محاسبه‌ی میدان تنش مجانبی به همراه ضرایب شدت تنش و مرتبه بالاتر در شیار کلیدی‌شکل

امیرمحمد میرزایی [۱]
دانشجوی کارشناسی ارشد

مجیدرضا آیت‌اللهی [۲]
استاد

بهادر بهرامی [۳]
دانشجوی دکترا

در پژوهش حاضر، ابتدا توزیع تنش مجانبی مود I بارگذاری با استفاده از روش توابع پتانسیل مختلط برای شیارهای کلیدی شکل [۴] محاسبه شده‌است. روش کار به این صورت است که برپایه‌ی تحقیق صورت گرفته توسط Zappalorto و Lazzarin [1] و گسترش آن، مولفه‌های تنش و جابجایی بصورت بسط سری بدست می‌آیند. سپس از روش فرامعین برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش و ضرایب مرتبه بالاتر [۵] سری بدست آمده، استفاده می‌شود. در پایان نیز برای ارزیابی صحت ضرایب محاسبه شده، میدان تنش حاصل از توزیع تنش مجانبی با مقادیر اجزا محدود مقایسه می‌گردد. نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن ترم اول یا همان ترم تکین به تنهایی منجر به خطای زیادی در محاسبات می‌شود.

واژه‌های راهنما: ضرایب مرتبه بالاتر، شیار کلیدی‌شکل، مود I بارگذاری، روش فرامعین

۱- مقدمه

معمولا شیارها با هدف مشخصی در طراحی قطعات استفاده می‌شوند که با توجه به تمرکز تنش شدید در نوک آن‌ها، بررسی توزیع تنش و در نتیجه استحکام آن‌ها ضروری می‌باشد. از انواع مختلف شیارها می‌توان به شیارهای U، V، VO و کلیدی‌شکل اشاره کرد. شیار کلیدی شکل که حالت خاصی از شیار VO می‌باشد (در صورتیکه زاویه بازشدگی دهانه شیار VO صفر شود)، در اصطلاح به یک شکاف که در انتهای آن سوراخ دایره‌ای‌شکل وجود داشته باشد گفته می‌شود. یکی از مثال‌های رایج از به‌وجود آمدن شیار کلیدی شکل در قطعات مهندسی، سوراخ‌کاری نوک ترک‌ها [۶] به منظور کاهش تمرکز تنش موجود در نوک آن‌ها می‌باشد. شیارهای کلیدی‌شکل در گذشته توسط محققین مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که در ادامه به برخی از این تحقیقات اشاره می‌شود.

---

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران amirmohammadmirzaie2@gmail.com
[۲] نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران m.ayat@iust.ac.ir
[۳] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران bahramibahador@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۷/۰۴/۲۰، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۹

[4] Key-hole notches
[5] High order terms
[6] Stop hole

در سال (۱۹۶۴)، Mori [۲] تحلیل تنش یک سوراخ را که به انتهای یک شکاف متصل بود (شیارکلیدی شکل)، با استفاده از تابع تنش ایری تحت بارگذاری مود I انجام داد. سپس Neuber [۳و۴] با استفاده از تابع تنش ایری و در دستگاه مختصات قطبی، رفتار شیار کلیدی‌شکل را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای بررسی کرد. در ادامه وی ضریب تمرکز تنش را برای شیارهای Vشکل با سوراخ‌های انتهایی دایروی یا بیضوی، تحت برش خارج از صفحه محاسبه کرد. چند سال بعد Kullmer [۵] با تجدید نظر در حل Neuber، توزیع تنش اطراف شیارکلیدی شکل را تحت بارگذاری مودهای I، II و III بدست آورد.

در پژوهش دیگری برای توصیف تنش‌های محلی در ریشه اتصالات جوش شده تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، Radaj و همکاران [۶] میدان توزیع تنش شیارهای کلیدی‌شکل را مورد توجه قراردادند. ایشان مولفه‌های تنش را برحسب ضرایب شدت تنش ترک نوک تیز معادل (K_I و K_{II}) و با تاکید بر نقش تنش T[1] محاسبه کردند. در ادامه‌ی پژوهش‌ها، میدان تنش نزدیک شیار کلیدی‌شکل با فرض شرایط مود III و استفاده از توابع پتانسیل مختلط توسط Smith [۷] بدست آمد. از طرفی مولفه‌های تنش محاسبه شده توسط Smith نیز براساس ضرایب شدت تنش ترک معادل نوشته شده بود. اخیرا Kullmer و Richard [۸] با تمرکز ویژه روی شکست قطعات ساخته شده از مواد ترد، اثر شعاع نوک شیار روی بار شکست شیار کلیدی-شکل را مطالعه کردند. آن‌ها همچنین نشان دادند که از حل دقیق ارائه شده توسط Creager و Paris [۹] برای شیارهای سهمی‌شکل، می‌توان برای شیارهای کلیدی شکل در بارگذاری مود I استفاده کرد. اما تحت بارگذاری مود II خالص یا بارگذاری مود ترکیبی رابطه‌ی Creager و Paris [۹] دقت لازم برای توصیف میدان تنش اطراف شیار کلیدی شکل را ندارد. این ضعف توسط Pook [۱۰] نیز گزارش شده است.

Pook [۱۰] مشاهده کرد که برای ترک‌های نوک گرد، توزیع تنش مود II وقتی توسط معادله Creager و Paris محاسبه می‌شود، به مقدار درستی برای K_{II} نمی‌رسد. اخیرا Zappalorto و Lazzarin [۱] براساس روش توابع پتانسیل مختلط کلوسوف- موسخیلیشویلی[2]، مساله شیارهای V-O تحت بارگذاری مود I و II را حل کردند. آن‌ها نشان دادند در صورتیکه زاویه‌ی دهانه‌ی شیار VO برابر صفر درنظر گرفته شود، حل ارائه شده توسط آن‌ها با حل ارائه شده توسط Kullmer [۵] و Radaj و همکاران [۶] برای شیارهای کلیدی‌شکل برابر خواهد بود. بنابراین می‌توان آخرین پژوهش صورت گرفته در زمینه‌ی بدست آوردن میدان تنش در مجاورت شیارهای کلیدی‌شکل را مربوط به تحقیق Zappalorto و Lazzarin [۱] دانست.

ارائه‌ی رابطه‌ای که قادر به محاسبه‌ی دقیق میدان تنش اطراف شیارها باشد، سال‌هاست مورد توجه محققین بوده‌است. معمولا توزیع تنش ارائه شده بصورت یک بسط سری می‌باشد ولی از آنجا که محاسبه‌ی ضرایب مرتبه بالاتر به روش تحلیلی دشوار است، از بدست آوردن ضرایب مرتبه بالاتر که گاهی اوقات تاثیر بسزایی در توصیف تنش دارند، صرف نظر می‌شود. درخصوص محاسبه‌ی ضرایب مرتبه بالاتر شیارهای نوک گرد، تاکنون تحقیقی انجام نشده‌است. اما از سوی دیگر، تحقیقات گسترده‌ای در زمینه بدست آوردن ضرایب مرتبه بالاتر و نیز تاثیر آن بر میدان تنش و سایر پارامترهای مهم مکانیک شکست، برای قطعات دارای ترک و اخیرا شیارهای نوک تیز انجام شده، که در ادامه به مرور آن‌ها می‌پردازیم.

---

[1] T-stress
[2] Kolosov- Muskhelishvili

در خصوص اهمیت تنش T یا همان جمله دوم سری در ترک‌ها، مطالعات قبلی نشان دهنده‌ی تأثیر آن بر روی اندازه و شکل ناحیه پلاستیک [۱۱و۱۲]، پایداری مسیر رشد ترک [۱۳-۱۵] و چقرمگی شکست قطعات ترک‌دار [۱۶و۱۷] بوده است. علاوه بر این، در پژوهش انجام گرفته توسط Karihaloo [۱۸] مشخص شده‌است که جملات مرتبه بالاتر یک مساله‌ی ترک $(n\geq3)$ می‌توانند در اثر اندازه[1] مواد شبه ترد[2] نیز تاثیر داشته باشند. همچنین مطالعات بیشتر آشکار کرد که دومین جمله غیرتکین $(n=3)$، تأثیر قابل توجهی در رفتار شکست قطعات شامل ترک‌های لبه‌ای و مرکزی کوچک دارد [۱۹].
از سوی دیگر، در مورد قطعات شیاردار، Kim و Cho [۲۰] نشان دادند که برای یک شیار با زاویه غیرصفر، اندازه و شکل ناحیه پلاستیک نوک شیار وابستگی قابل توجهی به دومین جمله سری مود I دارد. اخیرا Ayatollahi و Nejati [۲۱و۲۲] با به‌کارگیری روش فرامعین، ضرایب شدت تنش و مرتبه بالاتر ترک و شیار نوک تیز را با استفاده از تحلیل اجزا محدود محاسبه کردند. آن‌ها برای مثال‌هایی تحت مود I خالص و مود II خالص و همچنین مود ترکیبی، ضرایب شدت تنش و مرتبه بالاتر را بدست آورده و نشان دادند که صرف نظر کردن از جملات غیر تکین می‌تواند خطای زیادی را ایجاد کند. همانطور که ذکر شد جملات مرتبه بالاتر می‌توانند تاثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف ترک و شیارهای نوک تیز داشته باشند. به همین دلیل می‌توان پیش‌بینی نمود که در مورد شیارهای نوک گرد نیز این جملات تاثیر قابل توجهی داشته باشند. در این پژوهش، ابتدا رابطه‌ی ارائه شده برای شیارهای کلیدی‌شکل توسط Zappalorto و Lazzarin [۱] به یک حل مجانبی و به صورت سری توسعه داده شده است. سپس میدان‌های جابجایی و تنش اطراف شیارهای کلیدی شکل در مختصات‌های قطبی و سپس کارتزین بدست آمده است. در ادامه به کمک مدلسازی اجزا محدود قطعه‌ی خمش سه نقطه‌ای دارای شیار کلیدی‌شکل و استفاده از روش فرامعین، ضرایب مرتبه بالاتر شیار کلیدی‌شکل محاسبه شده‌اند. در پایان نیز صحت نتایج بدست آمده ارزیابی شده است.

۲- تحلیل تنش شیار کلیدی‌شکل

در این قسمت بر اساس حل صورت گرفته برای شیار VO توسط Zappalorto و Lazzarin [۱]، توزیع تنش شیار کلیدی‌شکل محاسبه و توسعه داده می‌شود که در ادامه به تشریح آن پرداخته خواهد شد.
براساس روش توابع پتانسیل مختلط موسخیلیشویلی، مولفه‌های تنش درون صفحه‌ای در مختصات قطبی σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$، $\tau_{r\theta}$ به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=4\,\mathrm{Re}[\psi'(z)]\\&\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\,\tau_{r\theta}=2e^{2i\theta}\{\bar{z}\,\psi''(z)+\varphi'(z)\}\end{aligned}\qquad(۱)$$

Zappalorto و Lazzarin [۱] با توجه به توابع پتانسیل ارائه شده توسط Williams [۲۳] برای شیارهای نوک تیز، توابع پتانسیل زیر را برای شیار VO معرفی کردند:

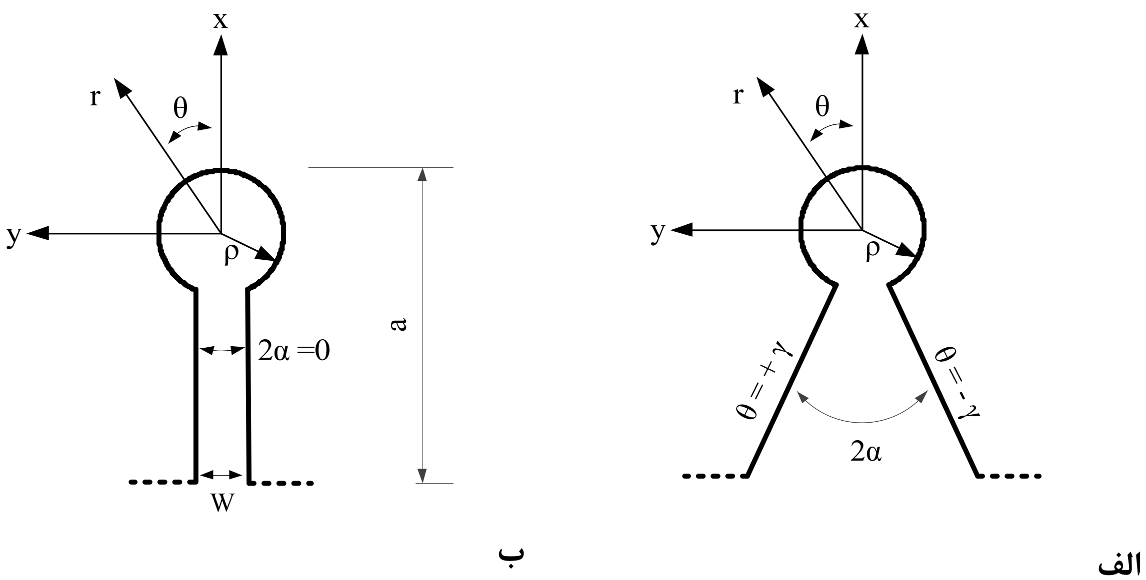
---
[1] Size effect
[2] Quasi brittle

$$\psi(z)=a z^{\lambda}+b z^{-\lambda}$$
$$\varphi(z)=c z^{\lambda}+d z^{-\lambda}+e z^{-\lambda-1}+f z^{-\lambda-2} \quad (۲)$$

که در رابطه‌ی بالا، z مختصات نقاط در صفحه‌ی مختلط، λ مختلط با بخش حقیقی مثبت و ضرایب a، b، c، d، e و f نیز مختلط می‌باشند.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲) در (۱) و حل دستگاه معادلات، مولفه‌های تنش بصورت زیر بر حسب مختصات قطبی r و θ (شکل ۱-الف) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \cos\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{A_1 r^{\lambda-1}(1+\lambda)+D_1 r^{-\lambda-1}\right\}+E_1 r^{-\lambda-2}\cos\left(\lambda\theta\right)\\
&+\cos\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{B_1 r^{-\lambda-1}(1-\lambda)+C_1 r^{\lambda-1}+F_1 r^{-\lambda-3}\right\}\\
&+\sin\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{-A_2 r^{\lambda-1}(\lambda+1)+D_2 r^{-\lambda-1}\right\}+E_2 r^{-\lambda-2}\sin\left(\lambda\theta\right)\\
&+\sin\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{B_2 r^{-\lambda-1}(1-\lambda)-C_2 r^{\lambda-1}+F_2 r^{-\lambda-3}\right\}\\
\sigma_{rr} &= \cos\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{A_1 r^{\lambda-1}(3-\lambda)-D_1 r^{-\lambda-1}\right\}-E_1 r^{-\lambda-2}\cos\left(\lambda\theta\right)\\
&+\cos\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{B_1 r^{-\lambda-1}(3+\lambda)-C_1 r^{\lambda-1}-F_1 r^{-\lambda-3}\right\}\\
&+\sin\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{A_2 r^{\lambda-1}(\lambda-3)-D_2 r^{-\lambda-1}\right\}-E_2 r^{-\lambda-2}\sin\left(\lambda\theta\right)\\
&+\sin\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{B_2 r^{-\lambda-1}(3+\lambda)+C_2 r^{\lambda-1}-F_2 r^{-\lambda-3}\right\}\\
\tau_{r\theta} &= \sin\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{A_1 r^{\lambda-1}(\lambda-1)-D_1 r^{-\lambda-1}\right\}-E_1 r^{-\lambda-2}\sin\left(\lambda\theta\right)\\
&+\sin\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{B_1 r^{-\lambda-1}(1+\lambda)+C_1 r^{\lambda-1}-F_1 r^{-\lambda-3}\right\}\\
&+\cos\left((\lambda-1)\theta\right)\left\{A_2 r^{\lambda-1}(\lambda-1)+D_2 r^{-\lambda-1}\right\}+E_2 r^{-\lambda-2}\cos\left(\lambda\theta\right)\\
&+\cos\left((\lambda+1)\theta\right)\left\{-B_2 r^{-\lambda-1}(1+\lambda)+C_2 r^{\lambda-1}+F_2 r^{-\lambda-3}\right\}
\end{aligned} \quad (۳)$$



شکل ۱– نمایی از شیار VO شکل (الف) و شیار کلیدی‌شکل (ب) به همراه پارامترهای آن‌ها در دستگاه مختصات قطبی و کارتزین

مطابق با شکل (۱)، برای نوشتن شرایط مرزی می‌توان از شرط تنش صفر[1] روی بال‌های ناچ استفاده کرد و آن را به صورت معادله‌ی (۴) بیان نمود:

$$\sigma_{\theta\theta}\big|_{\theta=\pm\gamma}=\tau_{r\theta}\big|_{\theta=\pm\gamma}=0 \tag{۴}$$

با اعمال شرایط مرزی (۴) و ساده‌سازی، دستگاه همگنی مشابه با دستگاه گزارش شده توسط Williams [۲۳] به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} (1+\lambda)\cos\big((1-\lambda)\gamma\big) & \cos\big((1+\lambda)\gamma\big) & & \\ (1-\lambda)\sin\big((1-\lambda)\gamma\big) & \sin\big((1+\lambda)\gamma\big) & & \\ & & (1+\lambda)\sin\big((1-\lambda)\gamma\big) & \sin\big((1+\lambda)\gamma\big) \\ & & (1-\lambda)\cos\big((1-\lambda)\gamma\big) & \cos\big((1+\lambda)\gamma\big) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ A_2 \\ C_2 \end{Bmatrix}=0 \tag{۵}$$

که در رابطه (۵)، $\gamma=\pi-\alpha$ و 2α زاویه‌ی بازشدگی شیار VO شکل است. برای بدست آوردن جواب غیربدیهی، دترمینان ماتریس بالا بایستی صفر شود که نهایتا منجر به دو معادله بصورت زیر، برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه مساله می‌شود:

$$\begin{aligned} &\sin\left(2\lambda_n^{I}\gamma\right)+\lambda_n^{I}\sin\left(2\gamma\right)=0 \qquad (Mode\ I) \\ &\sin\left(2\lambda_n^{II}\gamma\right)-\lambda_n^{II}\sin\left(2\gamma\right)=0 \qquad (Mode\ II) \end{aligned} \tag{۶}$$

اولین معادله از رابطه‌ی (۶)، برای بارگذاری مود متقارن (مود I) و دومین معادله برای مود پادمتقارن (مودII) می‌باشد. از آنجا که در شیارهای کلیدی‌شکل $\gamma=\pi$ می‌باشد (شکل ۱-ب) و در این مقاله تنها مود I بارگذاری مد نظر است، از معادله‌ی دوم صرف نظر کرده و با قرار دادن مقدار $\gamma=\pi$ در معادله‌ی اول، مقادیر ویژه مود I بصورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\sin\left(2\lambda_n^{I}\pi\right)=0\Rightarrow\lambda_n^{I}=\frac{n}{2} \qquad ,n\in N \tag{۷}$$

همانطوری که در رابطه‌ی (۷) مشاهده می‌شود معادله‌ی توزیع تنش اطراف شیار کلیدی‌شکل می‌تواند بی‌نهایت مقدار ویژه داشته باشد، که در رابطه‌ی ارائه شده توسط Zappalorto و Lazzarin [۱] تنها مقدار ویژه‌ی اول آن مورد توجه قرار گرفته‌است. لیکن در این پژوهش تمامی مقادیر ویژه‌ی این معادله مورد توجه قرار خواهد گرفت که در ادامه تشریح می‌شود.

از طرفی با درنظر گرفتن n مقدار ویژه‌ی معادله و براساس معادله (۵)، پارامتر C_n^I بصورت زیر به A_n^I مرتبط می‌شود:

---

[1] Traction free

$$C_n^I=-(1-\frac{n}{2})\frac{\sin\left((1-\frac{n}{2})\pi\right)}{\sin\left((1+\frac{n}{2})\pi\right)}A_n^I=\phi_n^I A_n^I \tag{۸}$$

توجه شود که رابطه‌ی فوق به ازای مقادیر زوج n، مبهم می‌باشد و برای استفاده باید از مفهوم حدگیری استفاده شود. در رابطه‌ی (۸)، n نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی مقدار ویژه و بالانویس I نشان‌دهنده‌ی مود I بارگذاری است.

دیگر شرایط مرزی شیار کلیدی شکل را می توان با استفاده از لبه‌ی دایره‌ای شیار که دارای شعاع ρ می‌باشد به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=\rho}=\tau_{r\theta}\big|_{r=\rho}=0 \tag{۹}$$

با اعمال شرایط مرزی (۹) بر روی مولفه‌های تنش مود I و ساده سازی، معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{gathered}
A_n^I(3-\frac{n}{2})-D_n^I\rho^{-n}-E_n^I\rho^{-n-1}\chi_{n1}^I(\theta)=0\\
B_n^I(3-\frac{n}{2})\rho^{-n}-C_n^I-F_n^I\rho^{-n-2}=0\\
A_n^I(1-\frac{n}{2})+D_n^I\rho^{-n}+E_n^I\rho^{-n_1-1}\chi_{n2}^I(\theta)=0\\
B_n^I(1+\frac{n}{2})\rho^{-n}+C_n^I-F_n^I\rho^{-n-2}=0
\end{gathered} \tag{۱۰}$$

حل دستگاه معادلات خطی بالا، رابطه‌ی بین سایر ضرایب مجهول را با A_n^I مشخص می‌کند. بنابراین، می‌توان مولفه‌های تنش مود I را بر اساس تنها یک ضریب مجهول (A_n^I) نوشت.

$$\begin{aligned}
D_n^I&=A_n^I\rho^n\left(\frac{\chi_{n1}^I(\theta)(\frac{n}{2}-1)+\chi_{n2}^I(\theta)(\frac{n}{2}-3)}{\chi_{n1}^I(\theta)-\chi_{n2}^I(\theta)}\right)\\
&=A_n^I\rho^n\psi_{n1}^I(\theta)\\
E_n^I&=A_n^I\rho^{1+n}\left(\frac{4-n}{\chi_{n1}^I(\theta)-\chi_{n2}^I(\theta)}\right)\\
&=A_n^I\rho^{1+n}\psi_{n2}^I(\theta)\\
B_n^I&=C_n^I\rho^n=\phi_n^I A_n^I\rho^n\\
F_n^I&=C_n^I(2+\frac{n}{2})\rho^{n+2}\\
&=\phi_n^I A_n^I(2+\frac{n}{2})\rho^{n+2}
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

پارامترهای کمکی به‌کار رفته در معادله‌ی (۱۱) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\chi^I_{n1}(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\cos\left((\frac{n}{2}-1)\theta\right)}$$

$$\chi^I_{n2}(\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\left((\frac{n}{2}-1)\theta\right)} \qquad (۱۲)$$

در نهایت با توجه به معادلات (۱۱) و (۳)، تنش‌ها را می‌توان به شکل زیر و در قالب یک بسط سری بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}=&\sum_{n=1}^{\infty}A^I_n r^{\frac{n}{2}-1}\left\{\cos\left((-\frac{n}{2}+1)\theta\right)\left[(1+\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\psi^I_{n1}(\theta)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}\psi^I_{n2}(\theta)\,\chi^I_{n1}(\theta)\right]\right.\\
&\left.+\phi^I_n\cos\left((\frac{n}{2}+1)\theta\right)\left[1+(1-\frac{n}{2})\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}(2+\frac{n}{2})\right]\right\}\\
\sigma_{rr}=&\sum_{n=1}^{\infty}A^I_n r^{\frac{n}{2}-1}\left\{\cos\left((-\frac{n}{2}+1)\theta\right)\left[(3-\frac{n}{2})-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\psi^I_{n1}(\theta)-\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}\psi^I_{n2}(\theta)\,\chi^I_{n1}(\theta)\right]\right.\\
&\left.+\phi^I_n\cos\left((n+1)\theta\right)\left[-1+(3+n)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}(2+\frac{n}{2})\right]\right\}\\
\tau_{r\theta}=&\sum_{n=1}^{\infty}A^I_n r^{\frac{n}{2}-1}\left\{\sin\left((-\frac{n}{2}+1)\theta\right)\left[(1-\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\psi^I_{n1}(\theta)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}\psi^I_{n2}(\theta)\,\chi^I_{n2}(\theta)\right]\right.\\
&\left.+\phi^I_n\sin\left((\frac{n}{2}+1)\theta\right)\left[1+(1+\frac{n}{2})\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}(2+\frac{n}{2})\right]\right\}
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی (۱۳)، n نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی جمله است. همانطورکه مشاهده می‌شود برای جمله‌ی اول (n=1)، توان r منفی شده که نشانگر تکینگی این جمله می‌باشد. همچنین پارامترهای واسط به کار رفته در مولفه‌های تنش، در معادله‌ی (۱۴) ذکر شده‌اند:

$$\psi^I_{n1}(\theta)=\left[2\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\cos\left((\frac{n}{2}-1)\theta\right)+(1-\frac{n}{2})\sin\left((n-1)\theta\right)\right]/\sin(\theta)$$

$$\psi^I_{n2}(\theta)\times\chi^I_{n1}(\theta)=2\left(2-\frac{n}{2}\right)/\left[1+\frac{\tan\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\tan\left((1-\frac{n}{2})\theta\right)}\right]$$

$$\psi^I_{n2}(\theta)\times\chi^I_{n2}(\theta)=(4-n)/\left[\frac{\tan\left((\frac{n}{2}-1)\theta\right)}{\tan\left(\frac{n}{2}\theta\right)}-1\right] \qquad (۱۴)$$

از آنجا که تنش‌ها در مختصات قطبی محاسبه شده‌اند، برای بدست آوردن مولفه‌های تنش در مختصات کارتزین کافیست با استفاده از روابط دوران، مولفه‌های تنش را به اندازه‌ی $-\theta$ دوران دهیم. رابطه‌ی بین مولفه‌های تنش در مختصات کارتزین و قطبی در زیر آمده است.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} + \dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos(2\theta) - \tau_{r\theta}\sin(2\theta) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} - \dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos(2\theta) + \tau_{r\theta}\sin(2\theta) \\ \tau_{xy} = \dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\sin(2\theta) + \tau_{r\theta}\cos(2\theta) \end{cases} \tag{۱۵}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۵)، مولفه‌های تنش در مختصات کارتزین به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}r^{\frac{n}{2}-1}A_n^I \Bigg\{ & 2\left(-\cos\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right)(-1+\frac{n}{2}) - \cos\left(\theta(-1+\frac{n}{2})\right)(-2+\phi_n^I)\right) + \\
& \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Bigg[2\cos\left(\theta(3+\frac{n}{2})\right)\left((1+\frac{n}{2}) - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2(2+\frac{n}{2})\right)\phi_n^I + \left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right) \\
& (-\chi_{n1}^I + \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I + \cos\left(\theta(1+\frac{n}{2})\right)\left(2(2\phi_n^I - \psi_{n1}^I) - \left(\frac{\rho}{r}\right)(\chi_{n1}^I + \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I\right)\Bigg]\Bigg\} \\
\sigma_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}r^{\frac{n}{2}-1}A_n^I \Bigg\{ & 2\left(\cos\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right)(-1+\frac{n}{2}) + \cos\left(\theta(-1+\frac{n}{2})\right)(2+\phi_n^I)\right) + \\
& \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Bigg[-2\cos\left(\theta(3+\frac{n}{2})\right)\left((1+\frac{n}{2}) - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2(2+\frac{n}{2})\right)\phi_n^I + \left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right) \\
& (\chi_{n1}^I - \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I + \cos\left(\theta(1+\frac{n}{2})\right)\left(2(2\phi_n^I + \psi_{n1}^I) - \left(\frac{\rho}{r}\right)(\chi_{n1}^I + \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I\right)\Bigg]\Bigg\} \\
\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}r^{\frac{n}{2}-1}A_n^I \Bigg\{ & 2\left(\sin\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right)(-1+\frac{n}{2}) + \sin\left(\theta(-1+\frac{n}{2})\right)\phi_n^I\right) + \\
& \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Bigg[2\sin\left(\theta(3+\frac{n}{2})\right)\left((1+\frac{n}{2}) - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2(2+\frac{n}{2})\right)\phi_n^I + \left(\frac{\rho}{r}\right)\sin\left(\theta(-3+\frac{n}{2})\right) \\
& (\chi_{n1}^I - \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I - \sin\left(\theta(1+\frac{n}{2})\right)\left(2\psi_{n1}^I + \left(\frac{\rho}{r}\right)(\chi_{n1}^I + \chi_{n2}^I)\psi_{n2}^I\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

برای محاسبه‌ی توابع جابجایی در مختصات قطبی (u_r وu_θ) نیز می‌توان مشابه تنش از روابط موسخلیشویلی استفاده کرد، یا با استفاده از روابط الاستیسیته مولفه‌های جابجایی را از روی مولفه‌های تنش بدست آورد. در این پژوهش از روابط الاستیسیته که در زیر ذکر شده‌اند، استفاده شده‌است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}), \qquad & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \\ u_r &= \int \varepsilon_r dr, & u_\theta &= \int (r\varepsilon_\theta - u_r)\, d\theta \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در روابط بالا E مدول یانگ و ν ضریب پوآسون می‌باشند. با توجه به معادلات (۱۷)، مولفه‌های جابجایی در مختصات قطبی به شکل زیر مشخص می‌شوند:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2G} r^{\frac{n}{2}} A_n^I \left\{\cos\left(\theta(1+\frac{n}{2})\right)[-1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left((\kappa-\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{n}{2}\right)]\phi_n^I \right.$$
$$\left. +\cos\left(\theta(-1+\frac{n}{2})\right)\left[(\kappa-\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left(\psi_{n1}^I+\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n}{(2+n)}\chi_{n1}^I\psi_{n2}^I\right)\right]\right\}$$
$$u_\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2G} r^{\frac{n}{2}} A_n^I \left\{\sin\left(\theta(1+\frac{n}{2})\right) [\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left((\kappa-\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{n}{2}\right)]\phi_n^I \right.$$
$$\left. +\sin\left(\theta(-1+\frac{n}{2})\right)\left[(\kappa+\frac{n}{2})+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left(\psi_{n1}^I+\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n^2}{\left(-4+n^2\right)}\chi_{n1}^I\psi_{n2}^I\right)\right]\right\} \quad (۱۸)$$

در روابط (۱۸)، κ ثابت کلوسف[1] می‌باشد که برای حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به ترتیب برابر $(3-\nu)/(1+\nu)$ و $3-4\nu$ است. برای بدست آوردن مولفه‌های جابجایی در مختصات کارتزین(u_x وu_y) نیز کافیست از رابطه‌ی دوران مختصات به اندازه‌ی $-\theta$ استفاده کرد.

$$\begin{cases} u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta \\ u_y = u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta \end{cases} \quad (۱۹)$$

با اعمال دوران، مولفه‌های جابجایی را می‌توان به شیوه‌ی زیر نوشت:

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2G} r^{\frac{n}{2}} A_n^I \left\{-\left[\cos\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}+\cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa+\phi_n^I)\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left[(1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2)\cos\left(\theta(2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}\phi_n^I+\cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa\phi_n^I+\psi_{n1}^I)\right.$$
$$\left.\left. +\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n}{4}\left(-\frac{1}{\left(-1+(\frac{n}{2})^2\right)}\cos\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)+\cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)\right)\chi_{n1}^I\psi_{n2}^I\right)\right]\right\}$$
$$u_y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2G} r^{\frac{n}{2}} A_n^I \left\{\left[\sin\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)(\kappa+\phi_n^I)\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left[-(1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2)\sin\left(\theta(2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}\phi_n^I+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa\phi_n^I+\psi_{n1}^I)\right.$$
$$\left.\left. +\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n}{4}\left(-\frac{1}{\left(-1+(\frac{n}{2})^2\right)}\sin\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)\right)\chi_{n1}^I\psi_{n2}^I\right)\right]\right\} \quad (۲۰)$$

که در روابط فوق G مدول برشی ماده می‌باشد.

---

[1] Kolosov constant

شکل عمومی مولفه‌های جابجایی بصورت یک بسط سری با بی‌نهایت ترم در قالب معادلات (۲۰) بدست آمد. ولی برای استفاده از این معادلات لازم است که ضرایب ثابت آن A_n^I برای هر هندسه مشخص تعیین گردد. در قسمت بعد نحوه‌ی استفاده از روش عددی موسوم به روش فرامعین جهت تعیین ضرایب ثابت بسط سری در سوراخ کلیدی‌شکل توضیح داده می‌شود.

۳- محاسبه ضرایب مرتبه بالاتر به روش فرامعین

اساس روش فرامعین مبتنی بر استفاده از تعداد زیادی داده جهت محاسبه‌ی تعداد کمتری از مجهولات به کمک حل یک دستگاه معادله جبری فرامعین می‌باشد. از سوی دیگر، از آنجایی‌که تحلیل اجزا محدود اغلب بر پایه‌ی جابجایی می‌باشد، مقادیر جابجایی گره‌ها دقیق‌تر از پارامترهای دیگر حاصل از تحلیل اجزاء محدود، مانند تنش و کرنش می‌باشند. از این رو ساختن دستگاه معادلات فرامعین[1] و محاسبه‌ی ضرایب بر اساس جابجایی گره‌ها ترجیح داده می‌شود. براین اساس، در این پژوهش تعداد زیادی از گره‌های اطراف نوک شیار انتخاب شده و معادلات عمومی جابجایی بر روی جابجایی این گره‌ها برازش می‌شوند. در نتیجه‌ی این عمل، ضرایب مجهول سری‌های بدست آمده در قسمت قبل، ازحل یک دستگاه معادلات فرامعین محاسبه می‌شوند. فرضیات بیشتر روش عددی فرامعین در مرجع [۲۱] برای یک ترک نوک تیز موجود می‌باشد.

لازم به توجه است که هنگام استفاده از روابط جابجایی، باید دو جمله یکی برای دوران صلب و دیگری برای انتقال صلب به سری اضافه شود. همانطور که در شکل (۲) مشخص است، از آنجا که انتقال صلب برای کل جسم یکسان است، آن را به صورت یک ثابت و از آنجایی که دوران صلب بصورت خطی و تابع مکان نقاط شیار است، آن را بصورت φy برای جابجایی در راستای x (u_x) و $-\varphi x$ برای جابجایی درراستای y (u_y)، به ازای چرخش پادساعتگرد مثبت، به سری اضافه می‌کنیم. با درنظرگرفتن جابجایی و دوران صلب، معادلات جابجایی اطراف شیار (۲۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} u_x = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2G} r^{\frac{n}{2}} A_n^I \Bigg\{ & -\left[\cos\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2} + \cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa+\phi_n^I) \right] \\ & + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Bigg[\left(1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right)\cos\left(\theta(2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}\phi_n^I + \cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa\phi_n^I+\psi_{n1}^I) \\ & + \left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n}{4}\Big(-\frac{1}{\left(-1+(\frac{n}{2})^2\right)}\cos\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right) + \cos\left(\theta\frac{n}{2}\right)\Big)\chi_{n1}^I \psi_{n2}^I \Big) \Bigg] \Bigg\} + u_{x0} + \varphi y \\ = \sum_{n=1}^{N} & A_n^I f_n(r,\theta) + u_{x0} + \varphi y \end{aligned}$$

[1] Overdetermined System of Equations

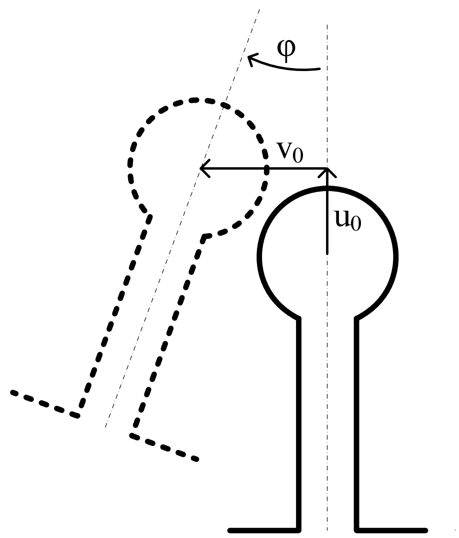
$$u_y=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2G}r^{\frac{n}{2}}A_n^I\left\{\left[\sin\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)(\kappa+\phi_n^I)\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\left[\;-(1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2)\sin\left(\theta(2+\frac{n}{2})\right)\frac{n}{2}\phi_n^I+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)(-\kappa\phi_n^I+\psi_{n1}^I)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{n}{4}\left(-\frac{1}{\left(-1+(\frac{n}{2})^2\right)}\sin\left(\theta(-2+\frac{n}{2})\right)+\sin\left(\theta\frac{n}{2}\right)\right)\chi_{n1}^I\psi_{n2}^I\right)\right]\right\}+u_{y0}-\varphi x$$
$$=\sum_{n=1}^{N}A_n^I g_n(r,\theta)+u_{y0}-\varphi x \qquad (۲۱)$$

با انتخاب تعداد زیادی از گره‌های اطراف نوک شیار در تحلیل اجزا محدود وجایگزینی مکان و جابجایی آن‌ها در معادله (۲۱)، یک دستگاه معادلات بر حسب ضرایب مجهول و پارامترهای مربوط به جابجایی و چرخش صلب شیار حاصل می‌شود. به طور مثال در صورتی که از جابجایی تعداد k گره در اطراف شیار استفاده شود دستگاه معادلات به فرم زیر حاصل خواهد شد که با حل کردن آن با استفاده از روش فرامعین، می‌توان ضرایب شدت تنش و مرتبه بالاتر شیار کلیدی‌شکل را محاسبه کرد. در معادله‌ی زیر N نشانگر تعداد جملات سری می‌باشد که برای محاسبه‌ی ضرایب در دستگاه معادلات فرامعین در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix}u_{x1}\\u_{x2}\\\vdots\\u_{xk}\\u_{y1}\\u_{y2}\\\vdots\\u_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(r_1,\theta_1)&f_2(r_1,\theta_1)&\dots&f_N(r_1,\theta_1)&1&0&y_1\\f_1(r_2,\theta_2)&f_2(r_2,\theta_2)&\dots&f_N(r_2,\theta_2)&1&0&y_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\f_1(r_k,\theta_k)&f_2(r_k,\theta_k)&\dots&f_N(r_k,\theta_k)&1&0&y_k\\g_1(r_1,\theta_1)&g_2(r_1,\theta_1)&\dots&g_N(r_1,\theta_1)&0&1&-x_1\\g_1(r_2,\theta_2)&g_2(r_2,\theta_2)&\dots&g_N(r_2,\theta_2)&0&1&-x_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\g_1(r_k,\theta_k)&g_2(r_k,\theta_k)&\dots&g_N(r_k,\theta_k)&0&1&-x_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_N\\u_{x0}\\u_{y0}\\\varphi\end{bmatrix}$$

$$[U]_{2k\times1}=[C]_{2k\times(N+3)}[X]_{(N+3)\times1} \qquad (۲۲)$$

در رابطه‌ی (۲۲)، ماتریس های [U] و [C] به ترتیب شامل جابجایی گره‌ها و مقادیر عددی توابع $f(r,\theta)$ و $g(r,\theta)$ در مکان گره‌های انتخابی می‌باشند. به عبارت دیگر ماتریس [U] به طور مستقیم از نرم افزار اجزا محدود بدست می‌آید و ماتریس [C] با توجه به رابطه‌ی (۲۱) از جایگزینی مکان نقاط انتخابی در سری‌های u_x و u_y محاسبه می شود. پارامترهای مجهول در این دستگاه معادلات که در بردار[X] قرارگرفته‌اند، ضرایب مجهول سری به همراه ضرایب مربوط به جابجایی صلب و دوران صلب شیار نسبت به نوک آن می‌باشند.



شکل۲- جابجایی و دوران صلب شیار کلیدی شکل

درنظر گرفتن مقادیر ویژه مرتبه بالاتر سری در معادله (۲۱) قابلیت استفاده از گره‌های دورتر از نوک ناچ را فراهم می‌سازد. تأکید بر این نکته نیز ضروری است که مقادیر گرهی بایستی نسبت به مختصات محلی شیار در نظر گرفته شوند.

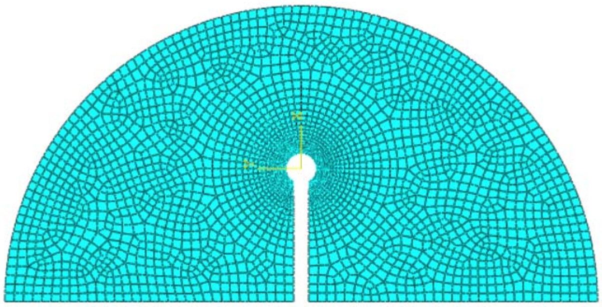
به منظور دستیابی به جواب دقیق‌تر و همچنین مستقل بودن حل از تعداد گره‌های انتخابی، تعداد گره‌ها بیشتر از تعداد مورد نیاز برای حل دستگاه معادلات انتخاب می‌شود ($2k>2N+3$). این عمل منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات فرامعین شده که پارامترهای مجهول آن، همان بردار [X] می‌باشد. برای حل معادله‌ی (۲۲) می‌توان طرفین معادله را در $[C]^T$ ضرب کرده و نهایتاً ضرایب مجهول سری را بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
&[C]^T[U]=[C]^T[C][X]\\
&[X]=\left([C]^T[C]\right)^{-1}[C]^T[U]
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

در قسمت بعد، روش عددی فرامعین به منظور تعیین ضرایب چند ترم اولیه بسط سری در یک قطعه با شیار کلیدی‌شکل به‌کار گرفته می‌شود.

۴- مثال‌های عددی

نمونه‌ی مورد بررسی در این پژوهش، قطعه‌ی نیم دیسک دایره‌ای به شعاع R درحضور یک شیار کلیدی‌شکل تحت بارگذاری خمش سه نقطه‌ای می‌باشد. برای این منظور چهار شعاع نوک شیار متفاوت و برابر با $\rho/R=\{0.0125, 0.025, 0.05, 0.1\}$ درنظر گرفته شده است.



شکل ۳– نمونه‌ای از تصویر شماتیک قطعه مدل‌سازی شده به کمک روش اجزا محدود

جدول۱– مقادیر ضرایب بدست آمده‌ی چهار جمله‌ی اول از دستگاه فرامعین برای شیار کلیدی‌شکل

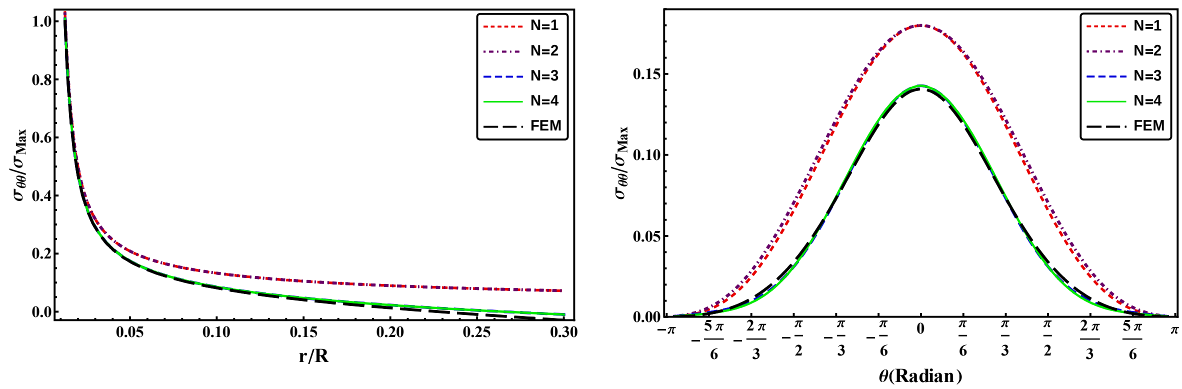
$\frac{\rho}{R}$	A_1	A_2	A_3	A_4
0.0125	0.7892	0.0498	-3.1011	0.1743
0.025	0.8188	0.0658	-3.1548	0.1553
0.5	0.874	0.0922	-3.1467	0.069
0.1	0.9839	0.1291	-2.9135	-0.353

نسبت طول شیار به شعاع قطعه (a/R) و همچنین نسبت پهنای شیار به شعاع نوک شیار (w/ρ)، برابر 0.5 می‌باشد. نمونه‌ها در حالت تنش صفحه‌ای با ضخامت واحد مدلسازی و تحلیل شده‌اند. برای المانبندی قطعات از المان‌های ۸ گره‌ای چهاروجهی ایزوپارامتریک استفاده شده‌است. از آنجایی‌که مقادیر ضرایب سری تنش مستقل از ثوابت مادی هستند، مقادیر دلخواه E=1 و ν=0.25 به ترتیب برای مدول یانگ و ضریب پواسون در نظر گرفته شده‌اند. پس از هر تحلیل اجزاء محدود مکان و جابجایی‌های گره‌های انتخابی، به‌دست آمده و به عنوان ورودی برنامه کامپیوتری روش فرامعین استفاده می‌شوند. در نهایت ضرایب سری به همراه ضرایب انتقال و چرخش صلب شیار به عنوان نتایج خروجی از برنامه کامپیوتری استخراج می‌شوند. در جدول (۱) مقادیر بدست آمده برای ضرایب چهار جمله‌ی اول سری گزارش شده است.
در شکل (۳) نیز تصویر شماتیک قطعه‌ی مدل‌سازی شده مشاهده می‌شود.

۵- بحث بر روی نتایج

در بخش قبل، ضرایب شدت تنش و مرتبه بالاتر برای قطعه‌ی نیم دیسک دایره‌ای دارای شیار کلیدی‌شکل تحت بارگذاری خمش سه نقطه بدست آمدند. در این بخش از مقادیر بدست آمده استفاده شده، تا میزان تأثیر جملات مرتبه بالاتر در بهبود دقت میدان تنش اطراف شیار کلیدی‌شکل مشخص‌گردد. در شکل (۴) و (۵) توزیع تنش مماسی به ترتیب برای قطعات با شعاع نوک شیار $\frac{\rho}{R}=0.0125$ و $\frac{\rho}{R}=0.1$ رسم شده است. همچنین در شکل (۶) توزیع تنش σ_{xx} برای شیار با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.025$ و در شکل (۷) توزیع تنش σ_{yy} برای شیار با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.05$ دیده می‌شوند.

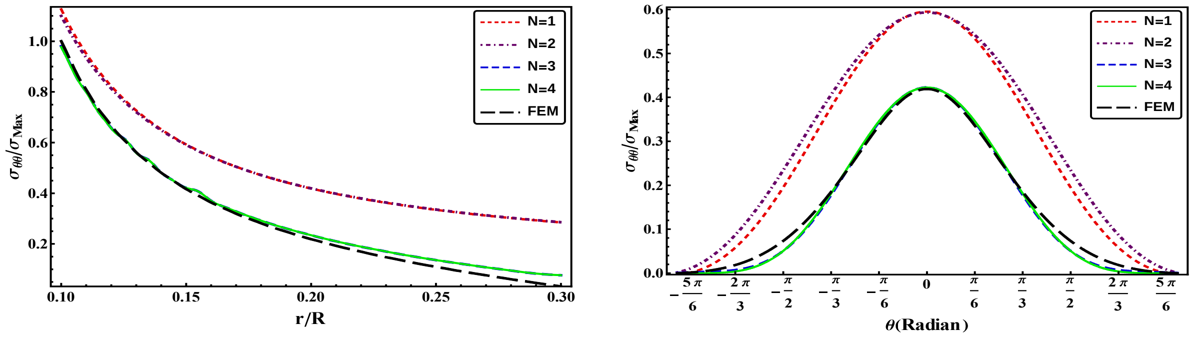
لازم به ذکر است که تمامی مولفه‌های تنش نسبت به حداکثر تنش همان مولفه که از مدلسازی قطعه بدست می‌آید، بی بعد شده‌اند. در شکل‌های (۴-الف)، (۵-الف)، (۶-الف) و (۷-الف) تأثیر اضافه نمودن جملات مرتبه بالاتر به جمله‌ی تکین بر روی مؤلفه‌های تنش در یک مسیر دایروی به فاصله‌ی $\frac{\rho}{R}+0.05$ از مبدا برای هر نمونه نشان داده شده‌است. به عبارت دیگر برای شعاع‌های $\rho/R=\{0.0125,0.025,0.05,0.1\}$ نمودارها به ترتیب در فاصله‌ی $\{0.0625,0.075,0.1,0.15\}$ رسم شده‌اند. علاوه بر این، از آنجا که تحت بارگذاری مود I خالص، شکست از نقاط روی نیمساز شیار شروع می‌شود، دانستن توزیع تنش دقیق برای این نقاط اهمیت ویژه‌ای دارد. به این خاطر برای نشان دادن تاثیر ضرایب مرتبه بالاتر، مولفه‌ی تنش مماسی روی نیمساز شیار در شکل‌های (۴-ب) و (۵-ب) رسم شده‌است. همانطور که قبلا ذکر شد در این شکل‌ها، N تعداد جمله‌هایی است که در بسط سری تنش منظور می‌شود. نتایجی که بطور مستقیم از اجزاء محدود بدست آمده و در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند، معادل حالتی است که کلیه جمله‌های بسط سری در آن لحاظ شده باشند. همچنین برای نشان دادن تاثیر ضرایب مرتبه بالاتر بر روی دیگر زوایا و مولفه‌های تنش، مولفه‌های تنش σ_{xx} و σ_{yy} به ترتیب در امتداد مسیر $\theta=\pi/3$ و مسیر $\theta=\pi/4$ در شکل‌های (۶-ب) و (۷-ب) نشان داده شده‌است. همانطور که از مقایسه‌ی شکل‌های (۴-ب) و (۵-ب) مشخص است، برای شعاع‌های کوچک نوک ناچ ($\frac{\rho}{R}=0.0125$) توزیع تنش به رفتار تکین تنش در نوک ترک نزدیک است که با افزایش شعاع نوک شیار ($\frac{\rho}{R}=0.1$) از خاصیت تکینگی تنش کاسته می‌شود. با مقایسه‌ی توزیع تنش حاصل از جمله‌ی تکین و ضرایب مرتبه بالاتر، با نتایج حاصل از تحلیل اجزا محدود مشاهده می‌شود که نقش ضرایب مرتبه بالاتر با فاصله‌گرفتن از نوک شیار پر رنگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر با حرکت در امتداد یک زاویه به تدریج تفاضل بین تنش‌های حاصل از تحلیل اجزا محدود و نتایج بدست آمده از جمله‌ی تکین سری بیشتر می‌شود. از طرفی می‌توان با افزایش تعداد جملات در سری، مقادیر حاصل از تنش تحلیلی را به نتایج اجزاء محدود نزدیک کرد. در این نمونه به طور خاص درنظر گرفتن سه جمله از سری مود I، مقادیر تنش‌ها را به صورت قابل توجهی بهبود داده است.



ب الف

شکل۴- توزیع تنش مماسی اطراف شیار کلیدی شکل با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.0125$

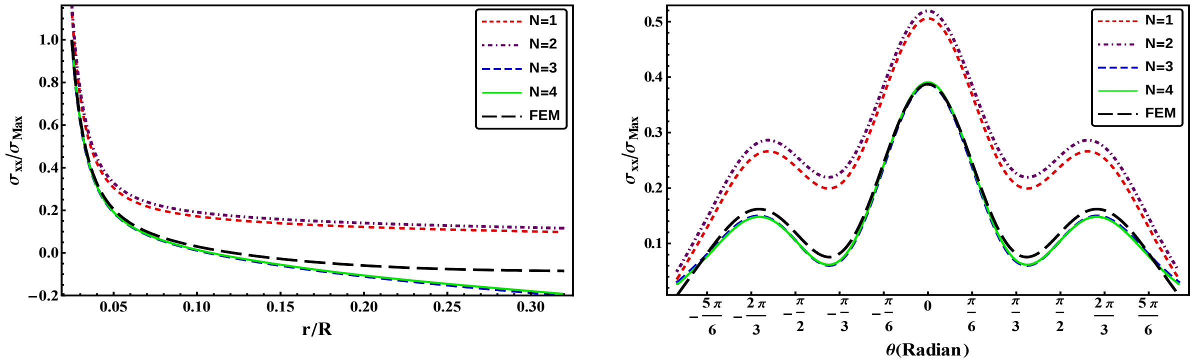
(الف) بر حسب زاویه، (ب) در امتداد مسیر $\theta=0$



الف ب

شکل ۵– توزیع تنش مماسی اطراف شیار کلیدی شکل با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.1$

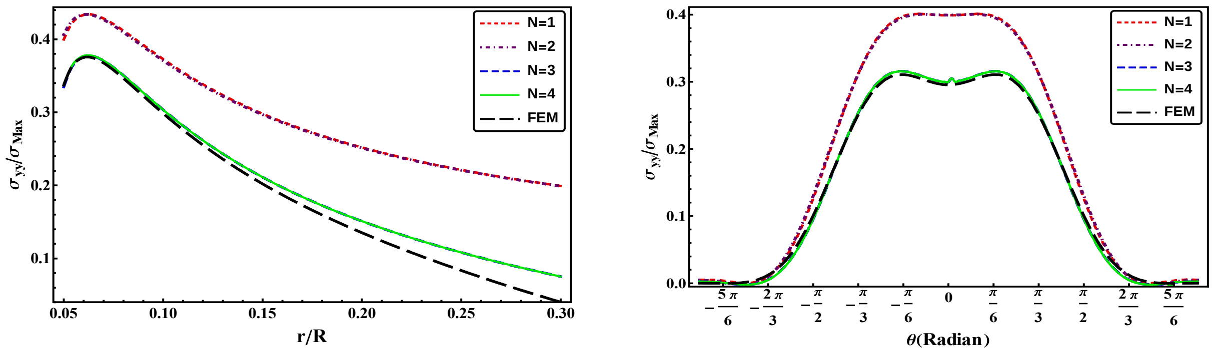
(الف) بر حسب زاویه، (ب) در امتداد مسیر $\theta=0$



الف ب

شکل ۶– توزیع تنش σ_{xx} اطراف شیار کلیدی شکل با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.025$

(الف) برحسب زاویه، (ب) در امتداد مسیر $\theta=\pi/3$



الف ب

شکل ۷– توزیع تنش σ_{yy} اطراف شیار کلیدی شکل با نسبت شعاع نوک $\frac{\rho}{R}=0.05$

(الف) برحسب زاویه، (ب) در امتداد مسیر $\theta=\pi/4$

نتایج بدست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که روش متداول در مقالات قبلی که فقط به جمله تکین در اطراف سوراخ کلیدی شکل اکتفا می‌کند می‌تواند خطای قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. بنابراین در نظر گرفتن حداقل سه جمله از بسط سری جهت استخراج تنش‌های اطراف شیار کلیدی شکل توصیه می‌شود.

۶- جمع بندی

در این پژوهش با استفاده از روش توابع پتانسیل مختلط، ابتدا توزیع تنش مناسبی برای شیار کلیدی‌شکل، تحت بارگذاری مود I به‌صورت سری محاسبه شد. در ادامه با استفاده از مولفه‌های تنش، مولفه‌های جابجایی در مختصات قطبی و کارتزین بدست آمد. سپس روش فرامعین برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود I شیار کلیدی‌شکل به همراه ضرایب مرتبه بالاتر سری محاسبه شده، به‌کارگرفته شد.

در این روش، با استفاده از مقادیر گره‌ای جابجایی درون صفحه‌ای حاصل از تحلیل اجزاء محدود برای یک قطعه شیاردار و برازش معادلات تحلیلی جابجایی بر روی این مقادیر گره‌ای، ضرایب سری با عملیات ماتریسی ساده‌ای محاسبه می‌شوند. سادگی روش ارائه شده، محاسبه همزمان ضرایب شدت تنش و پارامترهای مرتبه بالاتر و همچنین دقت بالای نتایج از برجسته‌ترین مزایای روش استفاده شده می‌باشند. در آخر نشان داده شد که جملات مرتبه بالاتر سری در بهبود نتایج حاصل از جملات تکین، اهمیت قابل توجهی دارند.

مراجع

[1] Zappalorto, M., and Lazzarin, P., “In-plane and Out-of-plane Stress Field Solutions for V-notches with End Holes”, International Journal of Fracture, Vol. 168, No. 2, pp.167-180, (2011).

[2] Mori, K., “Tension of a Semi-infinite Plate with a Circular Hole Connected to the Straight Edge by a Slit. Bull”, J-STAGE, Vol. 7, No. 26, pp. 272-277, (1964).

[3] Neuber, H., “*Theory of Notch Ntresses*”, 2nd Edn., Springer, Berlin, (1958).

[4] Neuber, H., “*Kerbspannungslehre*”, 3rd Edn., Springer, Berlin, (1985).

[5] Kullmer, G., “Elastic Stress Fields in the Vicinity of a Narrow Notch with Circular Root. Reliability and Structural Integrity of Advanced Materials”, Proceedings of the 9th Biennial European Conference on Fracture (ECF 9), Vol. II., Varna, Bulgaria, pp. 905-910, (1992).

[6] Radaj, D., Lehrke, H.P., and Greuling, S., “Theoretical Fatigue Effective Notch Stresses at Spot Welds”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 24, No. 5, pp. 293-308, (2001).

[7] Smith, E., “The Mode III Elastic Stress Distribution Near the Root of (a) an Intrusion-Type Notch and (b) a Key-hole Notch”, International Journal of Engineering Science, Vol. 44, No. 5-6, pp. 340-344, (2006).

[8] Kullmer, G., and Richard, H.A., “Influence of the Root Radius of Crack-like Notches on the Fracture Load of Brittle Components”, Archive of Applied Mechanics, Vol. 76, No. 11-12, pp. 711-723, (2006).

[9] Creager, M., and Paris, P.C., “Elastic Field Equations for Blunt Cracks with Reference to Stress Corrosion Cracking”, International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 3, No. 4, pp. 247–252, (1967).

[10] Pook, L.P., “Finite Element Analysis of Corner Point Displacements and Stress Intensity Factors for Narrow Notches in Square Sheets and Plates”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 23, No. 12, pp. 979–992, (2000).

[11] Larsson, S.G., and Carlsson, A.J., “Influence of Non-singular Stress Terms and Specimen Geometry on Small-scale Yielding at Crack-tips in Elastic–plastic Materials”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 21, No. 4, pp. 263–277, (1973).

[12] Rice, J.R., “Limitations to the Small Scale Yielding Approximation for Crack Tip Plasticity”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 22, No. 1, pp. 17–26, (1974).

[13] Cotterell, B., “Notes on the Paths and Stability of Cracks”, International Journal of Fracture, Vol. 2, No. 3, pp. 526-533, (1966).

[14] Melin, S., “The Influence of the T-stress on the Directional Stability of Cracks”, International Journal of Fracture, Vol. 114, No. 3, pp. 259–265, (2002).

[15] Fett, T., and Munz, D., “T-stress and Crack Path Stability of DCDC Specimens”, International Journal of Fracture, Vol. 124, No. 1-2, pp. L165–L170, (2003).

[16] Smith, D.J., Ayatollahi, M.R., and Pavier, M.J., “The Role of T-stress in Brittle Fracture for Linear Elastic Materials under Mixed-mode Loading”, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 24, No. 2, pp. 137–150, (2001).

[17] Ayatollahi, M.R., Pavier, M.J., and Smith, D.J., “Mode I Cracks Subjected to Large T-stresses”, International Journal of Fracture, Vol. 117, No. 2, pp. 159–174, (2002).

[18] Karihaloo, B.L., “Size Effect in Shallow and Deep Notched Quasi-brittle Structures”, International Journal of Fracture, Vol. 95, pp. 379–390, (1999).

[19] Kardomateas, G.A., Carlson, R.L., Soediono, A.H., and Schrage, D.P., “Near-tip Stress and Strain Fields for Short Elastic Cracks”, International Journal of Fracture, Vol. 62, No. 3, pp. 219–232, (1993).

[20] Kim, J.K., and Cho, S.B., “Effect of Second Non-singular Term of Mode I Near the Tip of a V-notched Crack”, Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 32, No. 4, pp. 346–356, (2009).

[21] Ayatollahi, M.R., and Nejati, M., “An Over-deterministic Method for Calculation of Coefficients of Crack Tip Asymptotic Field from Finite Element Analysis”, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 34, No. 3, pp. 159–176, (2011).

[22] Ayatollahi, M.R., and Nejati, M., "Determination of NSIFs and Coefficients of Higher Order Terms for Sharp Notches using Finite Element Method", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, No. 3, pp. 164–177, (2011).

[23] Williams, M.L., "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 4, pp. 526-528, (1952).

فهرست نمادهای انگلیسی

a: طول شیار

G: مدول برشی

N: تعداد جملات در نظر گرفته شده در سری

r: فاصله‌ی شعاعی تا مبدا مختصات

u_r: مولفه‌ی جابجایی در دستگاه مختصات قطبی در راستای r

u_θ: مولفه‌ی جابجایی در دستگاه مختصات قطبی در راستای θ

u_x: مولفه‌ی جابجایی در دستگاه مختصات کارتزین در راستای x

u_y: مولفه‌ی جابجایی در دستگاه مختصات کارتزین در راستای y

z: مختصات نقطه در دستگاه موهومی

نمادهای یونانی

α: نصف زاویه دهانه‌ی شیار

ε_r: مولفه‌ی کرنش در دستگاه مختصات قطبی در راستای r

ε_θ: مولفه‌ی کرنش در دستگاه مختصات قطبی در راستای θ

θ: زاویه در دستگاه مختصات قطبی

κ: ثابت کلوسف

ρ: شعاع نوک شیار

σ_{rr}: مولفه‌ی تنش در دستگاه مختصات قطبی در راستای r

$\sigma_{\theta\theta}$: مولفه‌ی تنش در دستگاه مختصات قطبی در راستای θ

σ_{xx}: مولفه‌ی تنش در دستگاه مختصات کارتزین در راستای x

σ_{yy}: مولفه‌ی تنش در دستگاه مختصات کارتزین در راستای y

$\tau_{r\theta}$: مولفه‌ی تنش برشی در دستگاه مختصات قطبی

τ_{xy}: مولفه‌ی تنش برشی در دستگاه مختصات کارتزین

φ: تابع پتانسیل مختلط

ψ: تابع پتانسیل مختلط

Abstract

In the present study, the asymptotic stress distribution related to mode I loading is calculated by using the complex potential functions method for the key-hole notch. The new solution is an extension to study of Zappalorto and Lazzarin [1] and has been developed to derive the components of stress and displacement in the series expansion. Then, the over-deterministic method is utilized to calculate the coefficients of the series.

Finally, to evaluate the derived coefficients, the truncated stress series have been compared with its relevant finite element values. The results show that considering the singular terms alone will generate large amounts of errors in calculations.