

## تحلیل تنش های اطراف شیار حلقوی و کاربرد آن در محاسبه تنش های پسماند غیر یکنواخت

رسول محرمی<sup>۱</sup>

استادیار

محسن صدری<sup>۲</sup>

کارشناس ارشد

به علت اثرات قابل توجه تنش های پسماند بر کارایی و عمر سازه های مهندسی، این تنش ها در بررسی های مربوط به تحمل پذیری وجود عیوب بویژه ترک ها مدنظر قرار میگیرند. برای اندازه گیری تنش های پسماند روش های متنوعی وجود دارند که برخی از آن ها مبتنی بر آزادسازی مکانیکی تنش و بررسی تغییرات کرنش و محاسبه تنش های مربوطه میباشند. در این مقاله ابتدا توزیع تنش اطراف شیار حلقوی بررسی شده و در ادامه و اصول تئوری تکنیک *Ring Core* برای محاسبه تنش های پسماند یکنواخت بررسی شده است. سپس روابط لازم برای محاسبه تنش های پسماند غیریکنواخت با رفتار الاستیک خطی بروش انتگرالی استخراج و نحوه محاسبه ضرایب مورد نیاز این روش ارائه شده است. نتایج این مقاله نشان دهنده دقت مناسب روش *Ring Core* برای محاسبه تنش های پسماند غیریکنواخت ایجاد شده در سازه های صنعتی است.

واژه های راهنما: تنش های پسماند غیر یکنواخت، اندازه گیری، روش انتگرالی، روش *Ring Core*

### ۱- مقدمه

بررسی ها روی سازه های مهندسی نشان می دهند که تنش های پسماند و بویژه تنش های پسماند کششی در ترکیب با بارهای وارده خارجی می توانند سبب از کارافتادگی سازه در بارهایی به مراتب کمتر از بارهای منطقه ایمن طراحی گردند. به همین دلیل تحلیل و شناخت ماهیت این نوع تنش ها در مهندسی مکانیک از جایگاه ویژه ای برخوردار میباشد. عدم وجود اطلاعات و قوانین کلی برای پیش بینی، تخمین و تعیین توزیع و اندازه آن، بسیاری از محققان را بر آن داشته است که در این زمینه به مطالعه و پژوهش بپردازند. پژوهش ها اغلب درباره اندازه گیری و محاسبه این نوع تنش ها و تاثیر آن بر رفتار سازه های مهندسی می باشد. به دلیل اینکه نتایج محاسبه و تخمین تنش های پسماند در اعتبار سنجی دیگر پژوهش های این حوزه مورد استفاده میباشد، مورد توجه خاص مرکز پژوهشی و صنعتی میباشد [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷].

<sup>۱</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان [r\\_moharami@znu.ac.ir](mailto:r_moharami@znu.ac.ir)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشگاه زنجان [mohsen.sadri@ymail.com](mailto:mohsen.sadri@ymail.com)

روش های متنوعی برای اندازه گیری تنش های پسماند مورد استفاده قرار می گیرند که گروهی از این روش ها بر اساس آزاد کردن مکانیکی تنش و بررسی تغییرات میدان کرنش میباشند. در این روش ها با ایجاد سطوح آزاد جدید به وسیله ی روش های مکانیکی تنش های پسماند آزاد شده و با داشتن مقادیر تغییرات کرنش، تنش های موجود محاسبه میگردد.

در برخی از این روش های اندازه گیری نظیر مقطع زنی و لایه برداری آزاد کردن تنش همراه با تخریب کامل سازه هستند که این تکنیک ها به روش های مخرب موسوم اند. در برخی دیگر از تکنیک ها نظیر روش کرنش سنجی سوراخ و روش Ring-Core، تخریب موضع اندازه گیری به صورت جزئی می باشد قابل تعمیر و اصلاح میباشد. در استفاده از این روش ها قطعه ی مکانیکی کارآیی خود را از نمیدهد. روش کرنش سنجی سوراخ به دلیل استاندارد بودن در صنعت مورد استفاده قرار می گیرد. این روش دارای محدودیت هایی در رابطه با اندازه گیری تنش های پسماند بزرگ و متغییر در ضخامت می باشد. جهت رفع برخی از محدودیت های روش کرنش سنجی سوراخ، روش Ring-Core که از نظر اصول کلی مشابه تکنیک کرنش سنجی سوراخ میباشد، مورد توجه میباشد. در این روش به جای ایجاد سوراخ از ایجاد شیار حلقوی برای آزادسازی تنش استفاده میشود. با داشتن تغییرات میدان کرنش با فرض رفتار الاستیک خطی برای مواد، با استفاده از روابط الاستیسیته، تنش های موجود در مرکز شیار ایجاد شده قابل محاسبه خواهد بود.

هدف اصلی در این پژوهش کسب دانش فنی برای اندازه گیری تنش های پسماند به وسیله ی تکنیک Ring-Core برای بارگذاری های یکنواخت و متغیر در ضخامت می باشد. به این منظور ابتدا توزیع تنش های در اطراف یک شیار حلقوی کامل و ناقص ایجاد شده بر روی یک ورق بررسی گردیده است در ادامه روابط لازم برای محاسبه تنش های پسماند یکنواخت با رفتار الاستیک مورد توجه قرار گرفته و در انتها محاسبه تنش های پسماند غیر یکنواخت بروش انتگرالی استخراج و نحوه محاسبه ضرایب مورد نیاز این روش با استفاده از روش المان محدود استخراج و ارائه شده است.

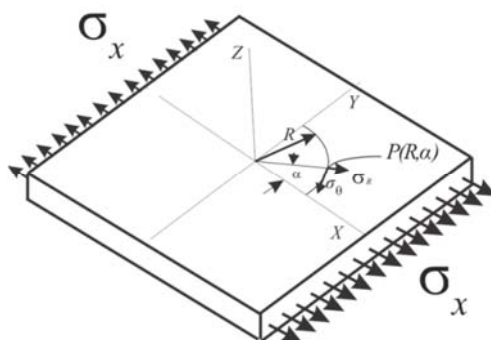
## ۲- تحلیل تنش های یکنواخت در اطراف یک شیار حلقوی

برای یک صفحه نازک بدون شیار تحت تنش یکنواخت تک محوره  $\sigma_x$  مطابق شکل (۱)، روابط تنش در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos(2\alpha)) \quad (۱)$$

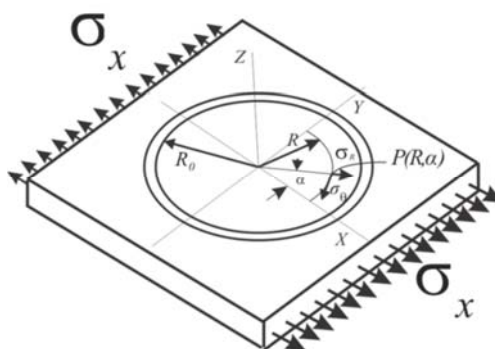
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos(2\alpha)) \quad (۲)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_x}{2} (\sin(2\alpha)) \quad (۳)$$



شکل ۱- حالت تنش در یک صفحه ی بدون شیار در نقطه ی  $P(r, \theta)$

اگر مطابق شکل (۲) روی این صفحه یک رینگ ایجاد شود، توزیع تنش در قطعه به دلیل ایجاد سطوح آزاد جدید تغییر خواهد کرد.



شکل ۲- حالت تنش در یک صفحه با شیار کامل در نقطه ی  $P(r, \theta)$

در این حالت تنش های نقاط داخل این شیار بدلیل عدم وجود بارگذاری و نبود تماس با مناطق دارای تنش برابر با صفر خواهد شد.

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{for } r \leq r_0 \quad (۴)$$

با فرض رفتار الاستیک خطی، تغییرات تنش بوجود آمده در اثر ایجاد شیار، از تفاضل تنش ها قبل و بعد از ایجاد رینگ می باشد:

$$\Delta\sigma_r = -\frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos(2\alpha)) \quad (۵)$$

$$\Delta\sigma_\theta = -\frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos(2\alpha)) \quad (۶)$$

با استفاده از قانون هوک کرنش های شعاعی ناشی از دو مولفه تنش شعاعی و مماسی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\Delta\sigma_r - \nu \times \Delta\sigma_\theta) = \frac{1}{E} \left( -\frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos(2\alpha) + \nu \frac{\sigma_x}{2} - \nu \frac{\sigma_x}{2} \cos(2\alpha) \right) \quad (۷) \\ &= \frac{-1}{2E} \{ \sigma_x \{ (1 - \nu) + (1 + \nu) \cos(2\alpha) \} \} = \sigma_x (A + B \cos(2\alpha)) \end{aligned}$$

پس می توان رابطه ی بین تنش اعمال شده،  $\sigma_x$  و کرنش شعاعی را به صورت زیر استخراج نمود:

$$\varepsilon_r = \sigma_x(A + B \cos(2\alpha)) \quad (8)$$

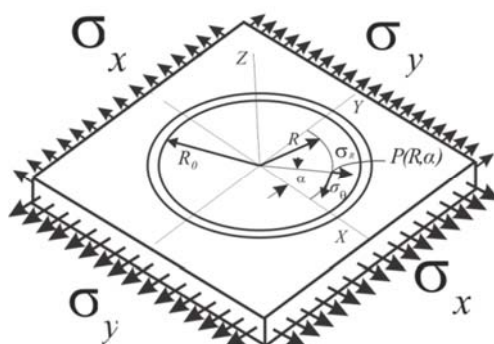
که در آن  $A$  و  $B$  ثابت هایی از جنس ماده بوده و با روابط زیر بدست می آیند:

$$A = \frac{\nu - 1}{2E} \quad (9)$$

$$B = \frac{-(\nu + 1)}{2E} \quad (10)$$

برای صفحه ای که تحت تنش های عمود بر هم  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  قرار دارد، مطابق شکل (۳)، با استفاده از اصل جمع آثار رابطه ی این تنش ها با کرنش عبارت خواهد بود از:

$$\varepsilon_r = (A(\sigma_x + \sigma_y) + B(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\alpha)) \quad (11)$$



شکل ۳ - حالت تنش دوماحوره در یک صفحه با شیار کامل در نقطه ی  $P(r, \theta)$

## ۲-۱- تحلیل تنش های یکنواخت در اطراف یک شیار ناقص حلقوی در یک ورق

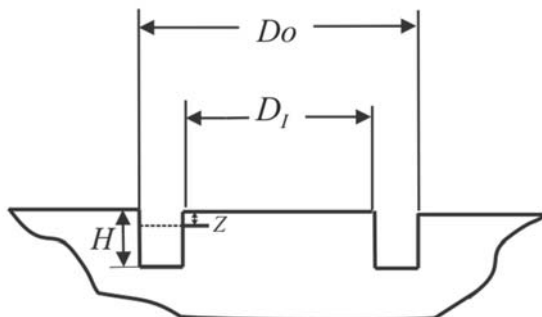
در بخش قبل ورق نازک با رینگ کامل مورد بررسی قرار گرفت که این حالت در مورد قطعات صنعتی قابل استفاده نمی باشد. بدلیل اینکه در قطعات صنعتی باید خسارت حداقل ممکن باشد، در قطعات صنعتی می توان از ایجاد رینگ ناقص برای آزاد کردن مکانیکی تنش استفاده نمود. برای حالتی که شیار ایجاد شده سراسری و کامل نباشد، یعنی ارتباط بین قطعه محدود شده در داخل این شیار و بخش خارجی هنوز از طریق لایه های زیرین برقرار باشد، به دلیل پیچیدگی هندسه، حل کامل این مسئله وجود نداشته و روابط الاستیسیته برای بررسی توزیع تنش و کرنش به سادگی قابل استفاده نمی باشد. اما با توجه به اینکه با تغییر رینگ سراسری به ناقص، شرایط اولیه و مرزی ثابت است، توزیع تنش ها بر روی سطح از نظر کیفی تغییری نخواهد کرد و تغییرات تنها از نظر کمی خواهند بود. بنابراین می توان با تعریف ثابت های جدید  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  به جای  $A$  و  $B$  روابط قبلی حاکم بر تنش ها و کرنش ها را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\varepsilon_r = (\bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\alpha)) \quad (12)$$

که در این رابطه  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  علاوه بر جنس ماده، به ابعاد هندسی رینگ هم وابسته است. این ابعاد در شکل (۴) نشان داده شده است که در آن  $H$  عمق نفوذ و  $D_I$  قطر داخلی رینگ می باشد.

$$\bar{A} = f(E, \nu, H/D_I) \quad (13)$$

$$\bar{B} = g(E, \nu, H/D_I) \quad (14)$$



شکل ۴- ابعاد شیار مورد استفاده در آزاد کردن تنش

برای محاسبه ی ثابت های  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  می توان معادله ی  $\gamma$  را برای یک شیار ناقص حلقوی نیز بازنویسی نمود:

$$\epsilon_r = \sigma_x (\bar{A} + \bar{B} \cos(2\theta)) \quad (15)$$

بر اساس این رابطه اگر قطعه ای که تحت کشش با یک تنش معلوم  $\sigma_t$ ، قرار گیرد و کرنش ها در دو راستای  $a$  و  $c$  استخراج شوند، دو رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\epsilon_r^a = (\bar{A} + \bar{B} \cos(2\alpha)_{\alpha=0}) = \sigma_t (\bar{A} + \bar{B}) \quad (16)$$

$$\epsilon_r^c = \sigma_x (\bar{A} + \bar{B} \cos(2\alpha)_{\alpha=90}) = \sigma_t (\bar{A} - \bar{B}) \quad (17)$$

از آنجایی که تنش اعمالی و کرنش ها مقادیر معلومی هستند، دو ثابت  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  با حل این دو معادله به این صورت بدست می آیند:

$$\bar{A} = \frac{\epsilon_r^a + \epsilon_r^c}{2\sigma_t} \quad (18)$$

$$\bar{B} = \frac{\epsilon_r^a - \epsilon_r^c}{2\sigma_t} \quad (19)$$

که در آن  $\epsilon_r^a$  و  $\epsilon_r^c$  تغییرات کرنش در دو راستای  $a$  و  $c$  در اثر ایجاد رینگ می باشد. با فرض رفتار الاستیک خطی برای مواد، میتوان تغییرات کرنش ناشی از ایجاد شیار در یک ورق بارگذاری شده را با تفاوت کرنش در بارگذاری ورق بدون شیار با ورق شیار دار برابر دانست. به این ترتیب برای محاسبه ضرایب از طریق تست تجربی، نمونه در دو مرحله بارگذاری میگردد. ابتدا نمونه کششی که کرنش سنج رستی بر روی آن نصب شده در حالت بدون شیار و بعد در حالت شیاردار تحت تنش برابر و یکنواخت قرار می گیرد و در هر مرحله کرنش ها ثبت میشود. با فرض رفتار الاستیک برای مواد، اختلاف کرنش ها در دو حالت در صورتی که تنش اعمال شده در آن ها یکسان باشد تغییرات کرنش بدلیل ایجاد شیار حلقوی را نشان می دهد. این ضرایب

برای هندسه ی معینی از شیار حلقوی محاسبه می گردند. برای این حالت روابط ۱۸ و ۱۹ به این شکل بازنویسی می گردند:

$$\bar{A} = \frac{\{(\varepsilon_r^a)_{after} - (\varepsilon_r^a)_{before}\} + \{(\varepsilon_r^c)_{after} - (\varepsilon_r^c)_{before}\}}{2\sigma_t} \quad (20)$$

$$\bar{B} = \frac{\{(\varepsilon_r^a)_{after} - (\varepsilon_r^a)_{before}\} - \{(\varepsilon_r^c)_{after} - (\varepsilon_r^c)_{before}\}}{2\sigma_t} \quad (21)$$

در صورتی که برای هندسه مشخصی از شیار ایجاد شده ضرایب ثابت معین باشد، با استفاده از رابطه ۱۱ و بازنویسی آن برای سه راستای مختلف  $0^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $90^\circ$  روابط زیر حاصل می شوند که در آن کرنش های اندیس شده با  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، کرنش های مربوط به راستاهای در نظر گرفته شده در مرکز شیار حلقوی میباشند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^a &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2(\theta + 0)) \\ &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^b &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2(\theta + 45)) \\ &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^c &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2(\theta + 90)) \\ &= \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) - \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (24)$$

با حل این سه معادله نسبت به کرنش های  $\varepsilon_r^a$ ،  $\varepsilon_r^b$  و  $\varepsilon_r^c$  تنش ها و جهت اصلی عبارت است از:

$$\sigma_x \text{ و } \sigma_y = \frac{\varepsilon_r^a + \varepsilon_r^c}{4\bar{A}} \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon_r^a - \varepsilon_r^c)^2 + (\varepsilon_r^c + \varepsilon_r^a - 2\varepsilon_r^b)^2}}{4\bar{B}} \quad (25)$$

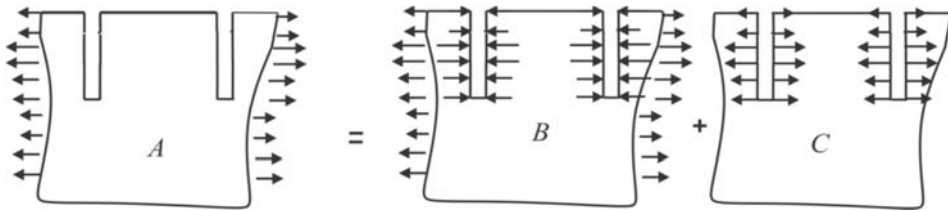
$$\tan(2\theta) = \frac{\varepsilon_r^a - 2\varepsilon_r^b + \varepsilon_r^c}{\varepsilon_r^a - \varepsilon_r^c} \quad (26)$$

### ۳- تحلیل تنش های غیریکنواخت در اطراف شیار حلقوی

در صورتی که تنش ها در راستای ضخامت متغیر باشد، بدلیل استفاده از فرض یکنواختی تنش در راستای ضخامت، ضرایب بدست آمده قبلی برای محاسبه تنش ها قابل استفاده نخواهد بود. برای محاسبه تنش های متغیر در ضخامت، ایجاد رینگ می بایست بصورت مرحله ای و طی چندین گام باشد. در صورتیکه در هر

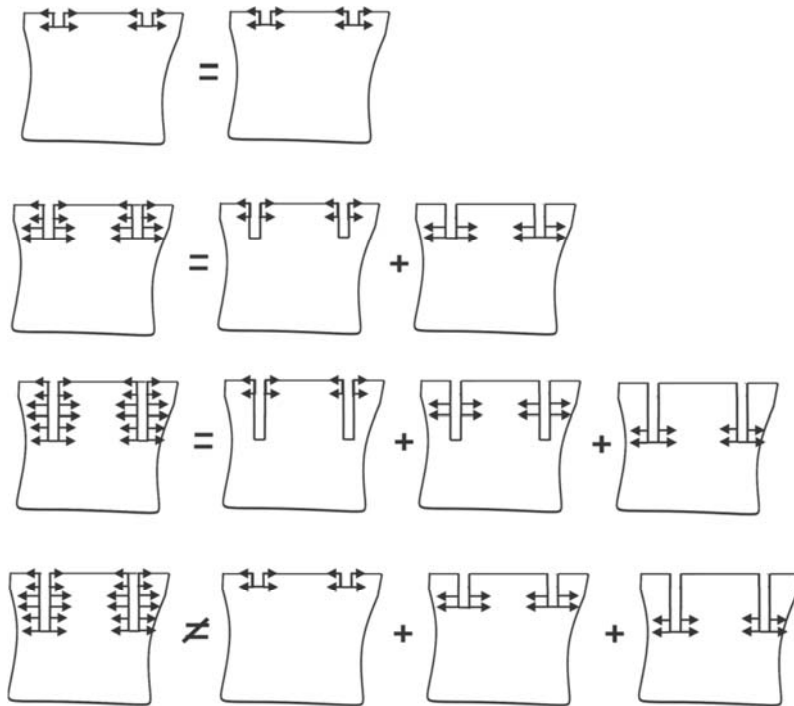
گام از ایجاد تنش ضخامت یکنواخت فرض شود، با استفاده ضرایب جدید، تنش ها قابل محاسبه خواهند بود.

مطابق شکل (۵) برای مواد با رفتار الاستیک خطی، با استفاده از اصل جمع آثار، تغییرات کرنش در یک نمونه ی تحت کشش دارای رینگ (حالت A) با مجموع کرنش های حالت B و C برابر میباشد. در این حالت ترتیب بارگذاری و ایجاد شیار در تغییرات کرنش ایجاد شده بی تاثیر میباشد.



شکل ۵- استفاده از اصل جمع آثار برای اعمال بارگذاری در تعیین ضرایب

به این ترتیب تغییرات کرنش برای حالتی که در قطعه ی تحت کشش شیار حلقوی ایجاد می شود با حالتی که قطعه دارای شیار تحت کشش قرار می گیرد یکسان خواهد بود. با در نظر گرفتن اصل جمع آثار مطابق شکل (۶)، تغییرات کرنش اندازه گیری شده در هر گام از ایجاد یک رینگ به عمق مشخص  $z$  نتیجه اثر آزاد شدن همه ی تنش ها در مراحل قبلی می باشد. بنابر این تغییرات کرنش مربوطه در هر گام علاوه بر تنش های موجود در همان گام به تنش های موجود در گام های قبلی نیز وابسته است.



شکل ۶- استفاده از اصل جمع آثار برای محاسبه ی ضرایب حالت بارگذاری غیر یکنواخت

بزرگی و جهت تنش های اصلی در گام اول تنش با فرض یکنواختی تنش در آن گام، محاسبه شده و با استفاده از نتیجه آن، تنش در گام دوم نیز محاسبه میگردد و به همین ترتیب مقدار تنش برای گام های بعدی نیز قابل محاسبه است. با در نظر گرفتن فرض های شکل های (۵) و (۶)، تغییرات کرنش شعاعی ناشی از آزاد شدن تنش در یک گام ایجاد شیار به عمق  $z$  و عمق نهایی  $H$  بصورت گام به گام، صورت رابطه ی زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_r(z) = \bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\alpha) \quad (27)$$

که در آن :

$$\bar{A} = \bar{A}(E, \nu, H, z/D_1) \quad (28)$$

$$\bar{B} = \bar{B}(E, \nu, H, z/D_1) \quad (29)$$

با استفاده از جمع انتگرالی کرنش ها، کرنش کل برابر است با:

$$\varepsilon_r(h) = \int_0^h \varepsilon_r(z) dz \quad (30)$$

که با جاگذاری رابطه ی بالا در این معادله خواهیم داشت:

$$\varepsilon_r(h) = \frac{1}{E} \int_0^h (\bar{A}(\sigma_x + \sigma_y) + \bar{B}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\alpha)) \quad (31)$$

با تبدیل رابطه ی انتگرالی به معادله ی حاصل جمع می توان نوشت:

$$\varepsilon_n(r) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ni}(r) \quad (32)$$

پس کرنش کل ایجاد شده در اثر ایجاد شیار حلقوی در  $n$  مرحله بشرح زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_{ni}(r) = \frac{1}{E} (\bar{A}(ni)(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + \bar{B}(ni)(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})) \quad (33)$$

#### ۴- محاسبه ی تنش های پسماند غیریکنواخت با استفاده از تکنیک Ring-Core

در این بخش هدف بررسی نحوه محاسبه ی تنش های پسماند با استفاده از روابط الاستیسیته ی استخراج شده برای صفحه دارای شیار حلقوی می باشد. برای یک نمونه صنعتی، می توان با استفاده از کرنش سنج های موجود، کرنش ها را در مراحل مختلف ایجاد رینگ ثبت نمود. کرنش های ثبت شده به وسیله ی کرنش سنج ها در هر گام حاصل کرنش های آزاد شده در همان گام و گام های قبلی ایجاد شیار است:

$$\varepsilon_n^k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ni}^k \quad k = a, b, c \quad (34)$$

که  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه راستای اندازه گیری کرنش و  $\alpha_i$  زاویه ی بین کرنش سنج  $a$  و  $\sigma_{xi}$  بوده و از روابط زیر محاسبه می شوند.

$$\varepsilon_{ni}^a = \frac{a_{ni}}{E} (\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + \frac{b_{ni}}{E} (\sigma_{xi} - \sigma_{yi}) \cos(2\alpha_i^a) \quad (35)$$

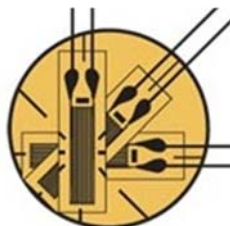


$$\epsilon_{ni}^b = \frac{a_{ni}}{E}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + \frac{b_{ni}}{E}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})\cos(2\alpha_i^b) \quad (36)$$

$$\epsilon_{ni}^c = \frac{a_{ni}}{E}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + \frac{b_{ni}}{E}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})\cos(2\alpha_i^c) \quad (37)$$

اگر برای اندازه گیری کرنش ها از کرنش سنج های سه تایی  $90^\circ$  و  $45^\circ$  و  $0^\circ$  نشان داده شده در شکل (۷) استفاده شود:

$$\alpha_i^a = \alpha_i + 0 \quad \text{و} \quad \alpha_i^b = \alpha_i + 45 \quad \text{و} \quad \alpha_i^c = \alpha_i + 90$$



شکل ۷- نمونه‌ای از کرنش سنج های قابل استفاده در روش Ring Core

با جایگذاری این روابط معادلات مربوط به تنش های اصلی و کرنش های نشان داده شده در شکل (۷) به صورت زیر استخراج می شوند:

$$\epsilon_n^a = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n a_{ni}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + b_{ni}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})\cos(2\alpha_i) \quad (38)$$

$$\epsilon_n^b = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n a_{ni}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) + b_{ni}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})\sin(2\alpha_i) \quad (39)$$

$$\epsilon_n^c = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n a_{ni}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) - b_{ni}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi})\cos(2\alpha_i) \quad (40)$$

اگر طرفین روابط ۳۵ و ۳۷ یک بار با هم جمع و بار دیگر از هم کم شوند، روابط ۳۸ و ۳۹ بدست می آیند:

$$(\epsilon_n^a + \epsilon_n^c)/2 = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ni}}{E}(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) \quad (41)$$

$$(\epsilon_n^a - \epsilon_n^c)/2 = \sum_{i=1}^n \frac{b_{ni}}{E}(\sigma_{xi} - \sigma_{yi}) \quad (42)$$

با کم کردن  $\epsilon_n^a$  و  $\epsilon_n^c$  از دو برابر  $\epsilon_n^b$  رابطه ی ۴۰ استخراج می شود:

$$\frac{2 \times \epsilon_n^b - \epsilon_n^a - \epsilon_n^c}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{b_{ni}}{E}(2 \times \sigma_{bi} - \sigma_{xi} - \sigma_{yi}) \quad (43)$$

اندیس  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  به ترتیب نشان دهنده ی راستاهای  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  است. این روابط معادلات انتگرالی را به معادلات گسسته ی حاصل جمع برای  $\mathbf{n}$  گام پیشروی تبدیل می نماید. برای محاسبه ی حالت های تنش در لایه های زیرین ماتریس های زیر تعریف می شوند:

$$[\bar{A}] = \frac{a_{ni}}{E}, [\bar{B}] = \frac{b_{ni}}{E} \quad (44)$$

$$[P] = (\sigma_{xi} + \sigma_{yi}), [Q] = (\sigma_{xi} - \sigma_{yi}) \quad (45)$$

$$[T] = (2\sigma_{bi} - \sigma_{xi} - \sigma_{yi}) \quad (46)$$

$$[p] = (\epsilon_n^a + \epsilon_n^c)/2, [q] = (\epsilon_n^a - \epsilon_n^c)/2 \quad (47)$$

$$[t] = (2 \times \epsilon_n^b - \epsilon_n^a - \epsilon_n^c)/2 \quad (48)$$

تعاریف جدید ماتریسی معادلات اساسی ۳۸، ۳۹ و ۴۰ را که برای محاسبه ی حالت تنش های پسماند در لایه های مختلف استخراج گردیدند، به شکل ماتریسی تبدیل می کنند:

$$[\bar{A}][P] = [p] \quad (49)$$

$$[\bar{B}][Q] = [q] \quad (50)$$

$$[\bar{B}][T] = [t] \quad (51)$$

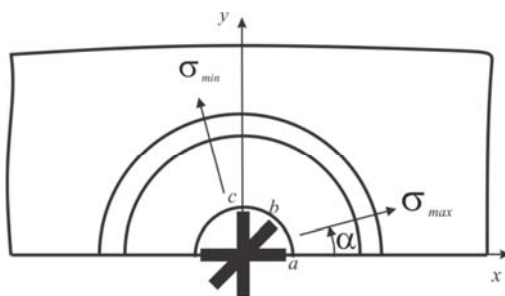
در این روابط ماتریس های  $\mathbf{p}$ ،  $\mathbf{q}$  و  $\mathbf{t}$  از کرنش های اندازه گیری شده و ضرایب با استفاده از مدلسازی المان محدود بدست می آیند. اگر طرفین این معادلات در معکوس ماتریس های ضرایب ضرب شوند، معادلات زیر بدست می آیند:

$$[\bar{A}]^{-1} * [\bar{A}][P] = [\bar{A}]^{-1} * [p] \Rightarrow [P] = [\bar{A}]^{-1} * [p] \quad (52)$$

$$[\bar{B}]^{-1} * [\bar{B}][Q] = [\bar{B}]^{-1} * [q] \Rightarrow [Q] = [\bar{B}]^{-1} * [q] \quad (53)$$

$$[\bar{B}]^{-1} * [\bar{B}][T] = [\bar{B}]^{-1} * [t] \Rightarrow [T] = [\bar{B}]^{-1} * [t] \quad (54)$$

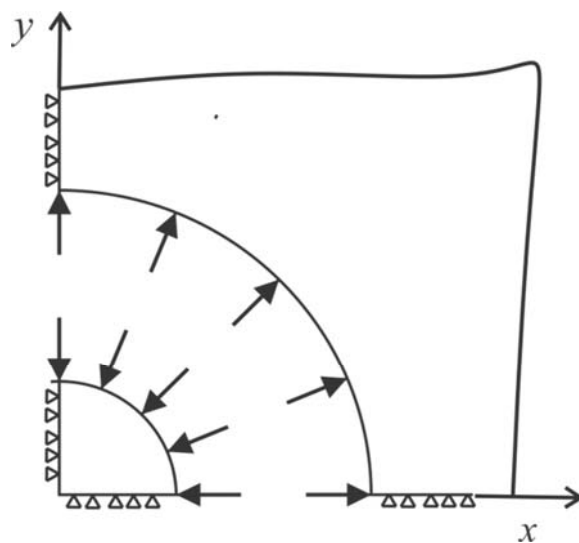
با محاسبه سه ماتریس  $\mathbf{P}$ ،  $\mathbf{Q}$  و  $\mathbf{T}$ ، مطابق شکل (۸) تنش های اصلی و راستای آن با راستای کرنش سنج  $\mathbf{a}$  در هر گام محاسبه می شوند.



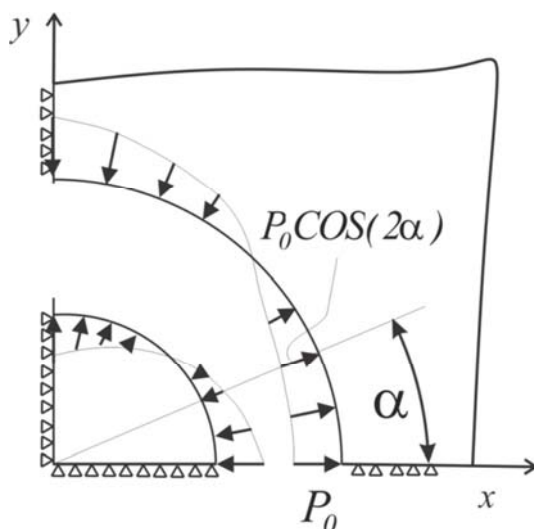
شکل ۸- راستای تنش های اصلی در مقایسه با المان های کرنش سنج های مورد استفاده

#### ۴-۱- محاسبه ضرایب

تعیین حالت تنش های پسماند با استفاده از روابط اساسی به دست آمده در بخش قبل با فرض معلوم بودن ماتریس های  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  می باشد. تعیین ضرایب مورد نظر نیازمند بارگذاری خاصی میباشد که اجرای آن بصورت تجربی مقدور نبوده و بنابر این برای بدست آوردن این ضرایب از شبیه سازی المان محدود استفاده می شود. مفهوم و روابط مورد استفاده جهت تعیین ضرایب و همچنین اندازه و نحوه ی اعمال بارگذاری به مدل المان محدود در این بخش توضیح داده شده و در شکل (۹) و (۱۰) نشان داده شده است.

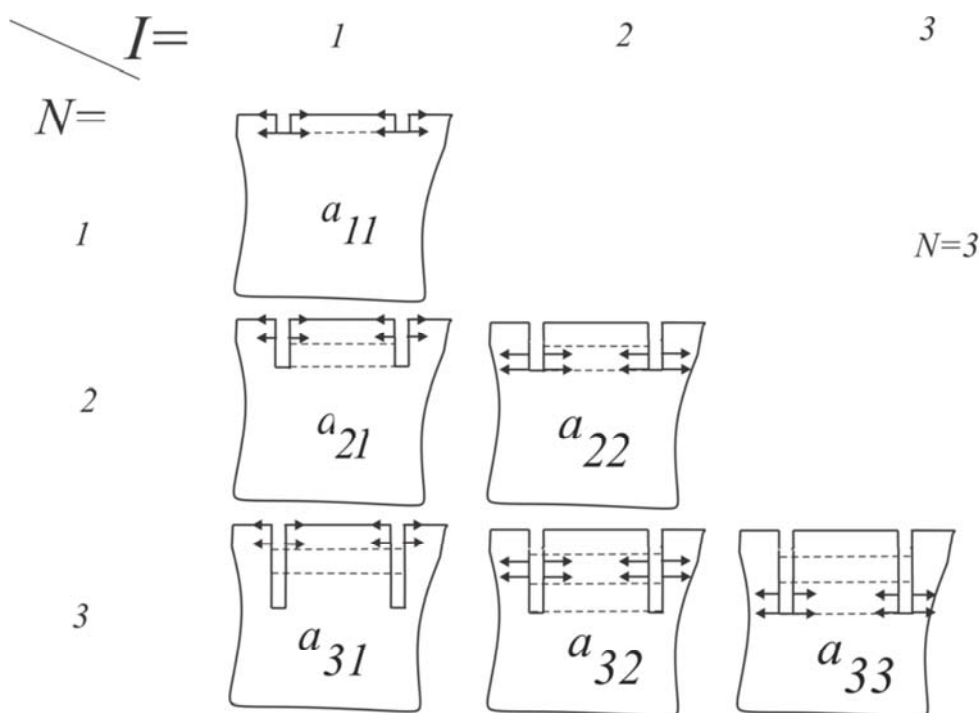


شکل ۹- نحوه ی بارگذاری برای محاسبه ی ضریب  $\bar{A}$



شکل ۱۰- نحوه‌ی بارگذاری برای محاسبه‌ی ضریب  $\bar{B}$

مطابق شکل (۱۱) برای محاسبه تنش‌های متغیر در ضخامت میتوان با استفاده از ضرایب کالیبراسیون بدست آمده و با فرض یکنواخت بودن تنش‌ها در هر گام حالت تنش را در گام‌های مربوطه تعیین نمود.



شکل ۱۱- حالت‌های بارگذاری برای تعیین مولفه‌های ماتریس ضرایب

#### ۴-۱-۱-۱- محاسبه‌ی ضریب $\bar{A}$

برای به‌دست آوردن ضرایب  $\bar{A}$  در هر گام برای حالت تنش غیر یکنواخت با توجه به رابطه‌ی زیر:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha_i) \quad (55)$$

که در این رابطه اندیس  $i$  نشان دهنده شماره گام می باشد. برای حالتی که  $\sigma_x = \sigma_y = P_{zi}$  می باشد:

$$\sigma'_x = P_{zi} \quad (56)$$

طبق این رابطه در هر گام نحوه ی بارگذاری به صورت هیدرواستاتیک و مطابق شکل (۹) خواهد بود. با توجه به این رابطه اگر بارگذاری طوری انجام شود که در هر گام  $\sigma_{xi} = \sigma_{yi} = P_{zi}$  باشد، در این صورت  $(\sigma_{xi} - \sigma_{yi}) = 0$  بوده و لذا خواهیم داشت:

$$\varepsilon_r(h) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n (\bar{A}(ni)(2P_{zi})) = \frac{2}{E} (\bar{A}_{n1}P_{z1} + \bar{A}_{n2}P_{z2} + \bar{A}_{n3}P_{z3} + \dots) \quad (57)$$

با توجه به رفتار الاستیک ماده و اصل جمع آثار و با فرض اینکه در هر گام تنش یکنواخت  $P_{zi}$  وجود دارد، چون تمام ضرایب  $\bar{A}_{ni}$  بجز ضریب گامی که بارگذاری روی آن قرار دارد، می توان  $\bar{A}_{ni}$ ها را بدین ترتیب بدست آورد:

$$\bar{A}_{ni} = \frac{E}{2P_{zi}} \varepsilon_{ni} \quad (58)$$

در این رابطه کرنش  $\varepsilon_{ni}$  کرنش در راستای  $a$  می باشد.

#### ۴-۱-۲- محاسبه ی ضریب $\bar{B}$

برای بدست آوردن ضرایب  $\bar{B}$  در هر گام نیز اگر در رابطه ی زیر  $\sigma_{xi} = -\sigma_{yi} = P_{zi}$  باشد،

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha_i) \quad (59)$$

$$\sigma'_x = P_{zi} \cos(2\alpha_i) \quad (60)$$

طبق رابطه ۵۶ برای تعیین ضرایب  $\bar{B}$  در موضع مورد نظر بارگذاری مطابق شکل (۱۰) بایستی اعمال شده و کرنش ناشی از آن تعیین گردد. در این صورت  $(\sigma_{xi} + \sigma_{yi}) = 0$  بوده و در نتیجه رابطه به شکل زیر نوشته می شود:

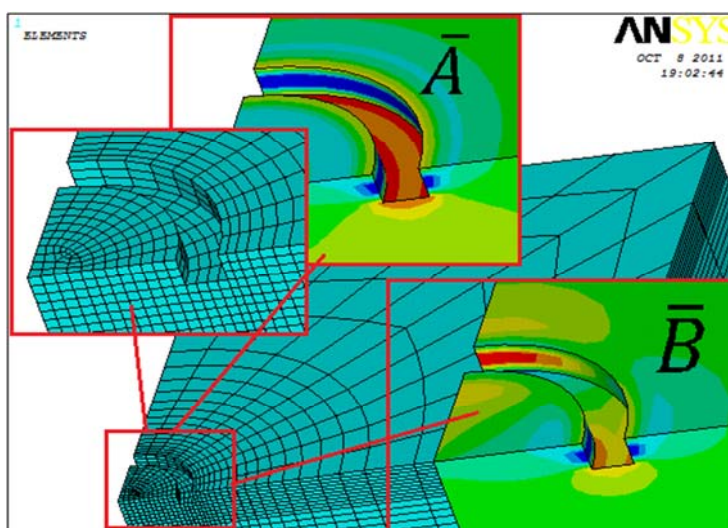
$$\varepsilon_r(h) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n (\bar{B}(ni)(2P_{zi})) = \frac{2}{E} (\bar{B}_{n1}P_{z1} + \bar{B}_{n2}P_{z2} + \bar{B}_{n3}P_{z3} + \dots) \quad (61)$$

رابطه ی مربوط به محاسبه ی  $\bar{B}$  نیز مشابه قسمت قبل به شکل زیر خواهد بود:

$$\bar{B}_{ni} = \frac{E}{2P_{zi}} \varepsilon_{ni} \quad (62)$$

#### ۴-۲- محاسبه یک نمونه تنش های غیر یکنواخت

در این قسمت روش ارائه شده برای محاسبه تنش های پسماند مورد اعتبار سنجی قرار گرفته است. به این منظور بر روی یک ورق توزیع تنش های غیر یکنواخت در دو راستا اعمال شد و با روش ارائه شده در بخش های قبل و با استفاده از تکنیک المان محدود در تعیین ضرایب، تنش ها به عنوان تنش پسماند مورد محاسبه قرار گرفتند. مقایسه مقادیر محاسبه شده و تنش های اعمالی به عنوان معیار اعتبار سنجی در این بخش مورد استفاده قرار گرفته است. برای شبیه سازی اعمال بارگذاری بروی نمونه شیاردار و بدون شیار از نرم افزار المان محدود Ansys استفاده شده است. در شبیه سازی انجام شده به دلیل وجود تقارن بارگذاری و هندسی در دو جهت، به منظور کاهش حجم و زمان محاسبات، مدل به صورت یک چهارم مطابق شکل (۱۲) ایجاد شده است.



شکل ۱۲- مدل المان محدود مش بندی شده برای شبیه سازی و محاسبه ماتریس های ضرایب

مدل بکار رفته پارامتریک بوده و طوری ایجاد شده که ابعاد نمونه و رینگ قابل تغییر هستند. با اعمال بارگذاری های نشان داده شده در شکل (۹) و (۱۰) کرنش مورد نیاز در راستای مختلف تعیین و استفاده از روابط موجود ضرایب  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  برای هرگام از ایجاد رینگ محاسبه می شوند. نمونه نتایج محاسبه ضرایب برای محاسبه تنش در حین ایجاد رینگ ۸ مرحله ای به صورت ماتریس در جدول ۱ و ۲ ارائه شده است. برای محاسبه این ضرایب از یک مدل یک چهارم با ابعاد  $100 \times 60 \times 60$  میلیمتر که در آن شیار حلقوی دارای شعاع داخلی ۸ و شعاع خارجی ۱۰ میلیمتر بوده و در ۸ مرحله به عمق ۴ میلیمتر می رسد استفاده شده است.

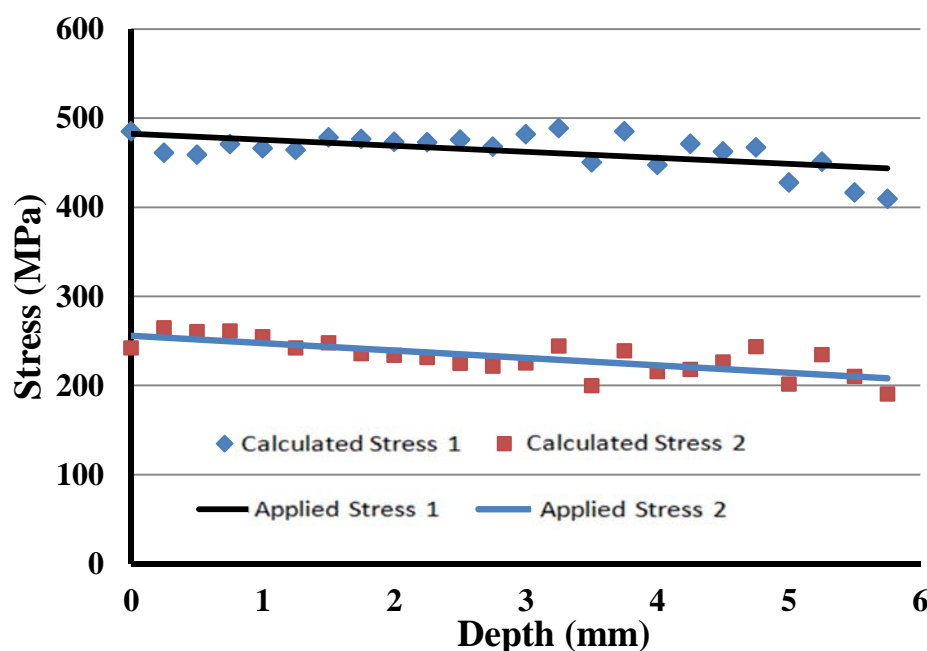
جدول ۱- نمونه ای از ضرایب  $\bar{A}$  برای حالت تنش غیریکنواخت

-5.98E-03	0	0	0	0	0	0	0
-9.93E-03	-7.52E-03	0	0	0	0	0	0
-1.34E-02	-1.16E-02	-8.58E-03	0	0	0	0	0
-1.66E-02	-1.48E-02	-1.27E-02	-9.28E-03	0	0	0	0
-1.95E-02	-1.78E-02	-1.58E-02	-1.35E-02	-9.68E-03	0	0	0
-2.22E-02	-2.05E-02	-1.87E-02	-1.65E-02	-1.39E-02	-9.84E-03	0	0
-2.46E-02	-2.29E-02	-2.11E-02	-1.91E-02	-1.68E-02	-1.40E-02	-9.80E-03	0
-2.68E-02	-2.51E-02	-2.33E-02	-2.14E-02	-1.92E-02	-1.67E-02	-1.38E-02	-9.58E-03

جدول ۲- نمونه ای از ضرایب  $\bar{B}$  برای حالت تنش غیریکنواخت

-5.66E-03	0	0	0	0	0	0	0
-9.58E-03	-7.30E-03	0	0	0	0	0	0
-1.30E-02	-1.14E-02	-8.50E-03	0	0	0	0	0
-1.62E-02	-1.46E-02	-1.27E-02	-9.39E-03	0	0	0	0
-1.93E-02	-1.77E-02	-1.59E-02	-1.38E-02	-1.00E-02	0	0	0
-2.21E-02	-2.06E-02	-1.89E-02	-1.70E-02	-1.45E-02	-1.05E-02	0	0
-2.48E-02	-2.32E-02	-2.17E-02	-1.99E-02	-1.77E-02	-1.50E-02	-1.07E-02	0
-2.72E-02	-2.57E-02	-2.42E-02	-2.25E-02	-2.05E-02	-1.81E-02	-1.53E-02	-1.08E-02

شکل (۱۳) نتایج بدست آمده در محاسبه و اندازه گیری تنش های برای یک میدان تنش متغیر و دو بعدی را در ۲۵ گام ایجاد شیار حلقوی نشان می دهد. در این اندازه گیری برای شبیه سازی حضور تنش های پسماند غیر یکنواخت با توجه به رفتار الاستیک خطی در نظر گرفته شده از اثر بارگذاری غیر یکنواخت خارجی استفاده شده است. به این منظور بر سطوح خارجی مدل المان محدود، بار متغیر به صورت خطی از صفر تا ۵۰۰ مگا پاسکال در یک بعد و از صفر تا ۲۵۰ مگاپاسکال در بعد دیگر بر نمونه وارد شده است.



شکل ۱۳- مقایسه نتایج محاسبه تنش با مقادیر اعمال شده برای بارگذاری دو بعدی غیر یکنواخت

برای نمونه بارگذاری شده ایجاد رینگ در گام های مختلف شبیه سازی شده و در هر گام تغییرات کرنش ایجاد شده محاسبه شده است. با استفاده از ضرایب ثابت و کرنش های ثبت شده تنش های وارد بر مدل محاسبه شده و با بار اعمالی مقایسه شده است. با مقایسه ی نتایج محاسبه تنش با استفاده از روش ارائه شده در این تحقیق با مقادیر تنش اعمال شده ملاحظه می گردد تفاوت نتایج اندازه گیری شرح داده شده با مقادیر اعمال شده کمتر از ۵٪ مقادیر تنش موجود و قابل قبول میباشد. هرچند خطای موجود بدلیل عدم دقت و مشکلات حل عددی میباشد ولی بررسی بیشتر نشان میدهد دقت اندازه گیری در این تکنیک وابسته به رفتار مواد، دقت اندازه گیری کرنش در حین ایجاد شیار و دقت ابعادی شیار ایجاد شده میباشد. هرگونه انحراف از رفتار الاستیک خطی برای مواد موجب ایجاد مقادیر بزرگتر کرنش سطحی و خطای در نتایج خواهد بود.

## ۵- نتیجه گیری

اندازه گیری تنش های پسماند در ضخامت در آنالیز ایمنی و بررسی یکپارچگی سازه های تحت بار دارای اهمیت می باشد. تنش های پسماند غیریکنواخت در برخی فرآیندهای ایجاد شده و رفتار قطعات بویژه عمر خستگی آن را تحت تاثیر قرار میدهد.

با استفاده از روش معرفی شده در این مقاله میتوان در مورد قطعات دارای تنش های پسماند یکنواخت و غیر یکنواخت و نیز در مورد قطعاتی که خواص مواد در راستای ضخامت متغیر میباشد اقدام به اندازه گیری تنش پسماند نمود. در هر مورد، ابتدا با ایجاد شیار حلقوی (رینگ) تغییرات کرنش ناشی از ایجاد شیار در هر گام از ضخامت بدست می آید. سپس ضرایب ثابت مربوطه برای هندسه شیار ایجاد شده با استفاده از آنالیز المان محدود محاسبه شده و تنش های پسماند با استفاده از روابط استخراج شده تعیین میگردد.



با توجه به نتایج بدست آمده ملاحظه می‌گردد روش معرفی شده در این مقاله برای اندازه گیری و محاسبه تنش های پسماند یکنواخت و غیریکنواخت متغیر در ضخامت در مواد با رفتار الاستیک خطی قابل استفاده بوده و دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. کاهش خطای احتمالی و نیز تشخیص و اصلاح خطای اندازه گیری ایجاد شده از موضوعات قابل بررسی در این رابطه می‌باشد.

## مراجع

- [1] محرمی، رسول. ستاری فر، ایرج. " تحلیل تنش های پسماند غیر یکنواخت در سازه های مهندسی "، نشریه ی پژوهشی مهندسی مکانیک ایران، سال دهم، شماره ی اول، (۱۳۸۷).
- [2] Keil, S., "On-line Evaluation of Measurement Results during the Determination of Residual Stress using Strain Gages", RAM, Vol. 9, No. 1, pp. 15-20, (1995).
- [3] Schajer, G. S., and Altus, E., "Stress Calculation Error Analysis for Incremental Hole-Drilling Residual Stress Measurement", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 118, No. 4, pp. 338-343, (1996).
- [4] Moharrami, R. and Sattari far, I., "Experimental and Numerical Study of Measuring High Welding Residual Stresses by using the Blind Hole Drilling Technique", Journal of Strain Analysis, Vol. 43, No. 3, pp. 141-148, (2007).
- [5] "Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method", ASTM Standard, E 837, (2008).
- [6] Beghini, M., Bertini, L., Mori, L. F. and Rosellini, W. "Genetic Algorithm Optimization of the Hole-Drilling Method for Non-uniform Residual Stress Fields", Journal of Strain Analysis Vol. 44, No. 1, pp. 105-115, (2009).
- [7] "Incremental Ring-Core Determination of the Principal Residual Stress in a Duplex Stainless Steel Centrifuge", Lambda Research, Spring, No. 35, (2009).

## فهرست نمادهای انگلیسی

**A** و **B**: ضرایب ثابت برای حالت شیار سراسری

$\bar{A}$  و  $\bar{B}$ : ضرایب ثابت برای حالت شیار ناقص

$a_{ni}$ : مولفه های ماتریس ضرایب a برای گام i ام از شیار ایجاد شده در n گام.

$b_{ni}$ : مولفه های ماتریس ضرایب b برای گام i ام از شیار ایجاد شده در n گام.

a, b و c: راستاهای ۰، ۴۵ و ۹۰ درجه قرارگیری کرنش سنج ها

$D_1$ : قطر داخلی رینگ

$D_0$ : قطر خارجی رینگ

- E:** مدول الاستیسیته  
**H:** عمق رینگ در حالت یکنواخت  
**P:** ماتریس تنش هیدرواستاتیک  
**p:** ماتریس کرنش هیدرواستاتیک  
**Q:** ماتریس تنش برشی  
**q:** ماتریس کرنش خالص  
**z:** گام پیشروی در حالت غیریکنواخت

### نمادهای یونانی

- $\sigma$ : تنش  
 $\tau$ : تنش برشی  
 $\alpha$ : زاویه ی بین تنش ماکزیمم و کرنش سنج a  
 $\epsilon$ : کرنش  
 $\nu$ : نسبت پواسون

### زیرنویس ها

- after*: حالت بعد از سوراخکاری  
*before*: حالت قبل از سوراخکاری  
*r*: راستای شعاعی  
 $\theta$ : راستای زاویه ای  
 $r\theta$ : راستای تنش برشی  
*i*: شماره ی مرحله ی بارگذاری  
*n*: شماره ی مرحله ی براده برداری  
*t*: نشان دهنده حالت کششی

**Abstract**

Non-uniform residual stresses arise from most mechanical or thermal operations, performed in processing engineering materials, like welding and machining. They may enhance occurrence of brittle fracture, fatigue, structural buckling and stress-cracking-corrosion. Therefore, estimation of their magnitude and distribution are of great importance in integrity assessments of load bearing structures. The ring core method is one of the mechanical semi-destructive methods used for this purpose.

In this paper, the capability of the ring core method in evaluation of non-uniform stresses is studied by using Integral technique. Here a linear elastic material is considered and basic hypothesis and relation of the method are derived. Also, the method and techniques for calculation of the coefficients, using by the integral method, were presented.