
- افزایش سختی بستر الاستیک در ابتدا تأثیر چندانی روی فرکانسهای طبیعی ورق دایروی ندارد ولی با ادامه این روند، فرکانسهای طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد.
- با افزایش چگالی سیال داخل مخزن، فرکانسهای طبیعی ورق دایروی کاهش می‌یابد.

## مراجع

- [1] Amiri, J. V., Nikkhoo, A., Davoodi, M. R., and Hassanabadi, M. E., "Vibration Analysis of a Mindlin Elastic Plate under a Moving Mass Excitation by Eigen-function Expansion Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 53-64, (2013).
- [2] Hasheminejad, S. M., Khaani, H. A., and Shakeri, R., "Free Vibration and Dynamic Response of a Fluid-coupled Double Elliptical Plate System using Mathieu Functions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 75, pp. 66-79, (2013).
- [3] Kerboua, Y., Lakis, A. A., Thomas, M., and Marcouiller, L., "Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with Fluid", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 12, pp. 2570-2586, (2008).
- [4] Amabili, M., "Effect of Finite Fluid Depth on the Hydro Elastic Vibrations of Circular and Annular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, No. 4, pp. 909-925, (1996).
- [5] Kwak, M. K., "Hydro Elastic Vibration of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201, No. 3, pp. 293-303, (1997).
- [6] Jeong, K. H., "Free Vibration of Two Identical Circular Plates Coupled with Bounded Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, No. 4, pp. 653-670, (2003).
- [7] Myung, J. J., and Young, H. C., "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-coupled Circular Plates", *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, (2003).
- [8] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., and Bahrami, M. N., "Nonlinear Free and Forced Vibration Analysis of Thin Circular Functionally Graded Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, No. 4, pp. 966-984, (2008).



- [9] Dong, C. Y., "Three-dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates using the Chebyshev–Ritz Method", *Materials & Design*, Vol. 29, No. 8, pp. 1518-1525, (2008).
- [10] Jeong, K. H., Lee, G. M., and Kim, T. W., "Free Vibration Analysis of a Circular Plate Partially in Contact with a Liquid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 1, pp. 194-208, (2009).
- [11] Mehrabadi, S. J., Kargarnovin, M. H., and Najafizadeh M. M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Coupled Circular Plate with Piezoelectric Layers", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, No. 8, pp. 2008-2021, (2009).
- [12] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., and Omid, M., "Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates using First-order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, No. 5, pp. 1276-1291, (2010).
- [13] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., and Shabani, R., "Asymmetric Free Vibration of Circular Plate in Contact with Incompressible Fluid", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, (2013).
- [۱۴] قدیریان، حسین، قضاوی، محمدرضا، دهقانی فیروزآبادی، روح الله، "تحلیل ارتعاشات آزاد ورق های کامپوزیتی در تماس با سیال به روش ریتز، سومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات"، تهران، انجمن آکوستیک و ارتعاشات ایران، (۱۳۹۲).
- [15] Askari, E., Jeong, K. H., and Amabili, M., "Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, (2013).
- [16] Hosseini-Hashemi, S., Atashipoor, S. R., Karimi, M., and Es'haghi, M., "Free Vibration of Functionally Graded Elliptical Plates", *Iranian Journal of Marine Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 43-60, (2012).
- [17] Khorshidi, K., and Bakhsheshy, A., "Free Natural Frequency Analysis of an FG Composite Rectangular Plate Coupled with Fluid using Rayleigh–Ritz Method", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, (2014).
- [۱۸] رضوانی، حسین؛ فاضلی، حمید، سعید کیاست، مهدی، حاجی هاشمی، قاسم، "محاسبه تأثیر پارامتر جرم افزوده بر روی فرکانس سازه در سیال توسط حل عددی، تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی"، نشریه علمی و پژوهشی امیرکبیر، دوره ۴۷، شماره ۲، ۷۰-۶۰، (۱۳۹۴).
- [19] Khorshidi, K., Akbari, F., and Ghadirian, H., "Experimental and Analytical Modal Studies of Vibrating Rectangular Plates in Contact with a Bounded Fluid", *Ocean Engineering*, Vol. 140, pp. 146-154, (2017).
- [20] Canales, F. G., and Mantari, J. L., "Laminated Composite Plates in Contact with a Bounded Fluid Free Vibration Analysis via Unified Formulation", *Composite Structures*, Vol. 162, pp. 374-387, (2017).
- [21] Reddy, J. N., "*Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*", CRC Press, (2006).

- [22] Boudierba, B., Houari, M.S.A., and Tounsi, A., "Thermomechanical Bending Response of FGM Thick Plates Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundations", *Steel Composite Structures*, Vol. 14, No. 1, pp. 85-104, (2013).
- [23] Jeong, K. H., and Kim, K. J., "Hydro Elastic Vibration of a Circular Plate Submerged in a Bounded Compressible Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, No. 1, pp. 153-172, (2005).
- [24] Bracewell, R., "*The Fourier Transform and Its Applications*", Vol. 84, CRC Press, (2017).
- [25] Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., and Taher, H. R. D., "Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates on Elastic Foundations and Vertically in Contact with Stationary Fluid by The Ritz Method", *Ocean Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 174-185, (2010).
- [26] Rao, S., "*Mechanical Vibrations*", 4th Edition, Pearson Education, Upper Saddle River, U.S.A, (2004).
- [27] Ren, W. X., "Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge", *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 130, No. 7, pp. 1022-1031, (2004).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- $r, \theta, z$ : محورهای مختصات
- $w$ : جابجایی ورق در جهت  $z$
- $v$ : ضریب پواسون
- $E$ : مدول الاستیسیته
- $D$ : صلبیت خمشی ورق
- $U_p$ : انرژی کرنشی ورق
- $T_p$ : انرژی جنبشی ورق
- $T_f$ : انرژی جنبشی سیال
- $\rho$ : چگالی ورق
- $\Phi(r, \theta, z, t)$ : تابع پتانسیل سرعت
- $I_n$  و  $J_n$ : توابع بسل نوع اول
- $\beta_{ns}$ : پارامتر فرکانسی
- $\rho_f$ : چگالی سیال
- $\Pi$ : انرژی کل سیستم
- $\omega$ : فرکانس طبیعی
- $H$ : ارتفاع سیال درون مخزن
- $h$ : ضخامت ورق
- $R$ : شعاع مخزن
- $t$ : متغیر زمان

**Abstract**

This research studies the effect of hydro-static pressure on the free vibration of a circular plate in contact with an inviscid and bounded fluid resting on elastic foundation. The plate is located in bottom of a rigid cylindrical vessel with clamped boundary condition. At first, the potential energy of the plate on elastic foundation is performed by solving the governing equation on circular plate with clamped boundary condition.

Next, the governing equation of the oscillatory behavior of the fluid is obtained by solving Laplace equation and satisfying its boundary conditions. The natural frequencies and mode shapes of the plate are determined by applying the Rayleigh-Ritz method on the total energy of the system. The effects of the parameters such as fluid height, fluid density, plate thickness to its radius ratio, and wave numbers on the natural frequencies and mode shapes are investigated. Comparison of analytically outcome of this study is made with results of the experimental modal test.