تحلیل ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم هدفمند با خواص متغیر با دما به کمک روش اغتشاش

محمد عارفی [۱]
دانشیار

سینا شریفیان [۲]
دانشجوی کارشناسی ارشد

در این پژوهش تحلیل ترموالاستیک استوانه جدارضخیم با خواص وابسته به دما بررسی شده است. کلیه خواص به جز نسبت پواسون به‌صورت حاصلضرب تابعی نمایی از دما و تابعی توانی از شعاع در نظر گرفته شده است. با فرضیات مذکور، معادله دیفرانسیل غیرخطی برای توزیع انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای حاصل می‌گردد. حل این معادله به روش اغتشاشات سنتی، توزیع انتقال حرارت در استوانه را به‌صورت تقریبی- تحلیلی منتجه می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله، با در نظر گرفتن روابط کرنش- تغییر مکان، تنش-کرنش و تعادل به همراه توزیع انتقال حرارت قبلی حاصل می‌گردد. با حل این معادله به کمک شرایط مرزی مکانیکی، جابجایی شعاعی حاصل می‌گردد. با داشتن جابجایی شعاعی، توزیع تنش‌ها در امتداد ضخامت استوانه به‌دست می‌آید.

واژه های راهنما : استوانه جدارضخیم نامتناهی، خواص وابسته به دما، مواد هدفمند

۱- مقدمه

مواد هدفمند در ابتدا، برای مصارف هوافضا طراحی و ساخته شدند اما در حال حاضر در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد پیدا کرده‌اند. سپری‌های حرارتی فضاپیماها، پوشش پره‌های توربین گاز برای کاهش ورقه ورقه شدن، اجزای مبدل‌های ترموالکتریکی و گرمایونی [3]، روکش‌های پلاسما برای راکتورهای گداخت، ابزار برش مدرج شده‌ی بسیار سخت برای ماشینکاری دقیق لنزهای تماسی، لوله‌های مبدل حرارتی، زره‌های نظامی، قطعات موتور راکت و ساخت اندام‌های مصنوعی بدن انسان از قبیل دندان و استخوان مصنوعی از مهمترین کاربردهای مواد هدفمند به شمار می‌رود[۱-۳].

در بین تحقیقات انجام گرفته بر روی سازه‌های ساخته شده از مواد هدفمند، تحقیقات بر روی سازه‌های استوانه‌ای بخش وسیعی را شامل می‌شوند که علت آن کاربرد وسیع این نوع سازه‌ها در صنایع امروزی می‌باشد. حل دقیق و بسته برای تنش و جابجایی برای مخازن استوانه‌ای و کروی ساخته شده از مواد گرادیانی تحت فشار داخلی، توسط توتنکو و اوزترک [۴] در سال (۲۰۰۱) ارائه گردید.

---

[۱] نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان، کاشان arefi63@gmail.com
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان sina.yss69@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۶/۱۰/۰۹، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۴/۰۲

[3] Thermionic

توتنکو [۵] در تحقیقی دیگر در سال (۲۰۰۶) به بررسی توزیع تنش و تغییرشکل شعاعی یک استوانه جدارضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحت فشار داخلی پرداخت. وی مدول الاستیسیته را به‌صورت نمایی و متغیر با شعاع در نظر گرفت. او همچنین تاثیر پارامتر غیرهمگنی را بر روی توزیع تنش شعاعی و تغییر شکل بررسی نمود. در ادامه کار توتنکو و اوزترک، جباری و همکاران [۶] و [۷] با در نظر گرفتن تغییرات خواص مکانیکی در راستای ضخامت استوانه به تحلیل الاستیک مسئله پرداختند. آنها در تحقیقات خود بارگذاری حرارتی را در حالت پایدار و مسئله را به دو صورت متقارن محوری و غیرمتقارن محوری تحلیل نمودند. توتنکو و تمل [۸] روشی جدید برای تحلیل استوانه، دیسک و کره‌های هدفمند تحت فشار ارائه نمودند. آنها با استفاده از روش توابع مکمل و الاستیسیته صفحه‌ای توزیع تنش‌های شعاعی و مماسی را در سرتاسر هندسه‌های مدنظر، به‌دست آوردند.

در تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم یکی از روش‌هایی که در بسیاری از تحقیقات مورد استفاده قرارگرفته است، فرض چند لایه‌ای بودن مواد گرادیانی می‌باشد. در این روش هر لایه به صورت ماده همگن فرض شده است و لایه های همگن به گونه‌ای در کنار هم قرار می‌گیرند تا خاصیت هدفمند بودن ماده ایجاد شود. با این فرض یک استوانه ساخته شده از مواد گرادیانی تحت بارگذاری حرارتی حالت پایدار بصورت نیمه تحلیلی توسط لیو وهمکاران [۹] حل گردید. در این تحلیل شرایط پیوستگی تنش و تغییر مکان در حل معادلات حرارت و تغییر مکان‌ها لحاظ گردید. سپس معادلات ترموالاستیسیته در هر لایه همگن حل شده و تنش های حرارتی به دست آمدند. توزیع درجه حرارت در حالت پایدار در استوانه‌ای با طول محدود توسط تارن و وانگ [۱۰] صورت پذیرفت. برای حل معادلات حاکم در این مساله از جبر ماتریس‌ها و بسط توابع ویژه استفاده گردیده است. همچنین در تحقیقی دیگر چن و تونگ [۱۱] با استفاده از روشی عددی به بررسی رفتار استوانه ساخته شده از مواد گرادیانی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی در حالات استاتیکی و نیمه استاتیکی پرداختند. تنش‌های حرارتی و مکانیکی، جابجایی و توزیع دما در یک استوانه هدفمند با طول محدود، تحت بارگذاری حالت پایدار، مکانیکی و متقارن محوری توسط شاو [۱۲] بررسی گردید. در این تحلیل از روش‌های لایه‌ای استفاده شده است و خواص ماده در راستای شعاعی متغیر و مستقل از دما در نظر گرفته شده است. با استفاده از سری‌های توانی و بکار بردن شرایط مرزی تکیه گاه ساده و پیوستگی بین لایه‌ها، معادلات انتقال حرارت و ترموالاستیسیته حاکم بر مساله حل گردیده‌اند .

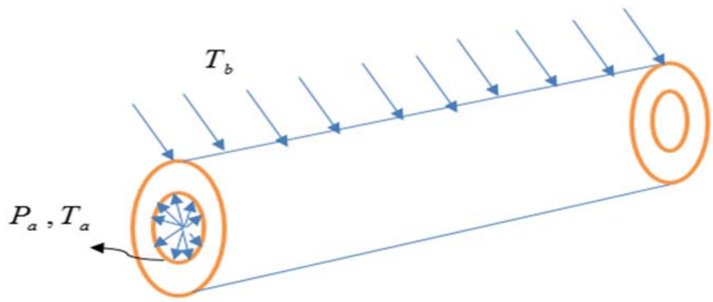
عارفی [۱۳] در پژوهشی به تحلیل ترموالاستیک غیرخطی استوانه‌های هدفمند پیزوالکتریک پرداخت. او روش تحلیلی جدیدی برای برآورد پاسخ سیستم‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی پیشنهاد نمود. نتایج تحقیق وی نشان داد که بکارگیری تحلیل غیر خطی به جای خطی باعث بهبود پتانسیل الکتریکی و جابجایی شعاعی می‌گردد. اورال و انلانس [۱۴] اثرات توزیع غیر یکنواخت مدول الاسیتسیته و مدول برشی را در یک استوانه جدار ضخیم در جهت شعاعی بر روی توزیع تنش‌های ناشی از فشار داخلی بررسی کردند. با استفاده از معادلات تعادل، قانون هوک و روابط کرنش- جابجایی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید. پاسخ این دستگاه بر حسب تابع پتانسیل تنش به صورت حل بسته به دست آمده است. روحی و همکاران [۱۵] با استفاده از روش نیمه تحلیلی، رفتار ترموالاستیک یک استوانه جدار ضیخم ساخته شده از مواد هدفمند با طول کوتاه را بررسی نمودند.

در این تحقیق معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از سری‌های فوریه به معادلات دیفرانسیلی جبری خطی تبدیل شده و با تقسیم استوانه به لایه‌های متوالی و ارضای شرایط پیوستگی و شرایط مرزی، مجهولات ترموالاستیک مسئله به‌دست آمده‌اند. حل تحلیلی مساله الاستیسیته و ترموالاستیسیته نامتقارن محوری استوانه تو خالی با خواص متغییر در جهت شعاع توسط توکووی و ما [۱۶] ارائه شده است. مساله به صورت صفحه‌ای مدل شده است و معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش انتگرالگیری مستقیم به صورت مستقل از معادلات تنش -کرنش حل شده و پاسخ ها به صورت سری‌های فوریه به‌دست آمده است.

قربانپور و همکاران [۱۷] در سال (۲۰۱۱) رفتار الکتروترمومکانیکال یک استوانه هدفمند چرخان که در راستای شعاعی پلاریزه شده است را بررسی کردند. آنها تاثیر پارامتر غیر هموژنی را بر روی میدان تنش شعاعی، مماسی و پتانسیل الکتریکی بررسی نمودند. لقمان و پارسا [۱۸] در سال (۲۰۱۵) به بررسی تحلیل ترموالاستیک یک سیستم استوانه‌ای دولایه شامل یک لایه هموژن و یک لایه از مواد هدفمند پرداختند. آنها توزیع تنش‌های شعاعی، مماسی و موثر را در سرتاسر ضخامت استوانه دولایه بررسی نمودند. نتایج آنها نشان داد که بیشترین تنش موثر در جداره داخلی استوانه اتفاق می‌افتد. در تمامی تحقیقات پیشین صورت گرفته بر روی مواد هدفمند، برای سادگی مدلسازی تغییرات خواص مکانیکی و فیزیکی ماده، آنها را به‌صورت مدل توانی یا نمایی از مکان (شعاع) در نظر گرفته‌اند. در تحقیق حاضر سعی گردیده تا تغییرات کلیه خواص فیزیکی و مکانیکی (به جز نسبت پواسون) همزمان به‌صورت تابعی از شعاع، به فرم توانی و تابعی از دما، به فرم نمایی درنظر گرفته شود. این کار باعث می‌گردد تا معادله انتقال حرارت غیرخطی، ناشی از در نظر گرفتن مدلسازی تغییرات خواص بوجود آید که تحلیل آن با استفاده از روش اغتشاشات سنتی صورت پذیرفته و سپس در تحلیل ترموالاستیک مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-هندسه و تعریف مسئله

یک استوانه جدارضخیم بلند و توخالی از جنس مواد هدفمند تحت فشار هیدرواستاتیک داخلی P_a و شعاع داخل و خارج a و b درنظر گرفته‌شده است. استوانه موردنظر در یک میدان دمایی قرار داشته که دمای سطح داخلی آن T_a و دمای سطح خارجی آن T_b می‌باشد. شکل (۱) تصویری از هندسه مسئله را نشان می‌دهد. به منظور تسهیل در حل مسئله فرضیات ساده کننده‌ای برای مسئله به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است که در ادامه براساس آنها مسئله پیاده‌سازی خواهد گردید:



شکل ۱- استوانه جدارضخیم بلند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی

- توزیع انتقال حرارت به صورت یک بعدی و کل مسئله در حالت پایا در نظر گرفته خواهد شد.
- مرکز دستگاه مختصات استوانه‌ای بر مرکز استوانه قرار دارد.
- تقارن محوری در هندسه و بارگذاری مدنظر قرار خواهد گرفت.
- ضریب انتقال حرارت (α) در جهات مختلف یکسان فرض خواهد شد.

۳-توزیع انتقال حرارت

معادله انتقال حرارت حاکم بر مختصات استوانه‌ای با توجه به فرضیات قبل به صورت زیر ساده سازی خواهد شد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، k, T و r به‌ترتیب نماینگر توزیع دما، ضریب رسانش گرمایی و شعاع استوانه می‌باشند. ضریب رسانش گرمایی به‌صورت تابعی از دما و شعاع به صورت زیر در نظر گرفته خواهد شد[۱۹]:

$$k\left(r,T\right)=k_0(r)k_1(T) \qquad (۲)$$

که توابع $k_0(r)$ و $k_1(T)$ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$k_0(r)=k_0(\frac{r}{b})^m, k_1(T)=k_1\exp(\beta^6(T-T_a)) \qquad (۳)$$

که در آن β, m معرف خواص فیزیکی رفتار ماده وابسته به دما و شعاع می‌باشند. با درنظر گرفتن k_2 به‌صورت $k_2=k_0k_1$، ضریب رسانش گرمایی با توجه به رابطه (۳) به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$k\left(r,T\right)=k_2r^m\exp(\beta^6(T-T_a)) \qquad (۴)$$

در رابطه (۴)، ثابت جدید $k_2=k_0k_1(\frac{1}{b})^m$ تعریف می شود. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(k_2r^{m+1}\exp(\beta^6(T-T_a))\frac{dT}{dr})=0 \qquad (۵)$$

رابطه (۵) به صورت زیر ساده‌سازی شده و طبق رابطه (۶) داریم:

$$\begin{aligned}&k_2r^{m+1}\exp(\beta^6(T-T_a))\frac{dT}{dr}+(mr^{m+1}k_2\exp(\beta^6(T-T_a))\\&+k_2r^{m+2}\beta^6\exp(\beta^6(T-T_a))\frac{dT}{dr})\frac{dT}{dr}+k_2r^{m+2}\exp(\beta^6(T-T_a))\frac{d^2T}{dr^2}=0\end{aligned} \qquad (۶)$$

با ساده سازی رابطه (۶) به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی برای توزیع انتقال حرارت به صورت زیر دست می‌یابیم:

$$\left(\frac{1+m}{r}\right)\frac{dT}{dr}+\beta^6\left(\frac{dT}{dr}\right)^2+\frac{d^2T}{dr^2}=0 \qquad (۷)$$

۴-روش اغتشاشات سنتی

روش اغتشاشات یکی از کارآمدترین روش‌ها به منظور حل مسائل مختلف مقدارمرزی در سازه های الاستیک می‌باشد. از این روش بعنوان یک ابزار تقریبی- تحلیلی مفید برای حل بخش عظیمی از مسائل غیرخطی استفاده می‌گردد. براساس روش اغتشاش سنتی، یک معادله غیرخطی پیچیده به تعداد نامحدودی معادله نسبتاً ساده‌تر(معادلات اغتشاش) تقسیم می‌شود. بر این اساس، حل معادله اصلی به‌صورت مجموع حل هر کدام از معادلات اغتشاشات و به ترتیب عباراتی با توان صعودی از یک پارامتر اغتشاش کوچک بعنوان ضریب بیان می‌گردد. در نتیجه، چند عبارت اول تا حدود زیادی چهره حل معادله را نشان می‌دهند. تفاوت اصلی روش اغتشاشات با سایر روش‌های تقریبی همچون روش گالرکین و یا روش ریتز در این است که نیاز به حدس اولیه برای حل مسئله ندارد. در صورتی که دقت روش‌های ریتز و گالرکین کاملاً وابسته به انتخاب تابع اولیه دارد که معمولاً نیز همه شرایط مرزی و هندسی مسئله را ارضا نمی‌کند[۲۰].

نکته مهم در استفاده موثر از روش اغتشاشات برای حل مسائل غیرخطی، انتخاب مناسب پارامتر اغتشاش کوچک است. در استفاده از روش اغتشاشات ضروری است که ε کوچکتر از یک در نظر گرفته شود. در ادامه این روش برای حل معادله (۷) بکارگرفته خواهد شد.

با تقسیم رابطه (۷) بر پارامتر m خواهیم داشت:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{r}\right)\frac{dT}{dr}+\frac{\beta^6}{m}\left(\frac{dT}{dr}\right)^2+\frac{1}{m}\frac{d^2T}{dr^2}=0 \quad (۸)$$

در این تحقیق نسبت $\frac{\beta^6}{m}$ مقدار کوچکی بوده که برابر ε درنظرگرفته خواهد شد. بنابراین رابطه (۸) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{r}\right)\frac{dT}{dr}+\varepsilon\left(\frac{dT}{dr}\right)^2+\frac{1}{m}\frac{d^2T}{dr^2}=0 \quad (۹)$$

یک سری توانی از پارامتر کوچک ε که با نام سری اغتشاش شناخته می‌شود برای پاسخ کامل مورد نظر در نظر گرفته خواهد شد. این سری منجر می‌شود که انحرافات از مسئله قابل حل کامل را به صورت کمی بیان کند. اولین جمله از این سری توانی پاسخ مسئله قابل حل دقیق است و جملات بعدی انحراف از این پاسخ به دلیل انحراف از مسئله اصلی را توصیف می‌کنند. این سری به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود[۲۱-۲۳]:

$$\overline{T}=T_0\varepsilon^0+\varepsilon^1T_1+\varepsilon^2T_2+.... \quad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰)، T_0 پاسخ معلوم برای مسئله قابل حل دقیق اولیه است $T_1,T_2,...$جمله های مرتبه بالاتر هستند که توسط یک روش سیستماتیک می‌توان آن‌ها را به دست آورد. برای ε کوچک، این جمله‌های مرتبه بالاتر به تدریج کوچکتر می‌گردند.

یک "پاسخ اغتشاشی" تقریبی را می‌توان از طریق قطع کردن این سری به دست آورد. معمولاً تنها سه جمله اول سری نگهداشته می‌شوند. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله (۹)، رابطه (۱۱) به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0\left(\frac{1}{m}\frac{d^2T_0}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_0}{dr}\right)+\varepsilon^1\left(\frac{1}{m}\frac{d^2T_1}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_1}{dr}+\left(\frac{dT_0}{dr}\right)^2\right)\\&+\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\frac{d^2T_2}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_2}{dr}+\left(\frac{dT_1}{dr}\right)^2\right)+\varepsilon^3(\frac{dT_2}{dr})^2=0\end{aligned} \quad (۱۱)$$

با صفر قرار دادن ضریب توان‌های مختلف ε (از ضریب ε^3 صرفنظر می‌شود)، معادله دیفرانسیل‌هایی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&O(\varepsilon^0):\ \frac{1}{m}\frac{d^2T_0}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_0}{dr}=0\\&O(\varepsilon^1):\ \frac{1}{m}\frac{d^2T_1}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_1}{dr}+\left(\frac{dT_0}{dr}\right)^2=0\\&O(\varepsilon^2):\ \frac{1}{m}\frac{d^2T_2}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}(1+\frac{1}{m})\right)\frac{dT_2}{dr}+\left(\frac{dT_1}{dr}\right)^2=0\end{aligned} \quad (۱۲)$$

ابتدا معادله دیفرانسیل مربوط به $O(\varepsilon^0)$ حل خواهد شد و سپس از نتایج آن در تقریب های مرتبه بالاتر استفاده می‌گردد. معادله دیفرانسیل مربوط به $O(\varepsilon^0)$ دارای جوابی به صورت زیر است:

$$T_0(r)=c_1+\frac{c_2}{r^m} \quad (۱۳)$$

c_1 و c_2 ثوابت مجهول رابطه (۱۳) بوده که توسط شرایط مرزی دمایی زیر قابل محاسبه هستند:

$$T_0(r=a)=T_a, T_0(r=b)=T_b \quad (۱۴)$$

با اعمال شرایط مرزی (۱۴) بر روی رابطه (۱۳) ضرایب مجهول به‌صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$c_2=\frac{(T_a-T_b)(r_b{}^m r_a{}^m)}{r_a{}^m-r_b{}^m}, c_1=\frac{T_a r_a{}^m-T_b r_b{}^m}{r_a{}^m-r_b{}^m} \quad (۱۵)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در معادله دیفرانسیل مربوط به $O(\varepsilon^1)$ در رابطه (۱۲)، معادله دیفرانسیل زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{m}\frac{d^2T_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{dT_1}{dr}+\left(\frac{-mc_2}{r^{m+1}}\right)^2=0 \quad (۱۶)$$

رابطه (۱۶) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن و از نوع کوشی اویلر می‌باشد که دارای جوابی شامل جواب عمومی و خصوصی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T_1(r)=\frac{c_3}{r^m}+c_4-\frac{mc_2{}^2}{2r^{2m}} \quad (۱۷)$$

c_3و c_4 ثوابت مجهول رابطه (۱۷) بوده که توسط شرایط مرزی دمایی رابطه (۱۴) قابل محاسبه هستند:

$$c_3 = \frac{m{c_2}^2({r_a}^{-2m} - {r_b}^{-2m}) + 2(T_a - T_b)}{2({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})}$$
$$c_4 = \frac{(-m{c_2}^2{r_b}^{-2m} - 2T_b){r_a}^{-m} + {r_b}^{-m}(-m{c_2}^2{r_a}^{-2m} - 2T_a)}{2({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})} \quad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در معادله دیفرانسیل مربوط به $O(\varepsilon^2)$ در رابطه (۱۲)، معادله دیفرانسیل زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{d^2T_2}{dr^2} + \frac{1+m}{r}\frac{dT_2}{dr} + m(\frac{-mc_3}{r^{m+1}} + \frac{-m^3{c_2}^2}{r^{m+1}}) = 0 \quad (۱۹)$$

معادله (۱۹) دارای جوابی (خصوصی و عمومی) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T_2(r) = -\frac{c_5}{r^m} + c_6 - \frac{1}{12}m^3c_2^4r^{-4m}$$
$$+\frac{1}{3}m^2c_2^2c_3r^{-3m} - \frac{1}{2}mc_3^2r^{-2m} \quad (۲۰)$$

مشابه قبل با بکارگیری شرایط مرزی رابطه (۱۴) ثوابت مجهول رابطه (۲۰) به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$c_5 = \frac{m^3c_2^4({r_b}^{-4m} - {r_a}^{-4m})}{12({r_b}^{-m} - {r_a}^{-m})} + + \frac{4m^2c_2^2c_3({r_a}^{-3m} - {r_b}^{-3m})}{12({r_b}^{-m} - {r_a}^{-m})}$$
$$\frac{+6mc_3^2({r_b}^{-2m} - {r_a}^{-2m}) + 12(T_b - T_a)}{12({r_b}^{-m} - {r_a}^{-m})}$$
$$c_6 = \frac{m^3c_2^4{r_a}^{-m}({r_b}^{-4m} - 4m^2c_2^2c_3{r_b}^{-3m})}{12({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})}$$
$$\frac{+(6mc_3^2{r_b}^{-2m} + 12T_b)m^3c_2^4{r_a}^{-m}}{12({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})} \quad (۲۱)$$
$$-\frac{m^3c_2^4{r_b}^{-m}({r_b}^{-4m} - 4m^2c_2^2c_3{r_b}^{-3m})}{12({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})}$$
$$-\frac{m^3c_2^4{r_b}^{-m}(6mc_3^2{r_b}^{-2m} + 12T_b)}{12({r_a}^{-m} - {r_b}^{-m})}$$

بنابراین مرتبه‌های تقریب سری اغتشاش دمایی به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{T}_0(r)=\varepsilon^0(c_1+\frac{c_2}{r^m})+O(\varepsilon^1)$$
$$\bar{T}_1(r)=\varepsilon^0(c_1+\frac{c_2}{r^m})+\varepsilon^1(\frac{c_3}{r^m}+c_4-\frac{mc_2{}^2}{2r^{2m}})+O(\varepsilon^2)$$
$$\bar{T}_2(r)=\varepsilon^0(c_1+\frac{c_2}{r^m})+\varepsilon^1(\frac{c_3}{r^m}+c_4-\frac{mc_2{}^2}{2r^{2m}})+ \qquad (۲۲)$$
$$\varepsilon^2(-\frac{c_5}{r^m}+c_6-\frac{1}{12}m^3c_2^4r^{-4m}+\frac{1}{3}m^2c_2^2c_3r^{-3m}$$
$$-\frac{1}{2}mc_3^2r^{-2m})+O(\varepsilon^3)$$

توزیع انتقال حرارت به‌دست آمده در ادامه و در تحلیل ترموالاستیک مسئله استفاده خواهد شد.

۵-تحلیل ترموالاستیک

روابط تنش- کرنش در مختصات استوانه‌ای در حالت کلی به شکل زیر خواهد بود[۲۴]:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\nu(\sigma_\theta+\sigma_z))+\alpha_r\bar{T}(\mathrm{r})$$
$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu(\sigma_r+\sigma_z))+\alpha_\theta\bar{T}(\mathrm{r}) \qquad (۲۳)$$
$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-\nu(\sigma_\theta+\sigma_z))+\alpha_z\bar{T}(\mathrm{r})$$
$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2G}\tau_{r\theta},\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2G}\tau_{rz},\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2G}\tau_{\theta z}$$

در رابطه (۲۳) σ,ε نماد کرنش و تنش بوده، E,Gو ν به‌ترتیب معرف مدول برشی، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون می‌باشد. جهت‌های شعاعی، مماسی و محوری به‌ترتیب با زیرنویس θ,rو z معرفی می‌گردد. با توجه به قسمت فرضیات، کلیه کرنش‌های برشی و مشتقات مماسی صفر بوده و در حالت کرنش صفحه‌ای، تنش محوری استوانه به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_z=\nu\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right)-E\alpha_z\bar{T}(\mathrm{r}) \qquad (۲۴)$$

با قرار دادن رابطه (۲۴) در رابطه (۲۳) و سپس ساده سازی، معادله تنش–کرنش برای یک استوانه جدارضخیم هدفمند که تحت میدان حرارتی یک‌بعدی شعاعی پایدار قرار داشته باشد به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_{rF}=\bar{d}_1\varepsilon_r+\bar{d}_2\varepsilon_\theta-\bar{d}_3\bar{T}(r)$$
$$\sigma_{\theta F}=\bar{d}_2\varepsilon_r+\bar{d}_1\varepsilon_\theta-\bar{d}_3\bar{T}(r) \qquad (۲۵)$$

در رابطه (۲۵)، اندیس F بیانگر ماده هدفمند می‌باشد. همچنین $\bar{d}_i$ها به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\bar{d}_1=d_1r^m\exp(\beta^6(\bar{T}-T_a)) \quad d_1=\frac{E_F(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (۲۶)$$

$$\bar{d}_2 = d_2 r^m \exp(\beta^6(\bar{T} - T_a)) \quad d_2 = \frac{E_F(\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\bar{d}_3 = d_3 r^m \exp(\beta^6(\bar{T} - T_a)), d_3 = d_1\alpha_{rF} + d_2(\alpha_{\theta F} + \alpha_{zF})$$

روابط کرنش - تغییرمکان در حالت کلی برای مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود[۲۵]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial u_z}{\partial z},\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \qquad (۲۷)$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

با توجه به قسمت فرضیات، معادلات کرنش- تغییر مکان برای استوانه جدارضخیم به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری روابط کرنش- تغییر مکان (۲۷) در روابط تنش-کرنش (۲۵) معادلات تنش- تغییر مکان به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\sigma_{rF} = \bar{d}_1\left(\frac{du_r}{dr}\right) + \bar{d}_2\left(\frac{u_r}{r}\right) - \bar{d}_3\bar{T}(r)$$
$$\sigma_{\theta F} = \bar{d}_2\left(\frac{du_r}{dr}\right) + \bar{d}_1\left(\frac{u_r}{r}\right) - \bar{d}_3\bar{T}(r) \qquad (۲۹)$$

روابط کلی تعادل در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌گردد[۲۴] و [۲۵]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}$$
$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \qquad (۳۰)$$
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}$$

با توجه به قسمت فرضیات، روابط تعادل برای استوانه جدارضخیم به صورت زیر ساده سازی می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (۳۱)$$

با قرار دادن رابطه توزیع دما (۲۲) در رابطه (۲۵) و سپس قرار دادن آن در رابطه (۳۱)، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\left(r^2d_1\right)\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2}\right)+\left(r(m+1)d_1\right)\left(\frac{du(r)}{dr}\right)\\&+\left(md_2-d_1\right)\left(u(r)\right)-\left(rmd_3\right)\left(\left(c_1+c_2r^{-m}\right)\right.\\&+\varepsilon\left(-\frac{1}{2}mc_2^2r^{-2m}+c_3r^{-m}+c_4\right)\\&+\varepsilon^2\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{12}m^3c_2^4r^{-4m}+\frac{1}{3}m^2c_2^2c_3r^{-3m}\\-\frac{1}{2}mc_3^2r^{-2m}+c_5r^{-m}+c_6\end{array}\right))\\&-\left(r^2d_3\right)\left(\left(-mc_2r^{-m-1}\right)+\right.\\&\varepsilon\left(m^2c_2^2r^{-2m-1}-mc_3r^{-m-1}\right)+\\&\varepsilon^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{3}m^4c_2^4r^{-4m-1}-m^3c_2^2c_3r^{-3m-1}\\+m^2c_3^2r^{-2m-1}-mc_5r^{-m-1}\end{array}\right))=0\end{aligned} \tag{۳۲}$$

بنابراین جواب عمومی و خصوصی معادله (۳۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u(r)=u_g(r)+u_p(r)=C_1r^{\lambda_1}+C_2r^{\lambda_2}+rg_1+r^{-2m+1}g_2+r^{-4m+1}g_3-r^{-3m+1}g_4 \tag{۳۳}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\lambda_1=\frac{-md_1+\sqrt{m^2d_1^2-4m\,d_1d_2+4d_1}}{2d_1}\\&\lambda_2=\frac{-md_1-\sqrt{m^2d_1^2-4m\,d_1d_2+4d_1}}{2d_1}\\&g_1=\frac{rmd_3\left(c_1+\varepsilon c_4-c_6\varepsilon^2\right)}{m(d_1+d_2)+d_1}\\&g_2=\frac{1}{2}\frac{d_3\left(\varepsilon m^2c_2^2+\varepsilon^2m^2c_3^2\right)}{(-2m+1)^2d_1+d_1(m+1)(-2m+1)+md_2-d_1}\\&g_3=\frac{1}{4}\frac{d_3\left(\varepsilon^2m^4c_2^4\right)}{(-4m+1)^2d_1+d_1(m+1)(-4m+1)+md_2-d_1}\\&g_4=\frac{2}{3}\frac{d_3\left(\varepsilon^2m^3c_3c_2^2\right)}{(-3m+1)^2d_1+d_1(m+1)(-3m+1)+md_2-d_1}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

ثوابت C_1 و C_2، ثابت‌های مجهول هستند که در ادامه به تعیین آنها پرداخته خواهد شد.

با جایگذاری رابطه به‌دست آمده برای تغییر مکان شعاعی در رابطه تنش- تغییر مکان (۲۹)، تنش شعاعی بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\sigma_{rF}=d_1r^m\exp(\beta^6(\bar{T}-T_a))(C_1\lambda_1r^{\lambda_1-1}+C_2\lambda_2r^{\lambda_2-1}\\&+g_1+\left(-2m+1\right)r^{(-2m)}g_2+\left(-4m+1\right)r^{(-4m)}g_3\\&-\left(-3m+1\right)r^{(-3m)}g_4)+d_2r^m\exp(\beta^6(\bar{T}-T_a))(C_1r^{\lambda_1-1}\\&+C_2r^{\lambda_2-1}+g_1+r^{(-2m)}g_2+r^{(-4m)}g_3-r^{(-3m)}g_4)\\&-d_3r^m\exp(\beta^6(\bar{T}-T_a))(\left(c_1+c_2r^{-m}\right)\\&+\varepsilon\left(-\frac{1}{2}mc_2^2r^{-2m}+c_3r^{-m}+c_4\right)\\&+\varepsilon^2\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{12}m^3c_2^4r^{-4m}+\frac{1}{3}m^2c_2^2c_3r^{-3m}\\-\frac{1}{2}mc_3^2r^{-2m}+c_5r^{-m}+c_6\end{array}\right))\end{aligned} \tag{۳۵}$$

از آنجا که استوانه هدفمند جدارضخیم تحت فشارهیدرواستاتیک داخلی قرار دارد، بنابراین شرایط مرزی مکانیکی مناسب برای آن به صورت زیر می‌باشد:

$$P(r=a)=-P_a,P(r=b)=0 \tag{۳۶}$$

با اعمال شرایط مرزی بر روی معادله (۳۵) ثوابت مجهول رابطه (۳۳) به‌صورت رابطه (۳۷) و (۳۸) پیدا خواهند شد. با پیدا شدن ثوابت مجهول انتگرالگیری توزیع جابجایی در امتداد ضخامت استوانه هدفمند جدار ضخیم و در ادامه تنش‌های شعاعی، مماسی و محوری حاصل خواهند شد.

$$C_1=-\frac{1}{\left(a^{\lambda_2}b^{\lambda_1}-b^{\lambda_2}a^{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2 d_1+d_2\right)}(12(-\frac{1}{2}b^{\lambda_1}(\varepsilon m(c_3^2\varepsilon+c_2^2)d_3$$
$$-4((m-\frac{1}{2})d_1-\frac{1}{2}d_2)g_2)a^{-2m+1}+\frac{1}{2}a^{\lambda_1}(\varepsilon m(c_3^2\varepsilon+c_2^2)d_3$$
$$-4((m-\frac{1}{2})d_1-\frac{1}{2}d_2)g_2)b^{-2m+1}-\frac{1}{12}b^{\lambda_1}(d_3\varepsilon^2m^3c_2^4$$
$$-48g_3((m-\frac{1}{4})d_1-\frac{1}{4}d_2))a^{-4m+1}+\frac{1}{3}b^{\lambda_1}(d_3\varepsilon^2m^2c_2^2c_3-9g_4((m-\frac{1}{3})d_1-\frac{1}{3}d_2))a^{-3m+1}$$
$$+b^{\lambda_1}(-\exp(-\beta(\overline{T}_{r=a}-T_a))P_a+d_3(c_5\varepsilon^2+c_3\varepsilon+c_2)a^{-m+1}$$
$$+\frac{1}{12}a^{\lambda_1}(d_3\varepsilon^2m^3c_2^4-48g_3((m-\frac{1}{4})d_1-\frac{1}{4}d_2))b^{-4m+1}$$
$$-\frac{1}{3}a^{\lambda_1}(d_3\varepsilon^2m^2c_2^2c_3-9g_4((m-\frac{1}{3})d_1-\frac{1}{3}d_2))b^{-3m+1}$$
$$-a^{\lambda_1}(d_3(c_5\varepsilon^2+c_3\varepsilon+c_2)b^{-m+1}+(d_3(c_6\varepsilon^2+c_4\varepsilon+c_1)-g_1(d_1+d_2)(ab^{\lambda_1}-ba^{\lambda_1}))^2)\qquad (۳۷)$$
$$C_2=\frac{1}{12\left(a^{\lambda_2}b^{\lambda_1}-b^{\lambda_2}a^{\lambda_1}\right)\left(\lambda_1 d_1+d_2\right)}(6(\varepsilon m(c_3^2\varepsilon+c_2^2)d_3-6a^{\lambda_2}(\varepsilon m(c_3^2\varepsilon+c_2^2)d_3$$
$$-4((m-\frac{1}{2})d_1-\frac{1}{2}d_2)g_2)b^{\lambda_2}a^{-2m+1}-4((m-\frac{1}{2})d_1-\frac{1}{2}d_2)g_2)b^{-2m+1}+b^{\lambda_2}(d_3\varepsilon^2m^3c_2^4$$
$$-48g_3((m-\frac{1}{4})d_1-\frac{1}{4}d_2))a^{-4m+1}-4b^{\lambda_2}(d_3\varepsilon^2m^2c_2^2c_3-9g_4((m-\frac{1}{3})d_1-\frac{1}{3}d_2))a^{-3m+1}$$
$$-12b^{\lambda_2}(-\exp(-\beta(\overline{T}_{r=a}-T_a))P_a+d_3(c_5\varepsilon^2+c_3\varepsilon+c_2)a^{-m+1}$$
$$-a^{\lambda_2}(d_3\varepsilon^2m^3c_2^4-48g_3((m-\frac{1}{4})d_1-\frac{1}{4}d_2))b^{-4m+1}$$
$$+4a^{\lambda_2}(d_3\varepsilon^2m^2c_2^2c_3-9g_4((m-\frac{1}{3})d_1-\frac{1}{3}d_2))b^{-3m+1}$$
$$+12a^{\lambda_2}(d_3(c_5\varepsilon^2+c_3\varepsilon+c_2)b^{-m+1}-12(d_3(c_6\varepsilon^2+c_4\varepsilon+c_1)-g_1(d_1+d_2)(ab^{\lambda_2}-ba^{\lambda_2}))^2)$$

با داشتن تنش‌های شعاعی، مماسی و محوری می‌توان طبق رابطه زیر که همان رابطه فن- میزز است، تنش موثر فن- میزز را محاسبه نمود:

$$\sigma_{eff}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad (۳۸)$$

۶-نتایج

مشخصات فیزیکی مورد استفاده برای ترسیم نتایج به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود[۲۶]:

$$E=22(\mathrm{GPa})\quad \nu=0.3\quad \alpha=1.2e-6(\frac{1}{{}^0C})\qquad (۳۹)$$

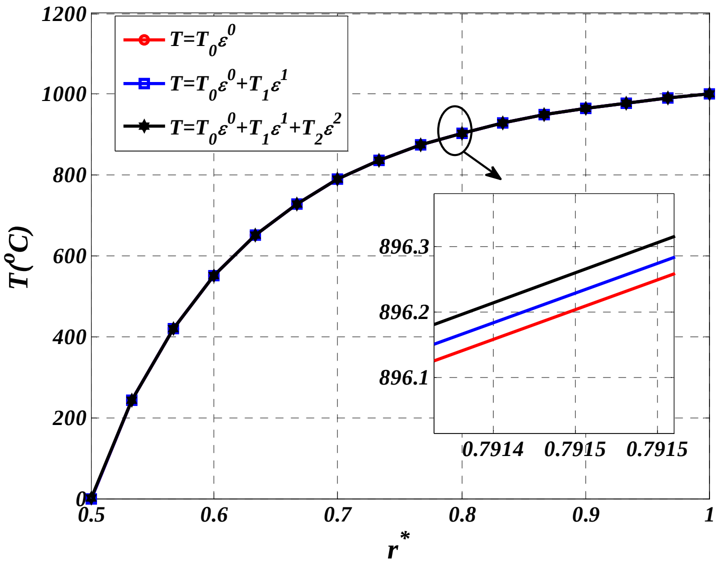
همچنین نسبت شعاع در همه نمودارها $\frac{b}{a}=2$ در نظر گرفته شده است. سایر مشخصات مورد نیاز در انتهای توضیحات مربوط به هر نمودار آورده شده است. پارامترهای بدون بعد در نظر گرفته شده برای سهولت در تحلیل نتایج به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\sigma_i^* = \left(\frac{\sigma_i}{P_a}\right)(i = r,\theta,z,eff),r^* = \left(\frac{r}{r_b}\right),u^* = \left(\frac{u}{a}\right) \quad (۴۰)$$

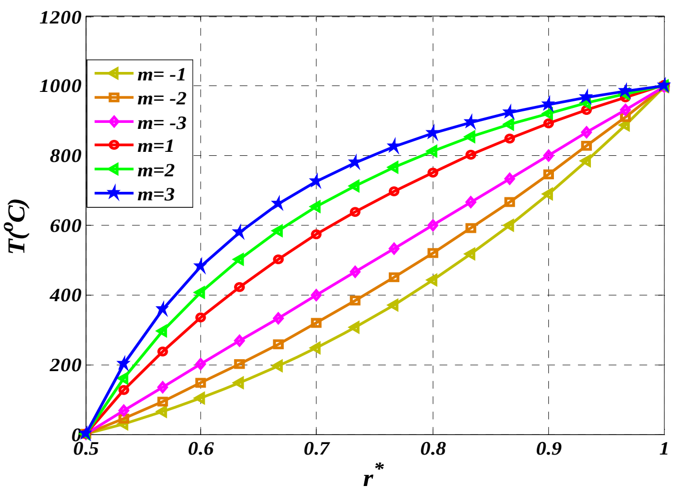
شکل (۲) توزیع انتقال حرارت در راستای ضخامت استوانه جدارضخیم هدفمند را برای حالاتی که سری اغتشاش دمایی، شامل تقریب‌های مرتبه صفر، مرتبه اول و مرتبه دوم (توزیع دمای نهایی) باشد نمایش می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهند که سری‌های اغتشاش از تقریب مرتبه صفر (حل مسئله دما بصورت خطی) به مرتبه های بالاتر همگرا خواهد شد. همچنین برای همه حالات مشاهده می‌گردد که شرایط مرزی دمایی ارضا گردیده است. ($T_a = 0(^\circ C)$,$T_b = 1000(^\circ C)$,$m = 4,\beta = 0.09$)

شکل (۳) توزیع انتقال حرارت (براساس توزیع دمای نهایی) در راستای ضخامت استوانه جدارضخیم هدفمند به ازای مقادیر مختلف ثابت فیزیکی ماده m را نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار ثابت ماده m در یک نسبت شعاع خاص مقادیر دما افزایش می‌یابد.

($T_a = 0(^\circ C)$,$T_b = 1000(^\circ C)$,$\beta = 0.09$)



شکل ۲– توزیع انتقال حرارت به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی

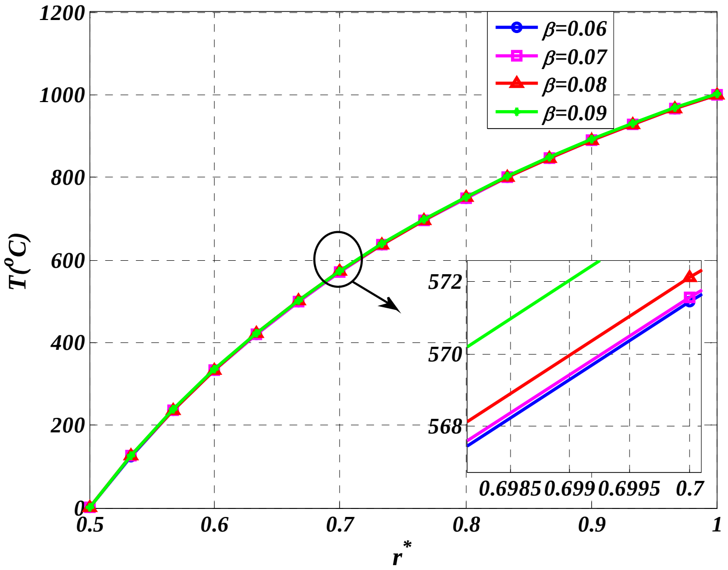


شکل ۳– انتقال حرارت(توزیع نهایی) به ازای مقادیر مختلف m

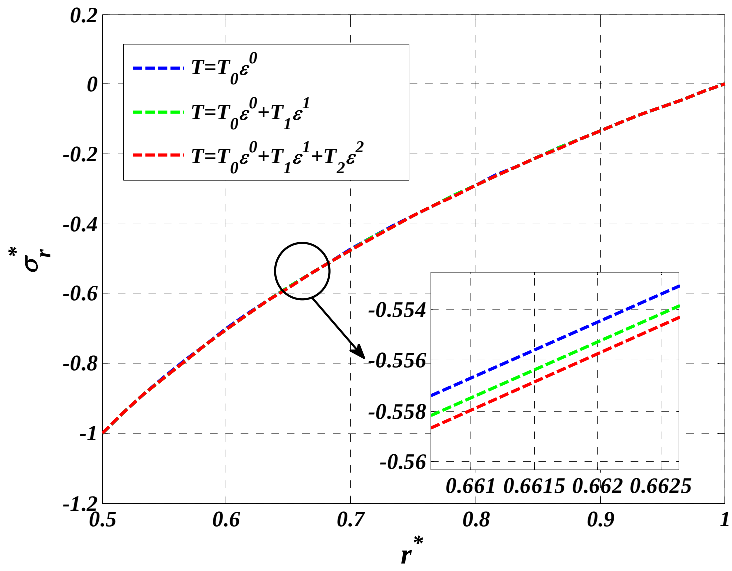
شکل (۴) نمودار توزیع انتقال حرارت (براساس توزیع دمای نهایی) بر حسب نسبت شعاع را برای استوانه جدارضخیم هدفمند نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش مقدار ثابت ماده β، مقدار دما در یک نسبت شعاع خاص افزایش خواهد داشت. ($T_a = 0(^\circ C)$,$T_b = 1000(^\circ C)$,$m = 1$).

شکل (۵) توزیع تنش شعاعی بدون بعد را بر حسب نسبت شعاع به ازای تقریب مرتبه‌های مختلف سری اغتشاش دمایی نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌گردد با افزایش مرتبه‌های مختلف تقریب دمایی، مقادیر تنش شعاعی بدون بعد کاهش خواهد داشت. همچنین مشاهده می‌گردد که با افزایش مرتبه تقریب، منحنی‌ها به حالت همگرایی نزدیکتر می‌گردند. در این منحنی نیز به خوبی مشاهده می‌گردد که برای هر سه حالت، شرایط مرزی مکانیکی به خوبی ارضا گردیده‌اند. منحنی توزیع تنش بدون بعد مماسی در امتداد ضخامت استوانه هدفمند به ازای تقریب مرتبه‌های مختلف سری اغتشاش دمایی توسط شکل (۶) نمایش داده شده است. از این شکل دریافت می‌شود که افزایش تقریب مرتبه‌های سری اغتشاش دمایی باعث افزایش تنش مماسی بدون بعد برای یک نسبت شعاع خاص می‌گردد.
($T_a = 50(^\circ C), T_b = 150(^\circ C), m = 2, \beta = 0.2, P_a = 10(MPa)$).

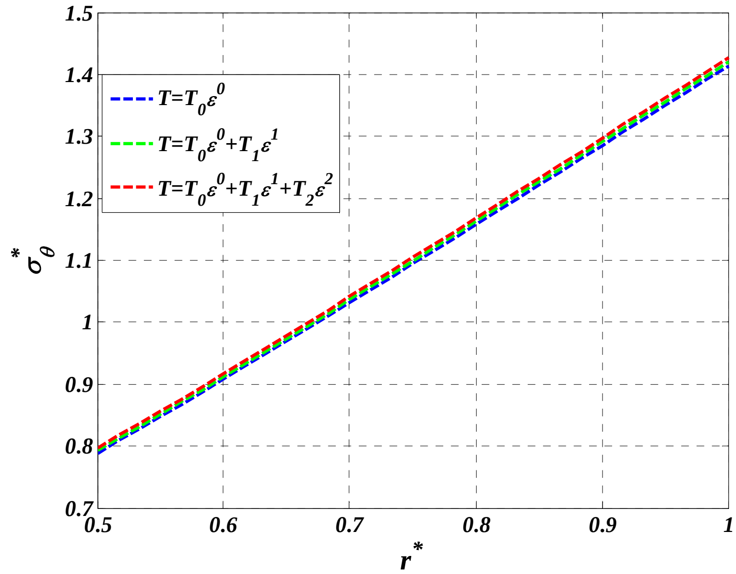
توزیع تنش محوری بدون بعد در امتداد ضخامت استوانه به ازای تقریب مرتبه‌های مختلف سری اغتشاش دمایی توسط شکل (۷) نشان داده شده است. در این منحنی نیز همانند شکل (۶) مشاهده می‌گرددکه افزایش تنش‌های محوری بدون بعد منوط به افزایش تقریب مرتبه‌های سری اغتشاش دمایی می‌باشد.
($T_a = 50(^\circ C), T_b = 150(^\circ C), m = 2, \beta = 0.2, P_a = 10(MPa)$).



شکل ۴– انتقال حرارت (توزیع نهایی) به ازای مقادیر مختلف β

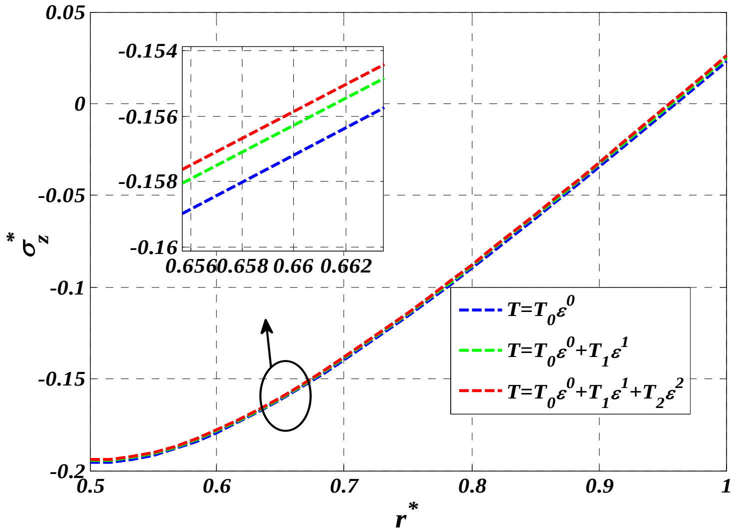


شکل۵– توزیع تنش شعاعی بدون بعد به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی

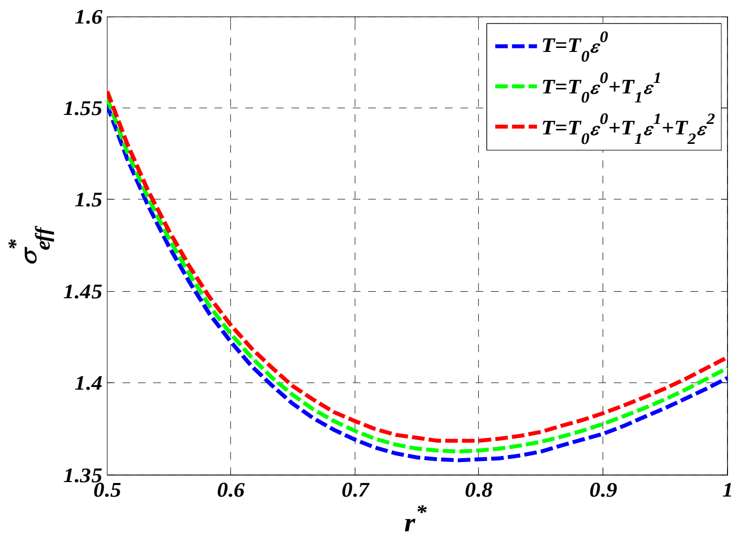


شکل ۶– توزیع تنش مماسی بدون بعد به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی

شکل (۸) توزیع تنش موثر بدون بعد را در امتداد ضخامت استوانه به ازای تقریب مرتبه‌های مختلف سری اغتشاش دمایی نشان می‌دهد. این منحنی که براساس رابطه فن - مایزز ارائه شده نشان می‌دهد که با افزایش تقریب مرتبه‌های سری اغتشاش دمایی، تنش موثر بدون بعد برای یک نسبت شعاع خاص افزایش می‌یابد. ($T_a=50(^\circ C), T_b=150(^\circ C), m=2, \beta=0.2, P_a=10(MPa)$).



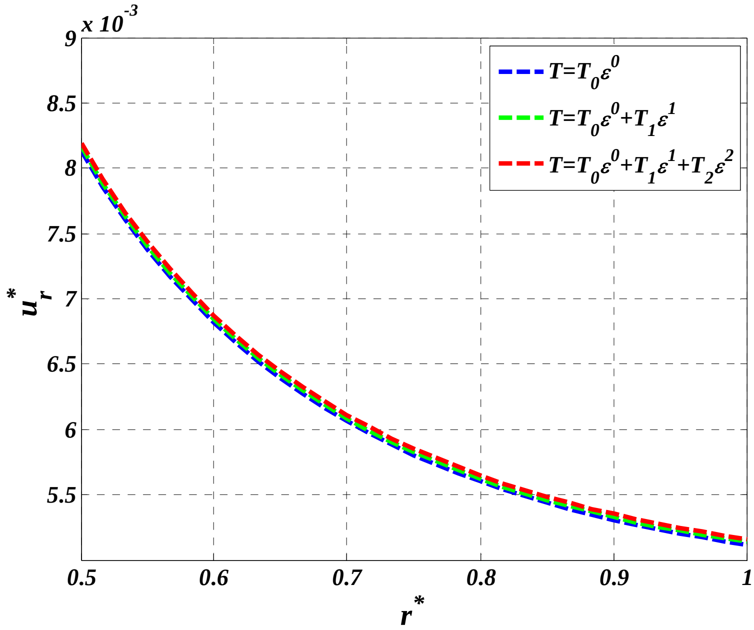
شکل ۷– توزیع تنش محوری بدون بعد به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی



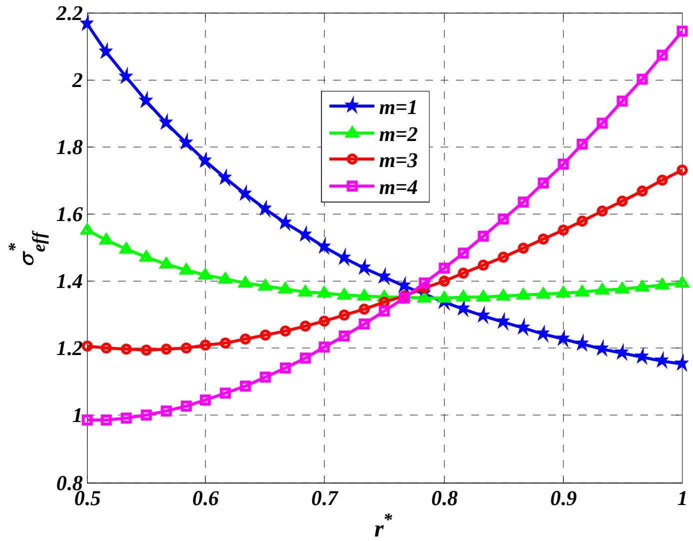
شکل ۸– توزیع تنش موثر بدون بعد به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی

شکل (۹) به بررسی تاثیر افزایش تقریب مرتبه‌های مختلف سری اغتشاش دمایی بر روی تغییر شکل بدون بعد در راستای ضخامت می‌پردازد. همانگونه که مشاهده می‌گردد، افزایش تقریب مرتبه‌های سری اغتشاش دمایی افزایش جابجایی شعاعی بدون بعد را برای یک نسبت شعاع خاص در پی دارد. ($T_a=50(^\circ C), T_b=150(^\circ C), m=2, \beta=0.2, P_a=10(MPa)$).

شکل (۱۰) توزیع تنش موثر بدون بعد را بر حسب نسبت شعاع به ازای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد. این نمودار بیان می‌دارد که برای مقدار ثابت β با افزایش مقادیر m، رفته رفته از مقادیر تنش موثر در جداره داخلی تا جداره میانی استوانه کاسته شده و به مقادیر تنش موثر از جداره میانی تا جداره خارجی استوانه افزوده می گردد. ($T_a=50(^\circ C), T_b=150(^\circ C), \beta=0.01, P_a=10(MPa)$).

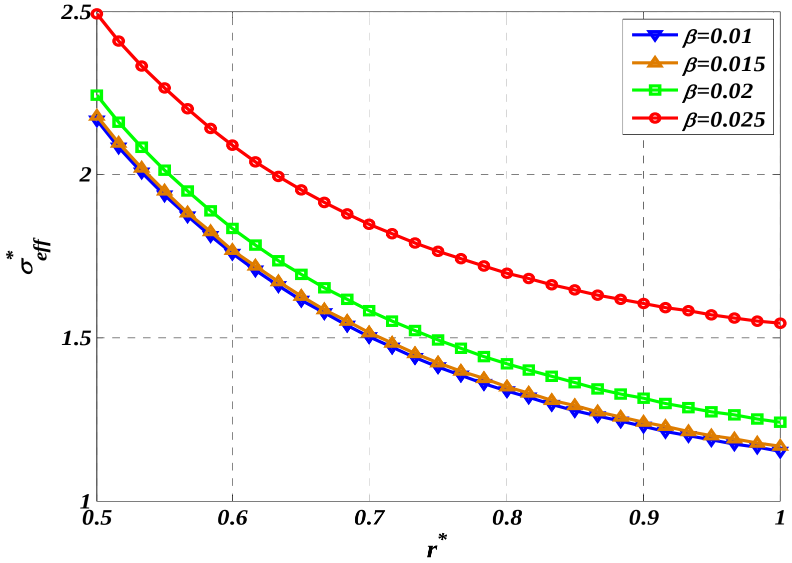


شکل ۹– توزیع جابجایی شعاعی بدون بعد به ازای تقریب‌های مختلف سری اغتشاش دمایی



شکل ۱۰- تنش موثر بدون بعد به ازای مقادیر مختلف m

شکل (۱۱) توزیع تنش موثر بدون بعد برحسب نسبت شعاع را به ازای مقادیر مختلف β نمایش می‌دهد. همانطوری که مشاهده می‌گردد با افزایش پارامتر β، مقدار تنش موثر بدون بعد در یک نسبت شعاع خاص افزایش خواهد داشت. $T_a = 50(^\circ C), T_b = 150(^\circ C), m = 1, P_a = 10(MPa)$



شکل۱۱- تنش موثر بدون بعد به ازای مقادیر مختلف β

۷-نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ترموالاستیک استوانه جدارضخیم هدفمند با طولی نامتناهی همراه با خواص وابسته به دما بررسی گردید. بارگذاری استوانه مذکور به‌صورت فشار هیدرواستاتیک داخلی و گرادیان دما مدنظر قرار گرفت. نتایج این تحقیق به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

- با درنظر گرفتن تقریب‌های مرتبه صفر، مرتبه اول و مرتبه دوم (توزیع دمای نهایی) سری اغتشاش دمایی، مشاهده می‌گردد که منحنی ها به سمت همگرایی به پیش می‌روند.

- با افزایش مقادیر ثابت ماده β و m، مقدار دمای نهایی در یک نسبت شعاع خاص افزایش خواهد داشت.

- با افزایش مرتبه‌های مختلف تقریب دمایی، مقادیر تنش شعاعی بدون بعد کاهش و مقادیر تنش مماسی، محوری و موثر بدون بعد، به همراه جابجایی شعاعی استوانه جدارضخیم هدفمند افزایش خواهد یافت.

- با افزایش مقادیر m، رفته رفته از مقادیر تنش موثر در جداره داخلی تا جداره میانی استوانه کاسته شده و به مقادیر تنش موثر از جداره میانی تا جداره خارجی استوانه اضافه می‌گردد. همچنین با افزایش پارامتر β، مقدار تنش موثر بدون بعد در یک نسبت شعاع خاص افزایش خواهد داشت.

مراجع

[1] Jamian, S., "Application of Functionally Graded Materials for Severe Plastic Deformation and Smart Materials", Ph.D. Thesis, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, Japan, (2012).

[۲] احمدی نوخندان، مصطفی، جبارزاده گنجه، مهرداد، "تحلیل غیرخطی ترموالاستیک دیسک‌های دوار توخالی FGM با استفاده از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، دوره‌ی ۱۴، شماره‌ی ۱، صفحه‌ی ۱۷۵ تا ۱۸۸، (۲۰۱۴).

[3] Nino, A., "Recent Development Status of Functionally Gradient Materials", Thin-walled Structures, Vol. 30, pp. 699-703, (1990).

[4] Tutuncu, N., and Ozturk, M., "Exact Solution for Stress in Functionally Graded Pressure Vessels", Composites Part B: Engineering, Vol. 32, pp. 683-686, (2001).

[5] Tutuncu, N., "Stresses in Thick-walled FGM Cylinders with Exponentially-varying Properties", Engineering Structures, Vol. 29, pp. 2032-2035, (2007).

[6] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., "Mechanical and Thermal Stresses in FGM Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, pp. 493-497, (2002).

[7] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., "General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Non-axisymmetric Steady-State Loads", Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, pp. 111-118, (2003).

[8] Tutuncu, N., and Temel, B., "A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres", Composite Structures, Vol. 19, pp. 385-390, (2009).

[9] Liew, K., Kitipornchai, S., Zhang, X., and Lim, C., "Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinder", International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, pp. 2355-2380, (2003).

[10] Tarn, J.Q., and Wang, Y.M., "End Effects of Heat Conduction in Circular Cylinders of Functionally Graded Materials and Laminated Composites", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 47, pp. 5741-5747, (2004).

[11] Chen, B., and Tong, L., "Thermomechanical Coupled Sensitivity Analysis and Design Optimization of Functionally Graded Materials", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, pp. 1891-1911, (2005).

[12] Shao, Z., "Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder with Finite Length", International Journal of Pressure Vessels Piping, Vol. 82, pp. 155-163, (2005).

[13] Arefi, M., "Nonlinear Thermoelastic Analysis of Thick-walled Functionally Graded Piezoelectric Cylinder ", Acta Mechanica, Vol. 224, pp. 2771-2783, (2013).

[14] Oral A., and Anlas G., "Effects of Radially Varying Moduli on Stress Distribution of Nonhomogeneous Anisotropic Cylindrical Bodies", International Journal of Solids Structures, Vol. 42, pp. 5568-5588, (2005).

[15] Ruhi, M., Angoshtar, A., and Naghdabadi, R., "Thermoelastic Analysis of Thick Walled Finite-length Cylinders for Functionally Graded Materials", Journal of Thermal Stresses, Vol. 28, pp. 391-408, (2005).

[16] Tokovyy, Y.V., and Ma, C.C., "Analysis of 2D Non-axisymmetric Elasticity and Thermoelasticity Problems for Radially Inhomogeneous Hollow Cylinders", Journal of Engineering Mathematics, Vol. 61, No. 2, pp. 171-184, (2008).

[17] Ghorbanpour Arani, A., Loghman, A., Abdollahitaheri, A., and Atabakhshian V., "Electro Thermomechanical Behavior of a Radially Polarized Rotating Functionally Graded Piezoelectric Cylinder", Journal of Mechanics of Material and Structures, Vol. 6, pp. 869-882, (2011).

[18] Loghman, A., and Parsa, H., "Exact Solution for Magneto-thermo-elastic Behaviour of Double-walled Cylinder Made of an Inner FGM and an Outer Homogeneous Layer", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 88, pp. 93-99, (2014).

[19] Arefi, M., "Nonlinear Thermal Analysis of a Functionally Graded Hollow Cylinder with Temperature-variable Material Properties", Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 56, pp. 267-273, (2015).

[۲۰] سهمانی سعید، محسن بهرامی، محمدی اقدم محمد، "رفتارکمانش و پس کمانش نانوپوسته‌های استونه‌ای با درنظر گرفتن اثر تنش سطحی تحت بار محوری به همراه شبیه سازی دینامیک مولکولی"، رساله دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، (۱۳۹۴).

[21] Wazwaz, A.M., "*Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*", Nonlinear Physical Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2009).

[22] Sadighi, A., and Ganji, D.D., "Exact Solutions of Laplace Equation by Homotopy-Perturbation and Adomian Decomposition Methods", Physics Letters A, Vol. 367, Issues. 1-2, pp. 83-87, (2007).

[23] Vatankhah, R., Kahrobaiyan, M.H., Alasty, A., and Ahmadian, M.T., "Nonlinear Forced Vibration of Strain Gradient Microbeams", Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 8363-8382, (2013).

[24] Ugural, A.C., and Fenster, S.K., "*Advanced Strength and Applied Elasticity*", New Jersey Institute of Thechnology, Prentice Hall; 4 Edition, (2003).

[25] Alibeigloo, A., Kani, A.M., and Pashaei M.H., "Elasticity Solution for the Free Vibration Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shell Bonded to Thin Piezoelectric Layers", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 89, pp. 98-111, (2012).

[26] Loghman, A., Aleayoub, S.M.A., and Hasani Sadi, M., "Time-dependent Magneto-thermoelastic Creep Modeling of FGM Spheres using Method of Successive Elastic Solution", Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, pp. 836-845, (2012).

فهرست نمادهای انگلیسی

T: توزیع دما

K: ضریب هدایت حرارتی

m: توان تغییر خواص

β : ضریب تغییر خواص

a,b: شعاع های داخلی و خارجی

ε : پارامتر کوچک در سری اغتشاشی

c_1, c_2: ثوابت انتگرال گیری

T_a, T_b: دماهای داخلی و خارجی

ε_i: مولفه های کرنش

σ_i: مولفه های تنش

α_r: ضریب انبساط حرارتی

E: مدول یانگ

r: موقعیت شعاعی

Abstract

In this work, thermo-elastic analysis for functionally graded thick-walled cylinder made of temperature-dependent materials carried out. All material properties expect the Poisson's ratio are considered variable in terms of radial coordinate and temperature. The variable material properties are assumed as multiplication of an exponential function of temperature and power function of radius. The heat conduction equation is derived in nonlinear form with the temperature-dependent assumption. Temperature distribution is achieved by solving this equation using classical perturbation method. After solution of heat conduction equation in terms of radial coordinate and substitution of that in constitutive relation, the differential equations of thermo-elastic problem can be derived. The solution is obtained with applying the necessary boundary conditions. The numerical results are presented in terms of significant parameters of the problem. The numerical results are indicated that the temperature distribution is increased with increase of temperature dependent index.