

تحلیل تنش پادصفحه‌ای باریکه از جنس ماده هدفمند حاوی چندین ترک و حفره

با استفاده از حل نابجایی پادصفحه‌ای در باریکه از جنس ماده هدفمند، معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی برای باریکه تضعیف شده بوسیله تعدادی ترک هموار و حفره تحت تغییرشکل پادصفحه‌ای ارائه شده است. این معادلات انتگرالی تکین با روش عددی مناسب برای تکینگی‌های متفاوت حل می‌شوند. همچنین میدان تنش در اثر نیروی متمرکز متعادل بر روی مرز باریکه بدست آمده است. چند مثال عددی برای نشان دادن صحت و قابلیت روش حل شده و ضرایب شدت تنش و مقدار تنش محیطی برای حفره‌ها محاسبه شده است که در اثر ازدیاد پارامتر مدول برشی ماده هدفمند ضریب شدت تنش و تنش محیطی افزایش می‌یابد.

علیرضا فتوحی^۱
استادیار

واژه‌های راهنما: باریکه، ماده هدفمند، ترک، حفره، ضریب شدت تنش، تنش محیطی، بارگذاری متمرکز

۱- مقدمه

ابداع مواد با تغییرات پیوسته خواص مکانیکی که با نام مواد هدفمند^۲ شناخته می‌شوند و کاربرد گسترده آنها در صنعت باعث انجام تحقیقات در مورد آنها شده است. با کنترل نمودن تغییرات نسبت ماده در هنگام فرایند تولید قطعات مکانیکی ساخته شده از ماده هدفمند می‌توان به خواص ترمومکانیکی مورد نظر رسید. با توجه به نیاز شدید به موادی که از نظر ساختاری خواص حرارتی و خواص مقاومتی همزمان با هم داشته باشند یعنی در محیط‌های کار با حرارت بالا لازم است که ماده مقاومت در برابر حرارت و خوردگی بالا داشته باشد و همچنین نیاز است که چقرمگی و ضریب هدایت حرارتی مناسب هم داشته باشد. سرامیک‌ها رفتار خوبی در مقابل حرارت دارند ولی استحکام و مقاومت کمی دارند در نتیجه بهتر است ماده‌ای داشته باشیم ترکیب با مواد سرامیک باشد بنابراین مفهوم ماده هدفمند به عنوان یک انتخاب برای جایگزین پوشش‌های سرامیکی محافظ حرارتی اولین بار توسط نینو و مائدا [۱] ارائه شد. ماده هدفمند اساساً از نوع مواد مرکب دو فازی ساخته می‌شود بگونه‌ای که درصد حجمی مواد سازنده آن به صورت پیوسته در جهت

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد afotuhi@yazduni.ac.ir

^۲ Functionally Graded Materials

ضخامت تغییر می کند تا پروفیل ترکیبی از پیش تعیین شده حاصل شود. پروفیل تغییرات درصد حجمی از صفر درصد سرامیک در مرز مشترک تا صد در صد در سطح و یا برعکس بیان می شود تا ماده غیرهمگن بدست آمده دارای خواص ترمومکانیکی دلخواه باشد.

کار تحلیلی بر روی ماده هدفمند حدوداً به دهه (۱۹۶۰) بر می گردد. هنگامی که گیسون [۲] خاک را به صورت یک ماده غیرهمگن مدل نمود. حل بعضی از مسائل مقدار مرزی الاستیسیته را برای محیط های ایزوتروپیک غیرهمگن می توان در کتاب کثیر و سیه [۳] و همچنین درمقاله کثیر [۴] یافت. در سال های اخیر چندین مسأله مکانیک شکست در مواد هدفمند تحت تغییرشکل درون صفحه ای و پادصفحه ای حل گردیده است. مرور کوتاهی از کارهای مربوط به ترک تحت بارگذاری پادصفحه ای در زیر آورده شده است.

معادلات تعادل برای ماده الاستیک ایزوتروپیک غیرهمگن تحت بارگذاری پادصفحه ای در سیستم مختصات کارتزین و قطبی توسط دالیوال و سینج [۵، ۶] ارائه شد. آنها فرض نمودند که مدول برشی در دو جهت مختصات تغییر می کند و مسئله ترک حالت مود سوم در محیط بی نهایت را حل نمودند. اردوان [۷] مسأله ترک عمود بر فصل مشترک دو نیم صفحه به هم چسبیده از دو جنس متفاوت ماده هدفمند را حل نمود. مسأله مود سوم مکانیک شکست برای دو نیم صفحه غیرهمگن متفاوت متصل به هم که ترک در فصل مشترک قرار دارد توسط دلال [۸] حل شده است او فرض نمود که مدول برشی به صورت نمایی در دو بعد صفحه تغییر می کند. دو نیم صفحه به هم چسبیده ایزوتروپیک با ناحیه فصل مشترک غیرهموژن تضعیف شده توسط یک ترک در هر ناحیه که ترک ها عمود بر راستای فصل مشترک هستند توسط اردوان و همکارانش [۹] بررسی شده است. اردوان و ازتورک [۱۰] پوشش از جنس ماده هدفمند متصل به یک نیم صفحه الاستیک همگن حاوی ترک های تناوبی عمود بر مرز در پوشش و تحت بارگذاری پادصفحه ای حل نمودند و ضرایب شدت تنش مود سه برای ترک ها بدست آوردند. بررسی تکینگی نوک ترک و مفاهیم اولیه مکانیک شکست برای ماده هدفمند توسط اردوان [۱۱، ۱۲] ارائه شده است. سویو و همکارانش [۱۳] تک لایه غیرهمگن بین دو نیم صفحه متفاوت حاوی ترکی موازی فصل مشترک تحت مود سه را حل نمودند آنها مدول برشی لایه غیرهمگن را به فرم تابع توانی خاص فرض نمودند. مسأله صفحه بی نهایت ایزوتروپیک غیرهمگن حاوی چندین ترک با استفاده از روش معادلات انتگرالی مرزی با تکینگی مرتبه بالا توسط انگ و همکارانش [۱۴] بیان شده است. کاربرد معادلات انتگرالی تکین مرتبه بالا در مسائل ترک در محیط غیرهمگن توسط چان و همکاران [۱۵] مطالعه شده است. هوآنگ و همکاران [۱۶] پوشش روی یک نیم صفحه از جنس ماده هدفمند را مورد بررسی قرار دادند. ناحیه پوشش شامل یک ترک موازی مرز است و به لایه هایی با خواص مواد متغیر به صورت خطی تقسیم شده است. مسأله دو نیم صفحه متصل به یک باریکه از جنس ماده هدفمند تحت بارگذاری پادصفحه ای و حاوی یک ترک با راستای دلخواه نسبت به خط عمود بر فصل مشترک ماده ها در قسمت نیم صفحه توسط چانگ و همکارانش [۱۷] بیان شد. تحلیل تنش در یک باریکه غیرهمگن حاوی ترک تحت مود سوم احاطه شده توسط دو نیم صفحه الاستیک با مواد مختلف توسط ونگ و همکارانش [۱۸] ارائه شد. خواص ماده هدفمند به صورت تابع دلخواهی که پیوستگی خواص را حفظ کند بیان شده است باریکه را به صورت تعداد معینی زیر لایه که خواص آن به صورت خطی تغییر می کند تقسیم نمودند. ضریب شدت تنش در یک باریکه هدفمند شامل ترک موازی با لبه توسط ونگ و

همکارانش [۱۹] بدست آمده است تحلیل تنش در باریکه از جنس ماده هدفمند حاوی چندین ترک با استفاده از روش توزیع نابجایی توسط فتوحی و فریبرز [۲۰] حل شده است. یانگ و زو [۲۱]، دو باریکه متفاوت متصل به هم از جنس ماده هدفمند و حاوی ترکی عمود بر مرز تحت بارگذاری پادصفحه ای را با استفاده از تبدیل فوریه و بدست آوردن معادلات انتگرالی تکین حل نمودند. دو باریکه همگن متفاوت متصل به باریکه ای از جنس ماده هدفمند و یکی از باریکه های همگن حاوی ترک لبه ای با راستای دلخواه تحت مود سه با استفاده از روش تبدیل فوریه و تبدیل به معادله انتگرالی تکین توسط چوی [۲۲] حل شده است. نیم صفحه پوششدار از جنس ماده هدفمند تحت بارگذاری پادصفحه ای حاوی یک ترک داخلی و یک ترک لبه ای با استفاده از روش توزیع نابجایی توسط ما و وو [۲۳] بیان شده است. باریکه از جنس ماده هدفمند متصل به نیم صفحه از جنس ماده هدفمند و حاوی ترکی موازی مرز باریکه توسط لی و همکارانش [۲۴] حل شده است. آنها مدول برشی را در باریکه به صورت تابع نمایی و برای نیم صفحه خطی فرض نمودند. دو باریکه از جنس ماده هدفمند متصل به هم حاوی یک ترک در هر لایه عمود بر مرز و در یک راستا تحت تنش پادصفحه ای توسط چن و چو [۲۵] بیان شده است و ضرایب شدت تنش را بدست آوردند. مسأله چندین ترک موازی با طول محدود در صفحه از جنس ماده هدفمند تحت مود سوم با استفاده از روش اشمیت^۱ توسط یانگ [۲۶] مطالعه شده است. چن و همکارانش [۲۷] باریکه حاوی چندین ترک همراستا روی خط مرکزی با روش توزیع نابجایی حل نمودند. آنها شرایط مرزی عاری از تنش در یک لبه و لبه گیردار در نظر گرفتند.

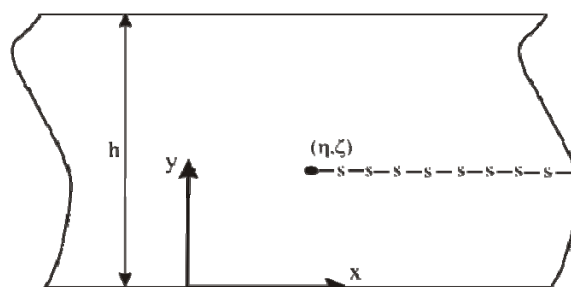
در مقاله حاضر از روش توزیع نابجایی [۲۸، ۲۹] برای تحلیل ترک‌های منحنی شکل و حفره ها در باریکه هدفمند تحت بارگذاری پادصفحه ای استفاده شده است که نسبت به مقاله [۲۰] ترک های لبه ای و حفره ها هم لحاظ شده است و همچنین تحت بارگذاری متمرکز بر روی مرزهای باریکه می باشد. تکنیک بر پایه حل نابجایی پادصفحه ای در باریکه است که با استفاده از حل نابجایی ارائه شده در مقاله [۲۰]، معادلات انتگرالی تکین برای محاسبه دانسیته نابجایی روی سطوح چندین ترک و حفره بدست آمده است و معادلات حاصل به صورت عددی با روش ارائه شده در [۳۰] حل می شود و از نتایج بدست آمده برای تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک‌ها با جهت و موقعیت دلخواه و تنش محیطی پیرامون حفره ها استفاده خواهد شد.

۲- باریکه با نابجایی پادصفحه ای

باریکه ای به ضخامت h ساخته شده از ماده هدفمند را در نظر بگیرید که مدول برشی μ به طور پیوسته در جهت ضخامت تغییر می کند (شکل (۱)). با فرض تغییر شکل پادصفحه ای تنها مؤلفه غیر صفر بردار تغییر مکان، تغییر مکان عمود بر صفحه $w(x, y)$ است و روابط ساختاری آن به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \mu(y) \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= \mu(y) \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1)$$

¹ Schmidt



شکل ۱- باریکه حاوی نایجایی پادصفحه‌ای [۲۰]

با استفاده از معادله (۱) معادله تعادل بر حسب تغییرمکان به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۲)$$

معادله (۲) را به کمک تبدیل فوریه زیر می‌توان حل نمود.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \quad (۳)$$

که $i = \sqrt{-1}$ است. معکوس تبدیل فوریه (۳) به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{isx} ds \quad (۴)$$

با اعمال تبدیل (۳) به معادله (۲) و با استفاده از انتگرالگیری جزءبه‌جزء و فرض صفر شدن تغییرمکان و مؤلفه‌های تنش وقتی $|x| \rightarrow \infty$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} \frac{dW}{dy} - s^2 W = 0 \quad (۵)$$

در معادله (۵) تابع $W(s, y)$ تبدیل فوریه تغییرمکان می‌باشد. برای ساده‌شدن در حل معادله دیفرانسیل بالا مدول برشی ماده هدفمند به صورت نمایی زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mu(y) = \mu_0 e^{2\lambda y} \quad (۶)$$

که μ_0 و λ ثابت‌های ماده می‌باشند. حل نایجایی پادصفحه‌ای مورد نظر به دو صورت سری و انتگرالی در زیر آورده می‌شود. [۲۰]

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \operatorname{sgn}(x - \eta) \frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi(y-\zeta)}{h}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(y+\zeta)}{h}\right) \right] e^{-|x-\eta| \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \lambda^2}} \\ \tau_{xz} &= \frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \lambda^2}} \left\{ -\frac{n\pi}{h} \left[\sin\left(\frac{n\pi(y-\zeta)}{h}\right) - \sin\left(\frac{n\pi(y+\zeta)}{h}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[\cos\left(\frac{n\pi(y-\zeta)}{h}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(y+\zeta)}{h}\right) \right] \right\} e^{-|x-\eta| \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \lambda^2}} \end{aligned} \quad (۷)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{در معادله فوق}$$

مختصات موقعیت نوک نابجایی است. (η, ζ)

سری (۷) برای مقادیر کوچک $|x - \eta|$ به کندی همگرا می شود و نیاز به تعداد زیاد جمله خواهد بود تا بتوان نتایج دقیق بدست آورد. برای حل این مشکل فرم انتگرالی حل نابجایی به صورت زیر ارائه شده است [۲۰].

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2\pi} \left[\frac{x-\eta}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \left[\frac{2 \sinh(\beta y) \sinh(\beta(h-\zeta))}{\beta \sinh(\beta h)} s - e^{s(y-\zeta)} \right] \sin(s(x-\eta)) ds \right], \quad 0 \leq y \leq \zeta \\ \tau_{yz} &= \frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2\pi} \left[\frac{x-\eta}{r^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \left[\frac{2 \sinh(\beta(y-h)) \sinh(\beta\zeta)}{\beta \sinh(\beta h)} s + e^{-s(y-\zeta)} \right] \sin(s(x-\eta)) ds \right], \quad \zeta \leq y \leq h \\ \tau_{xz} &= \frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2\pi} \left[-\frac{y-\zeta}{r^2} + \int_0^\infty \left[\frac{2 \cosh(\beta y) \sinh(\beta(h-\zeta))}{\sinh(\beta h)} - e^{s(y-\zeta)} \right] \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda \int_0^M \frac{\sinh(\beta y) \sinh(\beta(h-\zeta))}{\beta \sinh(\beta h)} \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_M^\infty \left[\frac{2 \sinh(\beta y) \sinh(\beta(h-\zeta))}{\beta \sinh(\beta h)} - \frac{1}{s} e^{s(y-\zeta)} \right] \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_M^\infty \frac{1}{s} e^{s(y-\zeta)} \cos(s(x-\eta)) ds \right], \quad 0 \leq y \leq \zeta \\ \tau_{xz} &= -\frac{b_z \mu_0 e^{\lambda(y+\zeta)}}{2\pi} \left[\frac{y-\zeta}{r^2} + \int_0^\infty \left[\frac{2 \cosh(\beta(y-h)) \sinh(\beta\zeta)}{\sinh(\beta h)} - e^{-s(y-\zeta)} \right] \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda \int_0^M \frac{\sinh(\beta(y-h)) \sinh(\beta\zeta)}{\beta \sinh(\beta h)} \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_M^\infty \left[\frac{2 \sinh(\beta(y-h)) \sinh(\beta\zeta)}{\beta \sinh(\beta h)} + \frac{1}{s} e^{-s(y-\zeta)} \right] \cos(s(x-\eta)) ds \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_M^\infty \frac{1}{s} e^{-s(y-\zeta)} \cos(s(x-\eta)) ds \right], \quad \zeta \leq y \leq h \end{aligned} \quad (۸)$$

در روابط بالا $r^2 = (x - \eta)^2 + (y - \zeta)^2$ فاصله از موقعیت نابجایی است و $M > 0$ ثابت دلخواه است که به گونه ای انتخاب می شود تا باعث ایجاد مشکلات در محاسبات عددی نشود. آخرین ترم در مؤلفه تنش τ_{xz} تابع انتگرال نمایی (Ei) است که به صورت زیر تعریف می شود [۳۱].

$$\int_M^{\infty} \frac{\cos[s(x-\eta)]}{s} e^{-s(y-\zeta)} ds = -\operatorname{Re} \left[\operatorname{Ei} \left[-(y-\zeta) + i(x-\eta) \right] M \right] \quad (9)$$

$$= -\gamma_0 - \log(M) - \log(r) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} \frac{(-1)^j M^k (y-\zeta)^{k-2j} (x-\eta)^{2j}}{k(2j)!(k-2j)!}, \quad y \geq \zeta$$

در معادله (۹) ثابت اویلر است. $\operatorname{Re}[z]$ نمایشگر قسمت حقیقی z است و $\left[\frac{k}{2} \right]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{k}{2}$ است. برای همگرایی سریعتر، مقدار M کوچکتر از واحد انتخاب می‌شود. معادلات (۸) مشخص می‌کند که میدان تنش در محل نابجایی به صورت تکنیکی کوشی و همچنین لگاریتمی است. همچنین انتگرال در (۸) هنگامی که $s \rightarrow \infty$ خیلی سریع کاهش می‌یابد که در نتیجه برای انتگرال گیری عددی مناسب می‌باشد.

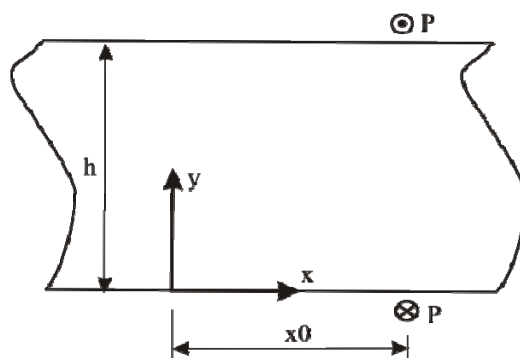
۳- حل نیروی متمرکز پادصفحه‌ای بر روی مرزهای باریکه

در این بخش میدان تنش در اثر بارگذاری متمرکز در روی مرزهای بالایی و پایینی باریکه از جنس ماده هدفمند بدست می‌آید. شرایط مرزی مسأله عبارتند از:

$$\tau_{yz}(x,0) = \tau_{yz}(x,h) = P\delta(x-x_0) \quad (10)$$

که $\delta(x)$ تابع ضربه دیراک است. با جایگزینی رابطه (۶) در (۵)، حل معادله (۵) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$W(s,y) = A(s)e^{(\beta-\lambda)y} + B(s)e^{-(\beta+\lambda)y} \quad (11)$$



شکل ۲- نمایش باریکه با بارگذاری نقطه ای روی لبه بالایی و پایینی باریکه

که $\beta = \sqrt{\lambda^2 + s^2}$ بوده و $A(s)$ و $B(s)$ مجهول می‌باشند. با اعمال تبدیل فوریه به رابطه (۱۰) و (۱) ضرایب مجهول بدست می‌آیند و سپس با جایگزین نمودن ضرایب در (۱۱) و اعمال معکوس تبدیل فوریه (رابطه (۴)) میدان تغییرمکان در باریکه در اثر نیروی متمرکز عبارت خواهد شد

$$w(x, y) = \frac{Pe^{-\lambda(y+h)}}{2\pi\mu_0} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \cosh(\beta y) + \lambda \sinh(\beta y) - e^{\lambda h} (\beta \cosh(\beta(y-h)) + \lambda \sinh(\beta(y-h)))}{s^2 \sinh(\beta h)} e^{is(x-x_0)} ds \quad (12)$$

مؤلفه‌های تنش با استفاده از (۱) و (۱۲) قابل محاسبه است. با دو قسمت نمودن بازه انتگرالگیری و با لحاظ نمودن ترم‌های زوج و فرد نسبت به پارامتر s می‌توان میدان تنش را به صورت زیر نوشت.

$$\tau_{xz}(x, y) = -\frac{Pe^{\lambda(y-h)}}{\pi} \times \int_0^{\infty} \frac{\beta \cosh(\beta y) + \lambda \sinh(\beta y) - e^{\lambda h} (\beta \cosh(\beta(y-h)) + \lambda \sinh(\beta(y-h)))}{s \sinh(\beta h)} \sin(s(x-x_0)) ds$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{Pe^{\lambda(y-h)}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\beta y) - e^{\lambda h} \sinh(\beta(y-h))}{\sinh(\beta h)} \cos(s(x-x_0)) ds \quad (13)$$

با کمک روابط زیر [۳۱]

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \sin(sx) ds = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \cos(sx) ds = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad y > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-sy}}{s} \sin(sx) ds = \tan^{-1} \frac{x}{y}, \quad y > 0 \quad (14)$$

معادلات (۱۳) را می‌توان به فرم مناسبتری نوشت تا رفتار تکینگی را نشان دهد که بصورت زیر است.

$$\tau_{xz}(x, y) = -\frac{Pe^{\lambda(y-h)}}{\pi} \times \left\{ \frac{x-x_0}{r_1^2} - e^{\lambda h} \frac{x-x_0}{r_2^2} + \lambda \tan^{-1} \frac{x-x_0}{h-y} - \lambda e^{\lambda h} \tan^{-1} \frac{x-x_0}{y} + \int_0^{\infty} \left[\frac{\beta \cosh(\beta y) + \lambda \sinh(\beta y) - e^{\lambda h} (\beta \cosh(\beta(y-h)) + \lambda \sinh(\beta(y-h)))}{s \sinh(\beta h)} - e^{s(y-h)} + e^{\lambda h - sy} - \lambda \frac{e^{s(y-h)}}{s} + \lambda \frac{e^{\lambda h - sy}}{s} \right] \sin(s(x-x_0)) ds \right\}$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{Pe^{\lambda(y-h)}}{\pi} \left\{ \frac{h-y}{r_1^2} - e^{\lambda h} \frac{y}{r_2^2} + \int_0^\infty \left[\frac{\sinh(\beta y) - e^{\lambda h} \sinh(\beta(y-h))}{\sinh(\beta h)} - e^{s(y-h)} + e^{\lambda h - sy} \right] \cos(s(x-x_0)) ds \right\} \quad (15)$$

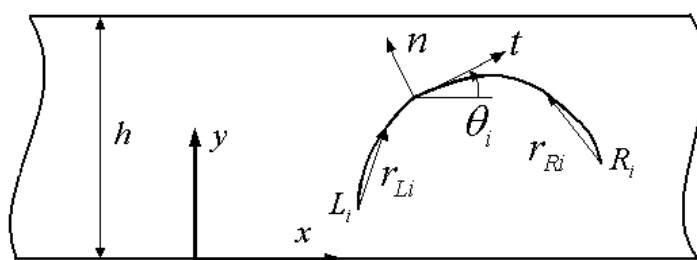
در روابط بالا $r_1^2 = (x-x_0)^2 + y^2$ و $r_2^2 = (x-x_0)^2 + (y-h)^2$

۴- معادلات انتگرالی مسأله باریکه حاوی ترک و حفره

در بخش قبل حل نابجایی از [۲۰] ارائه گردید که می‌تواند برای تحلیل باریکه با چندین ترک و حفره دلخواه به کار رود. میدان تنش در اثر نابجایی پادصفحه‌ای در موقعیت (η, ζ) با راستای خط نابجایی موازی با محور X به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\tau_{jz}(x, y) = b_z \times \begin{cases} k_{jz}^1(x, y, \eta, \zeta), & 0 \leq y \leq \zeta \\ k_{jz}^2(x, y, \eta, \zeta), & \zeta \leq y \leq h \end{cases} \quad j = x, y \quad (16)$$

که $k_{jz}^l(x, y, \eta, \zeta)$, $l=1,2$, $j=x,y$ ضرایب b_z است که از روابط (۷) و (۸) برای دو نوع فرمولاسیون متفاوت بدست می‌آید. لازم بذکر است که در رابطه (۱۶) هنگامی که خط وصل کننده نقاط (x, y) و (η, ζ) زاویه کوچکی ($\leq 1^\circ$) با خط مرکزی باریکه بسازد از حل سری برای نابجایی پادصفحه‌ای استفاده می‌شود در غیر این صورت روش انتگرالگیری عددی به کار می‌رود [۲۰].



شکل ۳- نمایش ترسیمی ترک منحنی

تعداد N_1 ترک احاطه شده (شکل ۳)، N_2 ترک لبه ای و N_3 حفره در باریکه در نظر گرفته می‌شود که $N=N_1+N_2+N_3$. ترک لبه ای حالت خاصی از ترک احاطه شده است که یکی از نوک های ترک مرز بالایی یا پایینی باریکه را قطع می‌کند و در نتیجه این نوک تکینگی تنش ندارد و همچنین حفره به صورت یک ترک بسته مدل می‌شود که هیچکدام از نوک ها تکینگی نخواهد داشت. معادله ترک منحنی شکل یا حفره در مختصات x, y را میتوان به صورت پارامتری در زیر بیان نمود :

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i(s) \\ y_i &= \beta_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad -1 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

محور مختصات عمود بر هم و متحرک t و n را در نظر بگیرید که مبدأ آن روی ترک قرار دارد به گونه‌ای که محور t همواره بر سطح ترک مماس است. بردار تنش روی لبه ترک یا حفره i -ام بر حسب مؤلفه‌های تنش در مختصات کارتزین به صورت زیر است.

$$\tau_{nz}(x_i, y_i) = \tau_{yz} \cos(\theta_i) - \tau_{xz} \sin(\theta_i) \quad (18)$$

که $\theta_i = \tan^{-1}(\beta'_i(s)/\alpha'_i(s))$ زاویه بین محورهای x و t بوده و عمل مشتقگیری نسبت به آرگومان انجام می‌شود. نابجایی پادصفحه‌ای با دانسیته مجهول $B_{zj}(t)$ را در نظر بگیرید که بر روی المان بی‌نهایت کوچک $\sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} dt$ بر روی سطح ترک یا حفره j -ام توزیع شده است پارامتر $-1 \leq t \leq 1$ است. بردار تنش روی سطح ترک یا حفره i -ام در اثر توزیع نابجایی پادصفحه‌ای ذکر شده در بالا روی کلیه N ترک و حفره به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tau_{nz}(\alpha_i(s), \beta_i(s)) &= \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}(s, t) \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} B_{zj}(t) dt, \\ &-1 \leq s \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (19)$$

که

$$K_{ij}(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i'^2 + \beta_i'^2}} \begin{cases} -k_{xz}^1(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \beta_i' + k_{yz}^1(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \alpha_i', & 0 \leq \beta_i \leq \beta_j \\ -k_{xz}^2(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \beta_i' + k_{yz}^2(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \alpha_i', & \beta_j \leq \beta_i \leq h \end{cases} \quad (20)$$

توابع $k_{jz}^l(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j)$, $l = 1, 2$, $j = x, y$ در (۱۶) معرفی شده‌اند. در اینجا باید اشاره نمود که در رابطه (۲۰) کمیت‌های با اندیس i تابعی از s هستند در حالی که کمیت‌ها با اندیس j تابعی از t می‌باشند. کرنل معادلات (۱۹) هنگامی که $r \rightarrow 0$ تکین خواهد بود که

$r = \sqrt{(\alpha_i(s) - \alpha_j(t))^2 + (\beta_i(s) - \beta_j(t))^2}$ است. بنابر آنچه در قبل بیان شد نوع تکینگی میدان تنش برای نابجایی هنگامی که $r \rightarrow 0$ از نوع کوشی می‌باشد. در نتیجه معادلات (۱۹) معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی نسبت به توزیع نابجایی هستند. با استفاده از اصل باکتر [۲۸, ۲۹] ابتدا مسئله الاستیسیته باریکه بدون ترک و حفره تحت بارگذاری خارجی باید حل گردد تا بردار تنش روی سطح ترک‌ها با تغییر دادن علامت آنها بدست آید. بنابراین سمت چپ معادله (۱۹) برای بار متمرکز (۱۵) با استفاده از (۱۸) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{nz}(\alpha_i(s), \beta_i(s)) = -\frac{Pe^{\lambda(y-h)}}{\pi\sqrt{\alpha_i'^2(s) + \beta_i'^2(s)}} \left[\left\{ \frac{h - \beta_i(s)}{r_1^2} - e^{\lambda h} \frac{\beta_i(s)}{r_2^2} + \int_0^\infty \left[\frac{\sinh(\beta\beta_i(s)) - e^{\lambda h} \sinh(\beta(\beta_i(s) - h))}{\sinh(\beta h)} - e^{s(\beta_i(s) - h)} + e^{\lambda h - s\beta_i(s)} \right] \cos(s(\alpha_i(s) - x_0)) ds \right\} \alpha_i'(s) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\alpha_i(s) - x_0}{r_1^2} - e^{\lambda h} \frac{\alpha_i(s) - x_0}{r_2^2} + \lambda \tan^{-1} \frac{\alpha_i(s) - x_0}{h - \beta_i(s)} - \lambda e^{\lambda h} \tan^{-1} \frac{\alpha_i(s) - x_0}{\beta_i(s)} + \int_0^\infty \left[\frac{\beta \cosh(\beta\beta_i(s)) + \lambda \sinh(\beta\beta_i(s)) - e^{\lambda h} (\beta \cosh(\beta(\beta_i(s) - h)) + \lambda \sinh(\beta(\beta_i(s) - h)))}{s \sinh(\beta h)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. e^{s(\beta_i(s) - h)} + e^{\lambda h - s\beta_i(s)} - \lambda \frac{e^{s(\beta_i(s) - h)}}{s} + \lambda \frac{e^{\lambda h - s\beta_i(s)}}{s} \right] \sin(s(\alpha_i(s) - x_0)) ds \right\} \beta_i'(s) \right] \quad (21)$$

در روابط بالا $r_1^2 = (\alpha_i(s) - x_0)^2 + (\beta_i(s) - h)^2$ و $r_2^2 = (\alpha_i(s) - x_0)^2 + \beta_i(s)^2$ با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی رابطه بازشدگی دهانه ترک در طول ترک j -ام به صورت زیر بیان می‌شود

$$w_j^-(s) - w_j^+(s) = \int_{-1}^s \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} B_{zj}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

میدان تغییرمکان در خارج از سطوح ترک های احاطه شده تکمقداری است. بنابراین توزیع نابجایی منتهی به معادله زیر می‌شود.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} B_{zj}(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_1 \quad (23)$$

برای بررسی حفره ها، آنها را به عنوان ترکهای فرضی خاص که در آنها تنشها دیگر در نوک ترکها تکین نبوده در نظر گرفته می‌شود و ترک فرضی از نقطه دلخواهی از مرز حفره شروع شده و دوباره به آن نقطه ختم می‌گردد. با توجه به رابطه (۲۵) پیوستگی تغییرمکان بر روی مرز حفره ایجاب می‌کند که رابطه زیر برقرار باشد

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} B_{zj}(t) dt = 0, \quad j = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, \dots, N \quad (24)$$

روابط بالا به معادلات انتگرالی بدست آمده اضافه می‌شود تا به لحاظ ریاضی جواب یکتا برای معادلات انتگرالی بدست آید.

میدان تنش دارای تکینگی با توان $0/5$ در نوک ترکهای احاطه شده می‌باشد [۷]. در نتیجه دانسیته نابجایی برای ترک های احاطه شده به صورت زیر لحاظ می‌گردد.

$$B_{zj}(t) = \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_1 \quad (25)$$

برای ترکهای لبه ای اگر نوک واقع در داخل محیط با $t = -1$ مشخص شود در اینصورت با توجه به رفتار تکین دانسیته نابجایی در این نوک می‌توان نوشت :

$$B_{zj}(t) = g_{zj}(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2 \quad (26)$$

با توجه به مدلسازی حفره ها به صورت ترکهای بسته که در آنها تنشها و به عبارت دیگر دانسیته نابجایی در نوک ترکها تکین نمی باشد می توان نتیجه گرفت :

$$B_{zj}(t) = g_{zj}(t) \sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad j = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, \dots, N \quad (27)$$

۵- حل عددی معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی

مسئله تحلیل تنش در محیطهای حاوی چندین ترک و حفره منجر به حل معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی برای یافتن دانسیته نابجایی بر روی ترکها و حفره ها می گردد.

در این مقاله از یک حل عددی بهبود یافته برای حل معادلات انتگرالی تکین برای محیطهایی که همزمان توسط ترکهای احاطه شده، ترکهای لبه ای و حفره ها تضعیف شده است استفاده می شود که در [۳۰] ارائه گردیده است.

معادلات انتگرالی تکین برای محیطی که شامل تعداد N_1 ترک احاطه شده، N_2 ترک لبه ای و N_3 حفره است با توابع وزنی (۲۵-۲۷) به همراه معادلات (۲۳ و ۲۴) می بایستی تواما حل گردند تا به لحاظ ریاضی جواب یکتا بدست آید و به لحاظ فیزیکی تابع تغییر مکان در محیط خارج حفره ها تک مقداری بوده و باز شدگی دهانه ترکها درونکهای ترکهای احاطه شده صفر گردند. بر اساس روش عددی ارائه شده در [۳۰] معادلات انتگرالی گسسته شده و یک سیستم معادلات جبری خطی $N \times n$ بر حسب دانسیته نابجایی بدست می آید که شکل ماتریسی این معادلات عبارتند از :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{z1}(t_p) \\ g_{z2}(t_p) \\ \vdots \\ g_{zN}(t_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(s_r) \\ q_2(s_r) \\ \vdots \\ q_N(s_r) \end{bmatrix} \quad (28)$$

که

$$t_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$s_r = \cos\left(\pi \frac{r}{n}\right), \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \quad (29)$$

و در آن مولفه های ماتریسها و بردارها عبارتند از :

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} A_{j1}K_{ij}(s_1, t_1)\Delta_j(t_1) & \cdots & A_{jn-1}K_{ij}(s_1, t_{n-1})\Delta_j(t_n) & A_{jn}K_{ij}(s_1, t_n)\Delta_j(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{j1}K_{ij}(s_{n-1}, t_1)\Delta_j(t_1) & \cdots & A_{jn-1}K_{ij}(s_{n-1}, t_{n-1})\Delta_j(t_n) & A_{jn}K_{ij}(s_n, t_n)\Delta_j(t_n) \\ A_{j1}B_{ij}(t_1) & \cdots & A_{jn-1}B_{ij}(t_{n-1}) & A_{jn}B_{ij}(t_n) \end{bmatrix}$$

$$g_{zj}(t_p) = [g_{zj}(t_1) \quad g_{zj}(t_2) \quad \cdots \quad g_{zj}(t_n)]^T, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$q_i(s_r) = [\tau_{nz}(\alpha_i(s_1), \beta_i(s_1)) \quad \cdots \quad \tau_{nz}(\alpha_i(s_{n-1}), \beta_i(s_{n-1})) \quad 0]^T, \quad i = 1, \dots, N_1$$

$$q_i(s_r) = [\tau_{nz}(\alpha_i(s_1), \beta_i(s_1)) \quad \cdots \quad \tau_{nz}(\alpha_i(s_{n-1}), \beta_i(s_{n-1})) \quad \tau_{nz}(\alpha_i(1), \beta_i(1))]^T$$

$$i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2$$

$$q_i(s_r) = [\tau_{nz}(\alpha_i(s_1), \beta_i(s_1)) \quad \cdots \quad \tau_{nz}(\alpha_i(s_{n-1}), \beta_i(s_{n-1})) \quad 0]^T, \quad (30)$$

$$i = N_1 + N_2 + 1, \dots, N$$

که علامت T بالای بردار نمایش ترانهاده یک بردار و $\Delta_j(t) = \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)}$ است و A_{jk} و $B_{ij}(t)$ عبارتند از

$$A_{jk} = \frac{\pi}{n} \begin{cases} 1 & j = 1, \dots, N_1 \\ 1 - t_k & j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 \\ 1 - t_k^2 & j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N \end{cases}$$

$$B_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{ij} \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} & i = 1, \dots, N_1 \\ K_{ij}(1, t) \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} & i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 \\ \delta_{ij} \sqrt{\alpha_j'^2(t) + \beta_j'^2(t)} & i = N_1 + N_2 + 1, \dots, N \end{cases} \quad (31)$$

که δ_{ij} در $B_{ij}(t)$ دلتای کرونکر است. باحل دستگاه معادلات خطی (۲۸) دانسیته نابجایی بر روی وجوه ترکهای احاطه شده در محیط و ترکهای لبه ای و مرز حفره ها بدست می آیند.

ضریب شدت تنش برای I-امین ترک در ماده غیرهمگن برحسب دانسیته نابجایی عبارتست از [۲۰]

$$(k_{III})_{Li} = \frac{\mu(y_{Li})}{2} \left([\alpha_i'(-1)]^2 + [\beta_i'(-1)]^2 \right)^{\frac{1}{4}} g_{zi}(-1)$$

$$(k_{III})_{Ri} = -\frac{\mu(y_{Ri})}{2} \left([\alpha_i'(1)]^2 + [\beta_i'(1)]^2 \right)^{\frac{1}{4}} g_{zi}(1), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (32)$$

و ضرایب شدت تنش برای ترک لبه ای عبارت است از [۳۰]

$$(k_{III})_{Li} = \mu(y_{Li}) \left([\alpha_i'(-1)]^2 + [\beta_i'(-1)]^2 \right)^{\frac{1}{4}} g_{zi}(-1), \quad i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2 \quad (33)$$

پارامتر دیگری که در تحلیل تنش مورد استفاده قرار می گیرد تنش محیطی در پیرامون حفره ها است. با استفاده از تعریف دانسیته نابجایی و قانون هوک، تنش برشی محیطی به صورت زیر بدست می آید. [۳۰]

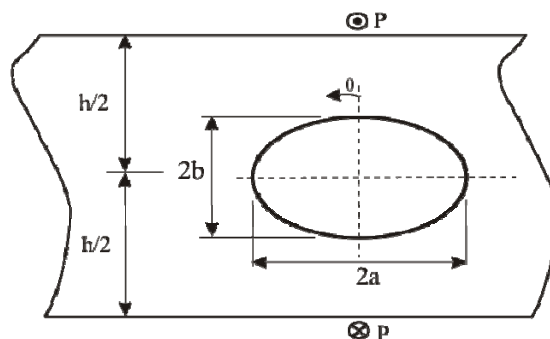
$$\tau_{tz}(\alpha_i(s), \beta_i(s)) = \mu(\beta_i(s))g_{zj}(s)\sqrt{1-s^2}, \quad -1 \leq s \leq 1, \quad i = N_1 + N_2 + 1, \dots, N \quad (34)$$

نتایج بدست آمده از حل معادله (۲۸) در (۳۲ و ۳۳) قرار داده تا ضرایب شدت تنش برای ترک ها و با جایگذاری در (۳۴) مقادیر تنش محیطی بر روی حفره ها بدست می آید.

۶- نتایج عددی

در این بخش چهار مثال برای باریکه که توسط تعدادی ترک و حفره تضعیف شده حل می شود تا قابلیت روش توزیع نابجایی نشان داده شود. بکمک روش عددی ذکر شده برای حل معادلات انتگرالی تکین کوشی دانسیته نابجایی بر روی وجوه ترکها و مرز حفره ها بدست آمده و ضریب شدت تنش برای ترک ها و تنش محیطی برای مرز حفره ها محاسبه می شود. در همه مثال ها خواص ماده هدفمند به سه صورت $\lambda = 0, 0.5, 1$ انتخاب شده است که در حالت $\lambda = 0$ ماده هدفمند تبدیل به ماده ایزوتروپیک همگن می شود و بعضی از نتایج قابل مقایسه با مقاله [۳۰] خواهد بود و همچنین در تمام مثال ها باریکه تحت نیروی متمرکز P روی لبه های آن قرار دارد. ضخامت باریکه در تمام مثال ها برای سادگی $h = 1$ فرض شده است

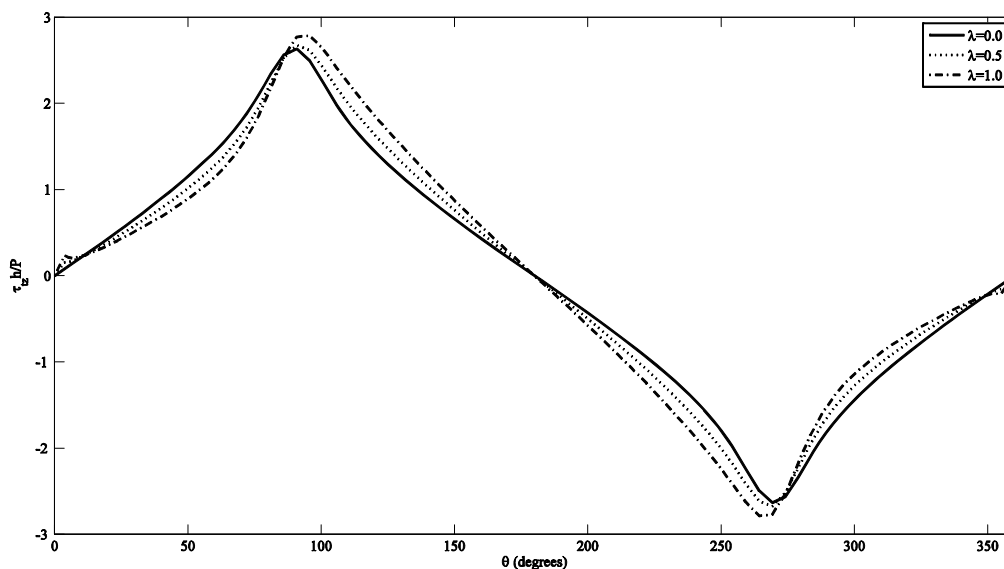
الف) یک حفره بیضی شکل



شکل ۴- نمایش حفره بیضی شکل در باریکه

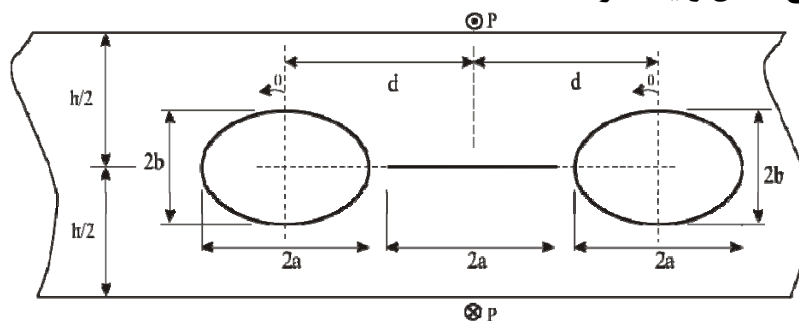
در این مثال اثر ثابت هدفمند λ بر روی ضریب تمرکز تنش بررسی شده است. باریکه تحت نیروی متمرکز P روی لبه های آن قرار دارد. حفره بیضی شکل با نصف طول اقطار اصلی و فرعی $a = 2b = h/4$ است درحالیکه مرکز حفره روی خط مرکزی باریکه است. تغییرات تنش محیطی بی بعد شده بر حسب زاویه نسبت به خط قطر فرعی بیضی برای حالت باریکه از جنس ایزوتروپیک $\lambda = 0$ و باریکه از جنس ماده هدفمند $\lambda = 0.5, 1.0$ در شکل (۵) رسم شده است. با توجه به تقارن مسأله نسبت به محور عمود بر مرز های باریکه و عبوری از مرکز بیضی مقادیر تنش محیطی روی محور تقارن صفر است و ماکزیمم آن در راستای محور y محل ماکزیمم تنش محیطی نسبت به خط مرکزی باریکه پایین آمده است و به سمت

نقاطی که مدول برشی کوچکتری نسبت به لبه بالایی باریکه دارند میل می کند.



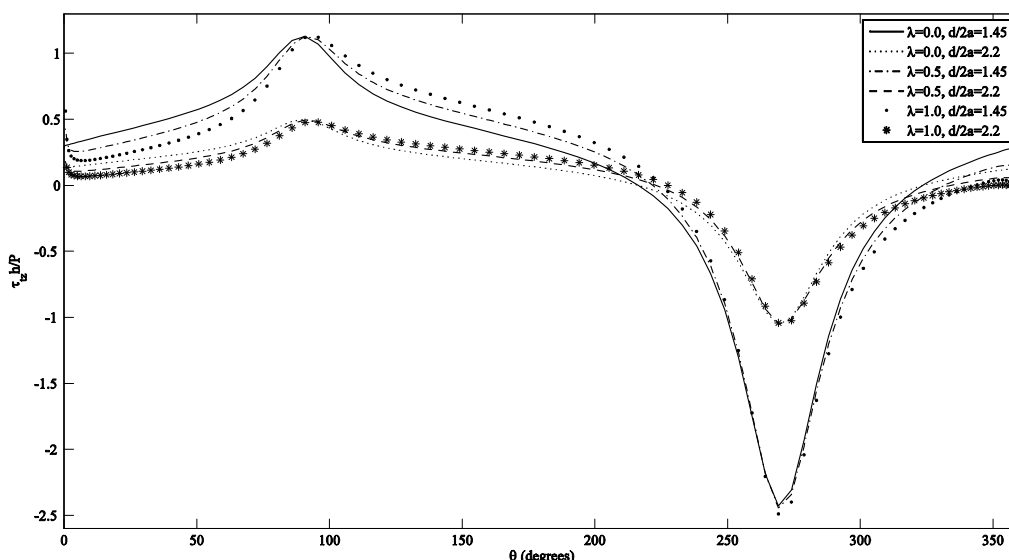
شکل ۵- تنش محیطی بی بعد شده در نقاط مختلف مرز حفره بیضی شکل بر حسب زاویه θ

(ب) دو حفره بیضی شکل و یک ترک



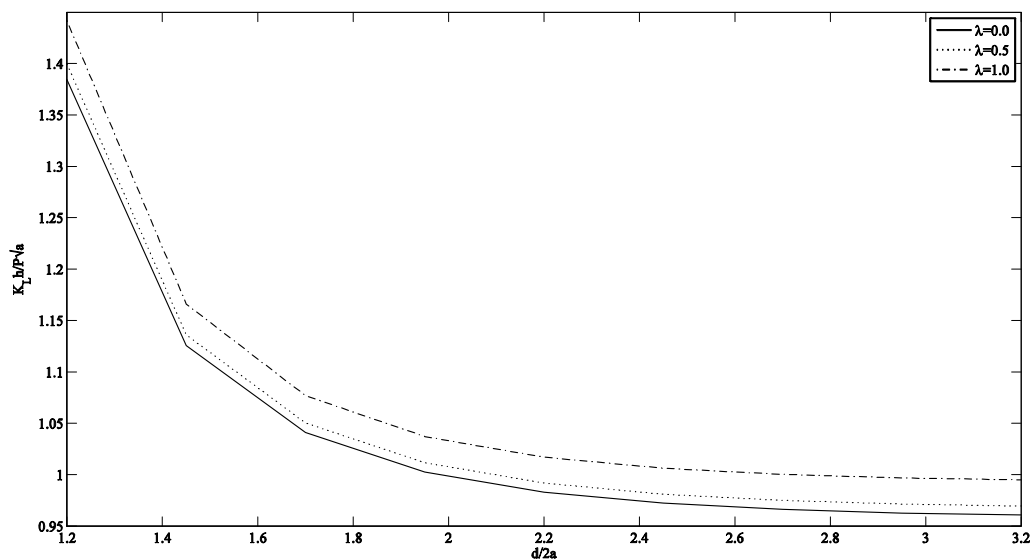
شکل ۶- نمایش دو حفره بیضی شکل و یک ترک در باریکه

باریکه تضعیف شده توسط دو حفره بیضی شکل با نصف اقطار $a = 2b = h/6$ و یک ترک مستقیم به طول $2a = h/3$ مطابق شکل (۶) در نظر گرفته می شود که فاصله مراکز حفره ها تا مرکز ترک d متغیر می باشد. بار گذاری بصورت بار نقطه ای P روی لبه بالایی و پایینی باریکه می باشد. نمودار شکل (۷) مقادیر تنش برشی محیطی بی بعد شده حفره سمت چپ، $\tau_{xz} h/P$ بر حسب زاویه θ نشان می دهد. با کم شدن فاصله بین حفره و نوک ترک اندرکنش ترک و حفره ها افزایش یافته و در نتیجه مقادیر تنش محیطی هم زیاد شده است و همچنین با افزایش λ مقادیر تنش ماکزیمم افزایش یافته ولی در نقاط ماکزیمم افزایش زیادی مشاهده نمی شود.



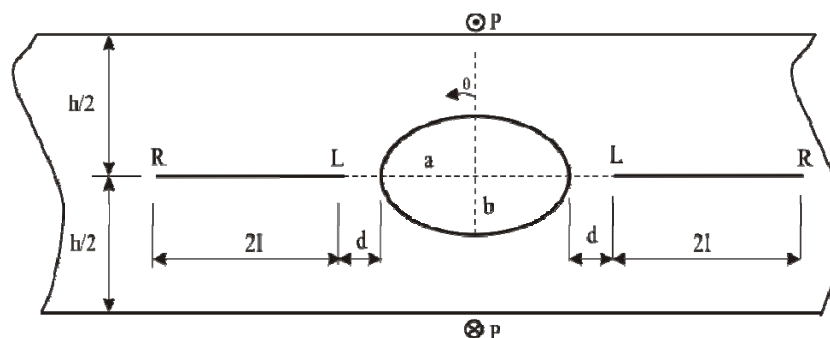
شکل ۷- تنش محیطی بی بعد شده در نقاط مختلف مرز حفره سمت چپ بر حسب زاویه θ

مقادیر ضرایب شدت تنش بر حسب $d/2a$ در شکل (۸) مشاهده می شود. به علت تقارن مسأله ضرایب شدت تنش هر دو نوک ترک یکسان است. با نزدیک شدن حفره ها به یکدیگر تاثیر متقابل آنها زیاد شده و مقادیر ضرایب شدت تنش در نوک ترک افزایش می یابند. همچنین با افزایش λ ضرایب شدت تنش هم افزایش می یابد.



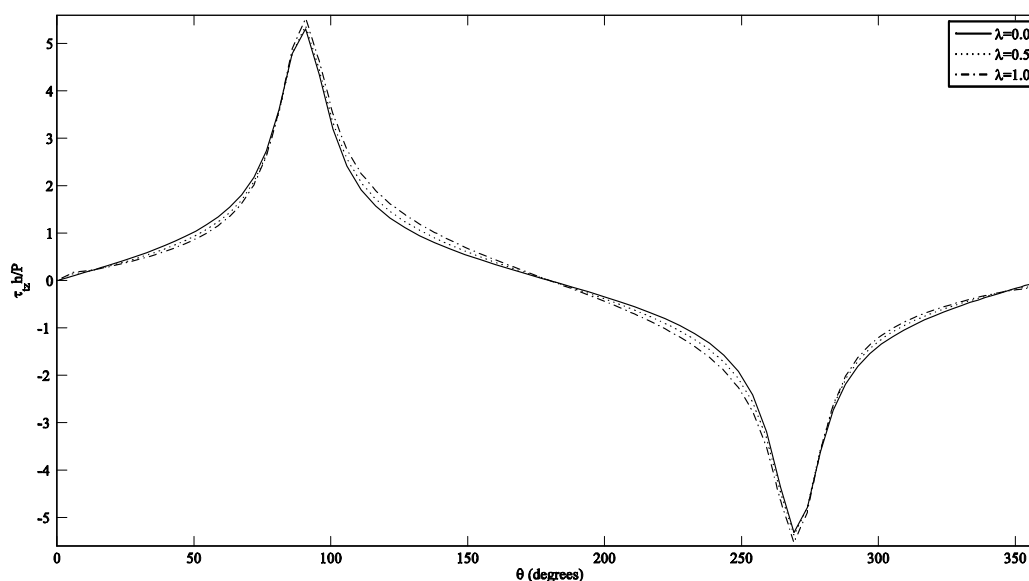
شکل ۸- مقادیر ضرایب شدت تنش ترک بر حسب $d / 2a$

ج) باریکه تضعیف شده توسط دو ترک و یک حفره بیضی شکل

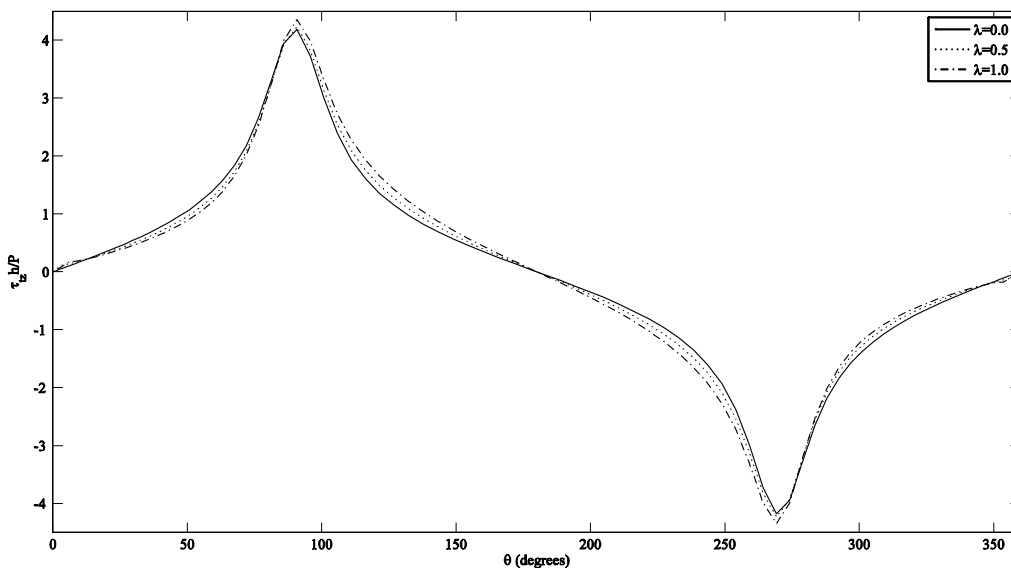


شکل ۹- نمایش یک حفره بیضی شکل و دو ترک در باریکه

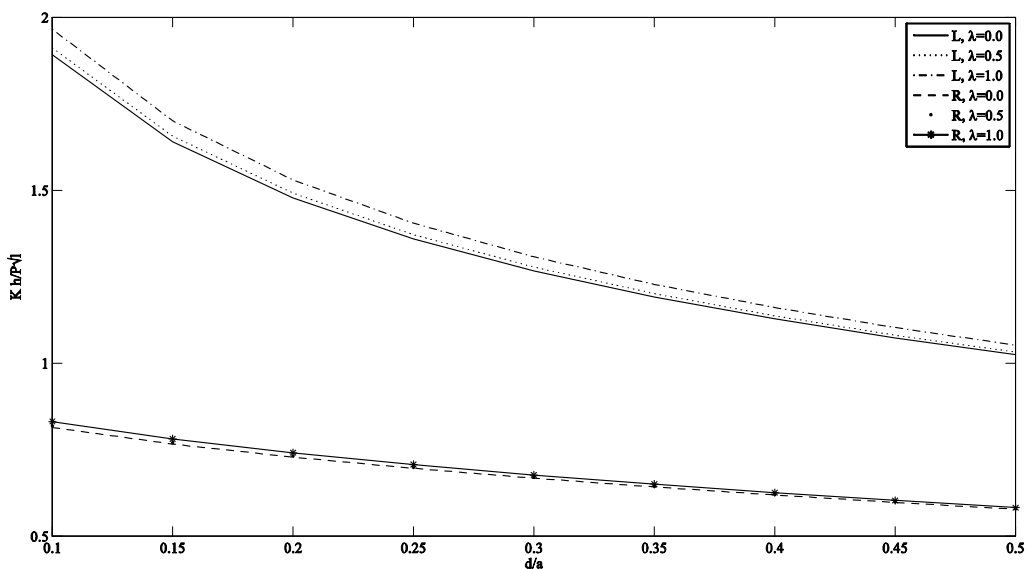
باریکه تضعیف شده توسط یک حفره بیضی شکل با نصف طول اقطار $a = 2b = h/6$ و دو ترک مستقیم موازی مرز که روی خط مرکزی قرار دارد به طول $2l = h/3$ مطابق شکل (۹) در نظر گرفته می شود. بار گذاری بصورت نقطه ای روی لبه بالایی و پایینی باریکه است که اندازه آن P است. نمودار شکل (۱۰) و (۱۱) مقادیر تنش محیطی بی بعد شده را بر حسب زاویه θ برای حفره بیضی بترتیب در دو موقعیت $d/a = 0.35$ و $d/a = 0.2$ شکل نشان می دهد. با نزدیک شدن ترک ها به حفره ها اندرکنش زیاد شده و تنش ماکزیمم هم افزایش می یابد و با افزایش λ مقادیر تنش هم افزایش می یابد. مقادیر ضرائب شدت تنش در نوکهای ترک در نمودار شکل (۱۲) رسم شده است. همانطور که مشاهده می گردد با دور شدن ترکها تاثیر متقابل آنها بر یکدیگر کم شده و ضرائب شدت تنش کاهش می یابد. همچنین نوک L نسبت به نوک R به حفره و محل اثر بارگذاری نزدیک تر است در نتیجه ضرائب شدت تنش آن هم بزرگتر است. و همچنین شبیه موارد قبلی با افزایش λ مقادیر تنش هم افزایش می یابد. در حالت $\lambda = 0$ نتایج بدست آمده با مقاله [۳۰] تطابق خوبی دارد.



شکل ۱۰- تنش محیطی بی بعد شده در نقاط مختلف مرز حفره بر حسب زاویه θ برای $d/a = 0.2$

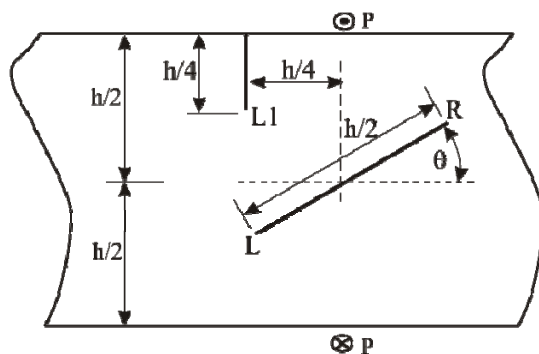


شکل ۱۱- تنش محیطی بی بعد شده در نقاط مختلف مرز حفره برحسب زاویه θ برای $d/a = 0.35$



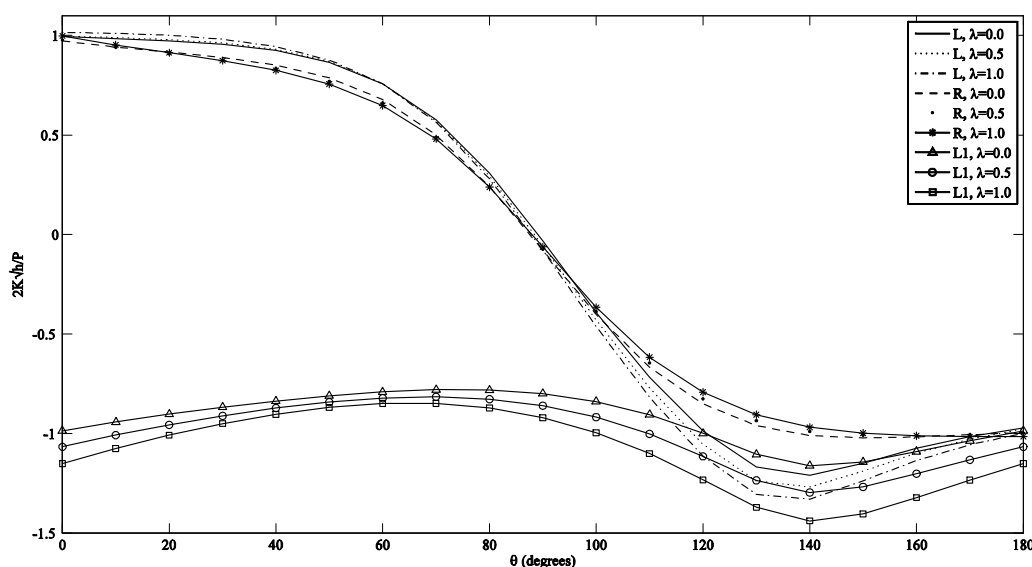
شکل ۱۲- ضرایب شدت تنش برای نوکهای ترک

(د) باریکه حاوی یک ترک چرخان و یک ترک لبه ای



شکل ۱۳- نمایش یک ترک چرخان و یک ترک لبه ای در باریکه

باریکه‌ای حاوی یک ترک و یک ترک لبه ای مطابق شکل (۱۳) در نظر بگیرید که مرکز ترک روی خط مرکزی باریکه قرار دارد در حالیکه راستای آن نسبت به خط مرکزی تغییر می کند و ترک لبه ای عمود بر مرز بالایی باریکه است. مقادیر ضرایب شدت تنش برای نوک ترک ها و ترک لبه ای در شکل (۴۳) رسم شده است. با افزایش θ نوک L از $L1$ دور شده و به محل بارگذاری نزدیک می شود و همین طور نوک R به $L1$ و محل اثر بارگذاری نزدیک می شود در حالیکه در اثر چرخیدن ترک بردار تنش روی سطح ترک کاهش می یابد به گونه ای که در زاویه $\theta = 90^\circ$ صفر شده در نتیجه ضریب شدت تنش دو نوک ترک احاطه شده نزدیک صفر می شود. بعد از $\theta = 90^\circ$ نوک R به $L1$ نزدیک شده و باعث افزایش اندرکنش ترک ها می شود که ضریب شدت تنش افزایش می یابد ولی با علامت منفی. در $\theta = 135^\circ$ نزدیک ترین فاصله بدست می آید که ضرایب شدت تنش برای ترک لبه ای و احاطه شده ماکزیمم مقدار خود را بدست می آورند.



شکل ۱۴- ضرایب شدت تنش برای نوکهای ترک برحسب θ

۷- نتیجه گیری

روشهای متعددی برای تحلیل تنش در محیطهای تضعیف شده توسط مجموعه ای از ترکها و حفره ها مورد استفاده قرار می گیرند. از جمله این روشها می توان به روش توابع تنش مختلط، استفاده از تبدیلات انتگرالی و روش توزیع نابجایی اشاره نمود که در این مقاله تحلیل تنش در باریکه‌ای از جنس ماده هدفمند تضعیف شده توسط تعدادی ترک و حفره تحت تغییرشکل پادصفحه‌ای با استفاده از حل نابجایی انجام شد. از حل نابجایی بدست آمده برای تحلیل تنش محیطهای دارای ترک و حفره استفاده شد که در مورد حفره نشان داده شد که حفره را می توان یک ترک بسته ولی بدون تکینگی در نظر گرفت و با اعمال شرایط مناسب، تنش محیطی را روی آن بدست آورد بنابراین مزیت این روش اینست که به سادگی می تواند برای محیطهای حاوی ترک و حفره تواما بکار رود و هندسه ترکها و حفره به شرط هموار بودن شکل آنها در روش حل مطرح

نمی باشد. مجموعه مسائل حل شده در این طرح شامل مسئله تحلیل تنش در اثر بار پادصفحه ای در باریکه که توسط چندین ترک یا حفره تضعیف شده اند تحت اثر بار متمرکز روی لبه های بالایی و پایینی باریکه می باشد. برای مطالعه برهم کنش بین ترک ها و حفره ها و همچنین بررسی اثر راستای ترک ها، ضریب شدت تنش و مقدار تنش محیطی برای چهار مثال بدست آمده است. در میان دیگر یافته ها، مشاهده می شود که برای حفره ها و ترک ها در ماده هدفمند ضریب شدت تنش و تنش محیطی در اثر ازدیاد مدول برشی ماده افزایش می یابد.

مراجع

- [1] Nino, M., and Maeda, S., "Recent Development Status of Functionally Gradient Materials", I. S. I. J. International (Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan), Vol. 30, pp. 699-703, (1990).
- [2] Gibson, R. E., "Some Results Concerning Displacements and Stresses in a Non-homogeneous Elastic Half-space", Geotechnique, Vol. 17, pp. 58-67, (1967).
- [3] Kassir, M. K., and Sih, G. C., "Three Dimensional Crack Problems: a New Selection of Crack Solutions in Three-dimensional Elasticity", Noordhoff International Publishing, Leyden, (1975).
- [4] Kassir, M. K., "Boussinesq Problems for a Nonhomogeneous Solid", Proc. ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 98, pp. 457-470, (1972).
- [5] Dhaliwal, R. S., and Singh, B. M., "On the Theory of Elasticity of a Nonhomogeneous Medium, Journal of Elasticity", Vol. 8, No. 2, pp. 211-219, (1978).
- [6] Singh, B. M., and Dhaliwal, R. S., "Asymmetric Problem of a Griffith Crack in a Nonhomogeneous Medium under Shear", Journal of Elasticity, Vol. 8, No. 3, pp. 313-318, (1978).
- [7] Erdogan, F., "The Crack Problem for Bonded Nonhomogeneous Materials under Antiplane Shear Loading", Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 823-828, (1985).
- [8] Delale, F., "Mode-III Fracture of Bonded Nonhomogeneous Materials", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 22, No. 2, pp. 213-226, (1985).
- [9] Erdogan, F., Kaya, A. C., and Joseph, P. F., "The Mode III Crack Problem in Bonded Materials with a Nonhomogeneous Interfacial Zone", Trans. of the ASME J. Appl. Mech., Vol. 58, pp. 419-427, (1991).
- [10] Erdogan, F., and Ozturk, M., "Periodic Cracking of Functionally Graded Coatings, International Journal Engineering Sciences", Vol. 33, No. 15, pp. 2179-2195, (1995).
- [11] Erdogan, F., "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials", Composites Engineering, Vol. 5, No. 7, pp. 753-770, (1995).

- [12] Erdogan, F., "Fracture Mechanics of Graded Materials", In: Proc. Functionally Graded Materials 1996, Editors: I. Shiota and M. Y. Miyamoto, pp. 105-112, (1996).
- [13] Xuyue, W., Duo, W., and Zhenzhu, Z., "On the Griffith Crack in a Nonhomogeneous Interlayer of Adjoining Two Different Elastic Materials", International Journal of Fracture, Vol. 79, R51-R56, (1996).
- [14] Ang, W. T., Clements, D. L., and Cooke, T., "A Hypersingular Boundary Integral Equation for a Class of Antiplane Multiple Crack Problems for Inhomogeneous Elastic Materials", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 183-191, (1999).
- [15] Chan, Y. S., Paulino, G. H., and Fannjiang, A. C., "The Crack Problem for Nonhomogeneous Materials under Anti-plane Shear Loading- A Displacement Based Formulation", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 2989-3005, (2001).
- [16] Huang, G. Y., Wang, Y. S., and Gross, D., "Fracture Analysis of Functionally Graded Coatings: Antiplane Deformation", European Journal of Mechanics – A/Solids, Vol. 21, pp. 391-400, (2002).
- [17] Chung, Y. M., Kim, C., and Choi, H. J., "Anti-plane Shear Behavior of an Arbitrarily Oriented Crack in Bonded Materials with a Nonhomogeneous Interfacial Zone", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 17, No. 2, pp. 269-279, (2003).
- [18] Wang, Y.-S., Huang, G. Y., and Dross, D., "On the Mechanical Modeling of Functionally Graded Interfacial Zone with a Griffith Crack: Anti-plane Deformation", Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, pp. 676-680, (2003).
- [19] Wang, B. L., Mai, Y. W., and Sun, Y. G., "Anti-plane Fracture of a Functionally Graded Material Strip", European Journal of Mechanics – A/Solids, Vol. 22, pp. 357-368, (2003).
- [20] Fotuhi, A. R., and Fariborz, S. J., "Anti-plane Analysis of a Functionally Graded Strip with Multiple Cracks", International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 1239-1252, (2006).
- [21] Yong, H., and Zhou, Y.H., "Analysis of a Mode III Crack Problem in a Functionally Graded Coating-substrate System with Finite Thickness", International Journal of Fracture, Vol. 141, pp. 459-467, (2006).
- [22] Choi, H. J., "Stress Intensity Factors for an Oblique Edge Crack in a Coating/Substrate System with a Graded Interfacial Zone under Antiplane Shear", European Journal of Mechanics – A/Solids, Vol. 26, pp. 337-347, (2007).
- [23] Ma, L., and Wu, L.Z., "Mode III Crack Problem in a Functionally Graded Coating-Homogeneous Substrate Structure", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C-Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 222, pp. 329- , (2008).

- [24] Li, Y.D., Tan, W., and Lee, K. Y., “Stress Intensity Factor of an Anti-plane Crack Parallel to the Weak/Micro-discontinuous Interface in a Bi-FGM Composite”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 21, No. 1, pp. 34-43, (2008).
- [25] Chen, Y.J., and Chue, C.H., “Mode III Crack Problems of Two Bonded Functionally Graded Strips with Internal Cracks”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 331-343, (2009).
- [26] Yang, Y.H., “Multiple Parallel Symmetric Mode-III Cracks in a Functionally Graded Material Plane”, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol. 3, No. 5, pp. 819-830, (2009).
- [27] Chen, Y. Z., Lin, X. Y., and Wang, Z. X., “Antiplane Elasticity Crack Problem for a Strip of Functionally Graded Materials with Mixed Boundary Condition”, *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 50-53, (2010).
- [28] Korsunsky, A. M., and Hills, D. A., “The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 210, No. 1, pp. 23-31, (1996).
- [29] Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N., and Korsunsky, A. M., “*Solution of Crack Problems: the Distributed Dislocation Technique*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1996).
- [30] Faal, R. T., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., “Antiplane Deformation of Orthotropic Strips with Multiple Defects”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, No. 7, pp. 1097-1114, (2006).
- [31] Abramowitz, M., and Stegun, I. A., “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover, New York, (1965).

فهرست نمادهای انگلیسی

- a: نصف قطر بزرگ بیضی
- b: نصف قطر کوچک بیضی
- b_z : مؤلفه بردار برگرز
- $B_{zj}(t)$: دانسیته نابجایی
- Ei: انتگرال نمایی
- $g_{zj}(t)$: ترم غیر تکین دانسیته نابجایی
- h: ضخامت باریکه
- H_{ij} : مؤلفه های ماتریس ضرایب
- i: پارامتر موهومی
- k_{jz}^l : ضرایب b_z در حل نابجایی

- K_{ij} : کرنل معادله انتگرالی
- $(k_{III})_{Li}$: ضریب شدت تنش نوک چپ ترک I-ام
- $(k_{III})_{Ri}$: ضریب شدت تنش نوک راست ترک I-ام
- I: نصف طول ترک
- M: ثابت دلخواه
- N_1 : تعداد ترک احاطه شده
- N_2 : تعداد ترک لبه ای
- N_3 : تعداد حفره
- N: تعداد کل ترک ها و حفره
- n: تعداد نقاط گسسته شده ترک
- P: نیروی متمرکز
- $q_i(s)$: مؤلفه های بردار بارگذاری روی ترک I-ام
- f: فاصله از موقعیت نابجایی
- Re: قسمت حقیقی
- S: متغیر تبدیل فوریه
- Sgn(x): تابع علامت
- T: نمایشگر ترانهاده
- W: تغییر مکان عمود بر صفحه
- W: تبدیل فوریه تغییر مکان
- X_0 : موقعیت نیروی متمرکز روی مرز
- α_i : تابع پارامتری معادله ترک منحنی I-ام
- β_i : تابع پارامتری معادله ترک منحنی I-ام
- δ : تابع ضربه دیراک
- δ_{ij} : دلتای کرونکر
- ξ : موقعیت نابجایی
- η : موقعیت نابجایی
- θ_i : زاویه بین محور X و t روی ترک I-ام
- λ : ثابت ماده
- μ : مدول برشی
- μ_0 : ثابت ماده
- τ_{xz}, τ_{yz} : مؤلفه های تنش
- τ_{tz} : تنش محیطی پیرامون حفره

Abstract

The solution of Volterra screw dislocations is utilized to formulate integral equations for a functionally graded strip weakened by multiple smooth cracks and/or cavities under anti-plane deformation. These equations are of Cauchy singular kind, which are solved numerically by generalizing a numerical method to determine stress intensity factors for cracks and hoop stress on the cavities. Furthermore, stress fields are derived in the medium under self-equilibrating anti-plane point forces. Several examples are solved to demonstrate the validity and the applicability of the procedure. Stress intensity factors and hoop stress are enhanced as the shear modulus of material increases.