

بررسی تاثیر تنش سطحی بر پایداری کمانشی نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده

علی محی‌الدین^۱
دکترا

احمد مامندی^۲
دانشیار

مرضیه مبرهن^۳
کارشناسی ارشد

در این مقاله، تحلیل کمانش نانوتیوب اوایلر- برنولی با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده با در نظر گرفتن اثر الاستیسیته سطح، تنش سطحی و پارامتر غیرمحلّی مورد بررسی قرار گرفته‌است. با بهره‌گیری از اصل همپلتون و نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده و با در نظر گرفتن اثر تنش سطحی، معادلات حاکم بر دینامیک نانوتیوب استخراج شده‌است. حل تحلیلی معادلات الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده برای استخراج رابطه نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب با در نظر گرفتن تنش سطحی با استفاده از روش ناویر ارائه شده‌است. تأثیر تغییر پارامترهایی مانند ضریب مود کمانش، طول و قطر نانوتیوب، مقدار تنش سطحی و پارامتر غیرمحلّی در مقدار نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده بررسی شده‌است.

واژه‌های راهنما: نانوتیوب، تیر اوایلر- برنولی، کمانش، تنش سطحی، نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده

۱- مقدمه

فناوری نانو (نانوتکنولوژی) رشته‌ای از دانش کاربردی و فناوری است که به مطالعه و کاربرد ماده یا دستگاه‌هایی در ابعاد در حدود ۱ تا ۱۰۰ نانومتر که اثرات فیزیکی جدیدی (عمدتاً متأثر از غلبه خواص کوانتومی بر خواص کلاسیک) از خود نشان می‌دهند ارتباط دارد. نانولوله‌ها دارای اشکال و اندازه‌های مختلفی هستند و می‌توانند تک دیواره^۴ یا چند دیواره^۵ باشند. نانولوله‌های کربنی به خاطر خواص مکانیکی، الکتریکی و شیمیایی ممتازشان، تاثیر چشمگیری بر توسعه فناوری نانو در زمینه‌های مختلف مانند مهندسی مواد، پزشکی، داروسازی و طراحی داروهای خاص، دامپزشکی، زیست‌شناسی، فیزیک کاربردی، ابزارهای نیم‌رسانا، شیمی ابرمولکول‌ها، مهندسی مکانیک، مهندسی برق و مهندسی شیمی دارند.

^۱ دکترای مهندسی مکانیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند mohyeddin.ali@gmail.com
^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند a.mamandi@rkiau.ac.ir
^۳ کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند marziyeh.mobarhan@gmail.com

^۴ Single Walled Carbon Nano-Tube

^۵ Multi Walled Carbon Nano-Tube

نانولوله‌های کربنی از لوله‌هایی از گرافیت (کربن) از صفحات پیچیده شده می‌باشند. نانولوله‌ها خواص بسیار جالب و گسترده‌ای دارند مانند اندازه بسیار کوچک (قطر کوچکتر از $0/4$ نانومتر)، حالت رسانا و نیمه‌رسانایی آن‌ها برحسب شکل هندسی‌شان، برخورداری از خاصیت منحصر به فرد ترابری پرتابه‌ای، قدرت رسانایی گرمایی خیلی بالا، سطح جداره صاف یا قدرت تفکیک بالا که میزان عبور گاز از درون آنها به مراتب بیشتر از غشاهای میکرو و حفره‌ای معمولی که در جداسازی گازها مورد استفاده قرار می‌گیرند، بروز خواص الکتریکی و مکانیکی منحصر به فرد در طول آنها، مدول یانگ بالا، حساس به تغییرات کوچک نیروهای اعمال شده، گسیل و جذب نور مادون قرمز، ضریب حرکت جریان الکتروسیسته بسیار بالا، خواص مناسب مغناطیسی، ممان مغناطیسی بسیار بزرگ، چگالی سطحی بسیار بالا که باعث استحکام بالای نانولوله می‌شود، قابلیت ذخیره‌سازی انرژی چند برابر حجم الکترودهای گرافیتی، داشتن خاصیت ابررسانایی، تولید ولتاژ، استحکام و مقاومت کششی بالا. از کاربردهای نانولوله‌های کربنی به دلیل داشتن خواص الکتریکی و پایداری شیمیایی بی‌بدیل در صنایع و کاربردهای مختلفی مانند الکترونیک، در ساخت ترانزیستورها، حس‌گرهای شیمیایی و مکانیکی و زیست حس‌گرها، حافظه‌های نانولوله‌ای، استحکام‌دهی کامپوزیت‌ها، ذخیره‌سازی هیدروژن در پیل‌های سوختی، افزایش ظرفیت باتری‌ها و پیل‌های سوختی، افزایش راندمان پیل‌های خورشیدی، جلیقه‌های ضد گلوله سبک و مستحکم، کابل‌های ابررسانا یا رسانای سبک، رنگ‌های رسانا، روکش‌های کامپوزیتی ضد رادار، حصار حفاظتی الکترومغناطیسی در تجهیزات الکترونیکی، پلیمرهای رسانا، فیبرهای بسیار مقاوم، پارچه‌های با قابلیت ذخیره انرژی الکتریکی جهت راه‌اندازی ادوات الکتریکی، ماهیچه‌های مصنوعی با قدرت تولید نیروی ۱۰۰ مرتبه بیشتر از ماهیچه‌های طبیعی، صنایع نساجی، افزایش کارایی سرامیک‌ها، مواد پلاستیکی مستحکم، تشخیص گلوکز، محلولی برای اتصال درونی تراشه‌های بسیار سریع، مدارهای منطقی و پردازنده‌های فوق سریع، کمک به درمان آسیب‌دیدگی مغز، دارو رسانی به سلول‌های آسیب‌دیده، از بین بردن تومورهای سرطانی، تجزیه هیدروژن، ژن‌درمانی و تصویربرداری می‌توان اشاره کرد. نانولوله‌ها در تجهیزاتی مانند نانوسیم‌های کوانتومی برای ساختن مدارات الکتریکی در اندازه‌های کوچک شامل نانوسیم‌های فلزی، نانوسیم‌های آلی، نانوسیم‌های نیمه‌هادی استفاده می‌شوند. از سوی دیگر نانولوله‌ها در کاربردهای واقعی تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای و بیرون صفحه‌ای قرار می‌گیرند.

اعمال فشار بر یک نانولوله باعث تغییر ساختار کوانتومی الکترون‌های ماده می‌شود که به این دلیل ویژگی‌های رسانایی الکتریکی نانولوله افزایش یا کاهش می‌یابد. از این ویژگی حساسیت زیاد به اعمال نیروهای بسیار کوچک می‌توان ترانسفورماتور یا دستگاه‌های انتقال‌دهنده بر پایه نانولوله‌ها ساخت. همچنین، توانایی نانولوله‌ها در احساس تغییرات بسیار کوچک نیرو و فشار و باز تبدیل این فشار به صورت یک علامت الکتریکی می‌تواند امکان ساخت سوئیچ‌های نانولوله‌ای حساس به تغییرات بسیار کوچک نیرو و فشار را ایجاد نماید (دمیر و همکاران [۱۶]، در سال (۲۰۱۰)). روش‌های تحلیل رفتار نانو ساختارهای کربنی به دو دسته کلی آزمایشگاهی و تحلیلی تقسیم بندی می‌شود. روش‌های تحلیلی نیز به دو دسته کلی شامل روش‌های مبتنی بر مکانیک کوانتومی و روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته تقسیم بندی می‌گردند. به دلیل دشواری تحقیقات آزمایشگاهی در مقیاس نانو و بالا بودن هزینه محاسباتی روش‌های مبتنی بر مکانیک کوانتومی، روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. اما از آنجایی که

روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نبوده و نتایج حاصل از آن توسط نتایج کارهای آزمایشگاهی به تایید نمی‌رسند نظریه‌های نوینی ایجاد شده‌اند تا اثرات مدل‌سازی در مقیاس نانو را به درستی پیش‌بینی نمایند. در سال‌های اخیر استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی^۱ در تحلیل نانوتیرها مرسوم شده‌است. تفاوت اصلی بین نظریه کلاسیک و نظریه غیرمحلی در تعریف تنش است. بیشتر نظریه‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته براساس روابط ساختاری هایپرالاستیک استوار هستند که فرض می‌کنند تنش در هر نقطه به‌صورت تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. نظریه غیرمحلی که ابتدا توسط ارینگن [۱] در سال (۱۹۷۲)، ارینگن و ادلن [۲] در سال (۱۹۷۲) و ارینگن [۳] در سال (۱۹۸۳) ارائه شد، بیانگر این است که تنش در هر نقطه نه تنها تابع میدان کرنش آن نقطه است، بلکه تابع کرنش تمام نقاط محیط پیوسته‌است. این قبیل نظریه‌ها دربرگیرنده اطلاعاتی از نیروهای مابین اتم‌ها و اندازه طول‌های داخلی-که در روابط ساختاری به‌صورت پارامترهای مادی تعریف می‌شوند- هستند. نظریه غیرمحلی در بررسی انتشار موج تنش الاستیک، انتشار موج داخل کامپوزیت‌ها، مکانیک شکست، ارتعاشات آزاد و اجباری و کمانش و خمش تیرها و ورق‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌است گاویندجی و سکمن [۴]، در سال (۱۹۹۹). یک علت مهم که سبب ایجاد خواص و رفتار استثنایی در نانومواد و نانوسازه‌ها شده، انرژی سطح است.

استریتز^۲ و همکارانش در سال (۱۹۹۴)، توضیح داده‌اند اتم‌های موجود در سطح نسبت به اتم‌های موجود در حجم در معرض محیط متفاوتی قرار می‌گیرند و بنابراین وضعیت تعادل و انرژی این اتم‌ها نسبت به حجم متفاوت است. خواص جامداتی که نسبت به انرژی و وضعیت اتم‌ها حساس هستند، لزوماً تحت تأثیر سطح قرار می‌گیرد به‌ویژه در مورد تیرها و ورق‌های نازک یا سازه‌های چندلایه که اتم‌های سطحی زیادی نسبت به حجم دارند، اثرات سطحی بسیار مهم می‌شوند. کمیت انرژی سطح که به انرژی آزاد سطح γ یا انرژی مازاد سطح مربوط می‌شود، نخستین بار توسط گیبز^۳ در سال (۱۹۰۶)، در ترمودینامیک سطوح جامد مطرح شد. این کمیت برابر کار برگشت‌پذیر مورد نیاز برای ایجاد یک صفحه از طریق پروسه شکافت یا خزش می‌باشد که واحد آن ژول بر مترمربع (j/m^2) است. نسبت انرژی سطح (j/m^2) به مدول الاستیسیته (یانگ) (E) (j/m^3) پارامتر دیگری به نام مقیاس طول ذاتی می‌باشد که واحد آن متر است. این پارامتر معمولاً کوچک است ولی وقتی یک المان مادی، طول مشخصه قابل مقایسه با این مقیاس طول داشته باشد، انرژی سطحی نقش بسیار مهمی در خواص و رفتار آن ایفا می‌کند. پارامتر اساسی دیگر، تنش سطحی نام دارد که نخستین بار توسط گیبز معرفی شد. در این راستا، برای در نظر گرفتن این ویژگی‌ها، محققین به ارایه روش‌های اصلاح شده مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته پرداخته‌اند. در سال‌های اخیر چندین نظریه از جمله نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارینگن [۵]، در سال (۲۰۰۲) و نظریه کوپل تنش شکوری و همکاران [۲۹]، در سال (۲۰۱۳) و نظریه گرادیان کرنش لیانگ و همکاران [۳۰] در سال (۲۰۱۴)، و نظریه اصلاح شده کوپل تنش آشوری و محمودی [۳۱] در سال (۲۰۱۵) برای اصلاح نظریه‌های کلاسیک ارائه شده که قادر به بررسی اثر مقیاس کوچک هستند.

¹ Nanlocal theory of elasticity (NLTE)

² Streitz, F.H.

³ Gibbs, J.W.

از میان این روش‌ها روش مبتنی بر نظریه الاستیسیته غیرمحلی به دلیل سادگی و کاربرد گسترده در پیش‌بینی رفتار مکانیکی نانو مواد و تطابق نتایج آن با نتایج حاصل از روش دینامیک مولکولی^۱ با استقبال گسترده‌تری مواجه شده‌است. تاکنون تحقیقات بسیاری در زمینه تحلیل کمانش، خمش، انتشار امواج و ارتعاشات خطی یا غیرخطی نانوتیرها و نانولوله‌های کربنی بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی انجام شده‌است. در برخی از مقالات اثر سطح هم در نظر گرفته شده است. با این حال نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارینگن دارای این نقص است که در بعضی حالات و شرایط قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نمی‌باشد و نتایج آن کاملاً بر نتایج الاستیسیته کلاسیک منطبق بوده که به این نقص در تعدادی از مقالات اشاره شده‌است (پدیسن و همکارانش [۶]، در سال (۲۰۰۳)، قنادپور و همکاران [۲۸]، در سال (۲۰۱۳)، چلام و وانگ [۱۰] در سال (۲۰۰۸)). بنابراین، محققان به اصلاح نظریه غیرمحلی و رفع نقص فوق‌الذکر پرداخته‌اند (پدیسن و همکارانش [۶]، در سال (۲۰۰۳)، کومار و همکاران [۸]، در سال (۲۰۰۸)، ینگ و لیم [۲۴]، در سال (۲۰۱۲)، حسینی آرا و همکاران [۲۵]، در سال (۲۰۱۲)). ایده اصلی نظریه نوین برای اولین بار توسط پدیسون و همکارانش [۶] در سال (۲۰۰۳)، پایه‌ریزی شد.

اساس این نظریه بر پایه در نظر گرفتن دو ترم اول از سری معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده به عنوان تقریبی از آن به جای معادلات ساختاری غیرمحلی استوار است. معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده در واقع جواب خصوصی معادلات ساختاری غیرمحلی است که تنش را به صورت سری بی نهایت بر حسب کرنش و مشتقات مرتبه بالاتر آن بیان می‌دارد. در تحقیقاتی که به آنها اشاره شد دو ترم اول از سری معادلات ساختاری غیر محلی اصلاح شده به عنوان تقریبی از آن جهت تحلیل رفتار نانو ساختارها در نظر گرفته شده‌اند بدون آنکه در مورد همگرایی حل به صورت سری فوق‌الذکر بحثی به میان آمده باشد. حال آنکه توجه به همگرایی سری نقش مهمی در تعیین حوزه اعتبار و کارایی روش مذکور (در نظر گرفتن دو ترم از سری معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده به عنوان تقریبی از آن) دارد.

پدیسن و همکارانش [۶] در سال (۲۰۰۳)، به بررسی خمش تیر یک سر گیردار تحت بار گذاری‌های مختلف بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی پرداختند. آنها با به دست آوردن رابطه‌ای میان نسبت خیز بیشینه بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده اولیه به خیز بیشینه بر اساس نظریه الاستیسیته کلاسیک و پارامتر غیرمحلی بی بعد به بحث در مورد اثر پارامتر غیرمحلی در خیز ناشی از خمش نانوتیر پرداختند. لیم و وانگ [۷] در سال (۲۰۰۷)، با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی را برای خمش نانوتیرها استخراج نمودند که این روابط منجر به تولید شرایط مرزی غیرکلاسیک مرتبه بالا گردید که در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی غیرمحلی پیش از آن لحاظ نشده بود. آنها در ادامه با استفاده از این روابط، نظریه غیرمحلی اصلاح شده را معرفی نمودند که به نظریه اصلاح شده لیم و وانگ معروف است. کومار و همکارانش [۸]، در سال (۲۰۰۸)، کمانش نانولوله کربنی تحت شرایط مرزی مختلف را با در نظر گرفتن نانولوله کربنی به عنوان تیر اویلر-برنولی و با استفاده از روش انرژی براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی و نظریه الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند.

¹ Molecular Dynamics (M.D.)

آنها برای بررسی صحت نتایج خود، نتایج خود را با نتایج به دست آمده بر اساس روش دینامیک مولکولی مقایسه کردند که مطابقت خوبی نیز میان آنها مشاهده شد. نتایج نشان داد که برای مقادیر بسیار کوچک پارامتر غیرمحلی، نتایج نظریه الاستیسیته غیرمحلی و نظریه الاستیسیته غیر محلی اصلاح شده اولیه بر هم منطبق می باشد ولی با افزایش پارامتر غیرمحلی نتایج این دو نظریه از هم فاصله می گیرد. وانگ و فنگ [۱۱] و [۱۲]، در سال (۲۰۰۹)، اثرات سطح بر روی کمانش محوری و ارتعاشات جانبی نانوسیمها را با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، آنها اثرات الاستیسیته سطح و تنش باقیمانده سطحی را با روابط تیر تیموشنکو ترکیب کردند تا معادلات حاکم بر کمانش یا ارتعاش نانوسیم را به دست آورند. سپس این معادلات را با روش تحلیلی حل کردند تا نیروی کمانش بحرانی یا فرکانسهای طبیعی به دست آیند. آنها دریافته اند که در نظر گرفتن اثرات سطحی برای موادی با ثابتهای سطح مثبت، باعث افزایش نیروی کمانش بحرانی و فرکانسهای طبیعی می شود و این موضوع برای نانوسیمهای با سطح مقطع دایره ای با نسبت طول به قطر بزرگ خود را بیش تر نشان می دهد. لیم [۱۳]، در سال (۲۰۱۰)، به بررسی دقیق تر این نظریه پرداخت. آن و همکارانش [۱۴]، در سال (۲۰۱۰)، یک مدل محیط پیوسته به همراه شبیه سازی اتمی برای بررسی اثر سطح بر نانوتیرها ایجاد کردند و نشان دادند که اثرات سطح در تنشها و تغییرشکلها کاملاً چشمگیر است. لی و چانگ [۱۵]، در سال (۲۰۱۰)، اثر سطح بر روی فرکانسهای طبیعی نانو لوله کربنی را بررسی کرده و دریافته اند که در نظر گرفتن اثر سطح در معادلات حاکم بر مسئله باعث افزایش فرکانسهای طبیعی شده و افزایش پارامتر غیرمحلی نیز باعث افزایش فرکانسها به ویژه در مودهای بالا می شود.

در سال (۲۰۱۰)، دمیر و همکاران [۱۶]، ارتعاشات آزاد نانولوله را بر اساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. لیو و همکارانش [۱۷]، در سال (۲۰۱۱)، یک مدل اجزای محدود برای بررسی اثرات انرژی سطحی بر روی نانوتیرها ارائه کردند. آنها با استفاده از نظریه سطح گورتین-مرداک و مدل تیر نازک و ضخیم، فرکانسهای طبیعی را به دست آورده و نتایج خود را با سایر روشهای تحلیلی مقایسه کردند. آنها همچنین اثرات سطحی را بر فرکانسهای طبیعی و بارهای بحرانی کمانش تحت شرایط مرزی مختلف بررسی نمودند. وانگ و وانگ [۱۹]، در سال (۲۰۱۱)، اثرات سطح بر روی ارتعاش عرضی و کمانش محوری نانوتیر را بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. برای سه حالت تغییر شکل، مودهای سیستم مورد نظر، فرکانس طبیعی و نیروی محوری بحرانی را به دست آورده و تاثیر کشش سطحی و کشش سطحی باقیمانده محاسبه شده است. آنها دریافته اند که اثرات سطح هنگامی که ابعاد مقطع تیرها نانومتر است بسیار مهم می باشد. وانگ [۲۰]، در سال (۲۰۱۱)، با استفاده از نظریه غیرمحلی اصلاح شده به بررسی ارتعاشات و کمانش نانولوله های حاوی سیال پرداخت. او فرکانسهای طبیعی بزرگتری را در مقایسه با نظریه غیرمحلی کلاسیک به دست آورده و مقاومت بالاتری را برای نانولوله پیش بینی کرد. محمود و همکارانش [۲۱]، در سال (۲۰۱۲)، رفتار استاتیکی نانوتیر را با استفاده از مدل غیرمحلی تیر اویلر-برنولی و با در نظر گرفتن اثرات سطح، شامل الاستیسیته سطح و تنشهای سطحی به وسیله روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند.

سان و همکاران [۲۲]، در سال (۲۰۱۲)، از مدل تیر اویلر-برنولی غیرمحلی همراه با کشش سطحی و تنش سطحی برای بررسی رفتار کمانش نانو لوله‌های کربنی تحت فشار محوری استفاده کردند. آنها دریافتند که ابعاد کوچک و اثر سطح، دو ویژگی ذاتی نانو ساختارها هستند که هر دو از اهمیت زیادی برخوردار بوده و باید در نظر گرفته شوند. لیم و همکاران [۲۳]، در سال (۲۰۱۲)، و یانگ و لیم [۲۴] در سال (۲۰۱۲)، کمانش حرارتی نانومیله را بر اساس نظریه غیرمحلی اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. معادلات دیفرانسیل جدید مرتبه بالاتر حاکم در هر دو جهت عرضی و محوری برای کمانش نانومیله با شرایط مرزی غیرمحلی بر اساس اصل حساب تغییرات به دست آمده و اثرات مقیاس نانو و تغییر دما بر نیروی بحرانی بررسی شدند. آنها نیروی بحرانی بزرگتری را با استفاده از نظریه غیرمحلی اصلاح شده پیش‌بینی کردند که نشان می‌دهد سختی ستون‌ها در مقیاس نانو افزایش می‌یابد. همچنین نشان دادند که در دمای پایین و دمای اتاق، بار کمانش بحرانی نانو ساختارها با افزایش تغییرات دما افزایش می‌یابد در حالی که در دمای بالا نیروی بحرانی با افزایش تغییرات درجه حرارت کاهش می‌یابد.

حسینی آرا و همکاران [۲۵]، در سال (۲۰۱۲)، اثر دما بر کمانش دینامیکی نانو لوله کربنی تک جداره روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک تحت بار ضربه و با شرط تکیه‌گاه ساده را بر اساس نظریه پوسته و با استفاده از اصل تغییرات مورد مطالعه قرار داده و تاثیر پارامتر غیرمحلی را بر بار بحرانی بررسی کردند. جم و سمائی [۲۶]، در سال (۲۰۱۳)، مدل تیر اویلر-برنولی اصلاح شده را ارائه کرده و به بررسی تأثیر کشش سطحی در نیروی بحرانی کمانش محوری نانولوله‌ها پرداختند. نتایج تحلیل نشان داد که اثرات سطحی و اینرسی چرخشی تأثیر قابل توجهی بر نیروی بحرانی کمانش نانولوله دارد. آنها دریافتند افزایش حجم نانولوله با فرض ثابت ماندن نسبت ابعادی آن موجب کاهش اثرات سطح بر بار بحرانی می‌شود. همچنین اثرات سطح با ثابت سطح مثبت، تمایل به افزایش بار محوری بحرانی در مقایسه با مدل تیر اویلر کلاسیک دارد. زهرا سادات موسوی و همکاران [۳۲]، در سال (۲۰۱۷)، نظریه جدید الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده کامل را معرفی کردند. آنها بر اساس معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده پیشین و با استفاده از اصل تغییراتی هامیلتون، خمش و کمانش نانو صفحات مستطیلی را بررسی کردند و نشان دادند بازآرایی سری ظاهر شده در روابط منجر به خطای قطع کردن سری معادلات ساختاری اصلاح شده می‌شود.

با بررسی مقالات چاپ شده مشاهده می‌گردد که تاکنون تحقیقی که دربرگیرنده تحلیل کمانش نانولوله کربنی با در نظر گرفتن همزمان تنش سطحی و پارامتر غیرمحلی با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده باشد انجام نشده است. در این راستا، دیگر جنبه نوآوری پژوهش کنونی در استخراج معادلات دینامیکی و کمانشی حاکم بر نانوتیر با در نظر گرفتن تنش سطحی می‌باشد.

در این مقاله، تحلیل کمانش نانوتیوب اویلر-برنولی با شرایط مرزی دو سر ساده با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده^۱ با در نظر گرفتن اثر الاستیسیته سطح، تنش سطحی و پارامتر غیرمحلی مورد بررسی قرار گرفته است. با بهره‌گیری از اصل هامیلتون و نظریه الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده و با در نظر گرفتن اثر تنش سطحی، معادلات حاکم بر دینامیک نانوتیر استخراج شده است.

¹ Modified Nonlocal Theory of Elasticity (MNLTE)

حل تحلیلی معادلات برای استخراج رابطه نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب با در نظر گرفتن تنش سطحی با استفاده از روش ناویر ارائه شده است. سپس، با تجدید آرایش حل سری برای حذف خطای عددی مربوط به در نظر گرفتن تعداد مشخصی از جملات سری در محاسبه بار بحرانی کمانش نانوتیوب، معادلات الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده و روابط مربوط به آنها بازنویسی و استخراج شده است. با برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار ریاضی Maple تأثیر تغییر پارامترهایی مانند ضریب مود کمانش، طول و قطر نانوتیوب، مقدار تنش سطحی و ضریب غیرمحلّی در مقدار نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده بررسی شده است. در نهایت مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده در محاسبه نیروی بحرانی کمانش با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده با نتایج به دست آمده از نظریه غیرمحلّی اصلاح نشده و نظریه کلاسیک تیرها مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- استخراج معادله حاکم بر دینامیک نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده و تحلیل کمانش نانوتیوب

در شکل (۱)، یک نانوتیوب (نانولوله یا نانوتیوب) اویلر-برنولی از ماده همگن و همسانگرد با طول L ، ضخامت t ، مساحت سطح مقطع A ، ممان اینرسی سطح مقطع I مدول الاستیسیته E_b ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ_b نشان داده شده است. مبدا دستگاه مختصات دکارتی (x, y, z) در گوشه سمت چپ سطح میانی-که بر صفحه xy منطبق می‌باشد- واقع شده و محورهای x ، y و z به ترتیب در راستای طول، عرض (عمود بر صفحه) و ضخامت جانبی نانوتیوب قرار دارند. جهت مثبت محورها در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. نانوتیوب در دو انتهای خود تحت بار محوری فشاری $N_x^{nl} = -N$ قرار دارد. در تحلیل نتایج فرض شده که نانوتیوب بر روی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای خود قرار دارد.

۲-۱- روابط کرنش-انحنای (روابط سینماتیک)

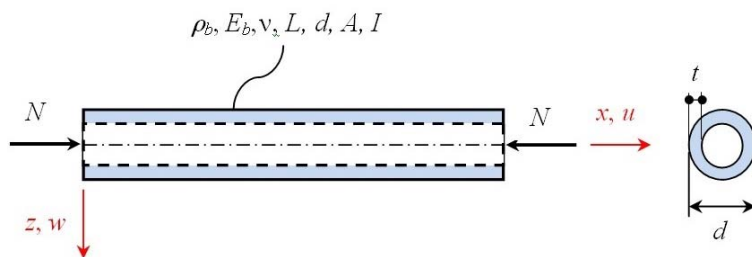
بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی مولفه‌های جابجایی دوبعدی و انحنای صفحه میانی نانوتیوب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$u = u_0(x, t) - zw_{,x}, \quad (۱-الف)$$

$$w = w(x, t), \quad (۱-ب)$$

$$k_x = w_{,xx}, \quad (۱-پ)$$

که در آن، $u(x, t)$ و $w(x, t)$ جابجایی مکانی (x) و زمانی (t) هر نقطه از نانوتیوب به ترتیب در امتداد محورهای x و z بوده و u_0 جابجایی هر نقطه از صفحه میانی در امتداد محور x و k_x انحنای صفحه میانی نانوتیوب به علت تغییر شکل ناشی از بارگذاری است. لازم به ذکر است که نماد زیرنویس $(,x)$ و $(,t)$ در نوشتن روابط در این مقاله به ترتیب نشان‌دهنده اولین مشتق بر حسب x و t می‌باشند.



شکل ۱- نانوتیوب نازک تحت بار محوری فشاری N در دو انتهای خود

همچنین، کرنش طولی (خطی) ϵ_x نانوتیوب به صورت زیر تعریف می شود

$$\epsilon_x = \epsilon_{0x} - zk_x, \tag{۲}$$

که در آن کرنش صفحه میانی (صفحه خنثی) ϵ_{0x} نانوتیوب به صورت زیر است

$$\epsilon_{0x} = u_{0,x}, \tag{۳}$$

۲-۲- رابطه ساختاری غیرمحلّی اصلاح شده

بر اساس قانون هوک، روابط میان تنش کلاسیک (محلّی) σ^l و کرنش خطی نانوتیوب به صورت زیر است

$$\sigma_x^l = E_b \epsilon_x, \tag{۴}$$

معادله ساختاری غیرمحلّی حاکم بر تنش غیرمحلّی σ^{nl} برای نانوتیوب به صورت زیر می باشد

$$(1 - \beta) \sigma_x^{nl} = \sigma_x^l, \tag{۵}$$

که در آن عملگر غیرمحلّی β به صورت زیر تعریف می شود

$$\beta = \varphi^2 L_e^2 \nabla^2 = \varphi^2 L_e^2 \frac{d^2}{dx^2}, \tag{۶}$$

که پارامتر غیرمحلّی بی بعد φ توسط رابطه زیر تعریف می شود

$$\varphi = \frac{e_0 L_i}{L_e}, \tag{۷}$$

که L_i طول مشخصه داخلی (فاصله بین اتم های کربن)، L_e طول مشخصه خارجی و e_0 از خواص ذاتی ماده است که از کارهای آزمایشگاهی و یا مدل سازی دینامیک شبکه اتمی مقدار آن به دست می آید (آمارا و همکاران [۱۸]، در سال (۲۰۱۰)). عملگر غیرمحلّی اصلاح شده β^* برای نانوتیوب به صورت زیر تعریف می شود

$$\beta^* = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} L_e^{2i} \frac{d^2}{dx^2}, \tag{۸}$$

اثبات می‌گردد که رابطه زیر یک جواب خصوصی برای رابطه (۵) است و در پژوهش کنونی به عنوان معادله ساختاری غیر محلی اصلاح شده برای نانوتیوب در نظر گرفته می‌شود

$$\sigma_x^{nl} = \beta^* \sigma_x^l, \quad (۸)$$

برهان: با جایگذاری تنش غیر محلی از رابطه (۸) در رابطه (۵) و با استفاده از تعریف عملگرهای غیر محلی کلاسیک (۶) و عملگر غیر محلی اصلاح شده (۸) به دست می‌آید که

$$\begin{aligned} (1-\beta) \sigma_x^{nl} &= (1-\beta) \beta^* \sigma_x^l \\ &= \left(1 - \varphi^2 L_e^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \left(1 + \varphi^2 L_e^2 \frac{d^2}{dx^2} - \varphi^4 L_e^4 \frac{d^4}{dx^4} + \varphi^6 L_e^6 \frac{d^6}{dx^6} + \dots\right) \sigma_x^l \\ &= \left[\left(1 + \varphi^2 L_e^2 \frac{d^2}{dx^2} + \varphi^4 L_e^4 \frac{d^4}{dx^4} + \dots\right) - \left(\varphi^2 L_e^2 \frac{d^2}{dx^2} + \varphi^4 L_e^4 \frac{d^4}{dx^4} + \dots\right)\right] \sigma_x^l = \sigma_x^l, \end{aligned} \quad (۹)$$

۲-۳- تنش‌های منته‌ج غیر محلی اصلاح شده

گشتاور غیر محلی M_x^{nl} ، نیروی محوری (مستقیم) غیر محلی N_x^{nl} و نیروی برشی غیر محلی Q_x^{nl} منته‌ج برای نانوتیوب به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند

$$M_x^{nl} = \int_A \sigma_x^{nl} z dA, \quad (۱۰-الف)$$

$$N_x^{nl} = \int_A \sigma_x^{nl} dA, \quad (۱۰-ب)$$

$$Q_x^{nl} = \int_A \sigma_{xz}^{nl} dA, \quad (۱۰-پ)$$

با استفاده از روابط (۱-پ)، (۳)، (۴) و (۸)، روابط (۱۰-الف) و (۱۰-ب) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$M_x^{nl} = \int_A \sigma_x^{nl} z dA = \int_A \beta^* (\sigma_x^l) z dA = \int_A \beta^* (E_b \varepsilon_x) z dA = \int_A \beta^* (E_b \varepsilon_{0x}) z dA - \quad (۱۱-الف)$$

$$\int_A \beta^* (E_b k_x) z^2 dA = \beta^* (E_b \varepsilon_{0x}) \int_A z dA - \beta^* (E_b k_x) \int_A z^2 dA = -\beta^* (E_b I k_x),$$

$$N_x^{nl} = \int_A \sigma_x^{nl} dA = \int_A \beta^* (\sigma_x^l) dA = \int_A \beta^* (E_b \varepsilon_x) dA =$$

$$\begin{aligned} \int_A \beta^* (E_b \varepsilon_{0x}) dA - \int_A \beta^* (E_b k_x) z dA &= \beta^* (E_b \varepsilon_{0x}) \int_A dA - \beta^* (E_b k_x) \int_A z dA = \\ &= -\beta^* (E_b A \varepsilon_{0x}) = -\beta^* (E_b A u_{0,x}), \end{aligned} \quad (۱۱-ب)$$

معادلات دیفرانسیلی تعادل برای یک المان از نانوتیر در حالت کلی به صورت زیر می باشد

$$\sigma_{x,x}^{nl} + \sigma_{xz,z}^{nl} = 0, \quad (12)$$

با ضرب رابطه (۱۲) در z و انتگرال گیری نسبت به z به دست می آید که

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,x}^{nl} z dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz,z}^{nl} z dz = 0, \quad (13)$$

با انتگرال گیری جز به جز از ترم آخر روابط (۱۳) و با استفاده از روابط (۱۰) به دست می آید که

$$M_{x,x}^{nl} - Q_x^{nl} + (\sigma_{xz}^{nl} z) \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} = 0, \quad (14)$$

با توجه به صفر بودن تنش برشی σ_{xz}^{nl} در صفحات بالایی و پایینی نانوتیر (در $z = \pm \frac{h}{2}$)، نیروی برشی غیرمحلی منتهی عبارت است از

$$Q_x^{nl} = M_{x,x}^{nl}, \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۱-الف) در رابطه (۱۵)، نیروهای برشی غیرمحلی منتهی به صورت زیر نوشته می شوند

$$Q_x^{nl} = -E_b I \beta^* w_{,xxx}, \quad (16)$$

۲-۴- محاسبه انرژی پتانسیل نانوتیوب تحت بار کمانشی

انرژی پتانسیل کل نانوتیر Π به صورت زیر تعریف می شود

$$\Pi = U - K - W_m - W_e \quad (17)$$

که در آن انرژی کرنشی، K انرژی جنبشی، W_m کار انجام شده توسط نیروهای غشایی و W_e کار انجام شده توسط بار خارجی است. کار انجام شده توسط بار خارجی به صورت زیر می باشد

$$W_e = \int_0^L p(x) w dx, \quad (18)$$

کار انجام شده توسط نیروهای محوری (مستقیم) که فقط ناشی از تغییر خیز w است برابر است با

$$W_m = \frac{1}{2} \int_0^L N_x^{nl} (w_{,x})^2 dx, \quad (19)$$

انرژی کرنشی نانوتیر عبارت است از

$$U = \int_0^L \int_A \sigma_x^{nl} \varepsilon_x dA dx, \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۲۰) و با استفاده از روابط (۱۰-الف) و (۱۰-ب)، انرژی کرنشی به صورت زیر است

$$U = \int_0^L \iint_A \sigma_x^{nl} \varepsilon_x dAdx = \int_0^L \iint_A \sigma_x^{nl} \varepsilon_{0x} dAdx - \int_0^L \iint_A z \sigma_x^{nl} k_x dAdx = \quad (21)$$

$$\int_0^L \left(\iint_A \sigma_x^{nl} dA \right) \varepsilon_{0x} dx - \int_0^L \left(\iint_A \sigma_x^{nl} z dA \right) k_x dx = \int_0^L N_x^{nl} \varepsilon_{0x} dx + \int_0^L -M_x^{nl} k_x dx = U_m + U_b,$$

که در آن، U_m انرژی کرنش غشایی و U_b انرژی کرنش خمشی می باشد. انرژی جنبشی نانوتیوب عبارت است از

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A \rho_b \left[(u_{,t})^2 + (w_{,t})^2 \right] dAdx, \quad (22)$$

۲-۵- استخراج معادلات حاکم بر دینامیک و شرایط مرزی نانوتیوب

در این بخش با استفاده از اصل انرژی همیلتون معادله حاکم و شرایط مرزی نانوتیوب از رابطه زیر به دست می آید. شکل کلی اصل هامیلتون به صورت زیر می باشد

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi dt = 0, \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۱۸) تغییرات مرتبه اول کار انجام شده توسط بار خارجی به صورت زیر نوشته می شود

$$\delta W_e = \int_0^L p(x, y) \delta w dx, \quad (24)$$

همچنین تغییرات مرتبه اول کار انجام شده توسط نیروی محوری با استفاده از رابطه (۱۹) عبارت است از

$$\delta W_m = \int_0^L N_x^{nl} w_{,x} \delta w_{,x} dx, \quad (25)$$

با انتگرال گیری جز به جز از رابطه (۲۵)

$$\delta W_m = \left(N_x^{nl} w_{,x} \delta w \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \left(N_{x,x}^{nl} w_{,x} \right) \delta w dx, \quad (26)$$

با استفاده از روابط (۳) و (۲۱) تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی غشایی به صورت زیر بیان می شود

$$\delta U_m = \int_0^L N_x^{nl} \delta u_{0,x} dx, \quad (27)$$

با انتگرال گیری جز به جز از رابطه (۲۷)، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی غشایی عبارت است از

$$\delta U_m = \left(N_x^{nl} \delta u_0 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L N_{x,x}^{nl} \delta u_0 dx, \quad (28)$$

با استفاده از روابط (۱-پ) و (۲۱) برای تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی خمشی

$$\delta U_b = \int_0^L -M_x^{nl} \delta w_{,xx} dx, \quad (29)$$

با انتگرال گیری جز به جز از رابطه (۲۹) به دست می آید که

$$\delta U_b = \int_0^L M_{x,x}^{nl} \delta w_{,x} dx + M_{x,x}^{nl} \delta w_{,x} \Big|_{x=0}^{x=L} = - \int_0^L M_{x,xx}^{nl} \delta w dx + M_{x,x}^{nl} \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} - M_x^{nl} \delta w_{,x} \Big|_{x=0}^{x=L}, \quad (30)$$

با توجه به رابطه نیروی برشی غیرمحلّی منتجه بر حسب گشتاور (ممان) غیرمحلّی منتجه بر اساس رابطه (۱۵)، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی به صورت زیر است

$$\delta U_b = \int_0^L M_{x,xx}^{nl} \delta w dx - Q_x^{nl} \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} + M_x^{nl} \delta w_{,x} \Big|_{x=0}^{x=L}, \quad (31)$$

با استفاده از روابط (۲۲) و (۱) تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی عبارت است از

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \iint_A \rho_b (u_{,t} \delta u_{,t} + w_{,t} \delta w_{,t}) dA dx = \\ &= \int_0^L \iint_A \rho_b \left[(u_0 - z w_{,x})_{,t} \delta (u_0 - z w_{,x})_{,t} + w_{,t} \delta w_{,t} \right] dA dx \\ &= \int_0^L \iint_A \rho_b (u_{0,t} \delta u_{0,t} + w_{0,t} \delta w_{0,t}) dA dx + \int_0^L \iint_A \rho_b z^2 w_{,xt} \delta w_{,xt} dA dx \\ &\quad - \int_0^L \iint_A \rho_b z (w_{,xt} \delta u_{0,t} + u_{0,t} \delta w_{,xt}) dA dx, \end{aligned} \quad (32)$$

با توجه به فرض نازک بودن تیر و ثابت بودن چگالی نانوتیر تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی به صورت زیر به دست می آید

$$\delta K = J_0 \int_0^L (u_{0,t} \delta u_{0,t} + w_{0,t} \delta w_{0,t}) dx + J_2 \int_0^L w_{,xt} \delta w_{,xt} dx, \quad (33)$$

که در رابطه فوق، J_0 و J_2 از رابطه زیر تعریف می شوند

$$J_i = \iint_A \rho_b z^i dA, \quad i = 0, 2, \quad (34)$$

با انتگرال گیری نسبت به زمان از روابط (۲۴)، (۲۶)، (۲۸) و (۳۰)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_e dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L p(x) \delta w dx dt, \quad (35\text{-الف})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_m dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (N_x^{nl} w_{,x})_{,x} \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} (N_x^{nl} w_{,x} \delta w) \Big|_{x=0}^{x=L} dt, \quad (35\text{-ب})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_m dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L N_{x,x}^{nl} \delta u_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(N_{x,x}^{nl} \delta u_0 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} dt, \quad (۳۵-پ)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_b dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L M_{x,xx}^{nl} \delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} Q_x^{nl} \delta w \Big|_{x=0}^{x=L} dt + \int_{t_1}^{t_2} M_x^{nl} \delta \delta w_{,x} \Big|_{x=0}^{x=L} dt, \quad (۳۵-ت)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۳۳) و انجام عملیات ریاضی

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt &= J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_{0,t} + w_{,t} \delta w_{,t}) dx dt + J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xt} \delta w_{,xt} dx dt \\ &= J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_{0,t} + w_{,t} \delta w_{,t}) dt dx + J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xt} \delta w_{,xt} dt dx \\ &= -J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_0 + w_{,tt} \delta w) dt dx + J_2 \int_0^L (u_{0,t} \delta u_0 + w_{,t} \delta w) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx - J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xtt} \delta w_{,x} dt dx \\ &\quad + J_2 (w_{,xt} \delta w_{,x}) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx \\ &= -J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_0 + w_{,tt} \delta w) dt dx - J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xtt} \delta w_{,x} dt dx \\ &= -J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_0 + w_{,tt} \delta w) dx dt - J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xtt} \delta w_{,x} dx dt = \\ &= -J_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (u_{0,t} \delta u_0 + w_{,tt} \delta w) dx dt \\ &\quad + J_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w_{,xxtt} \delta w dx dt - J_2 \int_{t_1}^{t_2} (w_{,xtt} \delta w) \Big|_{x=0}^{x=L} dt, \end{aligned} \quad (۳۶)$$

با جایگذاری روابط (۳۵) و (۳۶) در رابطه (۱۷) معادلات حاکم و شرایط مرزی نانوتیوب به صورت زیر به دست می آیند
معادلات حاکم

$$M_{x,xx}^{nl} - J_0 w_{,tt} + J_2 w_{,xxtt} - \left(N_x^{nl} w_{,x} \right)_{,x} + p(x, y) = 0, \quad (۳۷-الف)$$

$$N_x^{nl} - J_0 u_{0,t} = 0, \quad (۳۷-ب)$$

شرایط مرزی ابتدا و انتهای نانوتیوب $(x = 0, L)$

$$Q_x^{nl} - J_2 w_{,xtt} - N_x^{nl} w_{,x} = 0, \text{ or } w = \text{prescribed}, \quad (۳۸-الف)$$

$$M_x^{nl} = 0, \text{ or } w_{,x} = \text{prescribed}, \quad (۳۸-ب)$$

$$N_x^{nl} = 0, \text{ or } u = \text{prescribed}, \quad (۳۸-پ)$$

۲-۶- تحلیل کمانش نانوتیوب با در نظر گرفتن اثر تنش سطحی

برای به دست آوردن معادلات حاکم و شرایط مرزی کمانش نانوتیوب نازک تحت بار محوری (مستقیم) فشاری یکنواخت $N_x^{nl} = -N$ ، در روابط حاکم (۳۷) ترم‌های شامل مشتقات زمانی و نیروی جانبی (عرضی) برابر صفر قرار داده می‌شود. معادله حاکم به دست آمده عبارت است از

$$M_{x,xx}^{nl} = -Nw_{,xx}, \quad (39)$$

شرایط مرزی ابتدا و انتهای نانوتیوب در $(x = 0, L)$ به صورت زیر می‌باشند

$$Q_x^{nl} + Nw_{,x} = 0, \text{ or } w = \text{prescribed}, \quad (40\text{-الف})$$

$$M_x^{nl} = 0, \text{ or } w_{,x} = \text{prescribed}, \quad (40\text{-ب})$$

حال با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۶)، معادلات حاکم و شرایط مرزی کمانش نانوتیوب تحت بار محوری به صورت زیر باز نویسی می‌گردد

$$E_b I \beta^* w_{,xxxx} = Nw_{,xx}, \quad (41)$$

سفتی خمشی موثر برای مدل تیر لایه‌ای (مانند تیر با لایه‌های کامپوزیتی) به صورت زیر به دست می‌آید (سان و همکاران [۲۳]، [۲۰۱۲])

$$(EI)^* = EI + E_s I_s, \quad (42)$$

که I و I_s نشان دهنده ممان اینرسی مقطع عبوری به ترتیب از حجم تیر (تیوب) و لایه رویی تیر (سطح بیرونی تیر یا جدار تیوب) می‌باشد. سفتی خمشی موثر برای یک تیر (تیوب) با مقطع دایره‌ای با قطر نانوتیوب d (شکل (۱) را ببینید) از رابطه زیر به دست می‌آید (هی و همکاران [۹]، [۲۰۰۸])

$$(EI)^* = EI + E_s \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{d}{2} \right) \cos \theta \right]^2 \frac{d}{2} t d\theta = E \frac{\pi d^4}{64} + E_s \frac{\pi d^3}{8}, \quad (43)$$

که θ زاویه قوس المان سطح دایروی بر روی مقطع نانوتیوب است. لازم به ذکر است که برای نانوتیوب‌های تک دیواره، سفتی خمشی $E_b I$ می‌تواند با سفتی خمشی موثر $(EI)^*$ ، طبق رابطه زیر جایگزین شود (سان و همکاران [۲۲]، [۲۰۱۲])

$$(EI)^* = E_c I_c + E_s I_s \approx \frac{\pi E_c (d^3 t + dt^3)}{8} + \frac{\pi E_s (d+t)^3}{8}, \quad (44)$$

از سوی دیگر، رابطه بین تنش سطحی و انرژی سطحی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma_{\alpha\beta} = \gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad (45)$$

که $\sigma_{\alpha\beta}$ ، تنش سطحی، $\varepsilon_{\alpha\beta}$ کرنش سطحی و $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونگر می‌باشد و α و β مقادیر ۱ و ۲ را دارا می‌باشند. گورتین^۱ و مرداک^۲ در سال‌های (۱۹۷۵) و (۱۹۷۸) یک رابطه کلی نظریه براساس مفاهیم مکانیک محیط‌های پیوسته ارائه کردند که انرژی سطحی را نیز شامل می‌شود. در مدل آنها سطح به عنوان یک لایه ریاضی بدون ضخامت چسبیده به حجم زیرین و بدون لغزش در نظر گرفته شده‌است. خواص سطح با حجم ماده متفاوت بوده و با تنش پسماند سطح و ثابت‌های لامه مشخص می‌شود. اگر لایه‌های بالایی و پایینی از یک جنس بوده و خواص مشابهی داشته باشند، رابطه تنش-کرنش بین لایه‌های سطحی-که توسط گورتین و مرداک بیان شد- به شکل زیر ساده می‌شود که در روابط حاکم بر کمانش نانوتیورها کاربرد دارد (سان و همکاران [۲۲]، (۲۰۱۲)).

$$\tau_s = \tau_0 + S\varepsilon_s, \quad (46)$$

که در آن، τ_0 تنش سطحی پسماند پیش از ایجاد کمانش، τ_s تنش صفحه‌ای و ε_s کرنش طولی سطحی ایجاد شده ناشی از بارگذاری است. همچنین، $S = E_s h_s$ مدول صفحه‌ای است که در آن E_s مدول و h_s ضخامت لایه بسیار نازکی است که روی سطح تیر (تیوب) را پوشانده‌است (لایه بیرونی). اما تاثیر سطح به طول L در مختصات کارتزین در نظر گرفته می‌شود (لی و چانگ [۱۵]، در سال (۲۰۱۰)) به گونه‌ای که سطح مقطع دلخواه بوده اما نسبت به محور z متقارن باشد. تنش سطحی ناشی از نیروی گسترده دلخواه $p(x)$ در طول تیر با معادله لاپلاس-یانگ بیان می‌شود

$$\tau_s = p(x) = Hw_{,xx}, \quad (47)$$

که در آن، H پارامتر ثابتی است که توسط تنش سطحی در امتداد طول تیر تعیین می‌شود و w جابجایی عرضی تیر است. مقدار H بستگی به تنش سطحی و هندسه سطح مقطع تیر دارد که برای مقطع دایره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H = 2\tau_s d, \quad (48)$$

بنابراین، H^0 به صورت زیر تخمین زده می‌شود

$$H^0 = 2\tau_0 (d + t), \quad (49)$$

و به این معنا است که تنش سطحی به وجود آمده از تغییر شکل کمانش، به دلیل مقدار بسیار کم آن است. معادله (۴۱) در واقع معادله تیر اوپلر-برنولی است که با در نظر گرفتن اثر تنش سطحی به صورت زیر بازنویسی می‌گردد (سان و همکاران [۲۲]، در سال (۲۰۱۲))

$$(EI)^* \beta^* w_{,xxxx} = (N + H^0) w_{,xx}, \quad (50)$$

که، $(EI)^*$ و H^0 به ترتیب در روابط (۴۴) و (۴۹) معرفی شده‌اند.

¹ Gurtin, M.E.

² Murdoch, A.I.

شرایط مرزی ابتدا و انتهای نانوتیر $(x = 0, L)$ عبارتند از

$$\beta^* w_{,xxx} + Nw_{,x} = 0, \text{ or } w = \text{prescribed}, \quad (51\text{-الف})$$

$$\beta^* w_{,xx} = 0, \text{ or } w_{,x} = \text{prescribed}, \quad (51\text{-ب})$$

با استفاده از روابط (۴۰) شرایط مرزی برای نانوتیر روی تکیه‌گاه ساده به صورت زیر نوشته می‌شود
شرایط مرزی ابتدا و انتهای نانوتیر $(x = 0, L)$

$$M_x^{nl} = 0, \quad (52\text{-الف})$$

$$w = 0, \quad (52\text{-ب})$$

که با استفاده از روابط (۵۱) شرایط مرزی برای نانوتیر روی تکیه‌گاه ساده به صورت زیر است
شرایط مرزی ابتدا و انتهای نانوتیر $(x = 0, L)$

$$\beta^* w_{,xx} = 0, \quad (53\text{-الف})$$

$$w = 0, \quad (53\text{-ب})$$

اکنون برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر کمانش نانوتیر از روش ناویر استفاده می‌گردد. بسط سری فوریه داده برای خیز در نظر گرفته می‌شود (زهره سادات موسوی و همکاران [۳۳]، در سال (۲۰۱۷))

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right), \quad (54)$$

که

$$c_m = \frac{p_{mn} L^2}{E_b I \pi^4 A^4} \left(\frac{1}{S_0}\right), \quad (55)$$

میدان جابجایی در رابطه (۵۴)، شرایط مرزی داده شده در روابط (۵۳) را ارضا می‌نماید. حال با جایگذاری رابطه (۵۴) در معادله حاکم بر رفتار نانوتیر (رابطه ۴۱) و حل معادله به دست آمده، بار بحرانی کمانش نانوتیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$N = \left(\frac{E_b I \pi^2 A^4}{L^2 A_\lambda^2}\right) S_0, \quad (56)$$

که در آن مربع اسکالر A_λ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_\lambda^2 = m^2, \quad (57)$$

و اسکالر A عبارت است از

$$A = m, \quad (58)$$

همچنین سری بینهایت S_0 به صورت زیر می باشد

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\varphi^2 \pi^2 A^2)^i, \quad (59)$$

حال با تجدید آرایش سری S_0 ، سری فوق الذکر به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\varphi^2 \pi^2 A^2)^i = (1 + \varphi^4 \pi^4 A^4 + \varphi^8 \pi^8 A^8 + \dots) - (\varphi^2 \pi^2 A^2 + \varphi^6 \pi^6 A^6 + \dots) \\ &= (1 + \varphi^4 \pi^4 A^4 + \varphi^8 \pi^8 A^8 + \dots) - (\varphi^2 \pi^2 A^2) (1 + \varphi^4 \pi^4 A^4 + \varphi^8 \pi^8 A^8 + \dots) \\ &= (1 - \varphi^2 \pi^2 A^2) (1 + \varphi^4 \pi^4 A^4 + \varphi^8 \pi^8 A^8 + \dots) \\ &= (1 - \varphi^2 \pi^2 A^2) S, \end{aligned} \quad (60)$$

که در آن سری هندسی S به صورت زیر تعریف می شود

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi^2 \pi^2 A^2)^{2i}, \quad (61)$$

با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری، شعاع همگرایی سری S و متعاقباً سری S_0 عبارت است از

$$\varphi_{conv} = \frac{1}{\pi A}, \quad (62)$$

مجموع سری هندسی S عبارت است از

$$S = \frac{1}{1 - \varphi^4 \pi^4 A^4}, \quad (63)$$

و مجموع سری هندسی S_0 عبارت است از

$$S_0 = \frac{1}{(1 + \varphi^2 \pi^2 A^2)}, \quad (64)$$

با استفاده از روابط (۵۶) و (۶۴)، بار بحرانی کمانش نانوتیوب به صورت زیر بازنویسی می گردد

$$N_{cr} = \left(\frac{E_b I \pi^2 A^4}{L^2 A_\lambda^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \varphi^2 \pi^2 A^2} \right), \quad (65)$$

معادله به دست آمده (۶۵) در واقع معادله کمانش نانوتیوب بدون اثر سطح است که با در نظر گرفتن اثر سطح

به صورت زیر نوشته می شود (سان و همکاران [۲۲]، (۲۰۱۲))

$$N_{cr} = \left(\frac{(EI)^* \pi^2 A^4}{L^2 A_\lambda^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \varphi^2 \pi^2 A^2} \right) + H^0, \quad (66)$$

که $(EI)^*$ و H^0 در روابط (۴۴) و (۴۹) معرفی شدند. با توجه به رابطه (۵۷) و (۵۸) مقادیر $A_\lambda^2 = m^2$ و $A^2 = m^2$ برابر می‌باشند. بنابراین رابطه ساده شده برای محاسبه N_{cr} به صورت زیر می‌باشد

$$N_{cr} = \left(\frac{(EI)^* \pi^2 A^2}{L^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \varphi^2 \pi^2 A^2} \right) + H^0, \quad (۶۷)$$

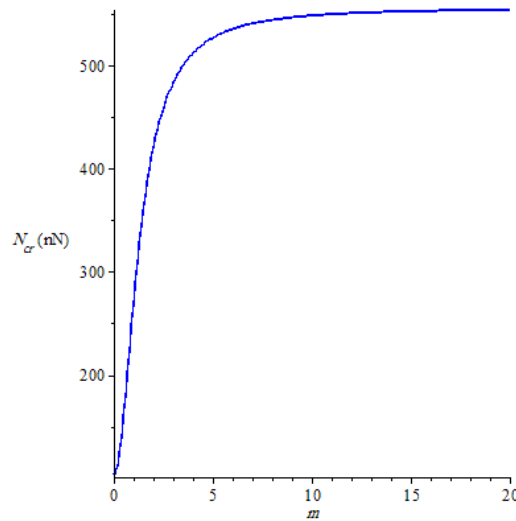
۳- بررسی و تحلیل نتایج کمانش نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده
در این بخش با برنامه نویسی در محیط نرم‌افزار ریاضی Maple به تحلیل و بحث در نتایج به دست آمده با استفاده از نظریه غیرمحملی اصلاح شده و مقایسه و اعتبارسنجی نتایج آن با نظریه غیرمحملی (اصلاح نشده) و نظریه کلاسیک تیرها و بررسی اثر تغییر پارامترهای مختلف شامل ضریب m ، طول نانوتیوب L ، قطر نانوتیوب d ، تنش سطحی τ_0 و پارامتر غیرمحملی φ بر مقدار نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب N_{cr} پرداخته می‌شود. مشخصات نانوتیوب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (سان و همکاران [۲۲]، (۲۰۱۲)).

$$E = 5.5 \text{TPa}, t = 0.066 \text{nm}, \tau_0 = 25 \frac{nN}{nm}, S = 50 \frac{nN}{nm},$$

همچنین، $L = 7 \text{nm}$ و $d = 1/22 \text{nm}$ در نظر گرفته شده است مگر اینکه تغییرات پارامترهای مختلف هندسی و فیزیکی نانوتیوب بررسی گردد. همچنین، با مقایسه نتایج دینامیک مولکولی با نتایج عددی در تحلیل‌های پیش رو مقدار پارامتر $e_0 L_i = 1/36 \text{nm}$ در نظر گرفته شده است (آمارا و همکاران [۱۷]، در سال (۲۰۱۰) و انصاری و سهمانی [۲۷]، در سال (۲۰۱۳)). لازم به ذکر است که با توجه به مقدار در نظر گرفته شده $L_e = 7 \text{nm}$ مقدار پارامتر غیرمحملی بی‌بعد $\varphi = \frac{e_0 L_i}{L_e} = 0.194$ به دست آمده است. همچنین، برای بررسی تاثیر پارامتر غیرمحملی φ در نتایج ارائه شده دامنه تغییرات $0 < \varphi < 10$ در نظر گرفته شده است. در این پژوهش برای بررسی تاثیر مقدار پارامتر غیرمحملی بی‌بعد φ با فرض ثابت بودن طول نانوتیوب ($L_e = 7 \text{nm}$)، مقدار پارامتر $e_0 L_i$ در بازه $0 < e_0 L_i < 70 \text{nm}$ مورد بررسی قرار گرفته است (شکل (۶) را ببینید).

۳-۱- بررسی اثر تغییر ضریب m

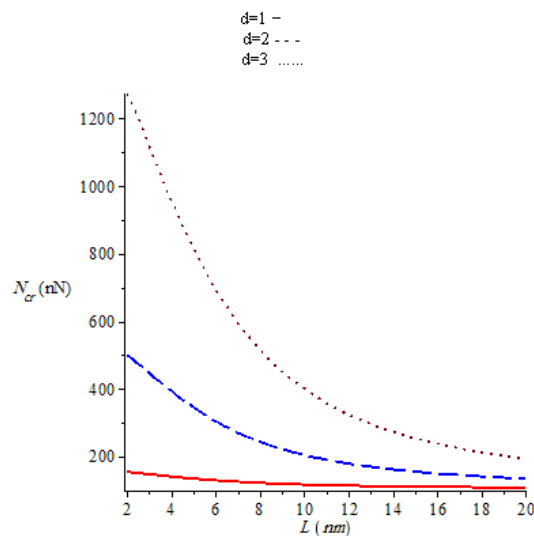
در شکل (۲)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} بر حسب ضریب m نشان داده شده است. از نمودار این شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار m تا مقدار $m = 5$ مقدار نیروی بحرانی کمانشی با شیب بسیار زیادی افزایش یافته و پس از آن نیروی کمانشی با شیب ملایمی همگرا می‌شود به طوری که در $m = 20$ نیروی کمانشی دارای مقدار $N_{cr} = 550 \text{nN}$ می‌باشد.



شکل ۲- تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} برحسب ضریب m .

۲-۳- بررسی اثر تغییر طول L نانوتیوب

در شکل (۳)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب طول نانوتیوب $L \geq 2 \text{ nm}$ به ازای قطرهای مختلف نانوتیوب ($d = 1, 2, 3 \text{ nm}$) رسم شده است. از این شکل مشاهده می‌گردد که برای قطرهای مختلف نانوتیوب با افزایش طول آن مقدار نیروی بحرانی کاهش می‌یابد و از سوی دیگر با افزایش قطر نانوتیوب مقدار نیروی بحرانی کمانشی نانوتیوب افزایش یافته که این رفتار مشابه کمانش تیرهای کلاسیک می‌باشد. برای نانوتیوب با قطرهای $d = 1, 2, 3 \text{ nm}$ نیروی بحرانی کمانشی در $L = 2 \text{ nm}$ به ترتیب از مقدار بیشینه برابر با $N_{cr} = 100, 500, 1250 \text{ nN}$ به مقادیر $210, 100, 50 \text{ nN}$ در $L = 20 \text{ nm}$ کاهش یافته است.



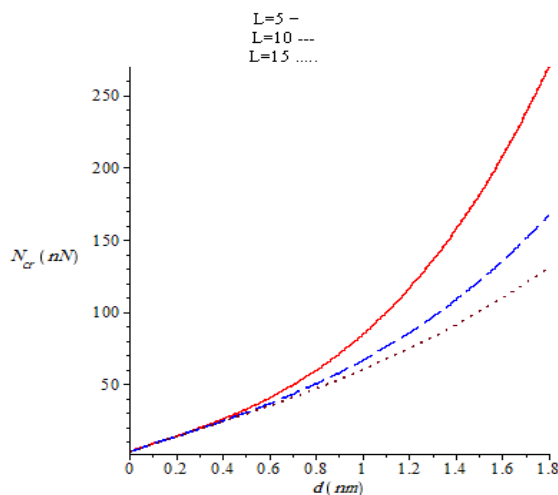
شکل ۳- تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب طول نانوتیوب L .

۳-۳- بررسی اثر تغییر قطر d نانوتیوب

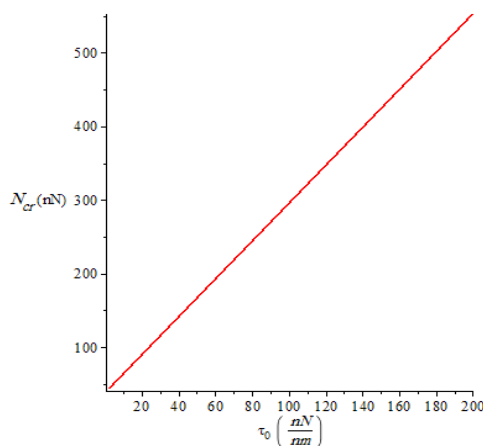
در شکل (۴)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب قطر نانوتیوب d به ازای طولهای مختلف نانوتیوب L ($L = 5, 10$ و 15 nm) نشان داده شده است. همان طور که از شکل مشاهده می‌گردد با افزایش قطر نانوتیوب، مقدار نیروی بحرانی افزایش می‌یابد به گونه‌ای که تا قطر $d = 0.4 \text{ nm}$ رفتار کمانشی نانوتیوب خطی بوده و پس از آن رفتار غیرخطی می‌باشد به طوری که برای نانوتیوب با طول $L = 5 \text{ nm}$ و قطری برابر با مقدار $d = 1/8 \text{ nm}$ ، نیروی کمانشی بیشترین مقدار برابر با $N_{cr} = 0.4 \text{ nN}$ را دارد.

۳-۴- بررسی اثر تنش سطحی τ_0

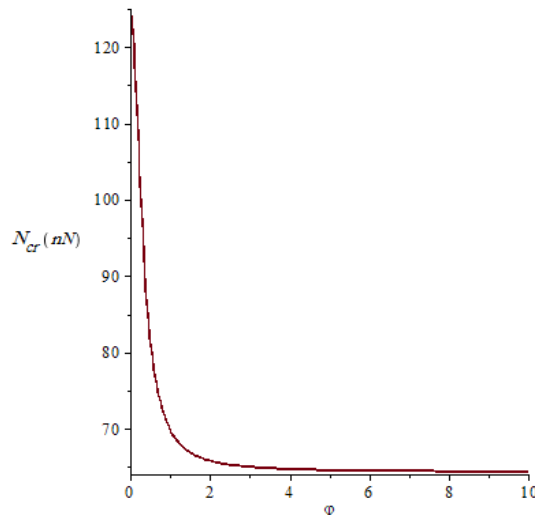
در شکل (۵)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب تنش سطحی τ_0 نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که رفتار نمودار از نوع خطی است و با افزایش تنش سطحی مقدار نیروی بحرانی افزایش می‌یابد به طوری که در $\tau_0 = 200 \text{ nN/nm}$ مقدار نیروی بحرانی کمانشی برابر با $N_{cr} = 550 \text{ nN}$ می‌باشد.



شکل ۴- تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب قطر نانوتیوب d به ازای قطرهای مختلف L نانوتیوب.



شکل ۵- تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب تنش سطحی τ_0 .



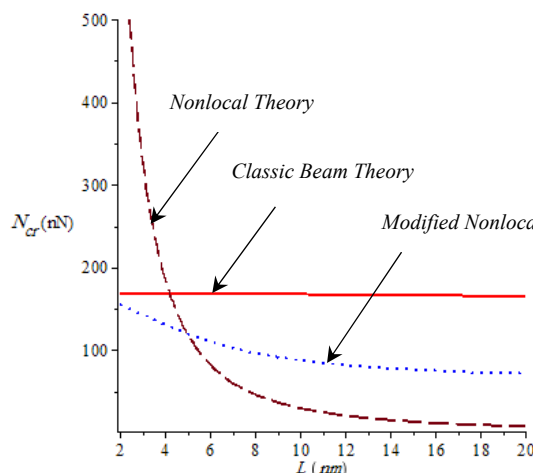
شکل ۶- نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} بر حسب پارامتر غیر محلی ϕ .

۳-۵- بررسی اثر تغییر پارامتر غیر محلی ϕ

در شکل (۶)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} بر حسب پارامتر غیر محلی ϕ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌گردد با افزایش پارامتر غیر محلی ϕ مقدار نیروی بحرانی کمانش نانو تیر کاهش می‌یابد تا سرانجام همگرا می‌گردد به طوری که در حالتی که $\phi = 0$ است مقدار نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} از مقدار بیشینه برابر با $N_{cr} = 125 \text{ nN}$ به $N_{cr} = 64 \text{ nN}$ در $\phi = 10$ کاهش یافته است. این رفتار شبیه رفتار تابع هموگرافیک می‌باشد.

۳-۶- مقایسه بین نتایج نظریه الاستیسیته غیر محلی اصلاح شده با سایر نظریه‌ها

در شکل (۷)، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} نانو تیر که بر روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد بر حسب طول نانو تیر L با استفاده از سه نظریه شامل نظریه الاستیسیته غیر محلی اصلاح شده، نظریه غیر محلی اصلاح نشده و نظریه کلاسیک تیرها نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} در هر سه نظریه با افزایش طول نانو تیر کاهش می‌یابد به گونه‌ای که در دو نظریه غیر محلی اصلاح شده و نظریه غیر محلی اصلاح نشده این کاهش به شدت محسوس بوده ولی در نظریه کلاسیک تیر نتایج به دست آمده برای مقدار نیروی کمانشی با شیب بسیار ناچیزی کاهش می‌یابد و عملاً این نظریه مقدار ثابتی را در محاسبه نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب پیش‌بینی می‌نماید. همچنین، نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} در نظریه غیر محلی اصلاح شده و نظریه کلاسیک در نقطه شروع منحنی‌ها در $L = 2 \text{ nm}$ نزدیک به یکدیگر بوده به طوری که N_{cr} اصلاح شده $= 156 \text{ nN}$ و N_{cr} کلاسیک $= 162 \text{ nN}$ و سپس با افزایش مقدار طول نانو تیر منحنی‌های نیروی بحرانی کمانشی در این دو نظریه از یکدیگر فاصله می‌گیرند به طوری که برای طول $L = 20 \text{ nm}$ مقادیر به دست آمده برای نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} از هر سه نظریه الاستیسیته غیر محلی اصلاح شده، نظریه غیر محلی اصلاح نشده و نظریه کلاسیک به ترتیب عبارتند از N_{cr} اصلاح شده $= 90 \text{ nN}$ ، N_{cr} اصلاح نشده $= 10 \text{ nN}$ و N_{cr} کلاسیک $= 161 \text{ nN}$.



شکل ۷- مقایسه تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} نانوتیر بر حسب طول بر اساس نظریه غیرمحلّی اصلاح شده، نظریه غیرمحلّی اصلاح نشده و نظریه کلاسیک تیر.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله نظریه جدید معرفی شده الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده جهت تحلیل کمانش نانوتیوب ارائه شد. در این نظریه رابطه میان تنش غیرمحلّی و کرنش توسط معادلات ساختاری غیرمحلّی اصلاح شده استخراج شد. ابتدا معادلات دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی نانوتیر تحت بار محوری فشاری با استفاده از روش انرژی استخراج شد و به کمک روش ناویر رابطه حاکم برخیز کمانشی به صورت یک سری فوریه ارائه شد. سپس با تجدید آرایش ضریب بسط سری که خود یک سری بینهایت از پارامتر غیرمحلّی و توان‌های مرتبه بالاتر آن می‌باشد، ضریب بسط به صورت یک سری هندسی بازنویسی شد. همچنین، با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری هندسی، شعاع همگرایی سری به دست آمد که با استفاده از آن نیروی بحرانی کمانش نانوتیر بر روی تکیه گاه ساده تحت بار محوری محاسبه گردید. با برنامه نویسی در محیط نرم افزار ریاضی Maple تأثیر تغییر پارامترهایی مانند ضریب مود کمانش، طول و قطر نانوتیوب، مقدار تنش سطحی و ضریب غیرمحلّی در مقدار نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده بررسی شد. خلاصه ای از نتایج به دست آمده عبارتند از:

۱- از نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} بر حسب ضریب m نشان مشاهده گردید که با افزایش مقدار m تا مقدار $m = 5$ مقدار نیروی بحرانی کمانشی با شیب بسیار زیادی افزایش یافته و پس از آن نیروی کمانشی با شیب ملایمی همگرا می‌شود.

۲- از نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} بر حسب طول نانوتیر L به ازای قطرهای مختلف مشاهده شد که برای قطرهای مختلف نانوتیر با افزایش طول آن مقدار نیروی بحرانی کاهش می‌یابد و از سوی دیگر با افزایش قطر نانوتیر مقدار نیروی بحرانی کمانشی نانوتیر افزایش یافته است. این رفتار مشابه کمانش تیرهای کلاسیک می‌باشد.

۳- از نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب قطر نانوتیوب d به ازای طولهای مختلف نانوتیوب L مشاهده می‌گردد که با افزایش قطر نانوتیوب، مقدار نیروی بحرانی افزایش می‌یابد به گونه‌ای که برای نانولوله تا قطر $d = 0.4 \text{ nm}$ رفتار کمانشی نانوتیوب خطی بوده و پس از آن رفتار غیرخطی می‌باشد.

۴- رفتار نمودار نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش N_{cr} برحسب تنش سطحی τ_0 خطی است و با افزایش تنش سطحی مقدار نیروی بحرانی افزایش می‌یابد

۵- از نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} بر حسب پارامتر غیرمحملی φ مشاهده می‌گردد که با افزایش پارامتر غیر محلی φ مقدار نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب شبیه رفتار تابع هموگرافیک کاهش می‌یابد تا سرانجام به مقداری غیرصفر همگرا می‌گردد به طوری که در حالتی که $\varphi = 0$ است مقدار نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} دارای مقدار بیشینه است.

۶- از نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} نانوتیوب برحسب طول نانوتیوب L مشاهده می‌شود که نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} در هر سه نظریه با افزایش طول نانوتیوب کاهش می‌یابد به گونه‌ای که در دو نظریه غیرمحملی اصلاح شده و نظریه غیرمحملی اصلاح نشده این کاهش به شدت محسوس بوده ولی در نظریه کلاسیک تیر نتایج به دست آمده برای مقدار نیروی کمانشی با شیب بسیار ناچیزی کاهش می‌یابد و عملاً این نظریه مقدار ثابتی را در محاسبه نیروی بحرانی کمانش نانوتیوب پیش‌بینی می‌نماید. همچنین، نیروی بحرانی کمانشی N_{cr} در نظریه غیرمحملی اصلاح شده و نظریه کلاسیک تیر در نقطه شروع منحنی‌ها در طول $L = 2 \text{ nm}$ نزدیک به یکدیگر بوده به طوری که اصلاح شده $(N_{cr}) \approx (N_{cr})_{\text{کلاسیک}}$ و سپس با افزایش مقدار طول نانوتیوب منحنی‌های نیروی بحرانی کمانشی در این دو نظریه از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

مراجع

- [1] Eringen, A.C., "Nonlocal Polar Elastic Continua", International Journal of Engineering Science", Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, (1972).
- [2] Eringen, A.C., and Edelen, D.G.B., "On Nonlocal Elasticity", International Journal of Engineering Science, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, (1972).
- [3] Eringen, A.C., "On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves", Journal of Applied Physics, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, (1983).
- [4] Govindjee, S., and Sackman, J.L., "On the use of Continuum Mechanics to Estimate the Properties of Nanotubes", Solid State Communications, Vol. 110, No. 4, pp. 227-230, (1999).
- [5] Eringen, A.C., "Nonlocal Continuum Field Theories", Springer Science & Business Media, (2002).

- [6] Peddieson, J., Buchanan, G. R., and McNitt, R.P., "Application of Nonlocal Continuum Models to Nanotechnology", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 305-312, (2003).
- [7] Lim, C.W., and Wang, C.M., "Exact Variational Nonlocal Stress Modeling with Asymptotic Higher-order Strain Gradients for Nanobeams", *Journal of Applied Physics*, Vol. 101, No. 5, pp. 054312, (2007).
- [8] Kumar, D., Heinrich, C., and Waas, A.M., "Buckling Analysis of Carbon Nanotubes Modeled using Nonlocal Continuum Theories", *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, No. 7, pp. 073521, (2008).
- [9] He, J., and Lilley, C.M., "Surface Effect on the Elastic Behavior of Static Bending Nanowires", *Nano Letters*, Vol. 8, No. 7, pp. 1798-1802, (2008).
- [10] Challamel, N., and Wang, C.M., "The Small Length Scale Effect for a Non-local Cantilever Beam: a Paradox Solved", *Nanotechnology*, Vol. 19, No. 34, pp. 345703, (2008).
- [11] Wang, G.F., and Feng, X.Q., "Surface Effects on Buckling of Nanowires under Uniaxial Compression", *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 14, pp. 141913, (2009).
- [12] Wang, G.F., and Feng, X.Q., "Timoshenko Beam Model for Buckling and Vibration of Nanowires with Surface Effects", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42, No. 15, pp. 155411, (2009).
- [13] Lim, C.W., "On the Truth of Nanoscale for Nanobeams Based on Nonlocal Elastic Stress Field Theory: Equilibrium, Governing Equation and Static Deflection", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 31, No. 1, pp. 37-54, (2010).
- [14] On, B.B., Altus, E., and Tadmor, E.B., "Surface Effects in Non-uniform Nanobeams: Continuum vs. Atomistic Modeling", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 9, pp. 1243-1252, (2010).
- [15] Lee, H.L., and Chang, W.J., "Surface Effects on Frequency Analysis of Nanotubes using Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, No. 9, pp. 093503, (2010).
- [16] Demir, C., Civalek, O., and Akgoz, B., "Free Vibration Analysis of Carbon Nanotubes Based on Shear Deformable Beam Theory by Discrete Singular Convolution Technique", *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 15, No. 1, pp. 57-65, (2010).
- [17] Amara, K., Tounsi, A., and Mechab, I., "Nonlocal Elasticity Effect on Column Buckling of Multiwalled Carbon Nanotubes under Temperature Field", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3933-3942, (2010).
- [18] Liu, C., Rajapakse, R.K.N.D., and Phani, A. S., "Finite Element Modeling of Beams with Surface Energy Effects", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 78, No. 3, pp. 031014, (2011).

- [19] Wang, D.H., and Wang, G.F., "Surface Effects on the Vibration and Buckling of Double-Nanobeam-systems", *Journal of Nanomaterials*, Vol. 2011, Article ID 518706, pp. 1-7, (2011).
- [20] Wang, L., "A Modified Nonlocal Beam Model for Vibration and Stability of Nanotubes Conveying Fluid", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 1, pp. 25-28, (2011).
- [21] Mahmoud, F.F., Eltahir, M.A., Alshorbagy, A.E., and Meletis, E.I., "Static Analysis of Nanobeams Including Surface Effects by Nonlocal Finite Element", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 11, pp. 3555-3563, (2012).
- [22] Sun, Y.G., Yao, X.H., Liang, Y.J., and Han, Q., "Nonlocal Beam Model for Axial Buckling of Carbon Nanotubes with Surface Effect", *EPL (Europhysics Letters)*, Vol. 99, No. 5, 56007, (2012).
- [23] Lim, C.W., Yang, Q., and Zhang, J. B., "Thermal Buckling of Nanorod Based on Non-local Elasticity Theory", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 5, pp. 496-505, (2012).
- [24] Yang, Q., and Lim, C.W., "Thermal Effects on Buckling of Shear Deformable Nanocolumns with von Karman Nonlinearity Based on Nonlocal Stress Theory", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 13, No. 2, pp. 905-922, (2012).
- [25] Hosseini-Ara, R., Mirdamadi, H. R., Khademyzadeh, H., and Mostolizadeh, R., "Stability Analysis of Carbon Nanotubes Based on a Novel Beam Model and its Comparison with Sanders Shell Model and Molecular Dynamics Simulations", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 34, No. 2, pp. 126-134, (2012).
- [26] Jam, J.E., and Samaei, A.T., "Buckling of Nanotubes under Compression Considering Surface Effects", *International Journal of Nano Dimension*, Vol. 4, No. 2, pp. 131-134, (2013).
- [27] Ansari, R., and Sahmani, S., "Prediction of Biaxial Buckling Behavior of Single-layered Graphene Sheets Based on Nonlocal Plate Models and Molecular Dynamics Simulations", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 12, pp. 7338-7351, (2013).
- [28] Ghannadpour, S.A.M., Mohammadi, B., and Fazilati, J., "Bending, Buckling and Vibration Problems of Nonlocal Euler Beams using Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 584-589, (2013).
- [29] Shakouri, A., Ng, T. Y., and Lin, R.M., "A Study of the Scale Effects on the Flexural Vibration of Graphene Sheets using REBO Potential Based Atomistic Structural and Nonlocal Couple Stress Thin Plate Models", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 50, pp. 22-28, (2013).
- [30] Liang, X., Hu, S., and Shen, S., "A New Bernoulli–Euler Beam Model Based on a Simplified Strain Gradient Elasticity Theory and its Applications", *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 317-323, (2014).

- [31] Ashoori, A., and Mahmoodi, M.J., "The Modified Version of Strain Gradient and Couple Stress Theories in General Curvilinear Coordinates", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 49, pp. 441-454, (2015).
- [32] Mousavi, Z., Shahidi, S.A., and Boroomand, B., "A New Method for Bending and Buckling Analysis of Rectangular Nano Plate: Full Modified Nonlocal Theory", *Meccanica*, Vol. 52, No. 11-12, pp. 2751-2768, (2017).

فهرست نمادهای انگلیسی

u	: تغییر مکان طولی
x	: مختصه طولی
L	: طول تیر
w	: خیز (تغییر مکان عرضی) تیر
z	: مختصه در راستای جابجایی جانبی
h	: ضخامت تیر
t	: زمان
E	: مدول الاستیسیته تیر
ν	: ضریب پواسون
ρ_b	: چگالی تیر
β	: عملگر غیر محلی
β^*	: عملگر غیر محلی اصلاح شده
∇^2	: عملگر لاپلاسین
φ	: پارامتر غیر محلی
L_i	: طول مشخصه داخلی
L_e	: طول مشخصه خارجی
e_0	: پارامتر بی بعد (خواص ذاتی ماده)
σ^{nl}	: تانسور تنش غیر محلی
σ^l	: تانسور تنش محلی
E^*	: مدول یانگ تیر با در نظر گرفتن تنش سطح
E_b	: مدول یانگ تیر
ε_x	: کرنش تیر
$\delta_{\alpha\beta}$: دلتای کرونکر
E_S	: الاستیسیته سطح
τ_0	: تنش کششی پسماند

تنش صفحه‌ای	: τ_s
کرنش طولی سطحی	: ε_s
ضخامت لایه بسیار نازکی است که روی سطح تیر را پوشانده است	: h_s
مدول سطحی	: S
پارامتر ثابتی که توسط سطح تنش در امتداد طول تیر تعیین می‌شود	: H
تخمین H برای سطح مقطع دایره‌ای	: H^0
ضریب تصحیح برش	: k
گشتاور اینرسی سطح مقطع تیر	: I
گشتاور اینرسی سطح	: I_s
گشتاور اینرسی تیر با در نظر گرفتن اثر سطح	: I^*
ضخامت نانوتیوب (تیر)	: h
قطر نانوتیوب	: d
انحنای صفحه میانی	: κ_x
کرنش صفحه میانی	: ε_{0x}
انرژی پتانسیل تیر	: Π
انرژی کرنشی تیر	: U
کار انجام شده توسط نیروهای غشایی	: W_m
کار انجام شده توسط بار خارجی	: W_e
انرژی جنبشی تیر	: K
انرژی کرنش غشایی	: U_m
انرژی کرنش خمشی	: U_b
نیروی غیرمحلی	: N_x^{nl}
نیروی برشی غیرمحلی	: Q_x^{nl}
بار بحرانی کمانشی	: N_{cr}
اندیس سطح	: s
اندیس تیر	: b
اندیس بحرانی	: cr
اندیس غیرمحلی	: nl
اندیس محلی	: l
نانولوله کربنی تک‌جداره (Single Walled Carbon NanoTube)	: SWCNT
نانولوله کربنی چندجداره (Multi Walled Carbon NanoTube)	: MWCNT

Abstract

In this paper, buckling analysis of an Euler-Bernoulli nanotube is investigated using modified nonlocal elasticity theory considering the surface elasticity, surface tension effect and nonlocal parameter. Using Hamilton principle in conjuncture with modified nonlocal elasticity theory considering surface effect the governing dynamic equations of motion for nanotube has been derived. The critical buckling load for nanotube considering surface tension effect is analytically obtained based on Navier's series solution. Effect of changes of various parameters such as mode coefficient of buckling, nanotube length and diameter, surface tension and nonlocal parameter on the critical buckling load are all investigated using modified nonlocal elasticity theory.